ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

بررسی تأثیر مقیاس کوچک بر کمانش نانوحلقه‌ها

اعظم عارفی[1]، حسن نحوی[2*]

1- دانشجوی دکترا، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان

2- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان

* اصفهان، 8415683111، hnahvi@cc.iut.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 29 بهمن 1393

پذیرش: 08 اردیبهشت 1394

ارائه در سایت: 30 خرداد 1394

کلید واژگان:

نانوحلقه

تئوری الاستیسیته غیرمحلی

تغییرشکل برشی

چکیده

با گسترش سریع میکرو و نانوتکنولوژی، کاربرد نانوسازه‌ها با توجه به خصوصیات ویژه فیزیکی، شیمیایی، مکانیکی و الکترونیکی آن‌ها هر چه بیشتر توسعه می‌یابد؛ از آن جمله می‌توان به استفاده نانوسازه‌ها در حسگرهای کرنش، جرم و دستگاه‌های میکرو و نانوالکترومکانیک اشاره نمود. تأثیر اندازه در رفتار مکانیکی این ساختارها که ابعادشان بسیار کوچک و قابل قیاس با فواصل مولکولی است، حائز اهمیت است. با توجه به این که تئوری‌های کلاسیک توانایی پذیرش تأثیر اندازه کوچک را ندارند، از تئوری الاستیسیته غیر محلی برای منظور نمودن آثار اندازه کوچک استفاده شده است. در این تئوری با فرض این که تنش در یک نقطه تابعی از کرنش همه نقاط محیط است، محدوده وسیعی از نیروهای بین اتمی و ابعاد طولی داخلی در روابط ساختاری مواد همسانگرد و همگن، به‌عنوان پارامترهای ماده مطرح می‌شوند. در این تئوری علاوه بر اجتناب از حل معادلات پیچیده، توانایی پیش‌بینی رفتار نانوسازه‌ها در ابعاد بزرگ نیز وجود دارد. در این تحقیق، کمانش نانوحلقه با درنظر گرفتن اثر برش مورد مطالعه قرار می‌گیرد. معادلات حاکم بر کمانش بر پایه تئوری الاستیسیته غیرمحلی و به کمک کار مجازی استخراج گردیده است، همچنین از فرضیات تیموشنکو برای اعمال اثر برش استفاده شده و حل تحلیلی برای معادلات ارائه شده است. تأثیرپارامتر غیرمحلی، شعاع، نسبت شعاع به ضخامت و شماره مودهای کمانش بر روی بارهای کمانش نانوحلقه بررسی شده است.

Investigation of small scale effect on buckling of nanorings

Azam Arefi, Hassan Nahvi*

Department of Mechanical Engineering, Isfahan University of Technology, Isfahan, Iran.

*P.O.B. 8415683111 , Isfahan, Iran, hnahvi@cc.iut.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 18 February 2015
Accepted 28 April 2015
Available Online 20 June 2015

Keywords:
Nanoring
Nonlocal elasticity theory
Shear effect

ABSTRACT

Nanotechnology has great potential applications in many fields such as chemistry, physics, material science, etc. In the recent years, due to the extraordinary properties of nanostructures, they are used in a wide range of nanodevices such as nanosensors, nanoactuators and nanocomposites. The effect of size on mechanical behavior of nanostructures whose size is comparable with molecule distances is important. Considering that classical continuum models are free scale and cannot capture the size effects, nonlocal continuum models are used for the analysis of mechanical properties of nanostructures. The nonlocal elasticity theory assumes that the stress at a reference point in the body depends not only on strain at that specific point, but also it depends on the strain at all other points. So, this theory contains long range interaction between atoms and internal scale length. This theory is capable to predict behavior of nanostructures without solving complicated equations. In the present work, the effect of considering small scale on the buckling of nanorings is studied. Governing equations are derived based on the nonlocal elasticity theory using the virtual displacement method and Hamilton's principle. Shear effect is achieved by Timoshenko beam theory. The governing equations are solved analytically. The effects of nonlocal parameter, radius, radius to thickness ratio and buckling mode number on the buckling loads of the nanorings are investigated.

1- مقدمه

طراحی مؤثر نانوسیستم‌ها وابسته به فهم دقیق خصوصیات و پاسخ نانوسازه‌ای است که در ساخت آن‌ها بکار می‌روند. با توجه به پتانسیل بالای این سازه‌ها در ساخت ابزار و وسایل در مقیاس نانو، تعیین خصوصیات مکانیکی و الکتریکی آن‌ها برای مطالعه واکنش آن‌ها با محیط مجاور از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. برای تحلیل دقیق نانوسازه‌ها، درنظرگرفتن اثر اندازه کوچک و نیروهای بین اتمی ضروری است و چشم‌پوشی از این موارد ممکن است به نتایجی با خطای قابل ملاحظه منجر شود.

روش‌های مختلفی برای تعیین خصوصیات مکانیکی و رفتار نانوسازه‌ها وجود دارد. یکی از این روش‌ها بر پایه اصول مکانیک کوانتوم است. این روش اگر چه نتایج بسیار دقیقی ارائه می‌دهد، اما به دلیل محاسبات پیچیده و محدود بودن به برخی از سیستم‌ها، کارایی وسیعی ندارد. محدودیت‌های این روش‌ها باعث شد تا محققان به جستجوی روش‌های محاسباتی و ریاضی در این زمینه بپردازند. ابتدا از مدل‌های مولکولی برای این منظور استفاده گردید

Please cite this article using:

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

A. Arefi, H. Nahvi, Investigation of small scale effect on buckling of nanorings, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 7, pp. 385-391, 2015 (In Persian)

که با وجود انطباق نتایج حاصل از این روش با مشاهدات آزمایشگاهی، حجم زیاد محاسبات باعث شد که استفاده از مدل‌های مولکولی تنها برای تحلیل نانوسازه‌های کوچک (با تعداد مولکول کم) مورد توجه قرار گیرد. بنابراین، مدل کردن نانوسازه‌ها در ابعاد بزرگ با استفاده از روش‌های دیگر از جمله تئوری‌های مکانیک محیط‌های پیوسته مورد توجه قرار گرفت. مدل‌های محیط پیوسته کلاسیک، مقیاس آزاد هستند و نمی‌توانند آثار کوانتومی را به حساب آورند؛ بنابراین، تئوری‌های اصلاح شده مختلفی از مکانیک محیط‌های پیوسته گزارش شده‌اند که اثر مقیاس کوچک را مورد بررسی قرار می‌دهند؛ از آن جمله می‌توان تئوری الاستیسیته غیر محلی ارینگن [1] را نام برد. این تئوری از جمله روش‌هایی است که علاوه‌بر اجتناب از حل معادلات پیچیده، توانایی پیش‌بینی رفتار نانوسازه‌ها در ابعاد بزرگ را نیز دارد. در این تئوری که در سال 1972 با مقاله‌های ارینگن پایه‌ریزی شد، با این فرض که تنش در یک نقطه تابعی از کرنش در کلیه نقاط ناحیه مورد نظر است،گستره وسیعی از نیروهای بین اتمی و مولکولی و ابعاد طول داخلی (فاصله بین اتم ها در شبکه بلورین) در روابط ساختاری وارد شده است.

با توجه به این که در مقیاس نانو اثر اندازه بسیار حائز اهمیت است و نیز این نانوساختارها می‌توانند کاربردهای جدیدی در الکترونیک نوری، حسگرها، ترانسفورماتورها و پزشکی داشته باشند [2،3] .

