



تحلیل پس کمانش پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت شده تحت بار فشاری خارجی و احاطه شده توسط بستر الاستیک

علیرضا شاطرزاده^{1*}، کامران فروتن²

1- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه شاهرود، شاهرود

2- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی هوافضا، دانشگاه شاهرود، شاهرود

* شاهرود، صندوق پستی 316، a_shaterzadeh@shahroodut.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 28 بهمن 1393

پذیرش: 01 اردیبهشت 1394

ارائه در سایت: 03 خرداد 1394

کلید واژگان:

پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی

آنالیز غیر خطی

پوسته استوانه‌ای تقویت شده

پس کمانش

چکیده

تحلیل دقیق و عددی پوسته‌های تقویت شده در صنعت گامی مؤثر در جهت طراحی این گونه پوسته‌ها می‌باشد. در این مقاله، تحلیل دقیق رفتار پس کمانش پوسته‌های استوانه‌ای مدور نازک مدرج تابعی تقویت شده که توسط محیط الاستیک احاطه شده و تحت فشار خارجی قرار دارند، ارائه شده است. محیط الاستیک بر حسب دو پارامتر بستر الاستیک مدل پیشنهادی وینکلر و پاسترناک فرض شده است. تقویت کننده‌های طولی و حلقوی، داخلی می‌باشند. خواص پوسته و تقویت کننده‌ها مدرج تابعی در نظر گرفته شده است. روابط اساسی و معادلات تعادل بر اساس تکنیک تقویت کننده‌های تکه‌ای و تئوری کلاسیک پوسته و با توجه به روابط غیرخطی فن کارمن، به دست آمده است. یک عبارت سه جمله‌ای شامل شکل پیش کمانش، کمانش خطی و کمانش غیرخطی برای تقریب خیز انتخاب شده است که با استفاده از روش گالرکین، بار بحرانی و منحنی خیز-فشار پس کمانش محاسبه شده است. تأثیر پارامترهای متفاوت ابعادی، مدهای کمانش، شاخص کسر حجمی ماده و تعداد تقویت کننده‌ها بررسی شده است. نتایج عددی نشان می‌دهد که تقویت کننده‌ها و بستر الاستیک باعث بالا بردن پایداری پوسته‌ها شده است. همچنین افزایش ضخامت پوسته، کاهش شاخص کسر حجمی، بالا بردن تعداد تقویت کننده‌های طولی و حلقوی و به کار بردن بستر الاستیک باعث افزایش بار بحرانی کمانش شده است.

Post-buckling analysis of eccentrically stiffened FGM cylindrical shells under external pressure and elastic foundation

Alireza Shaterzadeh*, Kamran Foroutan

Department of Mechanical Engineering, Shahrood University, Shahrood, Iran

* P.O.B. 316 Shahrood, Iran, a_shaterzadeh@shahroodut.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 17 February 2015
Accepted 21 April 2015
Available Online 24 May 2015

Keywords:
FGM cylindrical shell
Nonlinear analysis
Stiffened cylindrical shell
Post-buckling

ABSTRACT

Careful and numerical analysis eccentrically stiffened shells in the industry is a major step forward in the design of these shells. In this paper, a careful analysis of post-buckling behavior of eccentrically stiffened FGM thin circular cylindrical shells is surrounded by an elastic foundation and external pressure is presented. The two parameter elastic foundation based on Winkler and Pasternak elastic model is assumed. Stringer and ring stiffeners are internal. Shell properties and eccentrically stiffened are FGM. Fundamental relations and equilibrium equations are derived based on the smeared stiffeners technique and the classical theory of shells, and according to von-Karman nonlinear equations. The three-term approximation for the deflection shape, including the pre-buckling, linear buckling shape and nonlinear buckling shape was chosen so that by using the Galerkin method, the critical load and post-buckling pressure-deflection curves are calculated. The effects of different dimensional parameters, buckling modes, volume fraction index and number of stiffeners are investigated. Numerical results show that stiffeners and elastic foundation enhance the stability of the shells. Increasing the shell thickness, reducing the volume fraction index, increasing the number of Stringer and ring stiffeners and applying foundation elastic, causes the critical buckling load to be increase, too.

1- مقدمه

این ساختارها مورد توجه دانشمندان قرار گرفته است. در تحلیل استاتیکی بسیاری از مطالعات، کمانش و پس کمانش، ناشی از بارهای حرارتی و مکانیکی متمرکز است. در عمل به منظور تقویت سازه جهت تحمل بارهای اعمالی از تقویت کننده‌هایی² با وزن کم استفاده می شود. مطالعه بر روی

پوسته استوانه‌ای تقویت شده مدرج تابعی¹ در مهندسی مدرن، کاربرد بیشتری دارد. در بسیاری از برنامه‌های کاربردی، پوسته تحت بار فشاری است و ممکن است کمانش پیدا کند. بنابراین، تحقیق در مورد پایداری غیرخطی

2- Stiffeners

1- Functionally graded material

برای تکیه‌گاه لبه‌ای دلخواه را به دست آورده‌اند. تاجدار و همکارانش [13] به شبیه‌سازی و آنالیز پوسته‌های استوانه‌ای فولادی جدار نازک با ضخامت، طول و قطرهای مختلف دارای حفره مثلثی شکل که به صورت محوری تحت بار فشاری قرار گرفته‌اند، با استفاده از روش اجزای محدود و به کمک نرم‌افزار آباکوس پرداخته‌اند. بیچ و همکارانش [14] پس‌کمانش غیرخطی پوسته‌های کم عمق و ورق‌های مدرج تابعی با تقویت‌کننده‌های همگن را بررسی کرده‌اند. دانگ و نگا [15] کمانش غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی با تقویت‌کننده و بستر الاستیک تحت فشار خارجی را بررسی کرده‌اند. ایشان فقط از عبارت یک جمله‌ای شکل کمانش خطی برای بیان خیز استفاده نموده‌اند و علی‌رغم اینکه جنس پوسته از مواد مدرج تابعی می‌باشد، جنس تقویت‌کننده‌ها از مواد مدرج تابعی نمی‌باشد.

مروری بر مطالعات انجام‌شده نشان می‌دهد که در خصوص حل تحلیلی پس‌کمانش پوسته‌های استوانه‌ای تقویت‌شده مدرج تابعی بر روی بستر الاستیک با یک تقریب سه جمله‌ای برای خیز کاری انجام نشده است. در این مقاله، رفتار پس‌کمانش پوسته‌های استوانه‌ای با تقویت‌کننده از جنس مواد مدرج تابعی تحت فشار خارجی احاطه شده توسط بستر الاستیک بررسی شده است. معادلات غیرخطی با استفاده از تئوری کلاسیک پوسته و لحاظ کردن روابط کرنش جابه جایی غیرخطی تغییر شکل‌های بزرگ، تکنیک تقویت‌کننده‌های تکه‌ای¹³ و روش گالرکین به دست آمده‌است. هم‌چنین از سه جمله برای تخمین خیز شامل شکل پیش‌کمانش، کمانش خطی و کمانش غیر خطی استفاده شده است. پارامترهای متفاوت ابعادی، مدهای کمانش، بستر الاستیک، شاخص کسر حجمی ماده و تعداد تقویت‌کننده‌ها بر پایداری پوسته تأثیر می‌گذارد.

2- فرمول‌بندی مسأله

2-1- مشخصات قانون توانی¹⁴ مواد مدرج تابعی

در این مقاله مواد مدرج تابعی شامل فلز و سرامیک می‌باشد. با اعمال قانون توانی، کسر حجمی به صورت رابطه (1) می‌باشد [16]:

$$V_c = V_c(z) = \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^k \quad (1)$$

$$V_m = V_m(z) = 1 - V_c(z)$$

که h ضخامت پوسته؛ $k \geq 0$ شاخص کسر حجمی؛ z مختصات ضخامت که بین $-h/2$ و $h/2$ می‌باشد؛ زیرنویس c و m به ترتیب سرامیک و فلز را نشان می‌دهد.

مشخصه مؤثر (Pr_{eff}) پوسته مدرج تابعی بر اساس قانون ترکیب خطی به صورت رابطه (2) تعیین می‌شود [17]:

$$Pr_{eff} = Pr_m(z)V_m(z) + Pr_c(z)V_c(z) \quad (2)$$

بر طبق قانون ذکرشده، مدول یانگ برای پوسته و تقویت‌کننده‌ها به صورت رابطه (3) می‌باشد:

$$E_{sh} = E_m + (E_c - E_m) \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^k, \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}$$

$$E_s = E_c + (E_m - E_c) \left(\frac{2z-h}{2h_s} \right)^{k_2}, \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} + h_s$$

$$E_r = E_c + (E_m - E_c) \left(\frac{2z-h}{2h_r} \right)^{k_3}, \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} + h_r \quad (3)$$

رفتار غیرخطی این قبیل سازه‌ها از منظر عملی دارای اهمیت ویژه‌ای است. مواد مدرج تابعی اولین بار توسط گروهی از دانشمندان در ژاپن در سال 1984 بعنوان مواد تحمل‌کننده دما معرفی شدند. ماده مدرج تابعی، ماده‌ای است که از دو یا چند جزء تشکیل شده و خواص آن به طور پیوسته با مکان تغییر می‌کند. این خاصیت با تغییر تدریجی ترکیب و درصد حجمی اجزای تشکیل‌دهنده ماده در طی ساخت آن، به وجود می‌آید. لذا این مواد در زمره مواد غیر همگن¹ هستند. مواد مدرج تابعی دارای مقاومت مکانیکی، مقاومت حرارتی، مقاومت در برابر خوردگی و سایش، مقاومت در برابر خزش و خستگی می‌باشند و در صنایع هوافضا، نفت و گاز، خودروسازی مورد توجه ویژه قرار می‌گیرند.

