مجله مهندسی مکانیک مدرس، آذر 1394، دوره 15، شماره 9، ص‌ص 11-22

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

کنترل فعال ارتعاش تیر یکسرگیردار با وصله‌های پیزوالکتریک بهینه‌شده از نظر طول و مکان

سعید علیقلی زاده[1]، محمد علی حامد[2*]، رضا حسن‌نژاد قدیم[3]

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز

2- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز

3- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز

* تبریز، صندوق پستی 14766-51666، ma.hamed@tabrizu.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 22 فروردین 1394

پذیرش: 20 خرداد 1394

ارائه در سایت: 31 تیر 1394

کلید واژگان:

کنترل فعال

پیزوالکتریک

بهینه‌سازی

کنترل بهینه

چکیده

مواد پیزوالکتریک به عنوان حسگر و عملگر در کنترل ارتعاش سازه‌ها به کار می‌روند. هندسه و مکان عملگرها و حسگرهای پیزوالکتریک تأثیر بسیار زیادی بر انرژی مصرفی و عملکرد سیستم کنترلی دارد، بنابراین در این تحقیق با تعریف تابع هزینه مناسب به بهینه‌سازی طول و مکان عملگر پیزوالکتریک برای کاهش مطلوب ارتعاشات تیر یکسرگیردار با انرژی کنترلی مناسب پرداخته می‌شود. تابع هزینه، تابع درجه دوم برحسب جابجایی و نیروی کنترلی در نظر گرفته شده‌است. مدل‌سازی سیستم بر پایه تئوری تیر اویلر برنولی انجام گرفته و از اصل هامیلتون برای بدست آوردن معادلات حرکت استفاده شده است. در این روش، ولتاژ کنترلی لایهٔ عملگر در معادلات شرایط مرزی سیستم ظاهر می شود که مسأله را تبدیل به مسئلهٔ مقدار ویژه با شرایط مرزی متغیر با زمان می‌کند. با تعریف توابع جابجایی خاص و همگن‌سازی شرایط مرزی ولتاژ کنترلی عملگر به صورت نیروی تحریک خارجی در معادلات حرکت سیستم ظاهر می‌شود. کنترل‌کننده‌های بهینه رگلاتور خطی مرتبه دو و خطی مرتبه دو گاوسی در کنترل سیستم ارتعاشی مورد بررسی قرار گرفته‌اند و برای تخمین متغیرهای حالت در روش خطی مرتبه دو گاوسی از تئوری فیلتر کالمن استفاده شده است. در شبیه‌سازی عددی با بررسی عملکرد وصله‌های بهینه‌شده با طول‌های محدود و نامحدود در مقایسه با عملکرد وصله کامل، نقش موثر تابع هدف و بهینه‌سازی در کاهش ولتاژ کنترلی اعمالی نشان داده شده است.

Active vibration control of the clamped beam with length and location optimized piezoelectric patches

Saeed Aligholizadeh, Mohammad Ali Hamed*, Reza Hassannejad Qadim

Department of Mechanical Engineering, University of Tabriz, Tabriz, Iran

* P.O.B. 51666-14766 Tabriz, Iran, ma.hamed@tabrizu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 11 April 2015
Accepted 10 June 2015
Available Online 22 July 2015

Keywords:
Active Control
Piezoelectric
Optimization
Optimal Control

ABSTRACT

Piezoelectric materials are used as sensor and actuator in order to control the vibrations of structures. Geometry and location of the piezoelectric sensors and actuators have a substantial effect on the consumed electric energy and performance of the control system, therefore, in this study by defining an appropriate cost function, an optimum length and location of the piezoelectric actuator was determined in order to achieve a desirable decrease on vibration amplitude of a cantilever beam by using appropriate control energy. The standard quadratic function of beam displacement and control energy was used as the cost function. Mathematical modeling was based on Euler Bernoulli beam theory and Hamilton's principle was used in order to achieve the equations of motion. In this approach, the control voltage of actuator layer appears in the boundary conditions of the problem, which turns it to a time varying boundary condition problem. By defining special displacement functions and homogenizing the boundary conditions, control voltage of the actuator appears as external excitement in the equations of motion. In the current study, optimum LQR and LQG controllers were investigated and Kalman filter theory was used in order to estimate the state variables. In numerical simulations, by investigating the performance of optimized limited or unlimited patches in comparison with complete one, the effective role of the objective function and optimization have been shown in decreasing applied control voltage.

1- مقدمه

کاهش ارتعاشات مسأله‌ای حائز اهمیت در بسیاری از زمینه‌های مهندسی است چرا که ارتعاشات باعث عملکرد نامطلوب سیستم‌ها و طول عمر پایین سازه‌ها و همچنین کاهش دقت کاری در سیستم‌های سرو مانند ربات‌ها می‌شود. در گذشته برای کاهش ارتعاشات، سختی و جرم سازه را افزایش می دادند که این‌کار باعث افزایش جرم سازه می‌شد و در ارتعاشات با فرکانس

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:

S. Aligholizadeh, M. A. Hamed, R. Hassannejad Qadim, Active vibration control of the clamped beam with length and location optimized piezoelectric patches, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 9, pp. 11-22, 2015 (In Persian)

پایین کارایی نداشت. امروزه در صنایع پیشرفته مانند هوافضا، رباتیک و خودرو استفاده از سازه‌های سبک اهمیت یافته است. استفاده از سازه‌های سبک موجب افزایش سرعت و کاهش هزینه در استفاده از مواد خام و انرژی مصرفی خواهد شد، اما باعث تشدید در رفتار ارتعاشی سازه می‌شود [2،1]. بنابراین در سال‌های اخیر کنترل ارتعاشات با روش‌های دیگری مطرح شده-است. در این بین استفاده از کنترل فعال از سایر روش‌ها پیشی گرفته‌است. هدف از کنترل فعال، کاهش ارتعاش سیستم مکانیکی با اصلاح خودکار پاسخ سیستم است. سازه فعال، سازه‌ای همراه با حسگر (برای شناسایی ارتعاشات) و عملگر (برای تأثیر بر پاسخ سیستم) در ارتباط با یک کنترل‌کننده (برای تحلیل سیگنال حسگر و تغییر پاسخ سیستم با روش های مؤثر) است [3]. به سازه‌های دارای این خصوصیت سازه‌های هوشمند گفته می‌شود. مهمترین مزیت این سازه‌ها خودتشخیصی و خودتعمیری است که در کاربردهای حساس بسیار ضروری است.

در حال حاضر چندین مواد هوشمند وجود دارند که در ساخت حسگر و عملگر از آن‌ها استفاده می‌شود. یکی از پرکاربردترین مواد هوشمند، مبدل-های پیزوالکتریک هستند، این مبدل‌ها دارای خاصیت الکترومکانیکی هستند به این معنی که تحت اعمال میدان الکتریکی دچار کرنش می‌شوند و تحت کرنش، اختلاف پتانسیل الکتریکی تولید می‌کنند. این مواد به دلیل وزن کم، انعطاف پذیری در محیط های مختلف، انرژی مصرفی پایین، کاربرد آسان و پاسخ سریع کاربرد وسیعی در کنترل فعال ارتعاشات پیدا کرده‌اند [4]. در بسیاری از کارهای انجام شده در زمینه کنترل ارتعاش سازه‌های هوشمند، به دلیل حساسیت مواد پیزوالکتریک، روش‌های کنترلی مبتنی بر کنترل بهینه مورد استفاده بوده‌است. تیر یکسرگیردار به عنوان مدل پایه‌ای برای بسیاری از سازه‌های صنعتی نظیر بال هواپیما، پره بالگرد و بازوی ربات به‌کار گرفته می‌شود، بنابراین این سازه در بررسی‌های محققان بیشتر مورد توجه قرار گرفته‌است. محققان عمدتا از دو روش تحلیلی و المان محدود برای مدل-سازی سیستم استفاده نموده‌اند. از سال 1970 روش‌های المان محدود برای مدل‌سازی سازه‌های هوشمند مورد استفاده قرار گرفته‌اند. روش‌های المان محدود بر پایه روش‌های تحلیلی هستند و در مسائل همراه با پیچیدگی در شکل و جنس به کار می‌روند [5،4].

واسکوئز و همکاران [3] با مدل‌سازی المان محدود به مطالعه کنترل فعال ارتعاشات تیر پرداخته‌اند. آن‌ها روش‌های کنترل کلاسیک و روش‌های کنترل بهینه رگولاتور خطی مرتبه دو[1] و خطی مرتبه دو گاوسی[2] را مقایسه کرده و مزایا و معایب هرکدام را مورد بررسی قرار داده‌اند. کوکک و همکاران [6] با به کار بردن اصل ماکزیمم، کنترل بهینه حلقه باز تیر هوشمند را انجام داده‌اند که در آن نیروی کنترلی از عملگر پیزوالکتریک تامین می‌شود. آن‌ها تابع هدف را مجموع تابع درجه دوم پاسخ دینامیکی در یک زمان مشخص و میزان نیروی کنترلی از زمان اولیه تا نهایی در نظر گرفتند و حل صریح مسأله برای تیر با تکیه‌گاه ساده را با جداسازی توابع ویژه برای متغیرهای حالت و الحاقی بدست آورده‌اند. داکرن و همکاران [7] کاهش غیرفعال ارتعاشات به کمک وصله‌های پیزوالکتریک را با روش تحلیلی مورد بررسی قرار داده‌اند. آن‌ها با ارائه روش بهینه‌سازی براساس ماکزیمم‌سازی ضریب کوپل الکترومکانیکی بین تیر و عملگر پیزوالکتریک به بهینه‌سازی مکان، طول و ضخامت پیزوالکتریک پرداختند. وانگ و همکاران [8] با استفاده از شاخص کنترل‌پذیری و محاسبه انرژی کنترلی عملگر به بهینه‌سازی محل وصله پیزوالکتریک روی تیر پرداخته‌اند. آن‌ها با استفاده از مشتقات جزئی حاکم بر تیر اویلر برنولی و با فرض ضخامت ناچیز وصله پیزوالکتریک نسبت به تیر به معادلات فضای حالت سیستم رسیده‌اند. دیواسیا و همکاران [9] با چند معیار مختلف به بهینه‌سازی طول و مکان عملگرها روی تیرهای یکنواخت پرداخته‌اند. آن‌ها معیارهای خود را برای تیر با تکیه‌گاه ساده همراه با عملگرهای پیزوالکتریک اجرا نموده و به مزیت معیار تابع خطی درجه دو نسبت به معیار کنترل‌پذیری اشاره کردند. باربونی و همکاران [10] براساس معیار بیشترین تغییر شکل خمشی تیر با تکیه‌گاه ساده به بهینه‌سازی اندازه و مکان آن پرداختند. آن‌ها این معیار را تنها برای شکل مد اول تیر بررسی کردند و طول بهینه عملگر را هم‌اندازه با طول تیر بدست‌آوردند. سانگ [11] کنترل تیر با تکیه‌گاه ساده و با جرم متحرک را مورد بررسی قرار داده است. او معادلات دینامیکی بر اساس تئوری تیر اویلر برنولی را با روش مدهای فرضی به فرم فضای حالت درآورده و با کنترل کننده‌های چند ورودی- چند خروجی انحنای تیر در اثر جرم متحرک را کاهش داده است. سانگ برای تعیین مکان بهینه عملگرهای پیزوالکتریک از تابعی رگولاتور خطی مرتبه دو استفاده کرده و مکان دو عملگر وصل‌شده به پایین تیر را تعیین کرده‌است. رامش کومار و همکاران [12] مکان بهینه عملگر و حسگر پیزوالکتریک برای کنترل ارتعاش تیر را با مدل‌سازی المان محدود و بر پایه تئوری تیر اویلر برنولی بررسی کرده‌اند. این بهینه‌سازی برای شرایط تکیه گاهی مختلف نظیر تیر دوسر مفصل، تیر دوسر گیردار و تیر یکسرگیردار انجام شده است. آن‌ها از تابع عملکرد رگولاتور خطی مرتبه دو به عنوان تابع بهینه‌سازی استفاده کردند و با الگوریتم ژنتیک به یافتن متغیرهای بهینه طراحی پرداختند.