در سال 2014 رنجبر و علی بیگلو [4] به تحلیل ترموالاستیک نانوپوسته‌های کروی پرداختند. جبارزاده و همکارانش [5] خمش غیرخطی نانوصفحات دایره‌ای را مطالعه کردند. بدرود و همکارانش [6] کمانش نانوصفحات دایره‌ای را تحت بار شعاعی مطالعه کردند. نانوحلقه‌ها دسته دیگری از نانوسازه‌ها هستند که رفتار، نحوه تولید و نیز کاربردهای متفاوتی دارند و در گروه نانوصفحات و یا نانولوله‌ها قرار نمی گیرند و با توجه به کاربرد آن‌ها در سیستم‌های میکروالکترومکانیک و نانوالکترومکانیک مانند نانوسنسورها و نانوترانسدیوسرها [7] مطالعه این نانوسازه‌ها حائز اهمیت است.

ونگ و دوان [8] در سال 2008 به بررسی ارتعاشات آزاد نانوحلقه ها پرداختند. موسوی و همکارانش [9] ارتعاشات نانوحلقه ها را با درنظر گرفتن اثر برش بررسی نمودند. ونگ و همکارانش [10] در سال 2012 تاثیر مقیاس کوچک را بر کمانش نانوحلقه ها و نانوقوس‌های کم انحنا مطاالعه نموده و حل دقیقی برای آن ارائه کردند.

با توجه به این که تاکنون بر روی کمانش نانوحلقه‌ها با درنظر گرفتن اثر برش تحقیقی صورت نگرفته است، در این پژوهش ابتدا معادلات حاکم بر کمانش نانوحلقه‌ها با اعمال اثر برش بر اساس فرضیات تیموشنکو و به کمک اصل کار مجازی استخراج شده و سپس این معادلات با استفاده از روش تعادل مجاور برای دو نوع بارگذاری مختلف حل شده است. تأثیر پارامترهای مختلف از جمله پارامتر غیرمحلی، نوع بارگذاری، شماره مود و نسبت شعاع به ضخامت بر روی بار کمانش مورد بررسی قرار گرفته است. برای بررسی صحت روابط استخراج شده و روش حل، نتایج به دست آمده با نتایج دیگر تحقیقات مقایسه شده است.

1-1- تئوری الاستیسیته غیرمحلی

فرم دیفرانسیلی معادله متشکله در تئوری غیرمحلی ارینگن [1] برای مسائل یک بعدی به صورت رابطه (1) بیان می‌شود:

$$(1-\mu\frac{\partial^2}{\partial x^2})\sigma^{\mathrm{nl}}=\sigma^{\mathrm{l}}\;,\;\mu\;=(e_0a)^2 \qquad (1)$$

در رابطه فوق μ پارامتر غیرمحلی، σ^{nl} تانسور تنش غیرمحلی و σ^{l} تانسور تنش کلاسیک یا محلی هستند. هم‌چنین، a طول مشخصه داخلی (طول پیوندهای کربن-کربن، اندازه دانه و غیره) است و برای تحلیل نانولوله‌های کربنی مقدار 0/142 نانومتر به آن اختصاص داده شده است [11]. e_0 ضریب ثابتی است که مقدار آن برای هر ماده با روش‌های آزمایشگاهی تعیین می‌گردد. ونگ [12] در سال 2005، حدود e_0a را بین 0 تا 2 نانومتر معرفی نمود. تحقیقات صورت گرفته بر روی نانوسازه‌ها و انتخاب پارامتر مقیاس در محدوده ارائه شده توسط ونگ نشان داد که انتخاب پارامتر غیرمحلی در این محدوده نتایج قابل قبولی را در مقایسه با شبیه‌سازی‌های دینامیک مولکولی و نتایج تجربی ارائه می‌دهد. در تحقیق حاضر برای شبیه‌سازی اثر اندازه کوچک از مقادیر $(e_0a)^2=\mu=0,1,2,3,4\ (\mathrm{nm})^2$ استفاده شده است [13].

در شکل 1 شمایی از هندسه و قرارداد علامت‌ها نشان داده شده است. جابه‌جایی نقاط واقع برصفحه میانی در جهت‌های شعاعی و مماسی به ترتیب با $w(s)$ و $v(s)$ بیان شده و R شعاع حلقه است.

کرنش در هرنقطه به فاصله z از صفحه میانی با رابطه (2) مشخص می‌شود [14]:

$$\varepsilon=\varepsilon^0+z\kappa \qquad (2)$$

در رابطه(2)، ε^0 به کرنش نقاط مادی بر روی صفحه میانی وκ به تغییر در انحنا اشاره دارند که هر یک به‌ترتیب بصورت (3) و (4) تعریف می‌شوند [15]:

$$\varepsilon^0=\left(\frac{w}{R}+\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}s}-\frac{v}{R}\right)^2 \qquad (3)$$

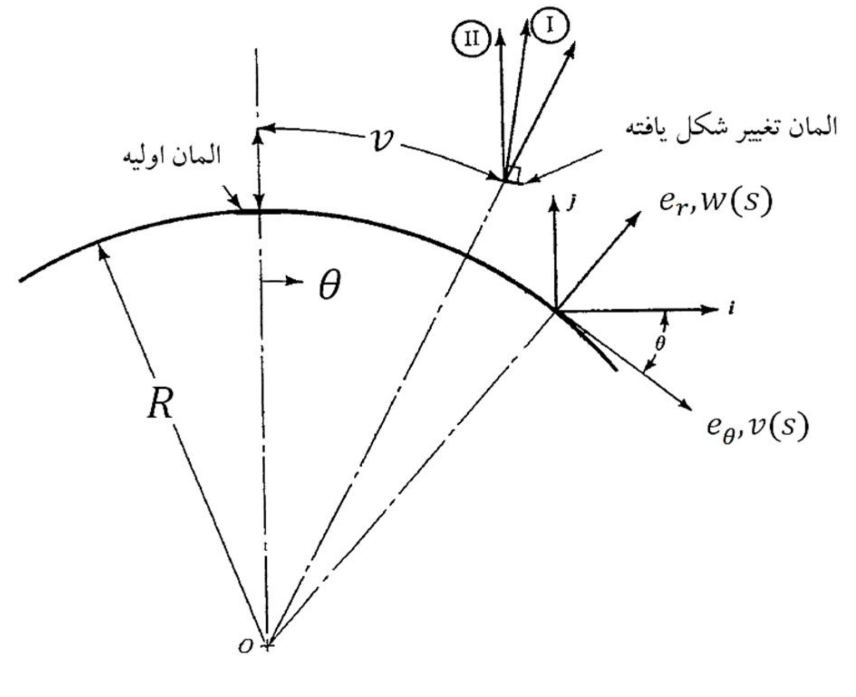
$$\kappa=\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}\theta} \qquad (4)$$

که Ψ بیانگر دوران سطح مقطع است. هم‌چنین، کرنش برشی بصورت رابطه (5) تعریف می‌شود [15]:

$$\gamma_{z\theta}=\frac{1}{R}\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\theta}-v\right)+\Psi \qquad (5)$$

2- معادلات تعادل

برای استخراج معادلات تعادل می‌توان از اصل کار مجازی بهره گرفت. با درنظر گرفتن مسأله کمینه کردن انرژی پتانسیل کل که شامل مجموع انرژی کرنشی ذخیره شده در سیستم و نیز کار نیروهای خارجی است، رابطه (6) حاصل می‌شود:



شکل1 هندسه حلقه و قرارداد علامت‌ها

$$\int_0^{2\pi R}\int_A E(\varepsilon^0 + z\kappa)(\delta\varepsilon^0 + z\delta\kappa)\mathrm{d}A\mathrm{d}s + \int_0^{2\pi R}\int_A \{G\gamma\delta\gamma\mathrm{d}A + q\delta[w + \frac{v^2 - vw' + wv' + w^2}{2R}]\}\mathrm{d}s = 0 \tag{6}$$