ون‌درنیوت [1] اهمیت تقویت‌کننده‌ها را بر کمانش پوسته استوانه‌ای ایزوتروپ تحت فشار محوری نشان داده است. باروچ و سینگر [2] تأثیر تقویت‌کننده‌ها را بر ناپایداری عمومی پوسته‌های استوانه‌ای تقویت‌شده تحت فشار هیدرواستاتیک² نشان داده‌اند. آن‌ها یافتند که رفتار تقویت‌کننده‌ها به شدت به هندسه پوسته وابسته است. شن و همکارانش [3] رفتار کمانش و پس‌کمانش پوسته استوانه‌ای تقویت‌شده کامل و ناقص تحت فشار خارجی و فشار محوری با استفاده از تئوری لایه مرزی³ پرداخته‌اند. آن‌ها از تکنیک اغتشاشات⁴ برای محاسبه بار کمانش و منحنی پس‌کمانش استفاده کرده‌اند. بوشنل [4] به بررسی تعادل غیرخطی پنل‌ها با تقویت‌کننده‌های طولی تحت بارهای درون‌صفحه‌ای⁵ پرداخته است. باقری زاده و همکارانش [5] به بررسی کمانش مکانیکی پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی شامل بستر الاستیک پاسترناک پرداخته‌اند. بر اساس معادلات دانل⁶ و تکنیک اغتشاشات، یک حل عمومی برای کمانش غیرخطی حلقه‌های متقارن محوری⁷ و پوسته‌های استوانه‌ای با تقویت‌کننده طولی و حلقوی ناهمگن توسط جی و یه [6] ارائه شده است. گل‌مکانی و امامی [7] به تحلیل غیرخطی خمش و کمانش صفحات حلقوی از جنس مواد تابعی تحت بار مکانیکی، به کمک روش رهایی پویا پرداخته‌اند. قاسمی و همکارانش [8] با استفاده از روش معادل‌سازی، کمانش پوسته‌های استوانه‌ای با تقویت‌کننده‌های مشبک لوزی تحت بار محوری را بررسی نموده‌اند. جیانگ و همکارانش [9] به مطالعه کمانش پنل‌های استوانه‌ای مدور تقویت‌شده تحت فشار محوری یکنواخت با استفاده از روش المان دیفرانسیلی مرتبه دوم پرداخته‌اند. لی و شن [10] به تحلیل سه بعدی پس‌کمانش پوسته‌های استوانه‌ای مرکب⁸ تحت فشار خارجی و فشار محوری در محیط حرارتی پرداخته‌اند. آن‌ها با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالای پوسته و تکنیک اغتشاشات به محاسبه بارهای کمانش و منحنی پس‌کمانش پرداخته‌اند. صادقی‌فر و همکارانش [11] کمانش پوسته‌های استوانه‌ای لایه‌ای با تقویت‌کننده طولی غیر یکنواخت بر اساس تئوری تغییر شکل مرتبه اول لاو⁹ را بررسی کرده‌اند. بارهای بحرانی با استفاده از روش ریلی ریتز¹⁰ محاسبه شده است. استاماتلس و همکارانش [12] نتایج رفتار کمانش و پس‌کمانش پنل‌های تقویت‌شده ارتوتروپیک¹¹ و ایزوتروپیک بر اساس تئوری کلاسیک صفحه لمینت¹² و تابع جابه‌جایی دو بعدی ریتز

- 1- Non-Homogeneous
- 2- hydrostatic pressure
- 3- boundary layer theory
- 4- perturbation technique
- 5- in-plane loads
- 6- Donnell equations
- 7- axial symmetric
- 8- composite
- 9- Love's first-order shear deformation theory
- 10- Rayleigh-Ritz method
- 11- orthotropic
- 12- classical lamination plate theory

13- Smeared stiffeners technique
14- Power law

کننده‌های حلقوی و طولی می‌باشد. در این مقاله تقویت‌کننده‌های حلقوی و طولی را مدرج تابعی در نظر می‌گیریم. برای لحاظ کردن اثر تقویت-کننده‌ها بر پوسته از تکنیک تقویت‌کننده‌های تکه‌ای استفاده می‌کنیم. از اثرات پیچشی تقویت‌کننده‌ها به دلیل کوچکی صرف‌نظر می‌شود. با یکپارچه‌سازی معادلات تنش-کرنش و محاسبه نیروها و ممان‌های منته‌جه برای پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی با تقویت‌کننده روابط (9) و (10) را خواهیم داشت [21-20]:

$$\begin{aligned} N_x &= \left(A_{11} + \frac{E_{1s}d_s}{S_s} \right) \varepsilon_x^0 + A_{12}\varepsilon_y^0 - \left(B_{11} + \frac{E_{2s}d_s}{S_s} \right) \chi_x - B_{12}\chi_y \\ N_y &= A_{12}\varepsilon_x^0 + \left(A_{22} + \frac{E_{1r}d_r}{S_r} \right) \varepsilon_y^0 - B_{12}\chi_x - \left(B_{22} + \frac{E_{2r}d_r}{S_r} \right) \chi_y \\ N_{xy} &= A_{66}\gamma_{xy}^0 - 2B_{66}\chi_{xy} \\ M_x &= \left(B_{11} + \frac{E_{2s}d_s}{S_s} \right) \varepsilon_x^0 + B_{12}\varepsilon_y^0 - \left(D_{11} + \frac{E_{3s}d_s}{S_s} \right) \chi_x - D_{12}\chi_y \\ M_y &= B_{12}\varepsilon_x^0 + \left(B_{22} + \frac{E_{2r}d_r}{S_r} \right) \varepsilon_y^0 - D_{12}\chi_x - \left(D_{22} + \frac{E_{3r}d_r}{S_r} \right) \chi_y \\ M_{xy} &= B_{66}\gamma_{xy}^0 - 2D_{66}\chi_{xy} \end{aligned} \quad (9)$$

که A_{ij} ، B_{ij} ، D_{ij} به ترتیب سفتی کششی، کششی-خمشی و خمشی برای پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی بدون تقویت‌کننده می‌باشد که مقدار آن‌ها در رابطه (11) آورده شده است. N_x ، N_y و N_{xy} به ترتیب نیروهای نرمال و نیروهای برشی در صفحه می‌باشند. M_x ، M_y و M_{xy} نیز به ترتیب گشتاور خمشی و گشتاور پیچشی صفحه‌ای می‌باشند.

$$\begin{aligned} A_{11} &= A_{22} = \frac{E_1}{1-\nu^2}, \quad A_{12} = \frac{E_1\nu}{1-\nu^2}, \quad A_{66} = \frac{E_1}{2(1+\nu)} \\ B_{11} &= B_{22} = \frac{E_2}{1-\nu^2}, \quad B_{12} = \frac{E_2\nu}{1-\nu^2}, \quad B_{66} = \frac{E_2}{2(1+\nu)} \\ D_{11} &= D_{22} = \frac{E_3}{1-\nu^2}, \quad D_{12} = \frac{E_3\nu}{1-\nu^2}, \quad D_{66} = \frac{E_3}{2(1+\nu)} \end{aligned} \quad (11)$$

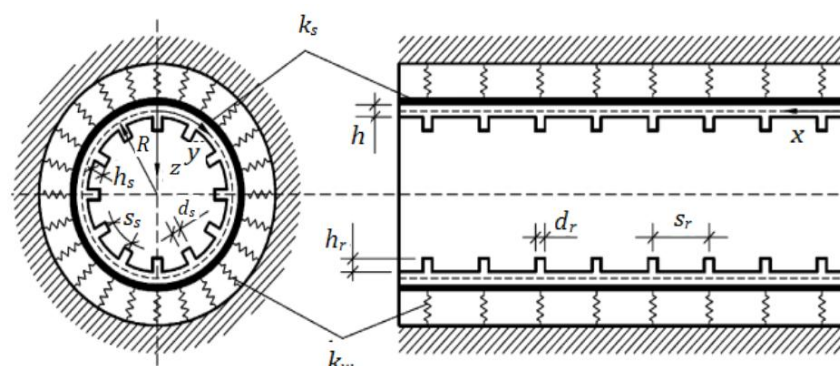
مطابق مرجع [18] روابط مدول یانگ برای پوسته و تقویت‌کننده‌ها به صورت رابطه (12) می‌باشد:

$$\begin{aligned} E_1 &= \left(E_{ou} + \frac{E_{in} - E_{ou}}{k+1} \right) h, \quad E_2 = \frac{(E_{in} - E_{ou})kh^2}{2(k+1)(k+2)} \\ E_3 &= \left[\frac{E_{ou}}{12} + (E_{in} - E_{ou}) \left(\frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+2} + \frac{1}{4k+4} \right) \right] h^3 \\ E_{1s} &= \int_{-h/2}^{h/2+h_s} E_s(z) dz, \quad E_{2s} = \int_{-h/2}^{h/2+h_s} z E_s(z) dz \\ E_{3s} &= \int_{-h/2}^{h/2+h_s} z^2 E_s(z) dz, \quad E_{1r} = \int_{-h/2}^{h/2+h_r} E_r(z) dz \\ E_{2r} &= \int_{-h/2}^{h/2+h_r} z E_r(z) dz, \quad E_{3r} = \int_{-h/2}^{h/2+h_r} z^2 E_r(z) dz \end{aligned} \quad (12)$$

که S_s و S_r به ترتیب فاصله طولی و عرضی تقویت‌کننده می‌باشد. d_s ، d_r و h_r به ترتیب عرض و ضخامت طولی و حلقوی می‌باشد.