با مطالعه کارهای انجام‌شده در این زمینه مشاهده می‌شود که برای صرف انرژی کمتر و عملکرد بهینه سیستم کنترلی، مبدل‌های پیزوالکتریک باید با اندازه‌های مناسب و در مکان‌های موثر قرار گیرند برای مثال مکان نامناسب حسگر و عملگر منجر به کنترل‌ناپذیری و مشاهده‌ناپذیری سیستم خواهد شد [12]، ضمن اینکه مکان نامناسب وصله‌ها منجر به افزایش ولتاژ اعمالی می‌شود درحالی که اعمال ولتاژ بیش‌تر از ظرفیت پیزوالکتریک‌ها باعث از بین‌رفتن خاصیت پیزوالکتریسیته آن‌ها خواهدشد [13]. در کارهای انجام شده توسط محققان که در [14،13] مرور و بررسی شده‌اند، نقش طول و انرژی مصرفی عملگر اغلب نادیده گرفته شده‌است و اغلب از مدل‌های المان محدود در مدل‌سازی استفاده شده است که در آن حل گسسته برای تعیین مکان بهینه عملگرها ارائه شده است و امکان بهینه‌سازی طول عملگر با این روش وجود نداشته است.

در این تحقیق با ارائه روش تحلیلی بر مبنای روش ارائه شده در [15] در حل معادلات حاکم بر مسأله، امکان بهینه‌سازی همزمان طول و مکان عملگر پیزوالکتریک به صورت پیوسته فراهم شده‌است که در کارهای انجام شده موجود نبوده است. تابع هزینه به‌کار رفته در بهینه‌سازی، شاخص عملکرد رگولاتور خطی مرتبه دو درنظر گرفته‌شده که در آن هر دو پارامتر اساسی کاهش مطلوب ارتعاش و صرف انرژی مناسب در نظر گرفته می‌شود و از الگوریتم ژنتیک برای حل مسأله دو متغیره استفاده شده‌است. معادلات دینامیکی سیستم از اصل هامیلتون و با درنظر گرفتن جرم و سختی وصله پیزوالکتریک تعیین می‌گردند. ولتاژ کنترلی عملگر ابتدا در شرایط مرزی ظاهر می‌شود که با تغییر متغیر مناسب و تعریف توابع جابجایی خاص، وارد معادلات حرکت سیستم می‌شود. با درنظرگیری سه شکل مد اول، معادلات

1- Linear Quadratic Regulator
2- Linear Quadratic Gaussian

دینامیکی سیستم به معادلات فضای حالت تبدیل می‌شوند و از روش‌های کنترل بهینه رگولاتور خطی مرتبه دو و کنترل خطی مرتبه دو گاوسی با تخمین‌گر فیلتر کالمن[1] برای کنترل ارتعاشات آزاد و اجباری سیستم استفاده می‌گردد. در شبیه‌سازی عددی سیستم مورد نظر، عملکرد وصله‌های پیزوالکتریک بهینه‌شده با طول محدود و نامحدود با وصله پیزوالکتریک پوشاننده کل تیر مورد مقایسه قرار گرفته است.

2- مدل‌سازی و تحلیل

مدل‌سازی و تحلیل مسأله شامل چهار بخش روابط ساختاری پیزوالکتریک‌ها، مدل‌سازی تیر همراه با لایه‌های پیزوالکتریک، کنترل‌کننده خطی مرتبه دو و تعیین تابع هزینه و قیود مسأله برای تعیین طول و مکان بهینه عملگر است و در هر بخش توضیحات ضروری نیز ارائه شده است.

2-1- روابط ساختاری پیزوالکتریک‌ها

از نظر الکتریکی وصله‌های پیزوالکتریک یک خازن مسطح با یک دی‌الکتریک قطبی شده هستند. جهت قطبیت همواره عمود بر سطح الکترودها است. هنگام اعمال ولتاژ الکتریکی بر الکترودها، وصله پیزوالکتریک به خاطر اثر معکوس پیزوالکتریک دچار کرنش می‌شود و جهت این کرنش وابسته به جهت اعمال ولتاژ الکتریکی است. از طرف دیگر اگر وصله پیزوالکتریک دچار تغییر شکل مکانیکی شود بار الکتریکی در سطح الکترود جمع می‌شود و این اثر مستقیم پیزوالکتریک است. معادلات الکترومکانیکی مواد پیزوالکتریک با فرض الاستیک خطی با روابط (1) بیان می‌شوند [16]:

$$\bar{\sigma}=\bar{Q}\bar{\varepsilon}-\bar{e}\bar{E},\quad \bar{D}=\bar{e}^{T}\bar{\varepsilon}+\bar{p}\bar{E} \tag{1}$$

در این روابط، رابطه اول برای اثر معکوس و رابطه دوم برای اثر مستقیم پیزوالکتریک است به طوری‌که $\bar{\sigma}$ بردار تنش، $\bar{D}$ بار الکتریکی جابجا شده، $\bar{\varepsilon}$ بردار کرنش، $\bar{Q}$ ماتریس سختی، $\bar{e}$ ماتریس ثوابت پیزوالکتریک، $\bar{E}$ بردار میدان الکتریکی و $\bar{p}$ ماتریس ظرفیت پیزوالکتریک هستند. با فرض تغییر شکل فقط در راستای طول وصله پیزوالکتریک، معادلات (1) به صورت معادلات (2) ساده‌سازی می‌شود.

$$\varepsilon_x=\frac{\sigma_x}{E_p}+\frac{d_{xz}}{t_p}V,\quad D_z=E_p d_{xz}\varepsilon_x+\frac{\beta_{zz}}{t_p}V \tag{2}$$

در روابط (2)، E_p نشان‌دهنده مدول الاستیسیته پیزوالکتریک، d_{xz} ثابت کوپل، t_p ضخامت لایه، D_z بار الکتریکی جابجا شده، β_{zz} ظرفیت ماده پیزوالکتریک هستند. در صورتی که ولتاژ خارجی بر پیزوالکتریک حسگر اعمال نشود ترم دوم در رابطه اثر مستقیم در مقابل ترم اول قابل صرف نظرکردن است [17]. بنابراین با فرض عدم اعمال ولتاژ الکتریکی بر حسگر، رابطه اثر مستقیم به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$D_z=E_p d_{xz}\varepsilon_x \tag{3}$$

بار ایجاد شده در سطوح الکترودها از رابطه (4) بدست می‌آید.

$$q=\iint D_z \mathrm{d}A \tag{4}$$

و در نهایت ولتاژ الکتریکی حسگر از رابطه (5) تعیین می‌شود:

$$V_s=\frac{q}{c} \tag{5}$$

در رابطه (5)، c ظرفیت الکتریکی پیزوالکتریک است که با رابطه (6) به صورت زیر تعریف می‌شود [5]:

1- Kalman filter

$$c=\frac{kc_0 l_s b}{h_s} \tag{6}$$

در رابطه (6)، c_0 ثابت دی‌الکتریک محیط ($0/0088542\ \mathrm{nF/m}$) و ضریب k، نسبت ظرفیت پیزوالکتریک به آن است که برای هر جنس پیزوالکتریک در مراجع ذکر شده است. b، h_s و l_s به ترتیب نشان‌دهنده عرض، ضخامت و طول حسگر هستند.

2-2- مدل‌سازی دینامیکی تیر یکسرگیردار با لایه‌های پیزوالکتریک

تیر همگن با سطح مقطع ثابت مستطیلی با طول l، ضخامت h_b، عرض b، چگالی ρ_b و مدول الاستیسیته E_b، مطابق شکل 1 در نظر گرفته شده است، درحالی که وصله‌های پیزوالکتریک با مدول الاستیسیته E_a و E_s با ضخامت h_a و h_s و هم عرض با تیر هستند. فرضیات زیر برای مدل‌سازی تیر با لایه‌های پیزوالکتریک در نظر گرفته می‌شوند [18]:

الف- تیر و لایه‌های پیزوالکتریک از تئوری تیر اویلر برنولی پیروی می‌کنند و ضخامت لایه‌های عملگر و حسگر یکسان است.

ب- مواد پیزوالکتریک همگن، ایزوتروپیک عرضی و الاستیک فرض می‌شوند.

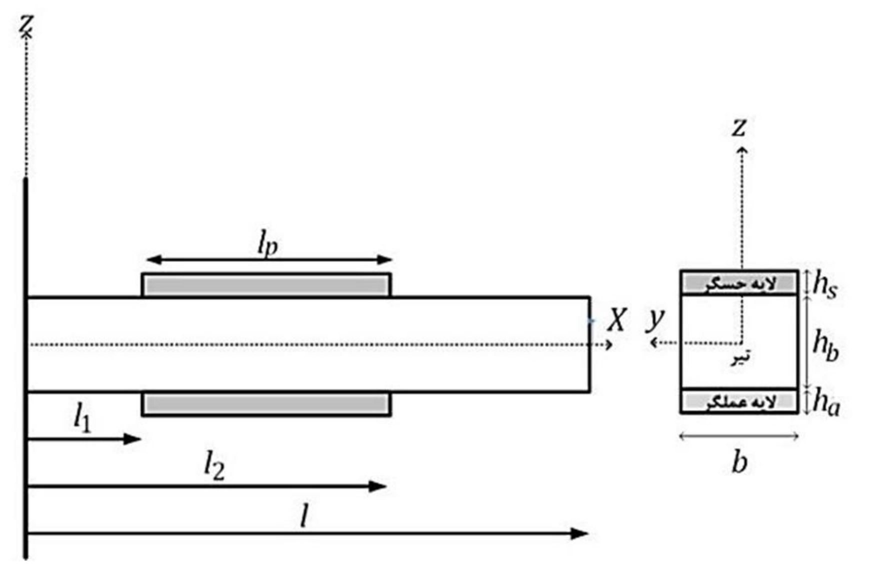
ج- جهت قطبیت لایه‌های حسگر و عملگر در جهت ضخامت در نظر گرفته می‌شود و در بقیه جهت‌ها ناچیز فرض می‌شود.

د- چسب اتصال لایه‌ها روی تیر در جرم و سختی تیر بی‌تأثیر است.