در رابطه (6) ضریب q کار مجازی نیروهای خارجی را در حالت فشار هیدرواستاتیک نشان می‌دهد [14]. با بهره‌گیری از روابط(3-5)، $\delta\varepsilon^0$، $\delta\gamma$ و $\delta\kappa$ را می‌توان بصورت (7) محاسبه نمود

$$\delta\varepsilon^0 = \left(\frac{\delta w}{R} + \frac{\mathrm{d}\delta v}{R\mathrm{d}\theta}\right) + \frac{1}{R^2}\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\theta} - v\right)\left(\frac{\mathrm{d}\delta w}{\mathrm{d}\theta} - \delta v\right)$$
$$\delta\kappa = \frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}\delta\Psi}{\mathrm{d}\theta},\quad \delta\gamma = \frac{1}{R}\left(\frac{\mathrm{d}\delta w}{\mathrm{d}\theta} - \delta v\right) + \delta\Psi \tag{7}$$

با جایگذاری روابط (7) در رابطه (6)، جداسازی ضرایب و با تعریف نیروی محوری، ممان خمشی و نیروی برشی با روابط (8)

$$N = \int_A \sigma\mathrm{d}A = \int_A E\varepsilon\mathrm{d}A = \int_A E\,(\varepsilon^0 + z\kappa)\mathrm{d}A = EA\varepsilon^0$$
$$M = -\int_A \sigma z\mathrm{d}A = -\int_A Ez\left(\varepsilon^0 + z\kappa\right)\mathrm{d}A = -EI\kappa$$
$$V = \int_A k_s\tau\mathrm{d}A = \int_A k_s G\gamma\,\mathrm{d}A = k_s G\gamma A \tag{8}$$

معادلات حاکم بر کمانش نانوحلقه به صورت (9) تا (11) به‌دست می‌آیند:

$$\frac{N}{R}\left(v - \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\theta}\right) - V - \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}\theta} + \Lambda = 0 \tag{9}$$

$$N + \frac{\mathrm{d}}{R\mathrm{d}\theta}\left[N\left(v - \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\theta}\right)\right] - \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta} + \Gamma = 0 \tag{10}$$

$$V - \frac{\mathrm{d}M}{R\mathrm{d}\theta} = 0 \tag{11}$$

در رابطه (9)، V و N به ترتیب به نیروهای برشی و محوری اشاره دارند و Λ و Γ مؤلفه‌های بار هستند که با توجه به نوع بارگذاری بصورت رابطه (12) تعریف می‌شوند:

$$\Lambda = \begin{cases} q\left(v - \dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\theta}\right) & \mathrm{I} \\ qv & \mathrm{II} \end{cases}$$
$$\Gamma = \begin{cases} q\left(\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta} + w + R\right) & \mathrm{I} \\ qR & \mathrm{II} \end{cases} \tag{12}$$

اندیس‌های I وII به ترتیب مؤلفه‌های بار را در حالت فشار هیدرواستاتیک و حالتی که امتداد فشار از مرکز انحنای اولیه حلقه عبور می‌کند، نشان می‌دهند. هم‌چنین، q بیانگر شدت بار بر واحد طول حلقه است.

روابط بین تنش و کرنش در تئوری غیر محلی ارینگن بصورت (13) تعریف می‌شوند:

$$\sigma_{\theta\theta} - \alpha^2\frac{\partial^2\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta^2} = E\varepsilon_{\theta\theta}$$
$$\tau_{\theta z} - \alpha^2\frac{\partial^2\tau_{\theta z}}{\partial\theta^2} = G\gamma_{\theta z} \tag{13}$$

که $\sigma_{\theta\theta}$، $\varepsilon_{\theta\theta}$ و E به ترتیب تنش نرمال، کرنش نرمال و مدول یانگ هستند. هم‌چنین، $\tau_{\theta z}$، $\gamma_{\theta z}$ و G به تنش، کرنش و مدول برشی اشاره دارند و $\alpha^2 = (e_0a/R)^2$ پارامتر مقیاس است که اثر نیروهای بین اتمی و بین مولکولی را در رابطه ساختاری وارد می‌کند. این پارامتر به‌گونه‌ای انتخاب می‌شود که نتایج تئوری ارینگن با نتایج آزمایشگاهی انطباق مناسبی داشته باشند.

با تعریف برآیندهای غیرمحلی تنش با روابط (14):

$$N = \int_A \sigma_{\theta\theta}{}^{\mathrm{nl}}\,\mathrm{d}A,\qquad M = \int_A z\sigma_{\theta\theta}{}^{\mathrm{nl}}\,\mathrm{d}A$$
$$V = \int_A \tau_{\theta z}{}^{\mathrm{nl}}\,\mathrm{d}A \tag{14}$$

و با توجه به رابطه (13)، برآیندهای تنش برای نانوحلقه به صورت (15) تا (17) به‌دست می آیند:

$$N - \alpha^2\frac{\mathrm{d}^2N}{\mathrm{d}\theta^2} = EA\left(\frac{w}{R} + \frac{\mathrm{d}v}{R\mathrm{d}\theta}\right) + \frac{EA}{2R^2}\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\theta} - v\right)^2 \tag{15}$$
$$M - \alpha^2\frac{\mathrm{d}^2M}{\mathrm{d}\theta^2} = \frac{EI}{R}\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}\theta} \tag{16}$$
$$V - \alpha^2\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}\theta^2} = k_sAG\left[\frac{1}{R}\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\theta} - v\right) + \Psi\right] \tag{17}$$

برای تصحیح فرض توزیع یکنواخت تنش برشی در راستای ضخامت سازه، در تعریف نیروی برشی از فاکتور تصحیح برش[1] (k_s) بهره گرفته شده است.

برای به‌دست آوردن معادلات غیرمحلی کافی است برآیندهای غیرمحلی تنش در روابط تعادل جایگزین شوند. برای محاسبه نیروی محوری غیرمحلی باید $\frac{\mathrm{d}^2N}{\mathrm{d}\theta^2}$ را از رابطه (12) حذف نمود. با جایگذاری $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta}$ از رابطه (9) در رابطه (10) و حذف $\frac{\mathrm{d}^2N}{\mathrm{d}\theta^2}$ از معادله حاصل و با توجه به رابطه (17)، نیروی محوری غیر محلی مطابق با رابطه (18) به‌دست می‌آید:

$$N = \frac{EA\varepsilon^0}{(1+\alpha^2)} - \frac{q\alpha^2}{(1+\alpha^2)}\begin{cases}\left(w + \dfrac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}\theta^2} + R\right) & \mathrm{I} \\ \left(R - \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta}\right) & \mathrm{II}\end{cases} \tag{18}$$

حذف $\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}\theta^2}$ از روابط (17) و (10)، نیروی برشی را به‌صورت (19) نتیجه می‌دهد:

$$V = k_sAG\gamma_{z\theta} + \alpha^2\left[\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}\theta} + \frac{\mathrm{d}^2}{R\mathrm{d}\theta^2}\left[N\left(v - \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\theta}\right)\right] + q\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(w + \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta}\right) & I \\ 0 & II\end{cases}\right] \tag{19}$$

با محاسبه مشتق دوم ممان خمشی از روابط (10) و (11) و جایگذاری در رابطه (19) ممان خمشی را می‌توان به فرم (20) نوشت:

$$M = EI\kappa + R\alpha^2\left[N + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[N\left(v - \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\theta}\right)\right] + q\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(w + \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta}\right) & \mathrm{I} \\ 0 & \mathrm{II}\end{cases}\right] \tag{20}$$

معادلات تعادل غیرمحلی با جای‌گذاری روابط (18) تا (20) در روابط (9) تا (11) برحسب مجهولات w، v و Ψ به‌دست می‌آیند. این معادلات در بخش ضمیمه (معادلات (8-1) تا (8-3)) ارائه شده‌اند.