از روابط (9) می‌توان کرنش‌ها را بر حسب نیروهای منته‌جه بازنویسی کرده و به صورت رابطه (13) نشان داد:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^0 &= A_{22}^* N_x - A_{12}^* N_y + B_{11}^* \chi_x + B_{12}^* \chi_y \\ \varepsilon_y^0 &= A_{11}^* N_y - A_{12}^* N_x + B_{21}^* \chi_x + B_{22}^* \chi_y \end{aligned} \quad (13)$$



شکل 1 پوسته استوانه‌ای تقویت‌شده در محیط الاستیک

که k ، k_2 ، k_3 به ترتیب شاخص کسر حجمی پوسته، تقویت‌کننده طولی و حلقوی را نشان می‌دهد. زیرنویس s ، r و sh به ترتیب بیانگر پوسته، تقویت‌کننده طولی و حلقوی می‌باشد.

یک پوسته نازک استوانه‌ای تابعی مدرج که توسط بستر الاستیک احاطه شده به طول (L) ، شعاع (R) را در نظر می‌گیریم. سیستم تقویت‌کننده‌های حلقوی و طولی مدرج تابعی می‌باشند (شکل 1). مختصات اصلی x ، y و z به ترتیب در راستای محوری، محیطی و شعاعی می‌باشد.

کرنش‌ها در سراسر ضخامت پوسته در فاصله z از سطح میانی به صورت رابطه (4) می‌باشند:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 - z\chi_x, \quad \varepsilon_y = \varepsilon_y^0 - z\chi_y, \quad \gamma_{xy} = \gamma_{xy}^0 - 2z\chi_{xy} \quad (4)$$

بر طبق روابط غیرخطی کرنش-جابجایی فن کارمن، مؤلفه‌های کرنش بر روی سطح میانی پوسته‌های استوانه‌ای به فرم رابطه (5) می‌باشد [18]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^0 &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \varepsilon_y^0 &= \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \gamma_{xy}^0 &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \chi_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \chi_y = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \chi_{xy} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (5)$$

با توجه به رابطه (5) معادله سازگاری به صورت رابطه (6) می‌باشد:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x^0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y^0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}^0}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (6)$$

روابط تنش-کرنش برای پوسته‌های مدرج تابعی به صورت رابطه (7) می‌باشد:

$$\begin{aligned} \sigma_x^{sh} &= \frac{E(z)}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) \\ \sigma_y^{sh} &= \frac{E(z)}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) \\ \tau_{xy}^{sh} &= \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} \end{aligned} \quad (7)$$

که ضریب پواسون (ν) ثابت فرض می‌شود، σ_x^{sh} ، σ_y^{sh} تنش نرمال در مختصات x ، y روی پوسته بدون تقویت‌کننده و τ_{xy}^{sh} تنش برشی بر روی پوسته بدون تقویت‌کننده می‌باشد.

روابط تنش-کرنش برای تقویت‌کننده‌های همگن به صورت رابطه (8) می‌باشد [19]:

$$\begin{aligned} \sigma_s^{st} &= E_s \varepsilon_x \\ \sigma_r^{st} &= E_r \varepsilon_y \end{aligned} \quad (8)$$

که σ_s^{st} ، σ_r^{st} و E_s ، E_r به ترتیب تنش نرمال مدول یانگ برای تقویت-

$$N_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, N_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, N_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \quad (18)$$

با جایگذاری معادلات (13) در معادله سازگاری (6) و معادلات (15) در سومین معادله (17) و با توجه به معادلات (4) و (18) روابط (19) و (20) را خواهیم داشت:

$$A_{11}^* \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + (A_{66}^* - 2A_{12}^*) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + A_{22}^* \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} + B_{21}^* \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (B_{11}^* + B_{22}^* - 2B_{66}^*) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + B_{12}^* \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] = 0 \quad (19)$$

$$D_{11}^* \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (D_{12}^* + D_{21}^* + 4D_{66}^*) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22}^* \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - B_{21}^* \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} - (B_{11}^* + B_{22}^* - 2B_{66}^*) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} - B_{12}^* \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - q_0 + k_w w - k_s \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (20)$$

معادلات (19) و (20) سیستم معادلات غیرخطی بر حسب دو پارامتر مجهول w و φ می‌باشد. آن‌ها به منظور بررسی ویژگی‌های پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی با تقویت‌کننده مورد استفاده قرار می‌گیرند.

3- تحلیل کمانش

شرایط تکیه‌گاهی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی با تقویت‌کننده، ساده می‌باشد و پوسته در معرض توزیع فشار یکنواخت q_0 بر روی یک بستر الاستیک قرار دارد. بنابراین شرایط مرزی بصورت رابطه (21) می‌باشد:

$$w=0, M_x=0, N_x=0, N_{xy}=0, \text{ at } x=0; L \quad (21)$$

خیز پوسته‌های استوانه‌ای را بصورت رابطه (22) در نظر می‌گیریم [25-24]:

$$w = f_0 + f_1 \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{ny}{R} + f_2 \sin^2 \frac{m\pi x}{L} \quad (22)$$

که f_0 دامنه مجهول کمانش یکنواخت، f_1 دامنه مجهول کمانش خطی، f_2 دامنه مجهول کمانش غیرخطی می‌باشد. $\sin \frac{m\pi x}{L}$ ، $\sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{ny}{R}$ ، $\sin^2 \frac{m\pi x}{L}$ و m به ترتیب بیانگر شکل کمانش خطی، شکل کمانش غیرخطی، تعداد نیم موج و تعداد موج کامل در راستای محوری و محیطی می‌باشد.

با جایگزینی معادله (22) در معادله (19) و حل آن، معادله‌ای برای تابع مجهول φ به دست می‌آید که به صورت رابطه (23) می‌باشد:

$$\varphi = \varphi_1 \cos \frac{2m\pi x}{L} + \varphi_2 \cos \frac{2ny}{R} - \varphi_3 \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{ny}{R} + \varphi_4 \sin \frac{3m\pi x}{L} \sin \frac{ny}{R} - \sigma_0 y h \frac{x^2}{2} \quad (23)$$

که در آن $\sigma_0 y$ تنش محیطی متوسط می‌باشد و ضرایب φ_i به صورت روابط (24) می‌باشد:

$$\varphi_1 = \frac{n^2 \lambda^2}{32A_{11}^* m^2 \pi^2} f_1^2 - \frac{(4\lambda L - 16B_{21}^* m^2 \pi^2)}{32A_{11}^* m^2 \pi^2} f_2$$

$$\varphi_2 = \frac{m^2 \pi^2}{32A_{22}^* n^2 \lambda^2} f_1^2$$

$$\varphi_3 = \frac{B}{A} f_1 + \frac{m^2 n^2 \pi^2 \lambda^2}{A} f_1 f_2 \quad (24)$$

$$\gamma_{xy}^0 = A_{66}^* + 2B_{66}^* \chi_{xy}$$

مقدار ضرایب رابطه (13) در رابطه (14) آورده شده است:

$$A_{11}^* = \frac{1}{\Delta} \left(A_{11} + \frac{E_{1s} d_s}{S_s} \right), A_{22}^* = \frac{1}{\Delta} \left(A_{22} + \frac{E_{1r} d_r}{S_r} \right)$$

$$A_{12}^* = \frac{A_{12}}{\Delta}, A_{66}^* = \frac{1}{A_{66}}$$

$$\Delta = \left(A_{11} + \frac{E_{1s} d_s}{S_s} \right) \left(A_{22} + \frac{E_{1r} d_r}{S_r} \right) - A_{12}^2$$

$$B_{11}^* = A_{22}^* \left(B_{11} + \frac{E_{2s} d_s}{S_s} \right) - A_{12}^* B_{12}$$

$$B_{22}^* = A_{11}^* \left(B_{22} + \frac{E_{2r} d_r}{S_r} \right) - A_{12}^* B_{12}$$

$$B_{12}^* = A_{22}^* B_{12} - A_{12}^* \left(B_{22} + \frac{E_{2r} d_r}{S_r} \right)$$