وصله پیزوالکتریک متصل‌شده به سطح تیر باعث تغییر در جرم و سختی آن قسمت از تیر می‌شود، بنابراین برای تعیین معادلات حرکت از اصل هامیلتون، تیر به سه قسمت با طول‌های l_1، l_2-l_1 و $l-l_2$ تقسیم می‌شود. با استفاده از اصل هامیلتون، معادلات حرکت حاکم بر هر قسمت، همراه با شرایط مرزی دو انتها و شرایط پیوستگی تکه‌های تیر تعیین می‌شود. با توجه به ضخامت و جنس یکسان لایه‌های پیزوالکتریک عملگر و حسگر و در نتیجهٔ آن تقارن هندسی و مادی نسبت به لایهٔ میانی تیر، $z=0$ تار خنثی در تیر خواهد بود، در نتیجه بر اساس فرضیات تیر اویلر برنولی میدان جابجایی تیر در راستای x، y و z مطابق با معادلات (7) به صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند:

$$\begin{aligned} u_x(x,y,z)&=-z\frac{\partial w}{\partial x}\\ u_y(x,y,z)&=0\\ u_z(x,y,z)&=w(x,t) \end{aligned} \tag{7}$$

با استفاده از روابط کرنش- جابجایی الاستیسیته، کرنش‌های خطی از روابط (8) محاسبه می‌شوند:



شکل 1 تیر یکسرگیردار با لایه‌های حسگر و عملگر

$$\begin{aligned}&\varepsilon_x=-z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\quad \varepsilon_y=0,\quad \varepsilon_z=0\\&\gamma_{xy}=\gamma_{xz}=\gamma_{yz}=0\end{aligned} \tag{8}$$

با در نظر گیری روابط (8) و با توجه به اثر مستقیم و معکوس پیزوالکتریک بیان‌شده با معادلات (1) و (2)، تنش در راستای محور x در هر یک از سه قسمت تیر با روابط (9) بیان می‌گردد:

$$\begin{aligned}&\sigma_{x1}=E_b\varepsilon_x\\&\sigma_{x2}=\begin{cases}E_b\varepsilon_x & -\frac{h}{2}\le z\le\frac{h}{2}\\ E_a\left(\varepsilon_x-d_{31}\frac{V(t)}{h_a}\right) & -\frac{h}{2}-h_a\le z\le-\frac{h}{2}\\ E_s\varepsilon_x & \frac{h}{2}\le z\le\frac{h}{2}+h_s\end{cases}\\&\sigma_{x3}=E_b\varepsilon_x\end{aligned} \tag{9}$$

اندیس‌های 1، 2 و 3 در روابط (9) و به طور کلی در همه روابط، به ترتیب قسمت‌های اول، دوم و سوم از تیر را نشان می‌دهند، همان‌طور که گفته شد برای تعیین معادلات حرکت سیستم از اصل هامیلتون استفاده می‌شود. بر این اساس معادلات حرکت مطابق با معادلات (10) به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}&M_{1x,xx}-I_{01}\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2}=\frac{F_1(x,t)}{b}\\&M_{2x,xx}-I_{02}\frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2}=\frac{F_2(x,t)}{b}\\&M_{3x,xx}-I_{03}\frac{\partial^2 w_3}{\partial t^2}=\frac{F_3(x,t)}{b}\end{aligned} \tag{10}$$

در روابط (10)، $F_1(x,t)$ ، $F_2(x,t)$ و $F_3(x,t)$ به ترتیب بیانگر نیروی نقطه‌ای خارجی مؤثر در طول تیر در نقطهٔ $x=a$ هستند که بر حسب اندازهٔ a، میتواند در قسمت اول، دوم یا سوم تیر قرار گیرد. این نیروها برای نیروی $\tilde{F}(t)$ نیوتن مؤثر در نقطهٔ $x=a$، با استفاده از تابع ضربه به صورت بار گستردهٔ خطی بر حسب متغیر x در طول تیر، مطابق رابطهٔ (11) تعریف می-شوند [19].

$$F_i(x,t)=\tilde{F}(t)\delta(x-a) \tag{11}$$

بر اساس رابطهٔ (11) و بسته به موقعیت $x=a$ همواره دو نیرو از این سه نیرو برابر صفر خواهد بود که بیانگر نیروی متمرکز واحد مؤثر در طول تیر است. این نیرو برای مدل کردن اثرات تحریک اغتشاشی خارجی بر رفتار ارتعاشی سیستم در حالات حلقه باز و حلقه بسته در نظر گرفته شده است. همچنین در رابطه (10)، M_{ix} و I_{0i} با روابط (12) تعریف شده‌اند:

$$M_{ix}=\int_{z_1}^{z_2}\sigma_{xi}z\,\mathrm{d}z \tag{12- الف}$$

$$I_{0i}=\int_{z_1}^{z_2}\rho_i\mathrm{d}z,\quad i=1,2,3 \tag{12- ب}$$

در رابطه (12- الف)، σ_{xi} تنش متناظر هر قسمت می‌باشد و در رابطه (12- ب)، ρ_i نشان‌دهنده چگالی هر قسمت است و در محاسبه I_{0i} برای قسمت میانی، چگالی حسگر و عملگر نیز در نظر گرفته می‌شود.

با استفاده از اصل هامیلتون شرایط مرزی و پیوستگی در $x=0$، $x=l_1$، $x=l_2$ و $x=l$ با معادلات (13) تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}&x=0: && w_1=0,\ w_1'=0\\&x=l_1: && w_1=w_2,\ w_1'=w_2'\\& && M_{1x}=M_{2x},\ M_{1x,x}=M_{2x,x}\\&x=l_2: && w_2=w_3,\ w_2'=w_3'\\& && M_{2x}=M_{3x},\ M_{2x,x}=M_{3x,x}\\&x=l: && M_{3x}=0,\ M_{3x,x}=0\end{aligned} \tag{13}$$

با جایگزینی روابط (9) در رابطه (12- الف) معادلات خمش طبق معادلات (14) بر حسب جابجایی ها بیان می‌شود:

$$\begin{aligned}&M_{1x}=-D_1w_1''\\&M_{2x}=-D_2w_2''-H_{31}V(t)\\&M_{3x}=-D_3w_3''\end{aligned} \tag{14}$$

که در روابط (14)، D و H_{31} با روابط (15) به صورت زیر تعریف شده است (برای توضیحات بیشتر رجوع شود به [15] و [20]):

$$D=\int_{z_1}^{z_2}E_z z^2\mathrm{d}z \tag{15- الف}$$

$$H_{31}=\frac{E_a d_{31}}{h_a}\int_{\frac{-h}{2}-h_a}^{\frac{-h}{2}} z\,\mathrm{d}z \tag{15- ب}$$

در رابطه (15- الف)، E_z نشان‌دهنده مدول الاستیسیته است که در روابط (9) برای تیر با E_b، لایهٔ عملگر با E_a و لایهٔ سنسور با E_s نشان داده شده است. برای قسمت همراه با لایه حسگر و عملگر، D از سه بار انتگرال‌گیری در راستای محور z بدست می‌آید و برای دو بخش دیگر تیر E_z همان مدول الاستیسیته تیر است. با جایگزینی روابط (15) در روابط (10) و (13)، معادلات حاکم بر حرکت و شرایط مرزی بر حسب جابجایی و مشتقات آن به صورت روابط (16) و (17) بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned}&D_1w_1^{(4)}+I_{01}\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2}=-\frac{F_1(x,t)}{b}\\&D_2w_2^{(4)}+I_{02}\frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2}=-\frac{F_2(x,t)}{b}\\&D_3w_3^{(4)}+I_{03}\frac{\partial^2 w_3}{\partial t^2}=-\frac{F_3(x,t)}{b}\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}&x=0: && w_1=0,\ w_1'=0\\&x=l_1: && w_1=w_2,\ w_1'=w_2'\\& && -D_1w_1''=-D_2w_2''-H_{31}V(t)\\& && -D_1w_1'''=-D_2w_2'''\\&x=l_2: && w_2=w_3,\ w_2'=w_3'\\& && -D_2w_2''-H_{31}V(t)=-D_3w_3''\\& && -D_2w_2'''=-D_3w_3'''\\&x=l: && w_3''=0,\ w_3'''=0\end{aligned} \tag{17}$$

در روابط (17)، $V(t)$ همان ولتاژ کنترلی اعمالی بر عملگر است که به عنوان ورودی سیستم در نظر گرفته می‌شود. بررسی معادلات حرکت و شرایط مرزی نشان می‌دهد که ترم کنترلی عملگر در شرایط مرزی ظاهر گردیده و به علت حضور این ترم، شرایط مرزی در معادلات خمش در نقاط l_1 و l_2 همگن نیستند. برای همگن‌سازی شرایط مرزی، تابع $Y_p(x,t)$ تعریف می‌شود. همان‌طور که در رابطه (17) نشان داده شده، در نقطه l_1 شرط مرزی ناهمگن با معادله (18) به صورت زیر ارایه شده است:

$$-D_1w_1''=-D_2w_2''-H_{31}V(t) \tag{18}$$

خیز قسمت میانی تیر که همراه با لایه عملگر است، مجموع تابع عمومی w_{h2} و تابع خاص $Y_p(x,t)$ مطابق معادله (19) فرض می‌گردد.

$$w_2 = w_{h2} + Y_p(x,t) \tag{19}$$

برای همگن‌سازی، مشتق دوم مکانی تابع Y_p در نقطه l_1 به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$Y_p''(l_1,t) = \frac{-H_{31}V(t)}{D_2} \tag{20}$$

تابع خاص Y_p در نقطه l_1، به دو قسمت زمانی و مکانی طبق معادله (21) جدا می‌شود:

$$Y_p''(l_1,t) = y_p''(l_1)p(t) \tag{21}$$

به طوری‌که:

$$p(t) = \frac{-H_{31}V(t)}{D_2}, \quad y_p''(l_1) = 1 \tag{22}$$

به همین ترتیب در نقطه l_2 شرط مرزی خمش با رابطه (23) همگن می‌شود:

$$y_p''(l_2) = 1 \tag{23}$$

از طرفی شش شرط دیگر مرزی در نقاط l_1 و l_2 همگن هستند، بنابراین شش شرط دیگر در تعیین تابع مکانی y_p با روابط (24) زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} y_p(l_1) &= y_p'(l_1) = y_p'''(l_1) = 0 \\ y_p(l_2) &= y_p'(l_2) = y_p'''(l_2) = 0 \end{aligned} \tag{24}$$

تابع $y_p(x)$ میتواند هر تابع دلخواهی باشد که هشت شرط بیان شده فوق را ارضاء نماید. با فرض تابع چند جمله‌ای درجه هفت و جایگزینی در هشت شرط ارائه شده با معادلات (22) و (23) و (24)، ضرایب چند جمله‌ای محاسبه شده و تابع $y_p(x)$ با رابطه (25) به شکل زیر تعیین می‌شود.

$$y_p = a_7x^7 + a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \tag{25}$$

با داشتن y_p و تغییر متغیر اعمالی معادلات حرکت سیستم بر حسب متغیر جدید با معادلات (26) بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} & D_1 w_1^{(4)} + I_{01}\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} = -\frac{F_1(x,t)}{b} \\ & D_2 w_{h2}^{(4)} + I_{02}\frac{\partial^2 w_{h2}}{\partial t^2} = \\ & \quad -\frac{F_2(x,t)}{b} - I_{02}\ddot{p}(t)y_p(x) - D_2 p(t)\frac{\mathrm{d}^4 y_p(x)}{\mathrm{d}x^4} \\ & D_3 w_3^{(4)} + I_{03}\frac{\partial^2 w_3}{\partial t^2} = -\frac{F_3(x,t)}{b} \end{aligned} \tag{26}$$

با این تغییر متغیر شرایط مرزی مسأله همگن شده و ورودی کنترلی عملگر، در معادلات حرکت سیستم ظاهر می‌شود. در این تحقیق، از اثر میرایی سازه به علت میرایی ناچیز آن در مقابل میرایی سیستم کنترلی و تأثیرگذاری ناچیز آن بر روند مسأله صرفنظر می‌شود [10]. شکل مدهای سیستم همراه با فرکانس‌های طبیعی از حل مسأله مقدار ویژه مرزی متناظر با سه معادله روابط (26) و شرایط مرزی همگن شده تعیین می‌گردند. با توجه به فرم معادلات، شکل مدهای هر قسمت از تیر با معادلات (27) تعیین می‌شوند که در آن اندیس‌های 1 تا 3 نمایانگر سه قسمت تیر هستند و i مشخص کننده مد i ام است:

$$\begin{aligned} y_{1i}(x) &= c_{11i}\sin(\lambda_{1i}x) + c_{12i}\cos(\lambda_{1i}x) + \\ & \quad c_{13i}\sinh(\lambda_{1i}x) + c_{14i}\cosh(\lambda_{1i}x) \\ y_{2i}(x) &= c_{21i}\sin(\lambda_{2i}x) + c_{22i}\cos(\lambda_{2i}x) + \\ & \quad c_{23i}\sinh(\lambda_{2i}x) + c_{24i}\cosh(\lambda_{2i}x) \\ y_{3i}(x) &= c_{31i}\sin(\lambda_{3i}x) + c_{32i}\cos(\lambda_{3i}x) + \\ & \quad c_{33i}\sinh(\lambda_{3i}x) + c_{34i}\cosh(\lambda_{3i}x) \\ \lambda_{mi} &= \sqrt[4]{\frac{I_{0m}\omega_i^2}{D_m}}, \qquad m = 1,2,3 \end{aligned} \tag{27}$$

در روابط (27) ω_i فرکانس طبیعی i ام سیستم است که همراه با دوازده ضریب مجهول c_{mni} (چهار ضریب مجهول برای شکل مد هر قسمت) تشکیل سیزده مجهول می‌دهد. با جایگذاری توابع ارتعاش آزاد سیستم بر حسب شکل مدهای به دست آمده در شرایط مرزی همگن مسأله که شامل دوازده شرط است، دوازده معادلهٔ دوازده مجهولی همگن برحسب ضرایب c_{mni} به دست می‌آید. از صفر قرار دادن دترمینان ضرایب معادلات (شرط وجود جواب غیر صفر) فرکانس های طبیعی سیستم به دست می‌آید و از حل معادلات همگن بر حسب یکی از مجهولات توابع شکل مد تعیین می‌شود [19].