3- خطی سازی معادلات تعادل

برای نانوحلقه‌های مدور تحت بارگذاری متقارن، حلقه قبل از کمانش به طور یکنواخت فشرده می‌شود؛ در این حالت جابه‌جایی‌ها فقط شعاعی هستند که با رابطه $w^p = -qR^2/EA$ محاسبه می‌شوند [16]. با فرض این که w^*، v^* و Ψ^* بیانگر میزان انحراف جزئی کمیت‌ها نسبت به شکل مدور باشند، می‌توان تغییر شکل کلی حلقه را برابر با مجموع حل پیش کمانش و انحراف جزئی درنظر گرفت. به زبان ریاضی می‌توان نوشت:

$$v = v^*$$
$$w = w^p + w^*$$
$$\Psi = \Psi^* \tag{21}$$

1- Shear correction factor

با جایگذاری رابطه (21) در روابط (18) تا (20)، ضرب این روابط در R^3/EI و صرفنظر از جملات شامل توان‌های دوم و سوم جابه‌جایی‌ها، معادلات خطی شده حاکم بر کمانش برای دو حالت بارگذاری به فرم زیر می‌شوند:

الف) در صورتی که توزیع فشار به صورت هیدرواستاتیک درنظر گرفته شود:

$$\begin{aligned}&(\frac{R}{\rho})^2\left(w^{*\prime}+v^{*\prime\prime}\right)+\Omega\left(w^{*\prime}-v^*+R\Psi^*\right)+\\&+\frac{\alpha^2\gamma}{(1+\alpha^2)}\Big\{w^{*\prime}-v^*\\&\quad-\left(\frac{w^p}{R}+1\right)\big[w^{*\prime}-v^*\\&\quad+\alpha^2\left(-w^{*\prime\prime\prime}+v^{*\prime\prime}\right)\big]\Big\}=0\end{aligned}\tag{22}$$

$$\begin{aligned}&\frac{-(\frac{R}{\rho})^2}{(1+\alpha^2)}\left[v^{*\prime}+w^*-\alpha^2\left(w^{*\prime\prime}+v^{*\prime\prime\prime}\right)\right]\\&\quad+\Omega\left(w^{*\prime\prime}-v^{*\prime}+R\Psi^{*\prime}\right)\\&+\frac{\gamma}{(1+\alpha^2)}\big\{-w^*+\alpha^2(1-\alpha^2)w^{*\prime\prime\prime\prime}+(2\alpha^2-1)w^{*\prime\prime}\\&\quad-\alpha^2v^{*\prime}\big)\\&+\alpha^4v^{*\prime\prime\prime}+\alpha^2\left(\frac{w^p}{R}+1\right)\big[v^{*\prime}-w^{*\prime\prime}\\&\quad-\alpha^2\left(-w^{*\prime\prime\prime\prime}+v^{*\prime\prime\prime}\right)\big]\big\}=0\end{aligned}\tag{23}$$

$$\Omega\left(w^{*\prime}-v^*+R\Psi^*\right)-R\Psi^{*\prime\prime}=0\tag{24}$$

ب) برای حالتی که امتداد بار از مرکز انحنای اولیه حلقه بگذرد:

$$\begin{aligned}&(\frac{R}{\rho})^2\left(v^{*\prime\prime}+w^{*\prime}\right)+\Omega\left(w^{*\prime}-v^*+R\Psi^*\right)-\gamma\big(w^{*\prime}\\&\quad-\alpha^2w^{*\prime\prime\prime}\big)=0\end{aligned}\tag{25}$$

$$\begin{aligned}&\frac{-(\frac{R}{\rho})^2}{(1+\alpha^2)}\left[v^{*\prime}+w^*-\alpha^2\left(w^{*\prime\prime}+v^{*\prime\prime\prime}\right)\right]\\&\quad+\Omega\left(w^{*\prime\prime}-v^{*\prime}+R\Psi^{*\prime}\right)\\&+\frac{\gamma}{(1+\alpha^2)}\big\{(1+\alpha^2)\left(-w^{*\prime\prime}+\alpha^2w^{*\prime\prime\prime\prime}\right)+v^{*\prime}\\&\quad-\alpha^2v^{*\prime\prime\prime}\big\}=0\end{aligned}\tag{26}$$

$$\Omega\left(w^{*\prime}-v^*+R\Psi^*\right)-R\Psi^{*\prime\prime}=0\tag{27}$$

در روابط بالا، $\Omega=k_sAGR^2/EI$، $\gamma=qR^3/EI$ و $\rho^2=I/A$ به ترتیب معرف پارامتر تغییر شکل برشی، پارامتر بار و شعاع ژیراسیون[1] می‌باشند.

4-حل معادلات حاکم بر کمانش

حل دو دسته معادلات (22-24) و (24-26) مستلزم تعریف شرایط مرزی است. برای حلقه کامل، جابه‌جایی‌ها و مشتقات آن‌ها باید پریودیک باشند؛ بنابراین با تعریف توابع جابه‌جایی بصورت (28)، علاوه‌بر ارضای شرایط مرزی، معادلات تعادل نیز ارضا می‌شوند.

$$\begin{aligned}&w^*=W_n\cos(n\theta)\quad v^*=V_n\sin(n\theta)\\&\Psi^*=S_n\sin(n\theta)\end{aligned}\tag{28}$$

در رابطه (28) n عدد صحیح و W_n،V_n و S_n ضرایب ثابت هستند. جای-گذاری رابطه (28) به طور مجزا در دسته معادلات (22) تا (24) و نیز (25) تا (27)، روابط (29) را نتیجه می‌دهد:

$$\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}W_n\\V_n\\S_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\tag{29}$$

که درایه‌های ماتریس ضرایب برای فشار هیدرواستاتیک بصورت (30) تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned}a_{11}&=-\frac{\gamma\alpha^2n}{(1+\alpha^2)}\frac{w^p}{R}(1+\alpha^2n^2)+n(\Omega+(\frac{R}{\rho})^2)\\a_{12}&=-\frac{\gamma\alpha^2n}{(1+\alpha^2)}\frac{w^p}{R}(1+\alpha^2n^2)+(\Omega+n^2(\frac{R}{\rho})^2)\\a_{13}&=-\Omega R\\a_{21}&=\frac{\gamma}{(1+\alpha^2)}\frac{w^p}{R}(1-n^2-\alpha^2n^2)+\Omega n^2\\&\quad+\frac{(\frac{R}{\rho})^2(1+\alpha^2n^2)}{(1+\alpha^2)}\\a_{22}&=[-\gamma\alpha^2\frac{w^p}{R}+(\frac{R}{\rho})^2]n\frac{(1+\alpha^2n^2)}{(1+\alpha^2)}+n\Omega\\a_{23}&=a_{31}=-\Omega n\\a_{33}&=R(\Omega+n^2)\\a_{32}&=-\Omega\end{aligned}\tag{30}$$

در حالتی که امتداد فشار از مرکز انحنای حلقه بگذرد، درایه‌های ماتریس ضرایب بصورت (31) خواهند بود:

$$\begin{aligned}a_{11}&=-\gamma n(1+\alpha^2n^2)+n(\Omega+(\frac{R}{\rho})^2)\\a_{12}&=(\Omega+n^2(\frac{R}{\rho})^2),\qquad a_{13}=-\Omega R\\a_{21}&=-\gamma n^2(1+\alpha^2n^2)+\Omega n^2+(\frac{R}{\rho})^2\frac{(1+\alpha^2n^2)}{(1+\alpha^2)}\\a_{22}&=[-\gamma+(\frac{R}{\rho})^2]n\frac{(1+\alpha^2n^2)}{(1+\alpha^2)}+n\Omega\\a_{23}&=a_{31}=-\Omega n,\qquad a_{32}=-\Omega\\a_{33}&=R(\Omega+n^2)\end{aligned}\tag{31}$$

برای محاسبه بارهای بحرانی باید دترمینان ماتریس ضرایب برابر با صفر شود و در نهایت بارهای بی‌بعد کمانش بصورت (32) قابل محاسبه اند:

بار بی‌بعد مربوط به فشار هیدرواستاتیک:

$$\gamma=\frac{n^2-1}{(1+\alpha^2n^2)(1+(\frac{\rho}{R})^2+n^2\Omega)}\tag{32}$$

بار بی‌بعد در حالتی که امتداد فشار از مرکز حلقه می‌گذرد:

$$\gamma=\frac{-(n^2-1)^2}{(1+\alpha^2n^2)[(2-n^2)(1+n^2\Omega)+n^2(\frac{\rho}{R})^2]}\tag{33}$$

بار بحرانی کمترین باری است که به ازای آن پدیده کمانش رخ می‌دهد. برای یافتن بار بحرانی کافی است که γ کمینه گردد. با توجه به این که به ازای $n=1$ بارهای بی‌بعد صفر می‌شوند، بنابراین بار بحرانی متناظر با $n=2$ خواهد بود. با جایگذاری $n=2$ در روابط (32) و (33)، بارهای بی‌بعد بحرانی برای بارگذاری‌های حالت‌های (الف) و (ب) به صورت (34) و (35) به-دست می‌آیند:

$$\gamma_{\rm cr}=\frac{3}{(1+4\alpha^2)(1+(\frac{\rho}{R})^2+4\Omega)}\tag{34}$$

$$\gamma_{\rm cr}=\frac{-9}{(1+4\alpha^2)[-2(1+4\Omega)+4(\frac{\rho}{R})^2]}\tag{35}$$

5-نتایج

در این بخش تأثیر پارامترهای مختلف از جمله ضریب مقیاس، شعاع نانوحلقه، نوع بارگذاری، تغییر شکل برشی و شماره مودهای کمانش بر روی بارهای بی‌بعد کمانش بررسی خواهد شد.

تأثیر تغییر شکل برشی بر روی کمانش نانوحلقه

همان‌طور که گفته شد برای تصحیح فرض توزیع یکنواخت برش در امتداد ضخامت، فاکتور تصحیح برش در رابطه نیروی برشی منظور می‌گردد. این

1- Gyration radius

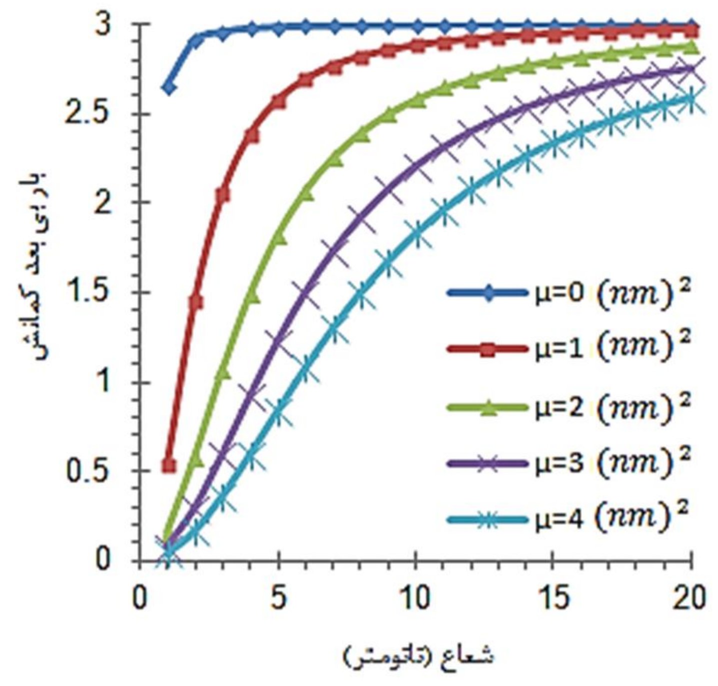
پارامتر به شکل سطح مقطع بستگی دارد. در اینجا نسبت پواسون[1]، فاکتور تصحیح برش و ضخامت به ترتیب برابر با 0/3، 0/8333 و 0/34 نانومتر درنظر گرفته شده‌اند[9].

برای اطمینان از صحت نتایج می توان مشاهده نمود که روابط (32) و (33) با صرفنظر از برش و توجه به‌اینکه در حلقه نازک $\rho^2/R^2 << 1$ است، به ترتیب به بارهای کمانش به‌دست آمده در [17] به‌صورت زیر تبدیل می شوند.

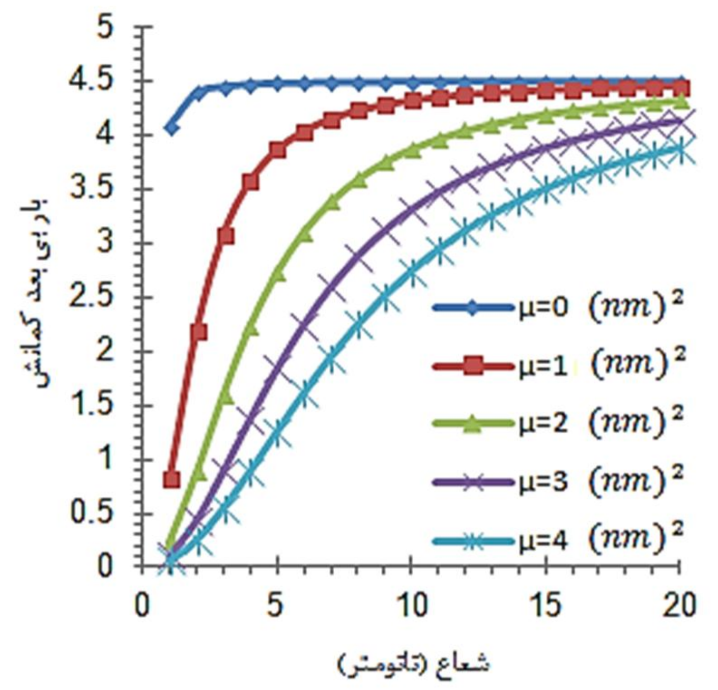
$$\gamma = \frac{n^2 - 1}{(1 + \alpha^2 n^2)}$$

$$\gamma = \frac{-(n^2 - 1)^2}{(1 + \alpha^2 n^2)(2 - n^2)}$$

شکل 2 تغییرات بار بی‌بعد کمانش را برحسب شعاع نانوحلقه برای پارامترهای غیرمحلی مختلف نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که با افزایش شعاع، بار بی-بعد کمانش برای مقادیر مختلف پارامتر غیرمحلی افزایش می‌یابد. برای مقادیر کوچک پارامتر غیرمحلی، شیب افزایش بار بی‌بعد کمانش بیشتر است و با افزایش شعاع نانوحلقه اثر پارامتر غیر محلی کم می‌شود و بارهای کمانش در شعاع‌های بزرگ به مقادیر کلاسیک همگرا می‌شوند.



(الف)

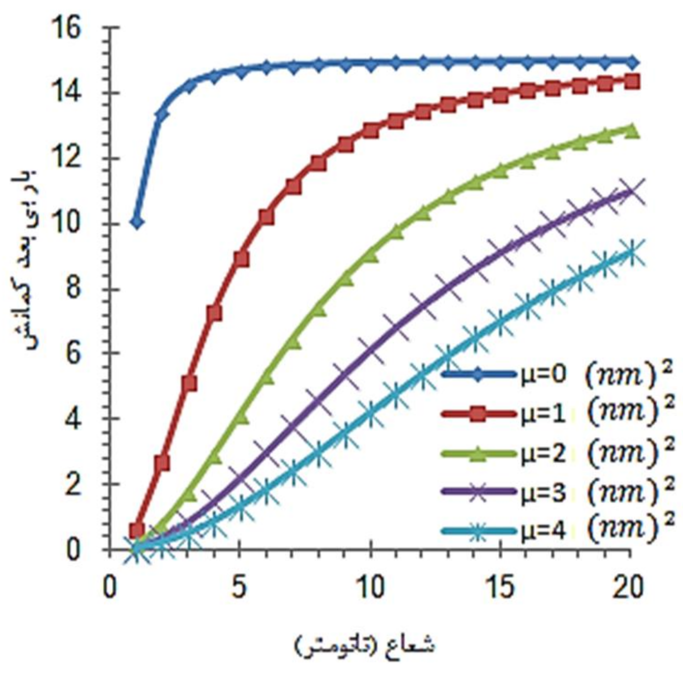


(ب)