$$B_{21}^* = A_{11}^* B_{12} - A_{12}^* \left(B_{11} + \frac{E_{2s} d_s}{S_s} \right)$$

$$B_{66}^* = \frac{B_{66}}{A_{66}} \quad (14)$$

با جایگزینی معادلات (13) در معادلات (10)، رابطه (15) را داریم:

$$M_x = B_{11}^* N_x + B_{21}^* N_y - D_{11}^* \chi_x - D_{12}^* \chi_y$$

$$M_y = B_{12}^* N_x + B_{22}^* N_y - D_{21}^* \chi_x - D_{22}^* \chi_y$$

$$M_{xy} = B_{66}^* N_{xy} - 2D_{66}^* \chi_{xy} \quad (15)$$

مقدار ضرایب رابطه (15) در رابطه (16) آورده شده است:

$$D_{11}^* = D_{11} + \frac{E_{3s} d_s}{S_s} - \left(B_{11} + \frac{E_{2s} d_s}{S_s} \right) B_{11}^* - B_{12} B_{21}^*$$

$$D_{22}^* = D_{22} + \frac{E_{3r} d_r}{S_r} - \left(B_{22} + \frac{E_{2r} d_r}{S_r} \right) B_{22}^* - B_{12} B_{12}^*$$

$$D_{12}^* = D_{12} - \left(B_{11} + \frac{E_{2s} d_s}{S_s} \right) B_{12}^* - B_{12} B_{22}^*$$

$$D_{21}^* = D_{12} - \left(B_{22} + \frac{E_{2r} d_r}{S_r} \right) B_{21}^* - B_{12} B_{11}^*$$

$$D_{66}^* = D_{66} - B_{66} B_{66}^* \quad (16)$$

معادلات غیر خطی پوسته استوانه‌ای مدور نازک بر اساس تئوری کلاسیک پوسته به فرم رابطه (17) می‌باشد [23-22]:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{R} N_y + q_0 - k_w w + k_s \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (17)$$

که k_w مدول بستر وینکلر، k_s سفتی لایه برشی بر اساس مدل پاسترناک و q_0 فشار خارجی می‌باشد.

با توجه به دو معادله اول معادلات (17) تابع تنش φ به صورت رابطه (18) تعریف می‌شود:

$$a_{11} = D + \frac{B^2}{A}, \quad a_{12} = \frac{B}{A} m^2 n^2 \pi^2 \lambda^2 - \frac{n^2 \lambda^2 (\lambda L - 4B_{21}^* m^2 \pi^2)}{4A_{11}^* m^2 \pi^2}$$

$$a_{13} = \frac{m^2 n^2 \pi^2 \lambda^2}{A} + \frac{m^2 n^2 \pi^2 \lambda^2}{G}, \quad a_{14} = \frac{m^4 \pi^4}{16A_{22}^*} + \frac{n^4 \lambda^4}{16A_{11}^*} \quad (34)$$

$$a_{21} = \left[4B_{21}^* \left(\frac{m\pi}{L} \right)^4 - \frac{1}{R} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \right] \frac{n^2 \lambda^2}{16A_{11}^* m^2 \pi^2} + \frac{1}{2} \frac{B}{A} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \left(\frac{n}{R} \right)^2$$

$$a_{22} = \frac{1}{2} m^2 n^2 \pi^2 \lambda^2 \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \left(\frac{n}{R} \right)^2 \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{G} \right)$$

$$a_{23} = 4D_{11}^* \left(\frac{m\pi}{L} \right)^4 - \left[4B_{21}^* \left(\frac{m\pi}{L} \right)^4 - \frac{1}{R} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \right] \frac{(\lambda L - 4B_{21}^* m^2 \pi^2)}{4A_{11}^* m^2 \pi^2} \quad (35)$$

$$a_{31} = \frac{R^2 A_{11}^*}{(1 + k_w R^2 A_{11}^*)}, \quad a_{32} = \frac{1}{2}, \quad a_{33} = \frac{n^2}{8R(1 + k_w R^2 A_{11}^*)} \quad (36)$$

با جایگذاری معادله (26) در معادله (27) و با توجه به معادله (32)، رابطه (37) را خواهیم داشت:

$$q = a_{41} + a_{42} f_2 + a_{43} f_2^2 + a_{44} f_0 - \frac{\left(a_{23} + \frac{1}{4} k_w + \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 k_s \right) f_2}{a_{21} T + a_{22} T f_2} \quad (37)$$

که مقدار ضرایب رابطه (37)، در رابطه (38) آورده شده است:

$$a_{41} = \frac{a_1 + L^4 k_w + L^2 k_s ((\lambda n)^2 + (m\pi)^2)}{T a_4}$$

$$a_{42} = \frac{1}{T} \left(\frac{T k_w}{2} + \frac{a_2}{a_4} \right), \quad a_{43} = \frac{a_3}{T a_4}, \quad a_{44} = k_w \quad (38)$$

با جایگذاری معادله (26) در معادله (27)، معادله (30) در معادله (31) و معادله (33) در معادله (37)، روابط (39-41) را خواهیم داشت:

$$f_1^2 = a_{51} + a_{52} f_2 + a_{53} f_2^2 + a_{54} q \quad (39)$$

$$f_0 = a_{61} q + a_{62} f_2 + a_{63} f_2^2 + a_{64} \quad (40)$$

$$q = a_{71} + a_{72} f_2 + a_{73} f_2^2 - \frac{\left(a_{23} + \frac{1}{4} k_w + \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 k_s \right) f_2}{(a_{21} T + a_{22} T f_2)(1 - a_{54} a_{61})} \quad (41)$$

که مقدار ضرایب در روابط (42-44) آورده شده است:

$$a_{51} = \frac{-R^3 (1 + k_w R^2 A_{11}^*)}{R^3 (1 + k_w R^2 A_{11}^*) + 8T n^2}$$

$$\left(\frac{a_1 + L^4 k_w + L^2 k_s ((\lambda n)^2 + (m\pi)^2)}{T a_4} \right)$$

$$a_{52} = \frac{R^3 (1 + k_w R^2 A_{11}^*)}{R^3 (1 + k_w R^2 A_{11}^*) + 8T n^2}$$

$$\left(\frac{-2R a_2 - n^2 L^4 k_w}{2R a_4} + \frac{T (k_w R^2 A_{11}^* - 1)}{2(1 + k_w R^2 A_{11}^*)} \right)$$

$$a_{53} = \frac{-R^3 (1 + k_w R^2 A_{11}^*)}{R^3 (1 + k_w R^2 A_{11}^*) + 8T n^2} \left(\frac{a_3}{a_4} \right)$$

$$a_{54} = \frac{R^3 (1 + k_w R^2 A_{11}^*)}{R^3 (1 + k_w R^2 A_{11}^*) + 8T n^2} \left(\frac{n^2 L^4}{R a_4} - \frac{T R^2 A_{11}^*}{(1 + k_w R^2 A_{11}^*)} \right) \quad (42)$$

$$\varphi_4 = \frac{m^2 n^2 \pi^2 \lambda^2}{G} f_1 f_2$$

که مقدار ضرایب رابطه (24)، در رابطه (25) آورده شده است:

$$A = A_{11}^* m^4 \pi^4 + (A_{66}^* - 2A_{12}^*) m^2 n^2 \pi^2 \lambda^2 + A_{22}^* n^4 \lambda^4$$

$$B = B_{21}^* m^4 \pi^4 + (B_{11}^* + B_{22}^* - 2B_{66}^*) m^2 n^2 \pi^2 \lambda^2 + B_{12}^* n^4 \lambda^4 - \frac{L^2}{R} m^2 n^2$$

$$D = D_{11}^* m^4 \pi^4 + (D_{12}^* + D_{21}^* + 4D_{66}^*) m^2 n^2 \pi^2 \lambda^2 + D_{22}^* n^4 \lambda^4$$

$$G = 81A_{11}^* m^4 \pi^4 + 9(A_{66}^* - 2A_{12}^*) m^2 n^2 \pi^2 \lambda^2 + A_{22}^* n^4 \lambda^4$$

$$\lambda = \frac{L}{R} \quad (25)$$

با جایگزینی معادلات (22) و (23) در معادله (20) و با اعمال روش گالرکین در بازه $0 \leq x \leq L$ و $0 \leq y \leq 2\pi R$ را خواهیم داشت:

$$\sigma_{0y} = \frac{R}{h} \left(q_0 - \frac{1}{2} k_w (f_2 - 2f_0) \right) \quad (26)$$

$$\left[\frac{m^2 n^2 \pi^2 \lambda^2}{A} + \frac{B}{A} m^2 n^2 \pi^2 \lambda^2 - \frac{n^2 \lambda^2 (\lambda L - 4B_{21}^* m^2 \pi^2)}{4A_{11}^* m^2 \pi^2} \right] f_1 f_2$$

$$+ \left(\frac{m^2 n^2 \pi^2 \lambda^2}{A} + \frac{m^2 n^2 \pi^2 \lambda^2}{G} \right) f_1 f_2^2 + \left(\frac{m^4 \pi^4}{16A_{22}^*} + \frac{n^4 \lambda^4}{16A_{11}^*} \right) f_1^3$$

$$+ \left(D + \frac{B^2}{A} \right) f_1 - \sigma_{0y} h n^2 L^2 \lambda^2 f_1 + L^4 k_w f_1 + L^2 k_s f_1 [(\lambda n)^2 + (m\pi)^2] = 0 \quad (27)$$

$$\left\{ \left[4B_{21}^* \left(\frac{m\pi}{L} \right)^4 - \frac{1}{R} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \right] \frac{n^2 \lambda^2}{32A_{11}^* m^2 \pi^2} + \frac{1}{2} \frac{B}{A} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \left(\frac{n}{R} \right)^2 \right\} f_1^2$$

$$+ \frac{1}{2} m^2 n^2 \pi^2 \lambda^2 \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \left(\frac{n}{R} \right)^2 \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{G} \right) f_1^2 f_2$$

$$+ \left\{ 4D_{11}^* \left(\frac{m\pi}{L} \right)^4 - \left[4B_{21}^* \left(\frac{m\pi}{L} \right)^4 - \frac{1}{R} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \right] \frac{(\lambda L - 4B_{21}^* m^2 \pi^2)}{4A_{11}^* m^2 \pi^2} \right\} f_2$$

$$+ \frac{\sigma_{0y} h}{R} - q_0 + k_w \left(\frac{3}{4} f_2 + f_0 \right) + k_s f_2 \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 = 0 \quad (28)$$