با استفاده از بسط پاسخ سیستم به توابع ویژه (رابطه 28)، معادلات ارتعاش اجباری سیستم بدست می‌آیند.

$$w(x,t) = \sum_{i=1}^{n} Y_i(x)\eta_i(t) \tag{28}$$

در رابطهٔ (28) Y_i شکل مد i ام کلی تیر است که برای هر طول x از تیر بر حسب توابع y_{mi} تعریف می‌شود و $\eta_i(t)$ توابع زمانی یا مختصات مودال سیستم است [19]. با جاگذاری رابطه (28) در معادلات (26) و ضرب کردن طرفین در شکل مد به دست آمده برای هر قسمت از تیر (شکل مد j ام) و انتگرال‌گیری در طول تیر و استفاده از رابطهٔ تعامد مدهای تیر، معادلات مستقل از هم و خطی مودال سیستم برحسب زمان برای مد n ام مطابق معادله (29) و ضرایب به کار رفته در آن با روابط (30)، بیان می‌شود [19]:

$$M_n\ddot{\eta}_n + K_n\eta_n = -c_{fn}\tilde{F}(t) - c_{p1n}\ddot{p}(t) - c_{p2n}p(t) \tag{29}$$

به‌طوری که:

$$\begin{aligned} M_n &= \int_0^{l_1} I_{01}y_{1n}^2\,\mathrm{d}x + \int_{l_1}^{l_2} I_{02}y_{2n}^2\,\mathrm{d}x + \int_{l_2}^{l} I_{03}y_{3n}^2\,\mathrm{d}x \\ K_n &= \omega_n^2 M_n \\ c_{fn} &= \frac{1}{b}\int_0^{l_1} y_{1n}\delta(x-a)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{b}\int_{l_1}^{l_2} y_{2n}\delta(x-a)\,\mathrm{d}x \\ & \quad + \frac{1}{b}\int_{l_2}^{l} y_{3n}\delta(x-a)\,\mathrm{d}x \\ c_{p1n} &= \int_{l_1}^{l_2} I_{02}p(t)y_{2n}(x)y_p(x)\,\mathrm{d}x \\ c_{p2n} &= \int_{l_1}^{l_2} D_1 y_{2n}(x)\frac{\mathrm{d}^4 y_p(x)}{\mathrm{d}x^4}\,\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{30}$$

با تغییر متغیر مطابق رابطه (31)، رابطه (29) به صورت رابطه (32) بازنویسی می‌شود.

$$\psi_n = M_n\eta_n + c_{p1n}p \tag{31}$$

$$\ddot{\psi}_n + \omega_n^2\psi_n = -c_{fn}\tilde{F}(t) + (\omega_n^2 c_{p1n} - c_{p2n})p(t) \tag{32}$$

برای کنترل سیستم با روش‌های کنترلی نظیر رگولاتور خطی مرتبه دو و خطی مرتبه دو گاوسی، معادلات سیستم باید به فرم فضای حالت نوشته شوند. برای این کار با در نظر گرفتن سه شکل مد اول تیر و تعریف متغیرهای حالت به صورت رابطه (33)، معادلات کاهش یافته سیستم برای سه شکل مد به فرم معادلات حالت خطی (34) بیان می‌شود که در آن x بردار حالت سیستم با شش (6) متغیر حالت، $p(t)$ ولتاژ یا همان ورودی کنترلی می‌باشد که از این به بعد با u نمایش داده می‌شود، و $\tilde{F}(t)$ نیروی تحریک خارجی است که برای سیستم کنترل ارتعاش نقش ورودی اغتشاشی را دارد. ماتریس A و بردارهای B و $\hat{B}$ با استفاده از رابطه (32) تعیین می‌شوند.

$$x=\left[\psi_1(t)\quad \psi_2(t)\quad \psi_3(t)\quad \dot{\psi}_1(t)\quad \dot{\psi}_2(t)\quad \dot{\psi}_3(t)\right]^{\mathrm{T}} \tag{33}$$

$$\dot{x}=Ax+Bu+\hat{B}\tilde{F}(t) \tag{34}$$

در طراحی کنترل کننده علاوه بر معادلات حالت سیستم، لازم است رابطه خروجی با حالت سیستم نیز تشریح شود به این منظور با توجه به این‌که هدف از طراحی کنترل کننده کاهش ارتعاشات تیر می‌باشد، جابجایی انتهای تیر به عنوان متغیر تنظیم شده[1] سیستم در روش رگولاتور خطی مرتبه دو انتخاب می‌گردد. با استفاده از رابطۀ (28) و با در نظر گرفتن سه شکل مد اول تیر، می‌توان این متغیر را به صورت رابطه (35) بیان کرد.

$$w(l,t)=\sum_i \mathrm{Y}_i(l)\eta_i(t)=\sum_{i=1}^{3}\mathrm{y}_{3i}(l)\eta_i(t) \tag{35}$$

با استفاده از تعاریف متغیرهای حالت، رابطه فوق را می‌توان به صورت استاندارد رابطه (36) بازنویسی نمود.

$$\begin{aligned} &w(l,t)=y(t)=Cx+du,\\ &C=\left[\frac{y_{31}(l)}{M_1}\quad \frac{y_{32}(l)}{M_2}\quad \frac{y_{33}(l)}{M_3}\quad 0\quad 0\quad 0\right],\\ &d=-\frac{c_{p11}y_{31}(l)}{M_1}-\frac{c_{p12}y_{32}(l)}{M_2}-\frac{c_{p13}y_{33}(l)}{M_3} \end{aligned} \tag{36}$$

همچنین از ولتاژ خروجی اندازه‌گیری‌شده توسط لایه حسگر، برای تخمین متغیرهای حالت سیستم در روش خطی مرتبه دو گاوسی استفاده می‌شود. با استفاده از روابط ساختاری پیزوالکتریک در روابط (4) و (5) در کنار تعریف ظرفیت پیزوالکتریک از رابطه (6) و تعریف g_{31} مطابق رابطه (37)، ولتاژ خروجی حسگر پیزوالکتریک به صورت رابطه (38) بیان می‌شود:

$$g_{31}=\frac{d_{31}}{kc_0} \tag{37}$$

$$V_s(t)=-\frac{g_{31}E_sh_s(h_s+h_b)}{2l_s}\sum_{i=1}^{3}\eta_i(t)y'_{2i}(x)\Big|_{l_1}^{l_2} \tag{38}$$

همانند رابطه (35)، رابطه (38) را نیز می‌توان با استفاده از تعریف متغیرهای حالت به صورت رابطه (39) بیان کرد.

$$\begin{aligned} &V_s(t)=C_sx,\\ &C_s=-g_s\begin{bmatrix}\dfrac{y'_{21}(l_2)-y'_{21}(l_1)}{M_1}\\ \dfrac{y'_{22}(l_2)-y'_{22}(l_1)}{M_2}\\ \dfrac{y'_{23}(l_2)-y'_{23}(l_1)}{M_3}\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}},\\ &g_s=\frac{g_{31}E_sh_s(h_s+h_a)}{2l_s} \end{aligned} \tag{39}$$

1- Regulated Variable

2-3- حالات خاص در مدل‌سازی تیر با لایه‌های عملگر

در قسمت قبل، وصله پیزوالکتریک در وسط تیر فرض شده‌بود و تیر به سه قسمت تقسیم شد، اما در یافتن مکان بهینه وصله پیزوالکتریک روی تیر حالت‌های خاصی همانند شکل 2 پیش می‌آیند.

در هر حالت از شکل 2، تعداد تقسیمات تیر با حالت مدل‌شده متفاوت است، ضمن آن‌که با قرارگیری وصله در ابتدا یا انتهای تیر و تغییر در شرایط مرزی، تابع y_p نیز تغییر می‌کند.

2-4- طراحی کنترل‌کننده

برای کنترل فعال سیستم ارتعاشی تیر یکسرگیردار با لایه‌های پیزوالکتریک، با توجه به خطی بودن معادلات حالت سیستم، تکنیک‌های کنترل بهینه موثرتر از دیگر روش‌های کنترلی هستند [3]، بنابراین در این تحقیق از این کنترل کننده‌ها استفاده می‌گردد. شاخص عملکرد، یک تابع درجه دوم از بردار حالت سیستم و ورودی کنترلی است. مسأله پیداکردن بردار کنترل بهینه است به گونه‌ای که شاخص عملکرد رابطه (40) کمینه گردد.

$$J=\int_0^{t_f}\left(x^{\mathrm{T}}Qx+u^{\mathrm{T}}Ru\right)\,\mathrm{d}t \tag{40}$$

در رابطه (40)، Q نشان‌دهنده ماتریس وزنی حالت و R ماتریس وزنی ورودی است. با تعیین ضرایب وزنی Q و R رفتار ارتعاشی سیستم با صرف انرژی مورد نظر به مقدار مطلوب نزدیک می‌گردد. اگر ماتریس‌های A و B کنترل‌پذیر باشند ورودی کنترلی بهینه به صورت فیدبک خطی حالت با رابطه (41- الف) تعریف می‌گردد که در آن گین کنترل فیدبک از رابطه (41- ب) بدست می‌آید و ماتریس ریکاتی P از معادله جبری ریکاتی مطابق رابطه (41- ج) تعیین می‌شود.

$$u(t)=-kx(t) \tag{41- الف}$$

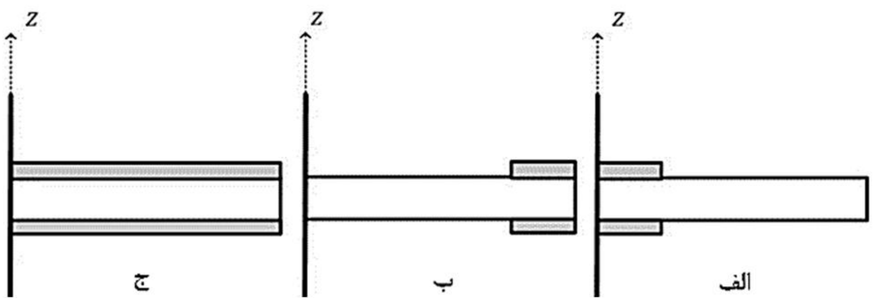
$$k=R^{-1}B^{\mathrm{T}}P \tag{41- ب}$$

$$A^{\mathrm{T}}P+PA-PBR^{-1}B^{\mathrm{T}}P+Q=0 \tag{41- ج}$$

محدودیت روش رگولاتور خطی مرتبه دو این است که همه متغیرهای حالت سیستم در حین تولید باید اندازه‌گیری شوند و اثر اغتشاش را در سیستم در نظر نمی‌گیرد که یک فرض ایده‌آل است. روش کنترل خطی مرتبه دو گاوسی با در نظرگیری نویز سیستم و نویز حسگر و با تخمین حالت سیستم با استفاده از فیلتر کالمن این محدودیت را ندارد و با تکمیل رگولاتور خطی مرتبه دو و تفکیک اطلاعات خروجی از اغتشاش براساس فرضیات واقعی‌تری بنا شده‌است. بر این اساس معادلات دینامیکی سیستم به صورت رابطه (42) بیان می‌شود.