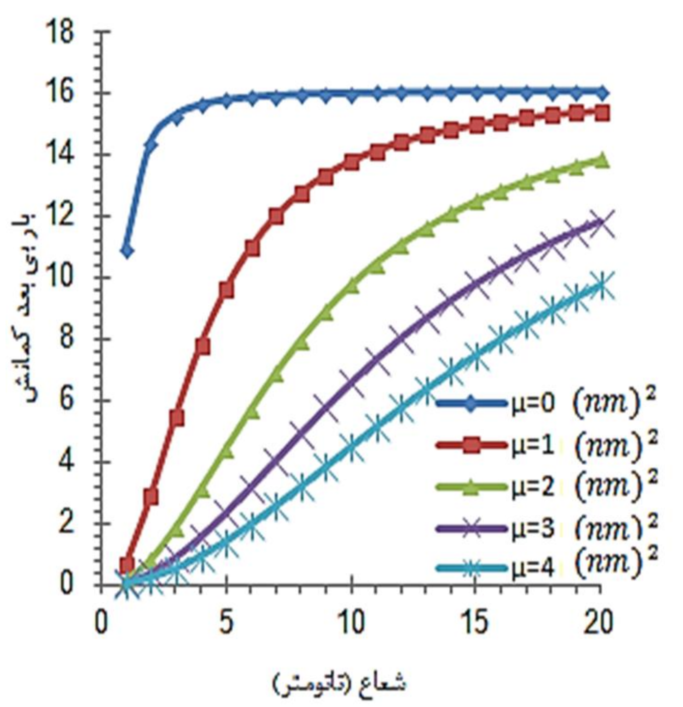
شکل 2 تغییرات بار بی‌بعد کمانش با شعاع نانوحلقه برای مقادیر مختلف پارامتر غیر محلی در مود دوم برای دو نوع بارگذاری، الف) فشار هیدرواستاتیک، ب)عبور راستای بار از مرکز انحنای اولیه حلقه

شکل‌های 3 و 4 تغییرات بار بی‌بعد کمانش را برحسب شعاع نانوحلقه، به ترتیب در مودهای چهارم و ششم نشان می‌دهند. همان‌طور که مشاهده می-شود، افزایش پارامتر غیرمحلی باعث کاهش بارهای کمانش در مودهای چهارم و ششم می‌شود، اما اثر کاهشی ضریب مقیاس در مود ششم بیشتر از مودهای دوم و چهارم است. بعنوان مثال در مود چهارم در حالت (الف) در شعاع 20 نانومتر تغییرات پارامتر بار بین 8 تا 14 و درمود ششم بین 14 تا 35 است. هم‌چنین دیده می‌شود در مودهای بالاتر، همگرایی منحنی‌ها در شعاع‌های بزرگتری صورت می‌پذیرد.

در شکل 5 تغییرات بار بی‌بعد بحرانی $(n = 2)$ برحسب پارامتر غیر محلی برای مقادیر مختلف نسبت شعاع به ضخامت رسم شده است. در مقادیر کوچکتر R/h مقدار ضریب مقیاس در کاهش بار بی‌بعد کمانش نقش بیشتری را ایفا می‌کنند. بعبارت دیگر هر چه ابعاد کوچکتر باشند اثر مقیاس بیشتر خود را نشان می‌دهد. در $R/h = 5$، تغییرات بار بی‌بعد کمانش با پارامتر غیرمحلی غیرخطی است. با افزایش این نسبت، تاثیر پارامتر مقیاس کمتر می‌شود، به گونه‌ای که برای $R/h = 25$، تغییر پارامتر بار با پارامتر غیرمحلی تقریباً خطی بوده و پارامتر بار با شیب ناچیز به مقدار کلاسیک ($\mu = 0\ nm^2$) همگرا می‌گردد. همان‌طور که در شکل دیده می‌شود، بارهای



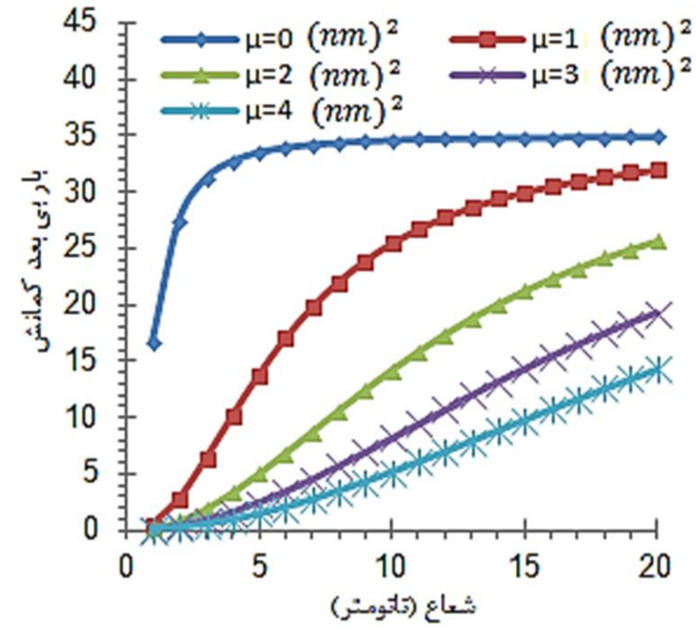
(الف)



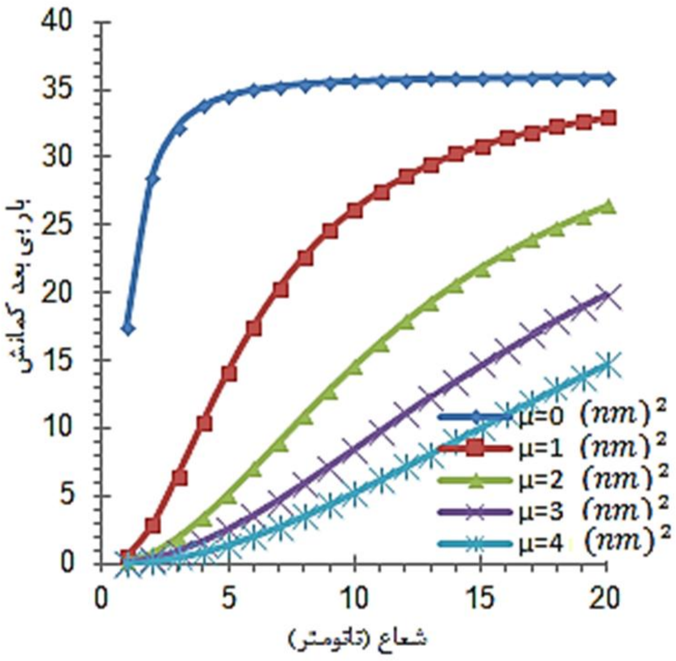
(ب)

شکل 3 تغییرات بار بی‌بعد کمانش با شعاع نانوحلقه برای مقادیر مختلف پارامتر غیر محلی در مود چهارم برای دو نوع بارگذاری الف) فشار هیدرواستاتیک، ب) عبور راستای بار از مرکز انحنای اولیه حلقه