علاوه بر این، پوسته استوانه‌ای باید شرایط بسته محیطی را ارضا کند. بنابراین رابطه (29) را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\int_0^{2\pi R} \int_0^L \frac{\partial v}{\partial y} dx dy = \int_0^{2\pi R} \int_0^L \left[\varepsilon_y^0 + \frac{w}{R} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = 0 \quad (29)$$

با استفاده از معادلات (13)، (18)، (22) و (23)، مقدار انتگرال به صورت رابطه (30) می‌باشد:

$$-2A_{11}^* \sigma_{0y} h + \frac{1}{R} (f_2 + 2f_0) - \frac{1}{4} \left(\frac{n}{R} \right)^2 f_1^2 = 0 \quad (30)$$

از معادله (27)، رابطه (31) را خواهیم داشت:

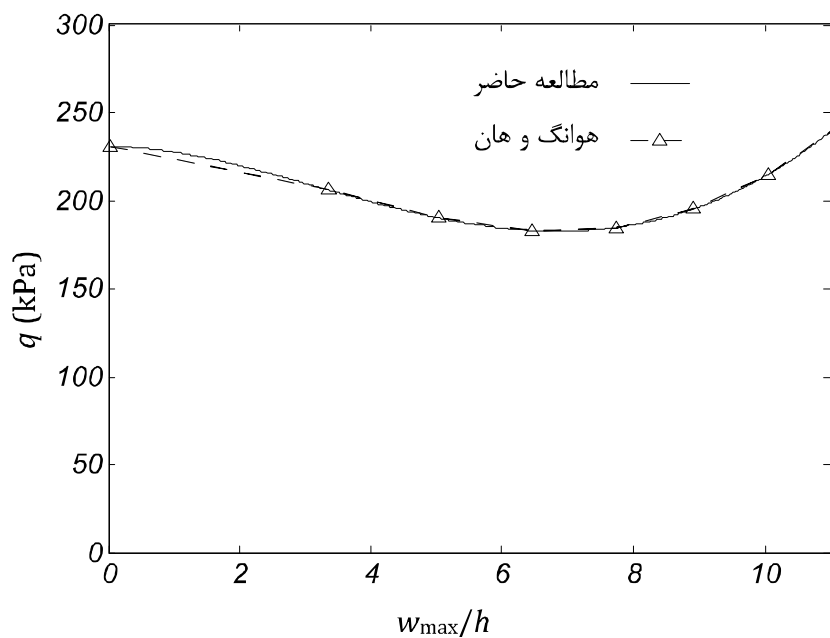
$$f_1^2 = \frac{\left(a_{11} + a_{12} f_2 + a_{13} f_2^2 - \sigma_{0y} h \frac{n^2}{R^2} L^4 \right) + L^4 k_w + L^2 k_s ((\lambda n)^2 + (m\pi)^2)}{a_{14}} \quad (31)$$

با جایگذاری معادله (27) در معادلات (29) و (31)، روابط (32) و (33) را خواهیم داشت:

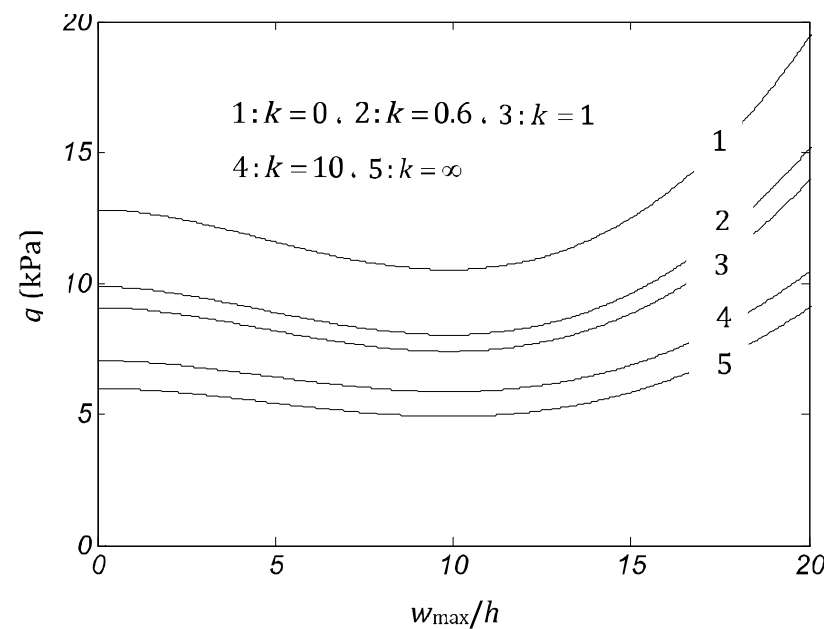
$$a_{21} f_1^2 + a_{22} f_1^2 f_2 + \left(a_{23} + \frac{1}{4} k_w + \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 k_s \right) f_2 = 0 \quad (32)$$

$$f_0 = a_{31} q + a_{32} f_2 + a_{33} f_1^2 \quad (33)$$

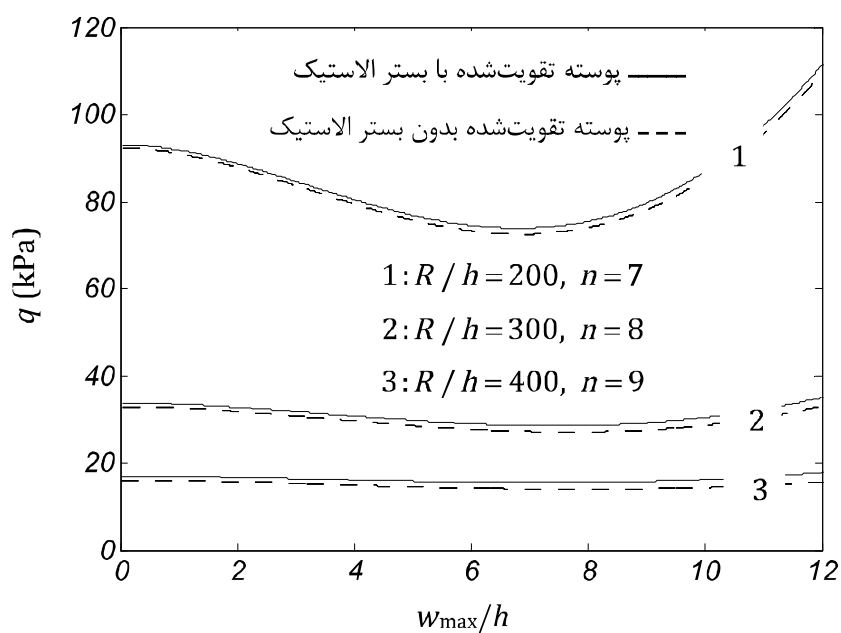
که مقدار ضرایب در روابط (34-36) آورده شده است:



شکل 2 مقایسه منحنی پس کمانش پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی بدون بستر الاستیک



شکل 3 منحنی پس کمانش پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت شده بدون بستر الاستیک با شاخص کسر حجمی متفاوت



شکل 4 منحنی پس کمانش پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت شده با بستر و بدون بستر با نسبت L/R متفاوت

جدول 1 کمانش استاتیکی پوسته‌های استوانه‌ای ایزوتروپیک تقویت شده بدون بستر الاستیک تحت فشار خارجی

مطالعه حاضر	باروچ و سینگر	ردی و استارنس	شن
بدون تقویت کننده	103/327 (4)*	93/5	100/7 (4)
تقویت کننده طولی	104/494 (4)	103	102/2 (4)
تقویت کننده حلقوی	379/694 (3)	370	368/3 (3)
هر دو تقویت کننده	387/192 (3)	377	374/1 (3)

* عدد داخل پرانتز شماره مد کمانش (n) می‌باشد.