$$\begin{aligned} &\dot{x}=Ax+Bu+\hat{B}\tilde{F}(t)+L\omega\\ &y=Cx+v \end{aligned} \tag{42}$$

در رابطه (42)، ω نمایانگر نویز فرایند و v نویز اندازه‌گیری است. با استفاده از رابطه (42) و ولتاژ خروجی حسگر که در رابطه (39) به صورت برداری نشان داده شده است می‌توان گین بهینه فیلتر را با انتخاب پارامترهای



شکل 2 حالات خاص لایه‌های حسگر و عملگر روی تیر

مناسب کوواریانس نویز فرآیند و نویز حسگر با استفاده از روابط فیلتر کالمن تعیین نمود. معادلات دینامیکی تخمین‌گر به صورت رابطه (43) بیان می-شود:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + k_e(\mathrm{y} - \hat{\mathrm{y}}) \qquad \hat{\mathrm{y}} = C\hat{x} \tag{43}$$

در رابطه (43)، $\hat{x}$ متغیر تخمینی است. گین بهینه کنترلی از روش رگولاتور خطی تعیین می‌شود و از رابطه (44) ورودی کنترلی سیستم برحسب متغیر تخمینی بدست می‌آید.

$$u(\mathrm{t}) = -k\hat{x} \tag{44}$$

سیستم حلقه بسته در روش خطی مرتبه دو گاوسی با استفاده از روابط (42)، (43) و (44) تعریف می‌شود.

2-5- تعیین طول و مکان بهینه عملگر

برای تعریف تابع هزینه جهت یافتن طول و مکان بهینه عملگرها از همان شاخص عملکرد کنترل بهینه در رابطه (40) استفاده می‌شود و این بار، هدف تعیین بهترین مکان و بهترین طول برای عملگرهای پیزوالکتریک است، به گونه‌ای که بیشترین کاهش ارتعاشات را با مصرف کمترین انرژی به همراه داشته باشد. با تغییر طول و مکان عملگر، ماتریس‌های فضای حالت سیستم دچار تغییر می‌شوند و در نتیجه ماتریس‌های k و P در روابط (41) وابسته به طول و مکان عملگر می‌گردند.

$$P : P(l_1, l_p), \quad k : k(l_1, l_p) \tag{45}$$

با استفاده از معادله جبری ریکاتی رابطه (46) زیر را می‌توان نتیجه گرفت:

$$\frac{\mathrm{d}(x^{\mathrm{T}}Px)}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t} \tag{46}$$

با انتگرال گیری از رابطه (46) و با فرض صفر بودن پاسخ سیستم در زمان نهایی، این رابطه به صورت رابطه (47) بازنویسی می‌شود که بیانگر میزان کل شاخص عملکرد رگولاتور خطی مرتبه دوم برای مسیر حرکت از ابتدا تا انتها می‌باشد:

$$J = x^{\mathrm{T}}(0)Px(0) \tag{47}$$

از روابط ماتریس‌ها می‌توان ثابت کرد:

$$x^{\mathrm{T}}(0)Px(0) = \mathrm{Tr}(PX), \quad X = x(0)x^{\mathrm{T}}(0) \tag{48}$$

در رابطه (48)، X نقشی در بهینه‌سازی نخواهد داشت [12]. بنابراین می‌توان به جای کمینه کردن رابطه (40)، معادل آن یعنی تریس (جمع عناصر قطر اصلی) ماتریس P، یا تابع هزینه رابطه (49) را کمینه نمود.

$$J = \mathrm{Tr}(P(l_1, l_p)) \tag{49}$$

در نتیجه برای پیدا کردن طول و مکان بهینه عملگر برای بیشترین کاهش ارتعاش تیر با مصرف حداقل انرژی، جمع عناصر قطر اصلی ماتریس P بدست آمده از معادله جبری ریکاتی باید کمینه گردد. قیود مسأله باید به گونه‌ای اعمال شود تا مجموع مکان ابتدای وصله و طول وصله از طول تیر تجاوز نکند ضمن آن که محدودیت‌های طولی اختیاری نیز قابل اعمال خواهد بود.

3- شبیه‌سازی عددی

برای نشان دادن عملکرد روش بهینه‌سازی ارائه شده و سیستم کنترلی به شبیه‌سازی عددی سیستم مورد نظر پرداخته می‌شود. برای این‌کار تیر و وصله پیزوالکتریک با مشخصات جدول 1 در نظر گرفته شده‌اند. در این بررسی از لایه‌های پیزوالکتریک سرامیکی تیتانات زیرکونات سرب استفاده می‌شود که از ویژگی‌های مناسبی در این کاربرد برخوردار است [21]. به علت محدودیت اعمال ولتاژ بر این ماده پیزوالکتریک، حداکثر ولتاژ اعمالی بر وصله‌های به کاررفته با توجه به ضخامت انتخاب شده 500 ولت خواهدبود که در بررسی‌ها این محدودیت در نظر گرفته شده‌است. مشخصات تیر و وصله پیزوالکتریک از مرجع [12] انتخاب و مطابق جدول 1 ارایه گردیده است. این مشخصات برای تمامی شبیه سازی‌های انجام شده در این مقاله استفاده شده است و تنها تفاوت در ضخامت و طول وصله پیزوالکتریک مورد استفاده است.

برای بررسی صحت روش ارائه شده، پنج فرکانس طبیعی اول تیر همراه با وصله پیزوالکتریک با استفاده از روش ارائه شده تعیین شده است و در جدول 2 نسبت به روش المان محدود ارائه شده در مرجع [12]، برای تیر با مشخصات مادی و هندسی یکسان مقایسه شده‌است.

با داشتن شکل مدها و فرکانس‌های طبیعی تیر می‌توان پاسخ زمانی نسبت به تحریکات گوناگون را برای هر نقطه از تیر بدست آورد. برای بررسی پاسخ سیستم حلقه باز و حلقه بسته دو نوع تحریک حالت اولیه (جابجایی) و تحریک سینوسی در نظر گرفته شده است. در تحریک جابجایی، با فرض جابجایی 1/5 میلیمتری انتهای تیر و تحریک یکسان سه شکل مد اول آن، حالت اولیه تیر به صورت شکل 3 درمی‌آید ولی بسته به طول و مکان عملگر و حسگر تا حدودی متفاوت خواهد بود. در ارتعاش اجباری نیروی 4 نیوتنی به صورت تحریک سینوسی تحت فرکانس 25 هرتز در انتهای تیر، برای تمام حالت‌های مورد بررسی فرض شده است.

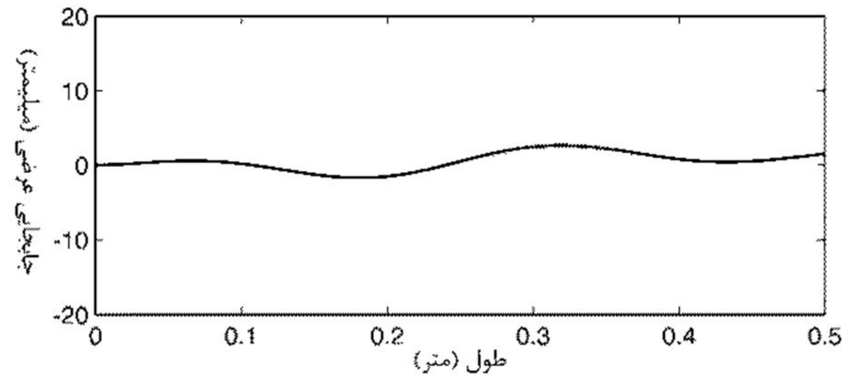
در ابتدا بدون محدودیتی برای طول وصله، بهترین مکان و طول وصله با استفاده از تابع هزینه معرفی‌شده و با الگوریتم ژنتیک تعیین می‌شوند. برای بهینه‌سازی پارامترهای کنترلی R و Q به ترتیب 10^{-10} و 1 در نظر گرفته شده‌اند و الگوریتم ژنتیک با جمعیت 30 تایی پس از 50 تکرار به جواب بهینه مورد نظر می‌رسد. پس از بهینه‌سازی که روند آن در شکل 4 نشان داده شده، مشخص می‌شود که وصله با طول 0/4346 متر (87 درصد طول تیر) و

جدول 1 مشخصات تیر و وصله پیزوالکتریک شبیه‌سازی شده [12]

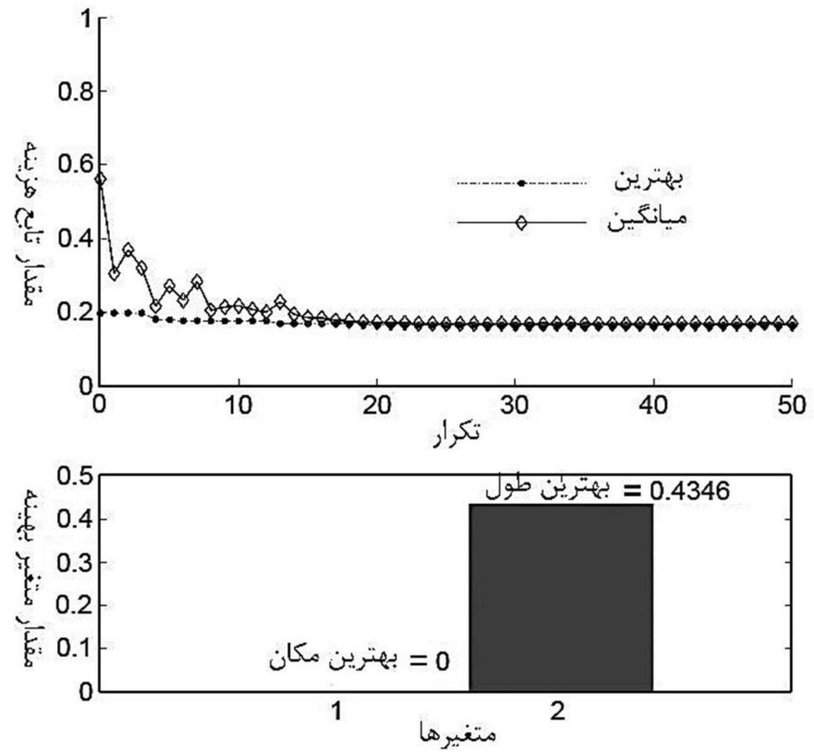
پارامتر	لایه پیزوالکتریک (PZT4)	تیر
طول L (m)	-	0/5
عرض b (m)	0/05	0/05
ضخامت h (m)	0/0005	0/002
مدول الاستیسته یانگ E (Gpa)	139	210
چگالی ρ ($\mathrm{kg/m^3}$)	7500	7810
ثابت تنش g_{31} ($\mathrm{vm/N}$)	$-7/5 \times 10^{-3}$	-
ثابت کرنش d_{31} ($\mathrm{C/N}$)	-85×10^{-12}	-
حداکثر ولتاژ الکتریکی ($\mathrm{V\mu m^{-1}}$)	1	-