1- Poisson's ratio



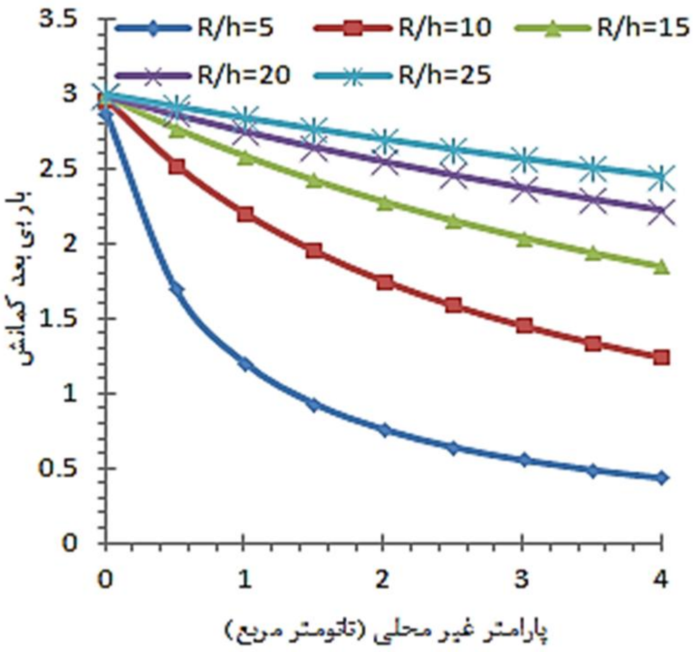
(الف)



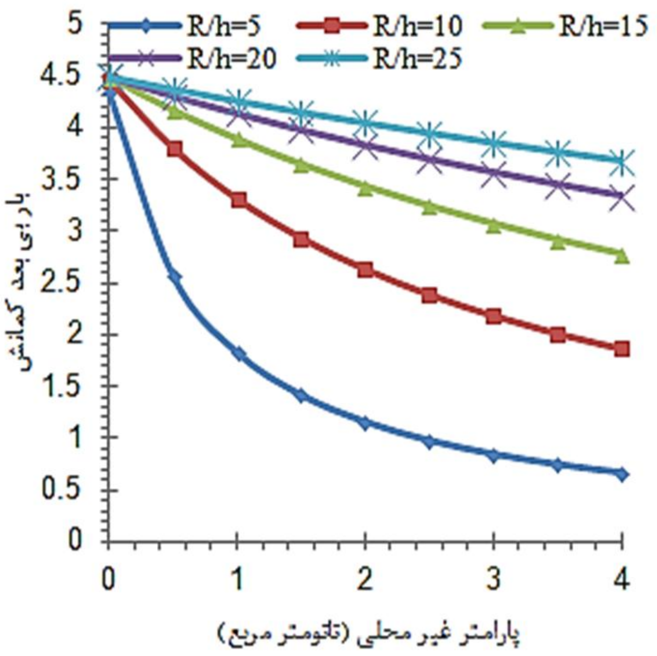
(ب)

شکل 4 تغییرات بار بی‌بعد کمانش با شعاع نانوحلقه برای مقادیر مختلف پارامتر غیر محلی در مود ششم برای دو نوع بارگذاری الف) فشار هیدرواستاتیک، ب) عبور راستای بار از مرکز انحنای اولیه حلقه

کمانش در حالتی که امتداد بار از مرکز انحنای اولیه حلقه عبور می‌کند، بزرگتر از مقدار مشابه با درنظر گرفتن رفتار هیدرواستاتیک هستند. همچنین با توجه به شکل، در حالت کلی به ازای یک مقدار ثابت R/h، با افزایش پارامتر غیر محلی، بار بی بعد کمانش کاهش می‌یابد.



(الف)



(ب)

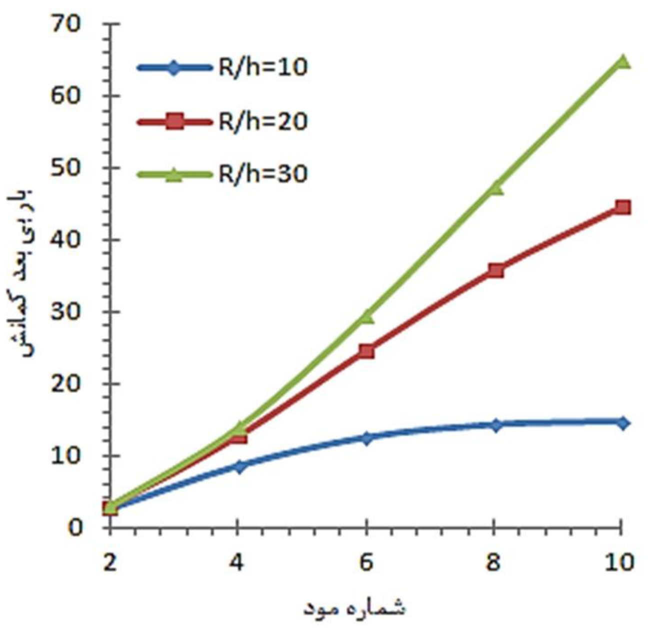
شکل 5 تغییرات بار بی‌بعد کمانش با پارامتر غیر محلی برای مقادیر مختلف نسبت شعاع به ضخامت برای دو نوع بارگذاری الف) فشار هیدرواستاتیک، ب) عبور راستای بار از مرکز انحنای اولیه حلقه

شکل 6 رفتار بار بی‌بعد کمانش را در برابر شماره مود برای نسبت‌های مختلف شعاع به ضخامت نشان می‌دهد. در اینجا $\mu = 0.5\ nm^2$ فرض شده است. با افزایش شماره مود، بار کمانش به ازای کلیه نسبت‌ها افزایش می‌یابد. از سوی دیگر افزایش نسبت شعاع به ضخامت نیز منجر به افزایش پارامتر بار می‌گردد. بنابراین نسبت شعاع به ضخامت نقش مهمی بر روی بار کمانش در مودهای بالاتر دارد. این رفتار در هر دو حالت بارگذاری قابل مشاهده است.

6- نتیجه‌گیری

در این پژوهش، معادلات حاکم بر کمانش نانوحلقه‌ها و نانوقوس‌های مدور با اعمال برش و به کمک فرضیات تیموشنکو، با درنظر گرفتن دو نوع بارگذاری، بر مبنای اصل کار مجازی استخراج شد. برای منظور نمودن اثر اندازه کوچک در روابط حاکم بر کمانش، از تئوری الاستیسیته غیرمحلی بهره گرفته شد. معادلات حاکم به روش تعادل مجاور حل شد و تأثیر پارامترهای مختلف نظیر شعاع نانوحلقه، پارامتر غیرمحلی، شماره مود، نوع رفتار بار و تغییر شکل برشی بر روی بار بی‌بعد کمانش مورد مطالعه قرار گرفت. مشاهده شد که:

- منظور نمودن تغییر شکل برشی برای محاسبه دقیق‌تر بار کمانش، به‌ویژه در مودهای بالاتر، ضروری است. در این مودها بار کمانش تحت تأثیر نوع بارگذاری قرار نمی‌گیرد.



شکل 6 تغییرات بار بی‌بعد کمانش برحسب شماره مود در حالت فشار هیدرواستاتیک برای مقادیر مختلف نسبت شعاع به ضخامت

- پارامتر غیرمحلی با کاهش سختی سیستم نقش بسزایی را در کاهش بار کمانش، بویژه در مودهای بالاتر ایفا می‌کند.
- افزایش شعاع نانوحلقه منجر به کاهش تأثیر مقیاس کوچک شده و اختلاف نتایج کلاسیک و غیرمحلی کاهش می‌یابد.