$$a_{61} = a_{31} + a_{33}a_{54}, a_{62} = -a_{32} + a_{33}a_{52}$$

$$a_{63} = a_{33}a_{53}, a_{64} = a_{33}a_{51} \quad (43)$$

$$a_{71} = \frac{a_{41} + a_{44}a_{64}}{1 - a_{44}a_{61}}, a_{72} = \frac{a_{42} + a_{62}}{1 - a_{44}a_{61}}, a_{73} = \frac{a_{43} + a_{63}}{1 - a_{44}a_{61}} \quad (44)$$

اگر $f = w_{\max}$ قرار دهیم، پس با توجه به معادله (22)، ماکزیمم خیز به صورت رابطه (45) می‌باشد:

$$f = f_0 + f_1 + f_2 \quad (45)$$

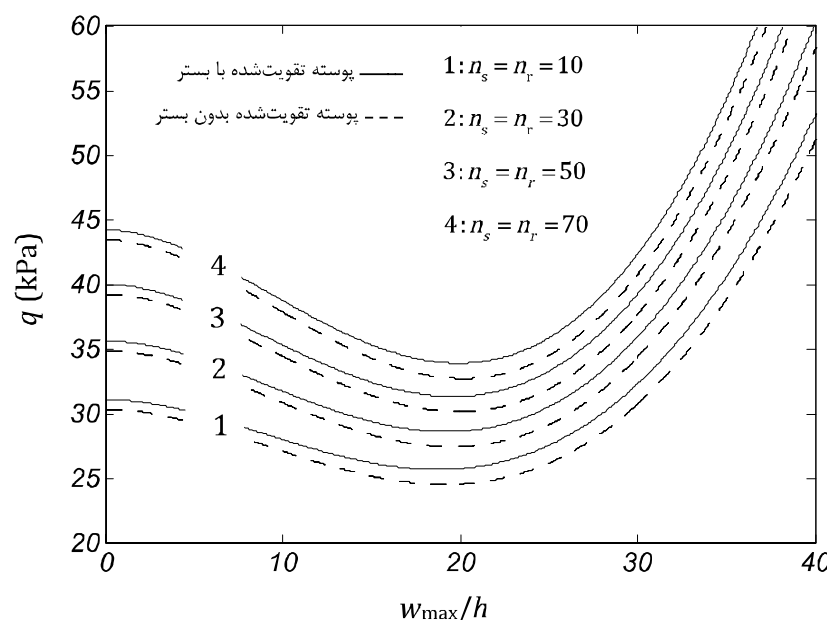
$y = j\pi/2n$ و $x = iL/2m$ تعیین می‌شود و i و j عدد صحیح فرد می‌باشد.

با جایگذاری معادلات (39) و (40) در معادله (45) ماکزیمم خیز به دست می‌آید. با ترکیب روابط (41) و (45) می‌توان منحنی بار پس کمانش-ماکزیمم خیز پوسته را تحلیل نمود.

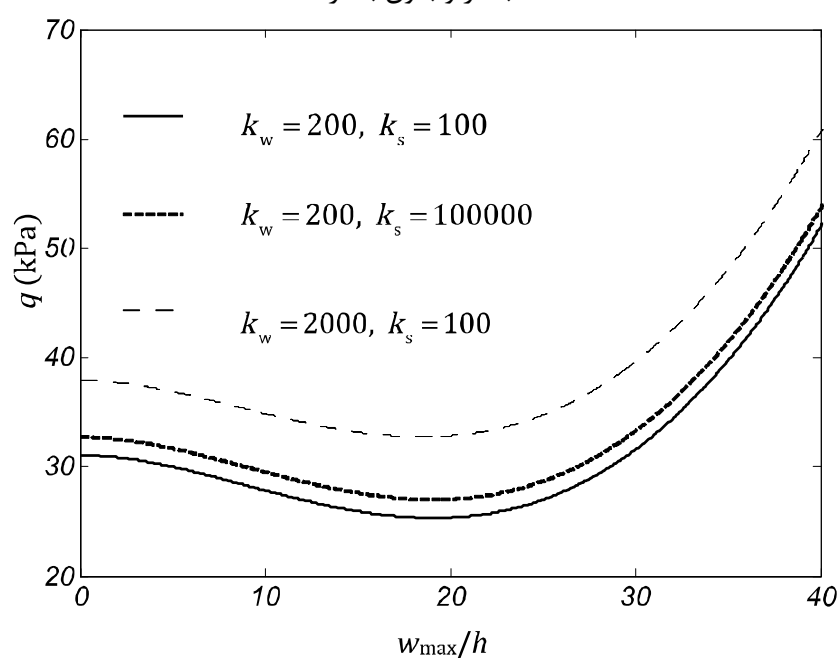
4- نتایج عددی

به منظور راستی آزمایی فرمول بندی حاضر، منحنی پس کمانش پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی کامل بدون بستر الاستیک در شکل 2 آورده شده است که با تحلیل هوانگ و هان [24] مقایسه شده است. همچنین کمانش استاتیکی پوسته‌های استوانه‌ای ایزوتروپیک تقویت شده بدون بستر الاستیک تحت فشار خارجی در جدول 1 آورده شده است و با مطالعات باروچ و سینگر [2]، ردی و استارنس [26] و شن [21] مقایسه شده است.

در شکل 3 پوسته استوانه‌ای تقویت شده با نسبت R/h برابر 500، نسبت L/R برابر 2، مدهای (n و m) به ترتیب برابر (1 و 7) و شاخص کسر حجمی گوناگون ($k = k_2 = k_3$)، در نظر گرفته شده است. این نتایج نشان می‌دهد که با افزایش شاخص کسر حجمی، بار بحرانی کمانش، کاهش پیدا می‌کند. پوسته‌های استوانه‌ای سرامیکی در برابر بار کمانش فشاری مقاومت به مراتب بالاتری نسبت به پوسته‌های استوانه‌ای فلزی دارند که با توجه به سفتی پایین تر فلزات، مورد انتظار است. اما در تمام حالات رفتار نمودار بار-جابه‌جایی مشابه می‌باشد. گراف‌های بار-جابه‌جایی حاصل به نام مسیرهای تعادلی ثانویه شناخته می‌شوند که این رفتار به دلیل وجود نقص‌های هندسی اولیه موجود در هر سازه به ظاهر بی‌عیبی رخ می‌دهد. در مسیر پیش کمانش نرخ افزایش جابه‌جایی متناسب با افزایش بار می‌باشد اما به محض عبور از نقطه کمانش و ورود به ناحیه پس کمانش (نقطه آغازین نمودارهای موجود) جابه‌جایی‌ها به صورت نامتناسب با بار اعمالی رشد می‌نمایند. با افزایش تدریجی بار تا قبل از رسیدن به بار کمانش جابه‌جایی کمانشی ایجاد نمی‌گردد اما درست در لحظه وقوع کمانش، با رسیدن به بار بحرانی کمانش، خیز به وجود می‌آید. در ادامه مسیر ممکن است علی‌رغم کاهش نیرو پوسته هم‌چنان دچار خیز گردد تا به مسیر تعادلی جدیدی برسد (افزایش نامتناسب جابه‌جایی‌ها در مسیر تعادل ثانویه). پس از آن برای دستیابی به خیز بیش‌تر باید بار اعمالی را افزایش داد. البته همان‌طور که در نتایج مشاهده می‌شود رفتار نمودارهای پس کمانش تابع پارامترهای مختلفی از جمله پارامترهای هندسی پوسته می‌باشد.



شکل 7 تأثیر تقویت‌کننده‌های طولی و حلقوی برای پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی با بستر و بدون بستر



شکل 8 تأثیر بستر الاستیک وینکلر و پسترناک برای پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده

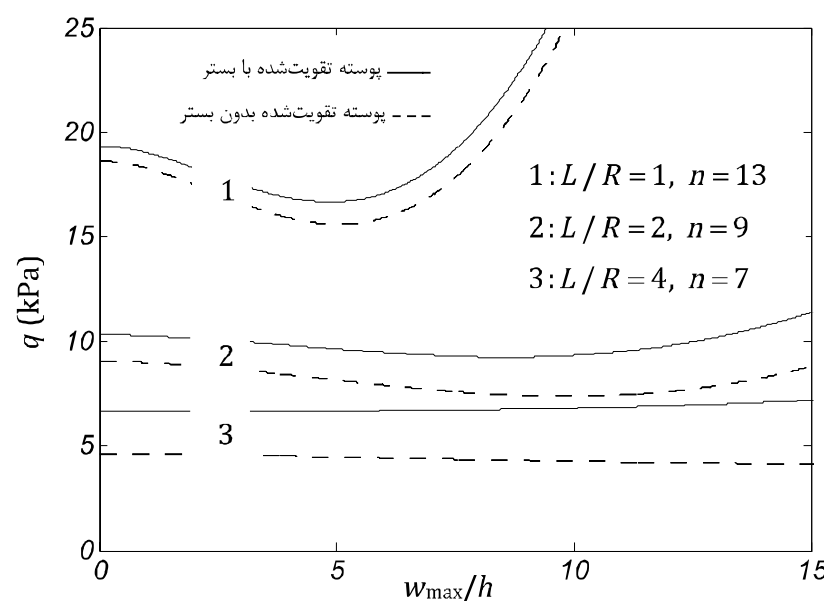
در شکل 6 منحنی پس‌کمانش پوسته تقویت‌شده و تقویت‌نشده با بستر الاستیک با شاخص کسر حجمی متفاوت نشان داده شده است. در اینجا نیز در هر دو حالت با افزایش شاخص کسر حجمی بار کمانش کاهش می‌یابد. ضمن آنکه وجود تقویت‌کننده منجر به افزایش ظرفیت تحمل بار در پوسته استوانه‌ای می‌گردد که با توجه به افزایش سفتی سازه به دلیل اضافه کردن تقویت‌کننده‌ها این نتیجه مورد انتظار می‌باشد.