جدول 2 پنج فرکانس طبیعی اول تیر بر حسب هرتز در روش ارائه شده و روش المان محدود

مد	وصله با طول 0/1 متر، در مکان 0/1 متر با ضخامت 0/5 میلی‌متر (روش ارائه شده)	وصله با طول 0/1 متر، در مکان 0/1 متر با ضخامت 40 میکرومتر (روش ارائه شده)	وصله کامل با ضخامت 40 میکرومتر (روش المان محدود) [12]
1	7/3335	6/7729	6/843
2	41/6175	41/9836	42/882
3	123/2267	118/0190	120/100
4	237/1192	231/0230	235/510
5	392/3924	382/2499	389/920



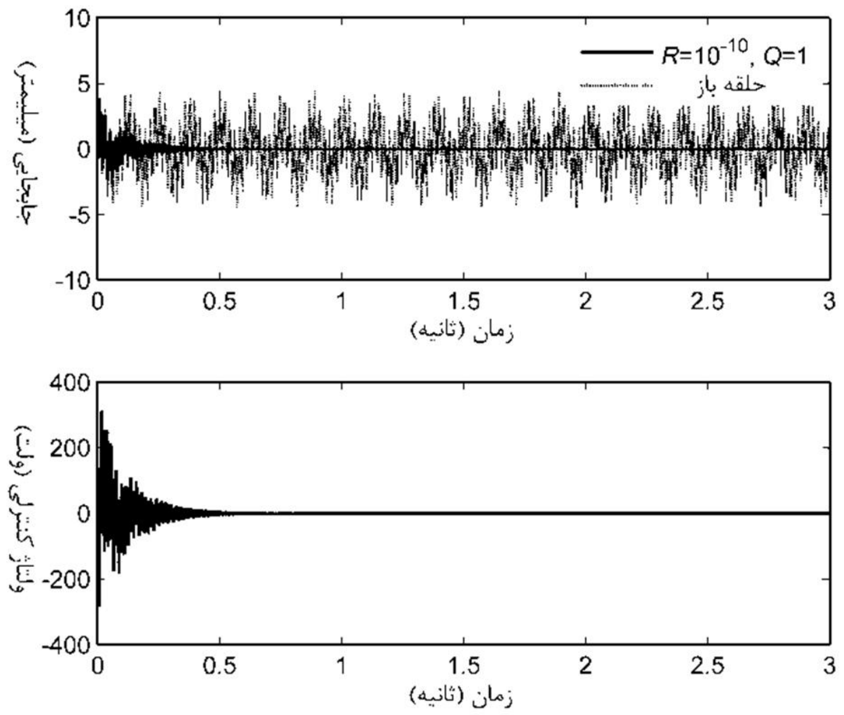
شکل 3 شکل اولیه تیر در حالت تحریک سه شکل مد اول



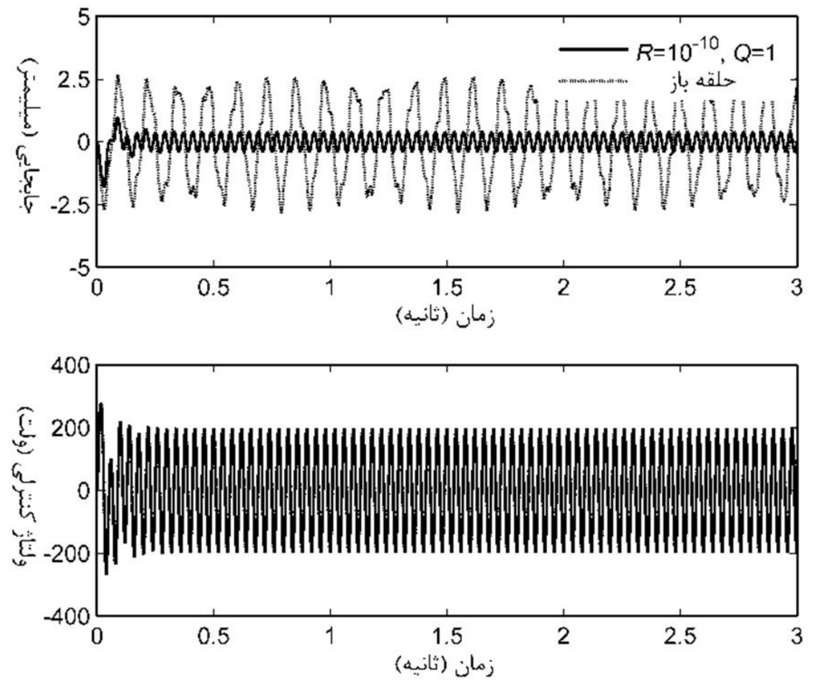
شکل 4 روند رسیدن به طول و مکان بهینه وصله در حالت طول نامحدود

درابتدای تیر بهترین عملکرد را در بین وصله‌ها و حتی بهتر از وصله کامل (100 درصد طول تیر) داراست و در ادامه این نتیجه با شکل‌های بدست آمده اثبات می‌شود.

عملکرد وصله بهینه شده در کنترل ارتعاش تحریک اولیه در شکل 5 نشان داده شده است. سیستم حلقه‌باز با خطوط کم‌رنگ و سیستم حلقه‌بسته با خطوط پررنگ نشان داده شده‌اند. ولتاژ اعمالی بر عملگر در محدوده مجاز وصله استفاده شده قرار دارد و زمان کنترل ارتعاش در حدود 0/8 ثانیه است. کنترل ارتعاش سینوسی برای این وصله در شکل 6 نشان می‌دهد که دامنه ارتعاش تا مقدار مطلوبی کاهش می‌یابد. در این حالت در نقاط حداکثر جابجایی، 84 درصد کاهش دامنه رخ می‌دهد.



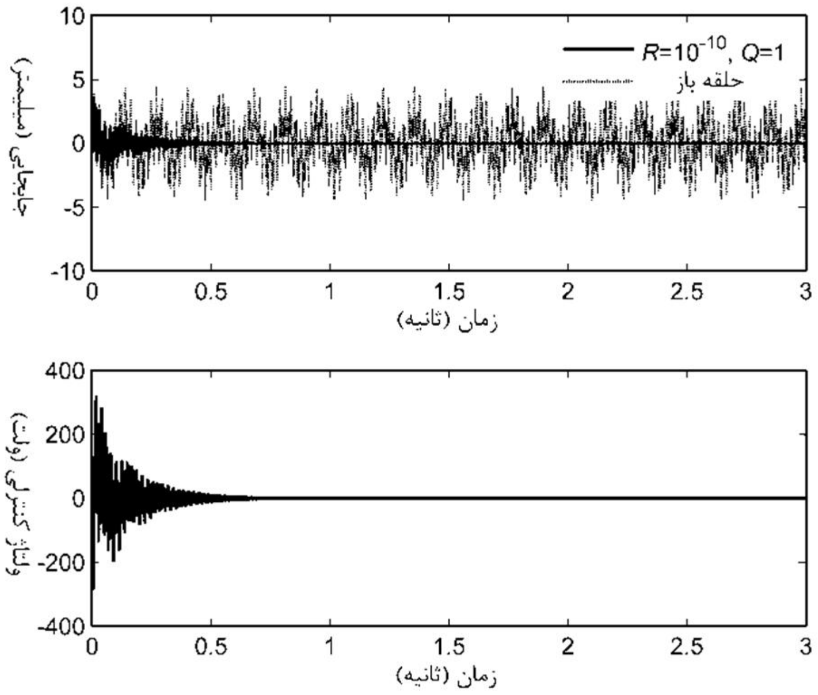
شکل 5 عملکرد وصله بهینه شده در کنترل ارتعاش تحریک اولیه



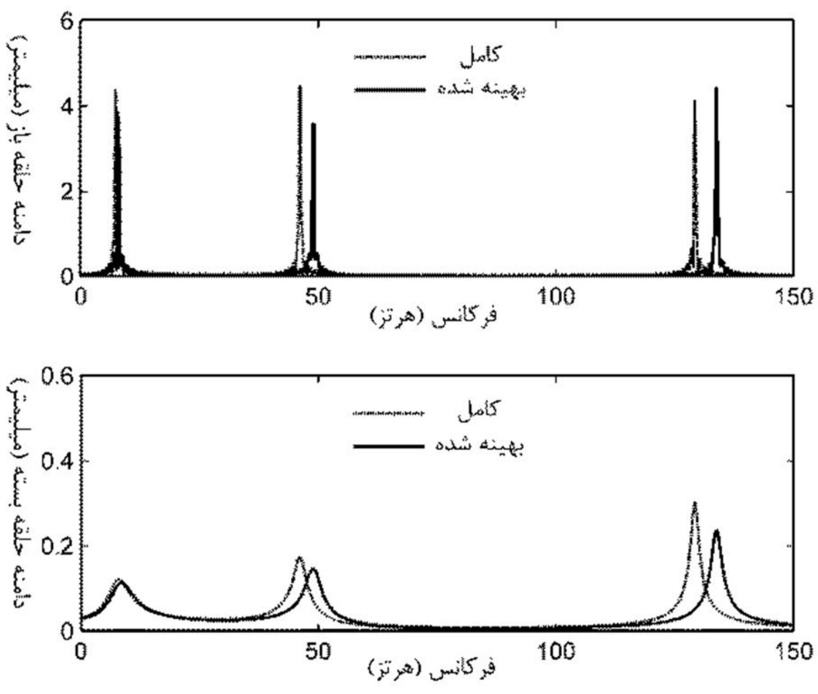
شکل 6 عملکرد وصله بهینه‌شده در کنترل ارتعاش سینوسی

در ادامه عملکرد وصله کامل در کنترل ارتعاش ناشی از این دو تحریک نشان داده شده است. وصله کامل در ارتعاش تحریک اولیه در شکل 7، در فاصله زمانی حدود 1 ثانیه، کنترل کامل ارتعاش را انجام داده است.