7-ضمیمه

با توجه به این که در روابط(9) و (10) پارامترهای Λ و Γ وجود دارند که هر یک نماینده دو نوع بارگذاری هستند که با I و II نشان داده شده اند، با ترکیب روابط نامبرده در متن مقاله و جایگذاری در (9-11)، روابط زیر حاصل می شود:

معادلات تعادل غیر محلی:

$$\frac{EA}{(1+\alpha^2)}\{\left[\frac{1}{R}(v'+w)+\frac{1}{2}\left(\frac{v-w'}{R}\right)^2\right]\left(\frac{v-w'}{R}\right)$$
$$-[\alpha^2\left[\frac{1}{R}(v'+w)+\frac{1}{2}\left(\frac{v-w'}{R}\right)^2\right]\left(\frac{v-w'}{R}\right)]''\}$$
$$-k_sAG\left[\frac{w'-v}{R}+\Psi\right] \qquad -EA\left[\frac{1}{R}(v'+w)+\frac{1}{2}\left(\frac{v-w'}{R}\right)^2\right]+$$
$$q[\alpha^2\left(-v''+w'''\right)+\ v-w'-\frac{\alpha^2}{(1+\alpha^2)}\{(w''+w+R)$$
$$\left(\frac{v-w'}{R}\right)-\frac{\alpha^2}{(1+\alpha^2)}\{(w''+w+R)\left(\frac{v-w'}{R}\right)$$
$$-\alpha^2\left[(w''+w+R)\left(\frac{v-w'}{R}\right)\right]''\}]=0 \qquad \mathrm{I}$$

$$\frac{EA}{(1+\alpha^2)}\{\left[\frac{1}{R}(v'+w)+\frac{1}{2}\left(\frac{v-w'}{R}\right)^2\right]\left(\frac{v-w'}{R}\right)$$
$$-[\alpha^2\left[\frac{1}{R}(v'+w)+\frac{1}{2}\left(\frac{v-w'}{R}\right)^2\right]\left(\frac{v-w'}{R}\right)]''\}$$
$$-k_sAG\left[\frac{w'-v}{R}+\Psi\right]-EA\left[\frac{1}{R}(v'+w)+\frac{1}{2}\left(\frac{v-w'}{R}\right)^2\right]$$
$$+q[-\frac{\alpha^2}{(1+\alpha^2)}\left\{(R-v')\left(\frac{v-w'}{R}\right)\right.$$
$$\left.-\alpha^2\left[(R-v')\left(\frac{v-w'}{R}\right)\right]''\right\}$$
$$+v-\alpha^2v''=0 \qquad \mathrm{II}$$

(1-8)

$$\frac{EA}{(1+\alpha^2)}\{\left[\frac{1}{R}(v'+w)+\frac{1}{2}\left(\frac{v-w'}{R}\right)^2\right]$$
$$+[\left[\frac{1}{R}(v'+w)+\frac{1}{2}\left(\frac{v-w'}{R}\right)^2\right]\left(\frac{v-w'}{R}\right)]'$$
$$-\alpha^2\{\left[\frac{1}{R}(v'+w)+\frac{1}{2}\left(\frac{v-w'}{R}\right)^2\right]''$$
$$+[\left[\frac{1}{R}(v'+w)+\frac{1}{2}\left(\frac{v-w'}{R}\right)^2\right]\left(\frac{v-w'}{R}\right)]'''\}\}$$
$$-k_sAG\left[\frac{w''-v'}{R}+\Psi'\right]$$
$$+\mathrm{q}\{-\alpha^2(v'''+w'')+v'+w+R$$
$$-\frac{\alpha^2}{(1+\alpha^2)}\{(w+w''+R)-\alpha^2(w''+w'''')$$
$$+\left[(w+w''+R)\left(\frac{v-w'}{R}\right)\right]'$$
$$-\alpha^2[(w+w''+R)\left(\frac{v-w'}{R}\right)]'''\}=0\} \qquad \mathrm{I}$$

$$\frac{EA}{(1+\alpha^2)}\{\left[\frac{1}{R}(v'+w)+\frac{1}{2}\left(\frac{v-w'}{R}\right)^2\right]$$
$$+[\left[\frac{1}{R}(v'+w)+\frac{1}{2}\left(\frac{v-w'}{R}\right)^2\right]\left(\frac{v-w'}{R}\right)]'$$
$$-\alpha^2\{\left[\frac{1}{R}(v'+w)+\frac{1}{2}\left(\frac{v-w'}{R}\right)^2\right]''$$
$$+[\left[\frac{1}{R}(v'+w)+\frac{1}{2}\left(\frac{v-w'}{R}\right)^2\right]\left(\frac{v-w'}{R}\right)]'''\}\}$$
$$-k_sAG\left[\frac{w''-v'}{R}+\Psi'\right]$$
$$+\mathrm{q}\{\frac{1}{(1+\alpha^2)}\{\alpha^2(v'-\alpha^2v''')+R+\left[(R-v')\left(\frac{v-w'}{R}\right)\right]'$$
$$-\alpha^2\left[(R-v')\left(\frac{v-w'}{R}\right)\right]'''\}=0 \qquad \mathrm{II} \qquad (2\text{-}8)$$

$$k_sAG\left[\frac{w'-v}{R}+\Psi\right]-\frac{EI}{R^2}\Psi''=0 \qquad (3\text{-}8)$$

که $(\,)'=d/d\theta$ است.

8- مراجع

[1] A.C. Eringen, On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves, *Journal of Applied Physics*, Vol. 54, pp. 4703–4710,1983.

[2] *Zinc oxid nanostructures,* Accessed 30 january 2004, http://nano.ir/index.php?ctrl=paper&actn=paper_view&id=1042&lang=1. (In Persian)

[3] http://gtresearchnews.gatech.edu/newsrelease/nanorings.htm,.

[4] J. Ranjbar and A. Alibeigloo, Nonlocal elasticity theory for thermo-elastic analysis of nanoscale spherical shell subjected to thermal shock , *Modares Mechanical Engineering,* Vol. 14, No. 9, pp. 65-72, 2014 (In Persian).

[5] M. Jabbarzadeh, H. Talati and A. R. Noroozi, Nonlinear analysis of circular grapheme sheet using nonlocal continuum mechanic theory, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 9, pp. 57-66, 2013 (In Persian).

[6] M. Bedroud, Sh. Hosseini-Hashemi and R. Nazemnezhad, Buckling ofcircular/annular Mindlin nanoplates via nonlocal elasticity, *Acta Mechanica*, Vol. 224, pp. 2663–2676, 2013.

[7] *Nanorings: Seamless Circular Nanostructures Could be Sensors, Resonators and Transducers for Nanoelectronic and Biotechnology Applications,* Accessed 26 February 2004,

[8] C. M. Wang and W.H. Duan , Free vibration of nanorings/arches based on nonlocal elasticity, *Journal of Applied Physics*, Vol. 104, No. 014303, 2008.

[9] H. Moosavi, M. Mohammadi, A. Farajpour, S. H. Shahidi, Vibration analysis of nanorings using nonlocal continuum mechanics and shear deformable ring theory, *physica E*, Vol. 44, pp. 135–140, 2011.

[10] C. M. Wang, Y. Xiang, J. Yang, S. Kitipornchai, Buckling of nanorings/arches based on nonlocal elasticity,*International Journal of Applied Mechanics*, Vol. 4, No. 1250025, 2012.

[11] Y. Q. Zhang, G. R. Liu and J. S. Wang, Small scale effects on buckling of multi-walled carbon nanotubes, *Phisycs Review B,* Vol. 70, No. 205430, 2004.

[12] Q. Wang, Wave propagation in carbon nanotubes via nonlocal continuum mechanics, *Journal of Applied Physics,* Vol. 98, No. 124301, 2005.

[13] J. K. Phadikar and S. C. Pradhan, Variational formulation and finite element analysis for nonlocal elastic nanobeams and nanoplates, *Computational materials science*, Vol. 49, pp. 492-499, 2010.

[14] G. J. Simitses and D. H. Hodges, *Fundamentals of Structural Stability*, pp. 183-186, Elsevier Inc. 2006.

[15] J. Mc Namara, L. Liu and A. M. Wass, Buckling of shear deformable multi-layered rings due to fluid pressure loading, *international Mechanical Engineering Congress and Exposition*, 2001.

[16] D. O. Brush and B.O. Almroth, *Buckling of bars, Plates and Shells,* McGraw-Hill, New York 1975.

[17] A. Arefi, H. R. Mirdamadi and M. Salimi, Stability analysis of circular nanorings under different loading behavior by nonlocal elasticity theory, *Computational & theoretical nanoscience*, Vol. 9, pp. 1-8, 2012.