در جدول 2 بار بحرانی کمانش برای پوسته استوانه‌ای با تقویت‌کننده و بدون تقویت‌کننده با بستر و بدون بستر محاسبه شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود اثر تقویت‌کننده حلقوی بیشتر از تقویت‌کننده طولی می‌باشد. همچنین بیش‌ترین مقاومت در برابر کمانش مربوط به پوسته سرامیکی با تقویت‌کننده حلقوی و طولی روی بستر الاستیک می‌باشد و پوسته فلزی بدون تقویت‌کننده و بستر الاستیک کم‌ترین مقاومت را در برابر کمانش نشان می‌دهد. جنس پوسته بیشترین اثر را دارد که با توجه به ایجاد تغییرات اساسی در ساختار ماده و تغییرات شدید مدول یانگ مورد انتظار می‌باشد اما می‌توان با انتخاب مقادیر بزرگتر برای ثوابت بستر الاستیک و افزایش ابعاد و تعداد تقویت‌کننده‌ها، تأثیر این پارامترها را نیز افزایش داد. کمالینکه با تغییر کوچک در شاخص کسری حجمی تأثیر آن بر رفتار کمانشی پوسته کوچک است اما با تغییر آن از صفر (سرامیک) به بی‌نهایت (فلز) شاهد تأثیر چشمگیری می‌باشیم.

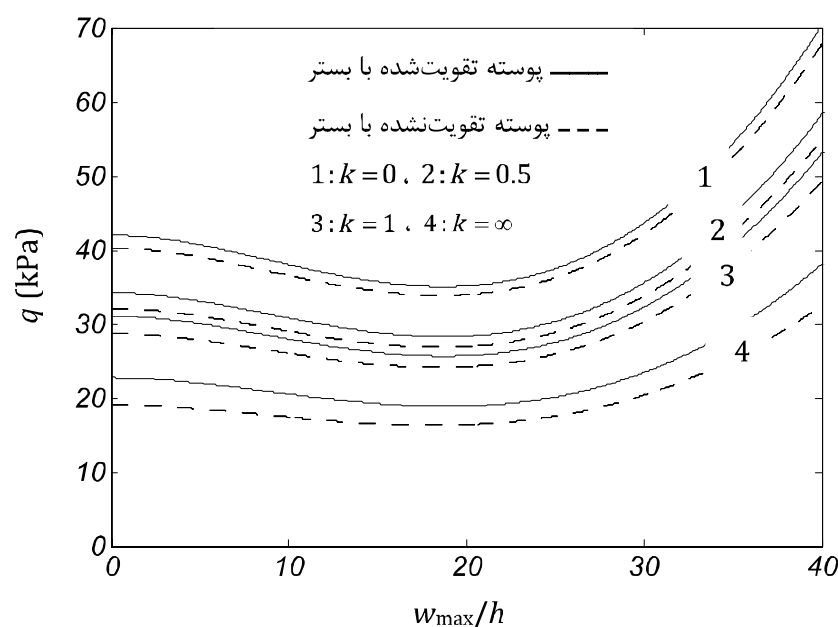
در شکل 7 تأثیر تقویت‌کننده‌های طولی و حلقوی برای پوسته استوانه‌ای

شکل 4 منحنی پس‌کمانش پوسته استوانه‌ای تقویت‌شده با پارامترهای بستر (k_s و k_w) به ترتیب 200 نیوتن بر متر مکعب و 100 نیوتن بر متر و هم-چنین بدون بستر با شاخص کسر حجمی (k_3 ، k_2 ، k) برابر 1 و نسبت L/R برابر 2 را نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش نسبت R/h بار بحرانی کمانش به طور قابل توجهی کاهش می‌یابد بنابراین هر چه پوسته نازک‌تر باشد بار بحرانی کمانش کمتر می‌شود. با نازک‌تر شدن پوسته شماره مد کمانش افزایش می‌یابد ضمن آن‌که با رسیدن بار به بار بحرانی کمانش، برای پوسته‌های نازک‌تر بدون افزایش چشمگیر بار اعمالی، پوسته دچار خیزهای بزرگ می‌گردد.

شکل 5 نیز منحنی پس‌کمانش پوسته استوانه‌ای تقویت‌شده با پارامترهای بستر (k_s و k_w) به ترتیب 200 نیوتن بر متر مکعب و 100 نیوتن بر متر و هم‌چنین بدون بستر با شاخص کسر حجمی (k_3 ، k_2 ، k) برابر 1 و نسبت R/h برابر با 500 را نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش نسبت L/R بار بحرانی کمانش کاهش می‌یابد. با افزایش طول پوسته شماره مد کمانش کاهش می‌یابد. وجود بستر تنها باعث کاهش خیز کمانش به ازای بار اعمالی مشخص می‌گردد و تأثیر محسوسی بر رفتار نمودار بار-جابجایی نمی‌گذارد و شماره مد کمانش را نیز تغییر نمی‌دهد. هم‌چنین برای پوسته‌های بلندتر حساسیت پاسخ خیز نسبت به تغییرات بار کم‌تر می‌شود.



شکل 5 منحنی پس‌کمانش پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با بستر و بدون بستر با نسبت L/R متفاوت



شکل 6 منحنی پس‌کمانش پوسته استوانه‌ای تقویت‌شده و تقویت‌نشده با بستر الاستیک با شاخص کسر حجمی متفاوت

نشان می‌دهد، این نتیجه نشان می‌دهد که بستر الاستیک وینکلر تأثیری به مراتب بیش‌تر از بستر پاسترناک بر پاسخ کمانشی پوسته دارد.

با توجه به شکل 9 می‌توان به نتایج جالب توجهی دست یافت، پوسته‌های سرامیکی قوی‌ترین و پوسته‌های فلزی ضعیف‌ترین مقاومت در برابر بار کمانشی را از خود نشان می‌دهند، اما استفاده از تقویت‌کننده‌های فلزی و سرامیکی به ترتیب باعث افزایش و کاهش ظرفیت تحمل بار کمانشی پوسته.

مدرج تابعی با بستر و بدون بستر نشان داده شده است، همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش تعداد تقویت‌کننده‌ها، بار بحرانی کمانش افزایش پیدا کرده است.

شکل 8 تأثیر بستر الاستیک وینکلر و پاسترناک را نشان می‌دهد، همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش 1000 برابری ضریب پاسترناک ظرفیت تحمل بار کمانشی پوسته حدود 6/6 درصد افزایش می‌یابد در صورتیکه با 10 برابر کردن ضریب وینکلر ظرفیت تحمل بار کمانشی پوسته حدود 29/4 درصد افزایش را

جدول 2 بار بحرانی کمانش برای پوسته استوانه‌ای تقویت‌شده و بدون تقویت‌کننده با بستر و بدون بستر ($m=1$)

$k=\infty, n=4$		$k=1, n=4$		$k=0.5, n=4$		$k=0, n=4$		
بدون بستر	با بستر	بدون بستر	با بستر	بدون بستر	با بستر	بدون بستر	با بستر	
18/33	19/09	27/98	28/74	31/33	32/09	39/53	40/29	بدون تقویت‌کننده
19/57	21/25	28/91	30/58	32/14	33/82	40/12	41/79	تقویت‌کننده طولی
20/75	22/42	29/41	31/07	32/65	34/33	40/68	42/35	تقویت‌کننده حلقوی
21/99	23/66	30/33	32/00	33/46	35/14	41/26	42/94	هر دو تقویت‌کننده

د) هر چه نسبت شعاع به ضخامت افزایش یابد بار بحرانی کمانش کاهش پیدا می‌کند.

ه) با افزایش نسبت طول به شعاع، بار کمانش کاهش پیدا می‌کند.