در شکل 8، تبدیل فوریه سیگنال ارتعاشی در وصله بهینه‌شده و وصله کامل مقایسه شده است، در قسمت بالای این شکل دامنه تحریک هر فرکانس در حالت حلقه باز مورد بررسی قرار گرفته است. در قسمت پایین



شکل 7 عملکرد وصله کامل در کنترل ارتعاش تحریک اولیه



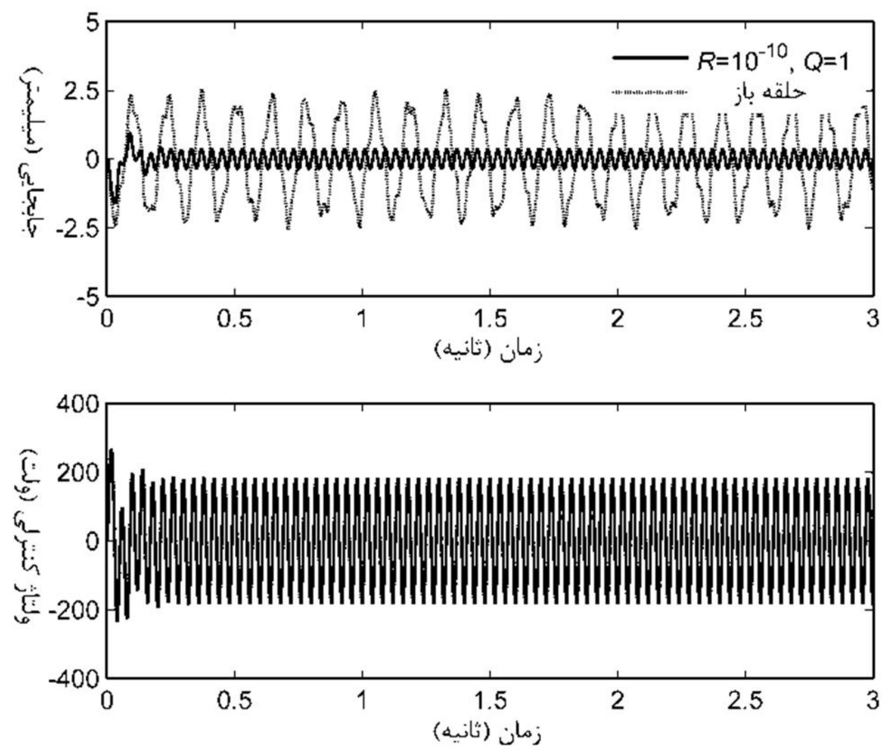
شکل 8 مقایسه تبدیل فوریه سیگنال ارتعاشی در وصله‌های بهینه شده و کامل

این شکل، دامنه هر فرکانس در حالت حلقه بسته، در دو وصله مقایسه شده‌است که عملکرد بهتر وصله بهینه شده در فرکانس‌های دوم و سوم را در کاهش دامنه نشان می‌دهد و در مجموع نشان می‌دهد که وصله بهینه‌شده در کاهش ارتعاش تحریک اولیه بهتر از وصله کامل عمل می‌کند. برخی محققان [10] با درنظرگیری مد اول، طول هم‌اندازه وصله پیزوالکتریک با تیر را به عنوان طول بهینه تعیین نمودند ولی در این تحقیق، سه مد اول در بهینه‌سازی در نظرگرفته‌شده‌اند و همان‌طور که مشاهده شد نتایج برای هر شکل مد متفاوت خواهد بود و در مجموع سه مد، وصله بهینه شده عملکرد بهتری دارد.

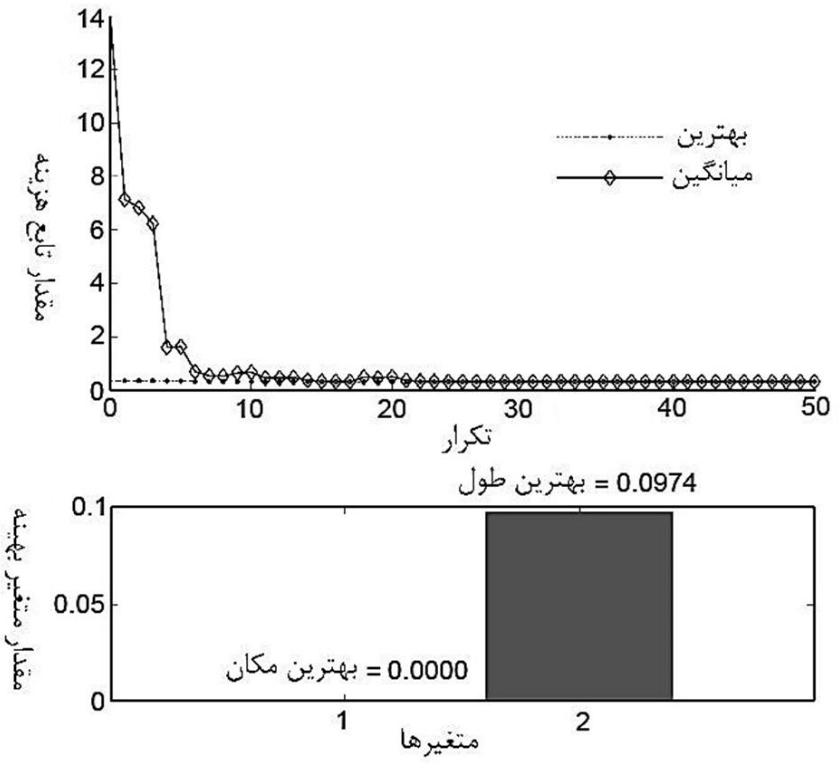
در شکل 9 عملکرد وصله کامل در ارتعاش سینوسی نشان داده شده‌است. به دلیل فرکانس تحریک سیستم، دامنه ارتعاش سیستم حلقه‌باز در وصله کامل بیشتر از وصله بهینه شده است، وصله پیزوالکتریک بر فرکانس تیر اثرگذار است و در هر فرکانس تحریک، رفتار سیستم حلقه باز برای وصله‌ها با طول‌های مختلف متفاوت خواهد بود. وصله کامل در نقاط حداکثر دامنه ارتعاش سبب کاهش 85 درصدی ارتعاش می‌شود که همان‌طور که گفته شد در این تحریک که نزدیک فرکانس اول تیر است بهتر از وصله بهینه‌شده عمل می‌کند.

بهینه‌سازی قبلی برای وصله با طول نامقید یا بدون محدودیت طولی انجام گرفته‌است در شرایطی که به علت تحریک پایین سیستم و یا محدودیت‌های طراحی، استفاده از وصله‌ای با طول محدود مدنظر طراح باشد می‌توان با اعمال این محدودیت در روش ارائه شده به یافتن بهترین مکان و بهترین طول وصله در این حالت پرداخت. برای این بررسی بار دیگر از الگوریتم ژنتیک و این بار با اعمال این محدودیت طولی استفاده شده‌که در شکل 10 روند آن نشان داده شده است. بهینه‌سازی انجام شده نشان می‌دهد در این حالت نیز بهترین مکان برای وصله، ابتدای گیردار تیر خواهد بود و طول بهینه آن، 19/5 درصد طول تیر (برابر 0/0974 متر) است در حالی که محدودیت طولی 25 درصد طول تیر (برابر 0/125 متر) در نظر گرفته شده‌است. با این وصله بهینه شده به بررسی سیستم کنترلی پرداخته می‌شود و عملکرد آن با وصله‌های قبلی مورد مقایسه قرار می‌گیرد.

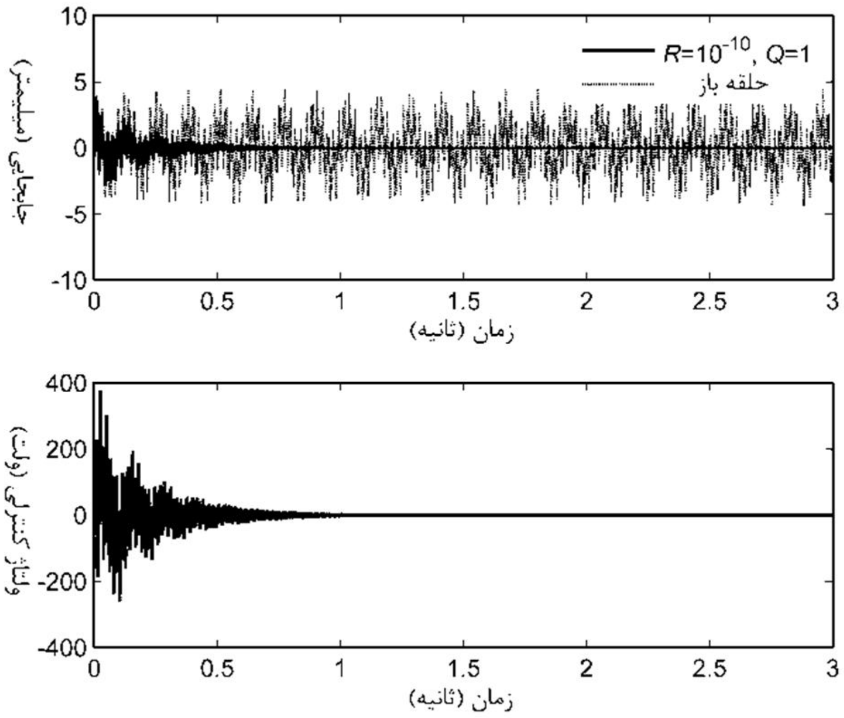
کنترل ارتعاش تحریک اولیه در شکل 11 نشان‌دهنده نیروی کنترلی بیشتر این وصله در کنار زمان کنترل طولانی‌تر، نسبت به دو وصله قبل (بدون محدودیت طولی) است.



شکل 9 عملکرد وصله کامل در کنترل ارتعاش سینوسی

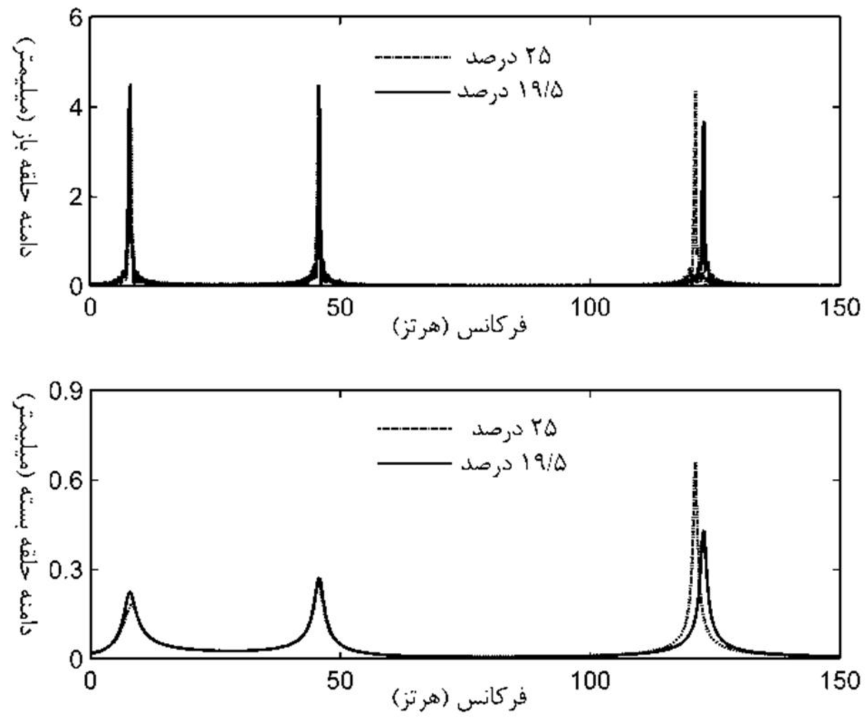


شکل 10 روند رسیدن به طول و مکان بهینه وصله در حالت طول محدود



شکل 11 عملکرد وصله بهینه‌شده با طول محدود در ارتعاش تحریک اولیه

با مقایسه نمودار تبدیل فوریه سیگنال ارتعاشی این وصله با وصله 25 درصد در شکل 12، عملکرد به وضوح بهتر آن در فرکانس سوم مشخص می‌شود در حالی که در دو فرکانس اول اختلاف عملکرد دو وصله ناچیز است و این صحت بهینه‌سازی انجام‌شده را نشان می‌دهد.