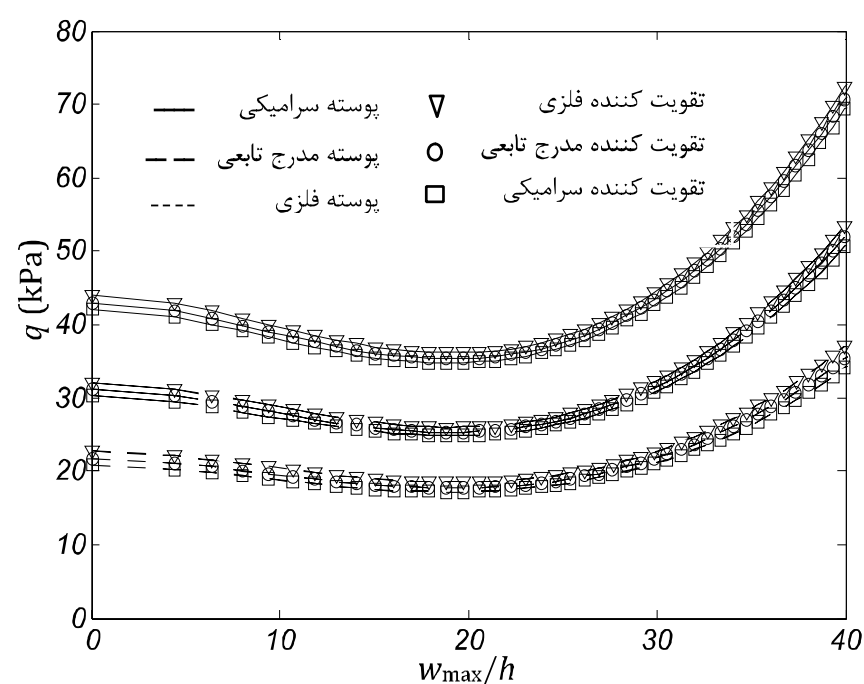
و) اثر تقویت‌کننده حلقوی بیشتر از تقویت‌کننده طولی می‌باشد.

ز) بستر الاستیک وینکلر تأثیری به مراتب بیش‌تر از بستر پاسترناک بر پاسخ کمانشی پوسته دارد.

ح) استفاده از تقویت‌کننده‌های فلزی و سرامیکی به ترتیب باعث افزایش و کاهش ظرفیت تحمل بار کمانشی پوسته نسبت به پوسته با تقویت‌کننده‌های مدرج تابعی می‌شود.

6- مراجع

- [1] A. Van der Neut, The general instability of stiffened cylindrical shells under axial compression. Rep S314. Amsterdam: *National Aeronautical Research Institute*, 1947.
- [2] M. Baruch, J. Singer, Effect of eccentricity of stiffeners on the general instability of stiffened cylindrical shells under hydro-static pressure. *J. Mech. Eng. Sci.* 5, pp. 23-27, 1963.
- [3] H. S. Shen, P. Zhou, T.Y. Chen, Post-buckling analysis of stiffened cylindrical shells under combined external pressure and axial compression. *Thin-Walled Structures*. 15, pp. 43–63, 1993.
- [4] D. Bushnell, Nonlinear equilibrium of imperfect locally deformed stringer-stiffened panels under combined in-plane loads. *Computers & Structures*. 27, pp. 519–539, 1987.
- [5] E. Bagherizadeh, Y. Kiani, M. R. Eslami, , Mechanical buckling of functionally graded material cylindrical shells surrounded by Pasternak elastic foundation. *Compos. Struct.* 93, pp. 3063-3071, 2011.
- [6] Z. Y. Ji, K. Y. Yeh, General solution for nonlinear buckling of non-homogeneous axial symmetric ring-and stringer-stiffened cylindrical shells. *Computers & Structures*. 34, pp. 585–591, 1990.
- [7] M. E. Golmakani, M. Emami, Nonlinear bending and buckling analysis of functionally graded annular plates. *Modares Mechanical Engineering*. Vol. 13, No. 11, pp. 1-14, 2014. (In Persian)
- [8] M. A. Ghasemi, M. Yazdani, S. M. Hoseini, Analysis of effective parameters on the buckling of grid stiffened composite shells based on first order shear deformation theory. *Modares Mechanical Engineering*. Vol. 13, No. 10, pp. 51-61, 2013. (In Persian)
- [9] L. Jiang, Y. Wang, X. Wang, Post-buckling analysis of stiffened circular cylindrical panels using differential quadrature element method. *Thin-Walled Structures*. 46, pp. 390–398, 2008.
- [10] Z. M. Li, H. S. Shen, Post-buckling of 3D braided composite cylindrical shells under combined external pressure and axial compression in thermal environments. *International Journal of Mechanical Sciences*. 50, pp. 719–731, 2008.
- [11] M. Sadeghifar, M. Bagheri, A. A. Jafari, Buckling analysis of stringer-stiffened laminated cylindrical shells with non-uniform eccentricity. *Archive of Applied Mechanics*. 81, pp. 875–886, 2011.



شکل 9 تأثیر جنس بر ظرفیت تحمل بار کمانشی پوسته استوانه‌ای

نسبت به پوسته با تقویت‌کننده‌های مدرج تابعی می‌شود، بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که پوسته استوانه‌ای سرامیکی با تقویت‌کننده فلزی بهترین انتخاب می‌باشد.

5- نتیجه گیری

در این مقاله یک روش تحلیلی برای تحلیل پوسته‌های نازک استوانه‌ای مدرج تابعی با تقویت‌کننده در معرض فشار خارجی که توسط بستر الاستیک احاطه شده، پیشنهاد شده است. بر اساس تئوری کلاسیک پوسته و تکنیک تقویت-کننده‌های تکه‌ای با در نظرگرفتن جمله‌های کرنش غیرخطی فن‌کارمن، معادلات حاکم به دست آمده است. یک عبارت سه جمله‌ای شامل شکل پیش‌کمانش، کمانش خطی و کمانش غیرخطی برای تقریب خیز پوسته تقویت‌شده مدرج تابعی استفاده شده است. با استفاده از روش گالرکین، معادلات غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی با تقویت‌کننده به دست آورده شده است.

بعضی از نتایج به دست آمده از این مطالعه عبارت است:

الف) با افزایش تعداد تقویت‌کننده‌ها، بار کمانش بحرانی افزایش پیدا می‌کند.
ب) با افزایش مقدار سفتی بستر الاستیک، بار کمانش بحرانی افزایش پیدا می‌کند.

ج) با افزایش شاخص کسر حجمی، بار بحرانی کمانش کاهش پیدا می‌کند.

- [20] M. M. Najafizadeh, A. Hasani, Khazaeinejad P. Mechanical stability of function-ally graded stiffened cylindrical shells. *Applied Mathematical Modelling*. 33, pp. 1151–1157, 2009.
- [21] H. S. Shen, Post-buckling analysis of imperfect stiffened laminated cylindrical shells under combined external pressure and thermal loading. *Int. J. Mech.* 40, pp. 339-355, 1998.
- [22] M. Darabi, M., Darvizeh, A. Darvizeh, Non-linear analysis of dynamic stability for functionally graded cylindrical shells under periodic axial loading. *Compos. Struct.* 83, pp. 201-211, 2008.
- [23] A. H. Sofiyev, E. Schnack, The stability of functionally graded cylindrical shells under linearly increasing dynamic torsional loading. *Eng. Struct.* 26, pp. 1321-1331, 2004.
- [24] H. Huang, Q. Han, Research on nonlinear post-buckling of functionally graded cylindrical shells under radial loads. *Composite Structures*. 92, pp. 1352–1357, 2010.
- [25] A. S. Volmir, *Non-linear Dynamics of Plates and Shells*. Science Edition M, 1972. (in Russian).
- [26] J. N. Reddy, J. H. Starnes, General buckling of stiffened circular cylindrical shells according to a layerwise theory. *Comput. Struct.* 49, pp. 605-616, 1993.
- [12] D. G. Stamatelos, G. N. Labeas, K. I. Tserpes, Analytical calculation of local buckling and post-buckling behavior of isotropic and orthotropic stiffened panels. *Thin-Walled Structures*. 49, pp. 422–430, 2011.
- [13] M. Tajdari, M. Azimi, M. Khorram, J. Eskandari Jam, Numerical and experimental investigations on buckling of steel cylindrical shells with triangular cutout subject to axial compression. *Modares Mechanical Engineering*. Vol. 13, No. 1, pp. 24-37, 2013. (In Persian)
- [14] D. H. Bich, V. H. Nam, N. T. Phuong, Nonlinear postbuckling of eccentrically stiffened functionally graded plates and shallow shells. *Vietnam Journal of Mechanics*. 33, pp. 132–147, 2011.
- [15] D. V. Dung, N. T. Nga, Nonlinear buckling and post-buckling of eccentrically stiffened functionally graded cylindrical shells surrounded by an elastic medium based on the first order shear deformation theory. *Vietnam Journal of Mechanics*, VAST, Vol. 35, No. 4, pp. 285 – 298, 2013.
- [16] H. S. Shen, Post-buckling analysis of pressure-loaded functionally graded cylindrical shells in thermal environments. *Engineering Structures*. 25, pp. 487–497, 2003.
- [17] A. H. Sofiyev, Non-linear buckling behavior of FGM truncated conical shells subjected to axial load. *Int. J. Non-Linear Mech.* 46, pp. 711-719, 2011.
- [18] D. O. Brush, B. O. Almroth, *Buckling of Bars, Plates and Shells*. Mc Graw-Hill. New York, 1975.
- [19] D. V. Dung, L. K. Hoa, Nonlinear buckling and post-buckling analysis of eccentrically stiffened functionally graded circular cylindrical shells under external pressure. *Thin-Walled Struct.* 63, pp. 117-124, 2013.