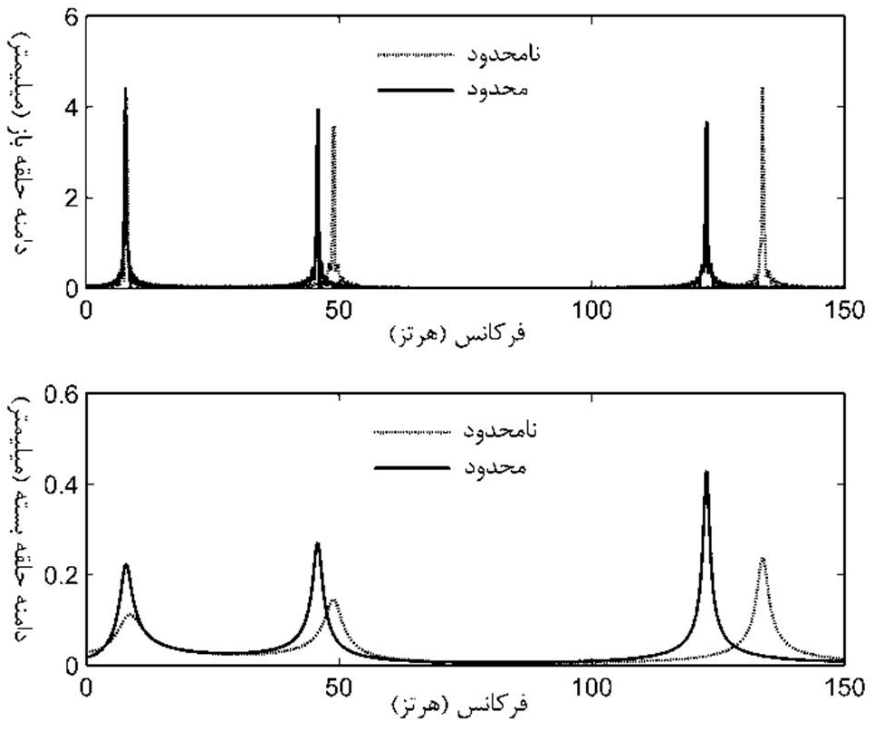


شکل 12 مقایسه تبدیل فوریه سیگنال ارتعاشی در وصله‌های 19/5 و 25 درصد

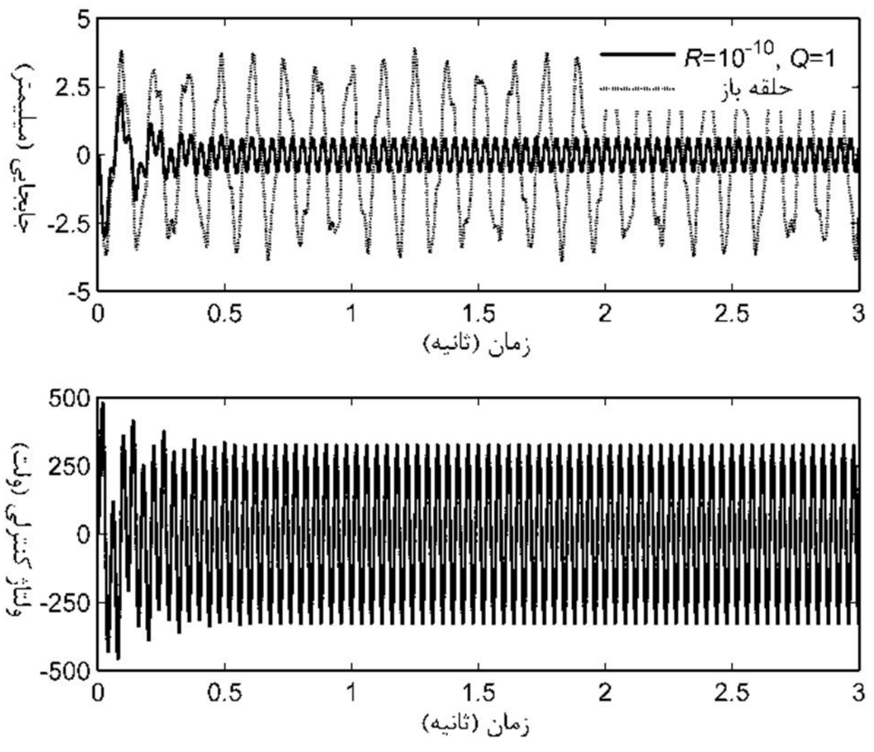
در شکل 13 تبدیل فوریه سیگنال ارتعاشی تیر همراه با لایه‌های پیزوالکتریک بهینه شده با طول‌های نامقید و مقید مقایسه شده‌اند. وصله بهینه شده با طول محدود یا مقید نسبت به وصله بهینه شده با طول نامحدود یا نامقید ضعیف‌تر عمل می‌کند (به دلیل طول کمتر) ولی همان‌طور که نشان داده شد، در محدوده ولتاژ مجاز و در زمان نسبتاً مناسبی کنترل ارتعاش سیستم را انجام داده است و این نشان می‌دهد در کاربردهای با تحریک پایین، حساسیت کمتر و همراه با محدودیت طراحی در استفاده از وصله با طول نامحدود می‌توان از این وصله‌ها استفاده کرد.

در شکل 14 کاهش ارتعاش تحریک سینوسی با استفاده از وصله بهینه‌شده با طول محدود نشان داده شده است که در آن با اعمال ولتاژ مجاز، حداکثر دامنه ارتعاش سیستم به اندازه 83 درصد کاهش یافته‌است ولی زمان پایداری سیستم در این حالت طولانی‌تر و ولتاژ مورد استفاده بیشتر از وصله‌های قبلی است.

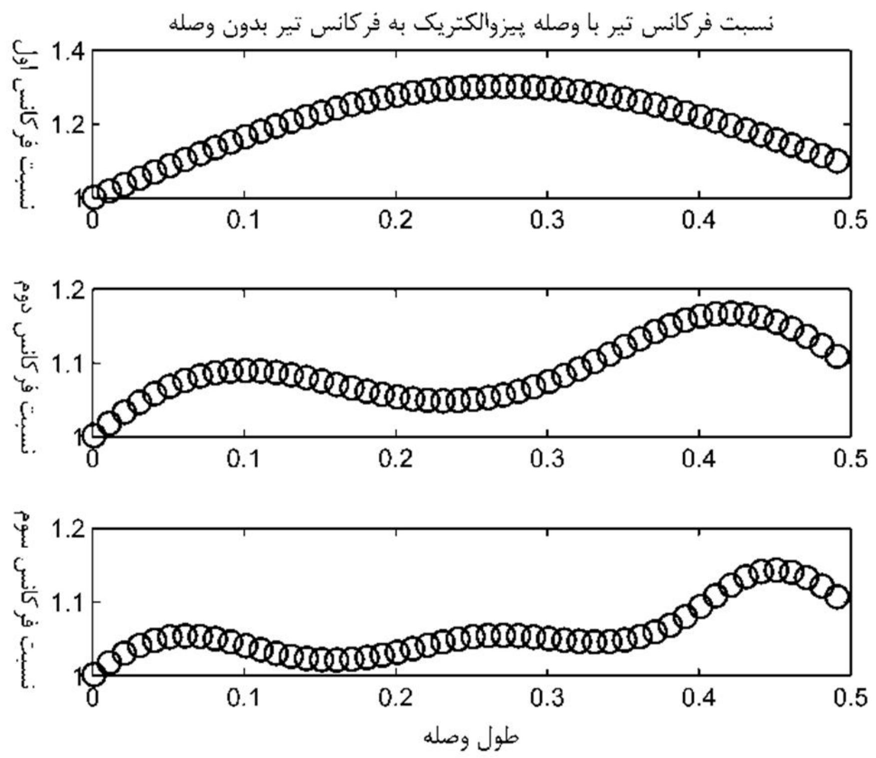
همان‌طور که در شکل‌های تبدیل فوریه سیگنال ارتعاشی مشخص است، طول‌های مختلف وصله پیزوالکتریک اثرات متفاوتی بر فرکانس تیر دارند که در شکل 15 به طور مشخص نشان داده شده‌است. به خاطر این اثرگذاری، تیر در طول‌های مختلف وصله پیزوالکتریک، تحت هر فرکانس تحریک رفتار



شکل 13 مقایسه تبدیل فوریه سیگنال ارتعاشی در وصله‌های بهینه شده با طول نامحدود و محدود



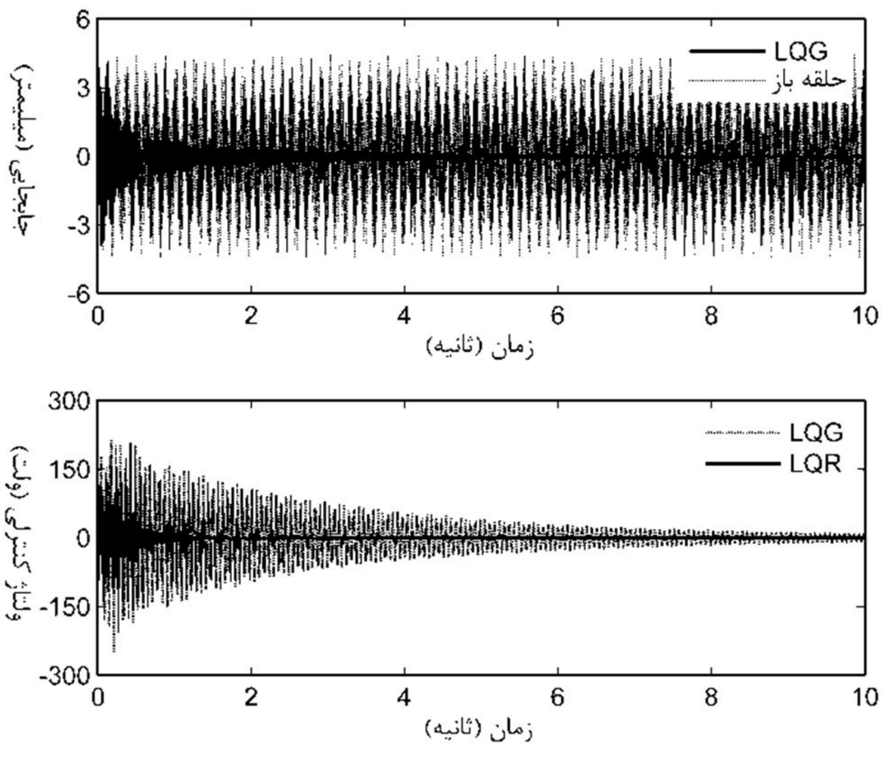
شکل 14 عملکرد وصله بهینه‌شده با طول محدود در ارتعاش سینوسی



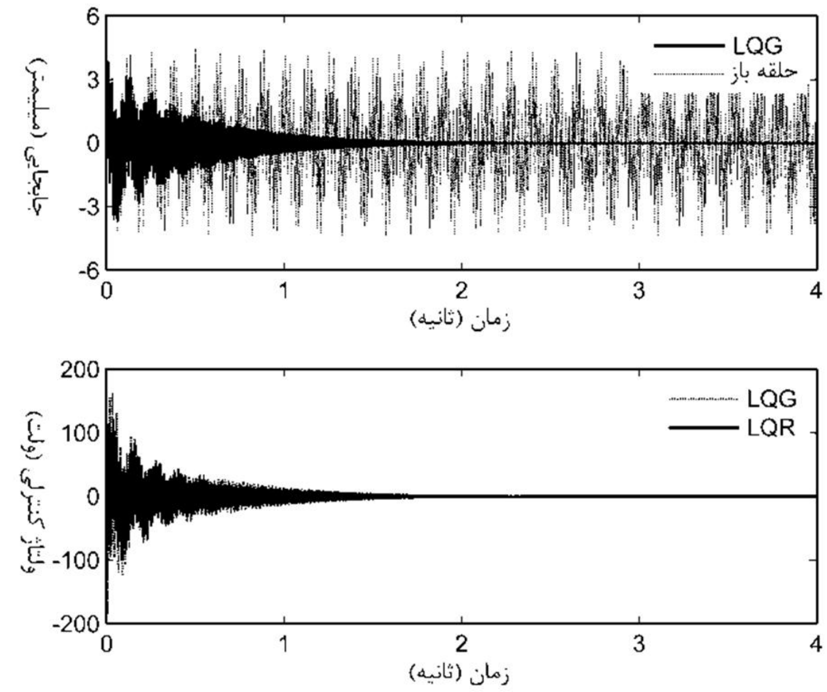
شکل 15 نحوه اثرگذاری وصله پیزوالکتریک بر فرکانس تیر در طول‌های مختلف

ارتعاشی متفاوتی خواهد داشت که در پاسخ حلقه باز سیستم در تحریک سینوسی به وضوح دیده می‌شود.

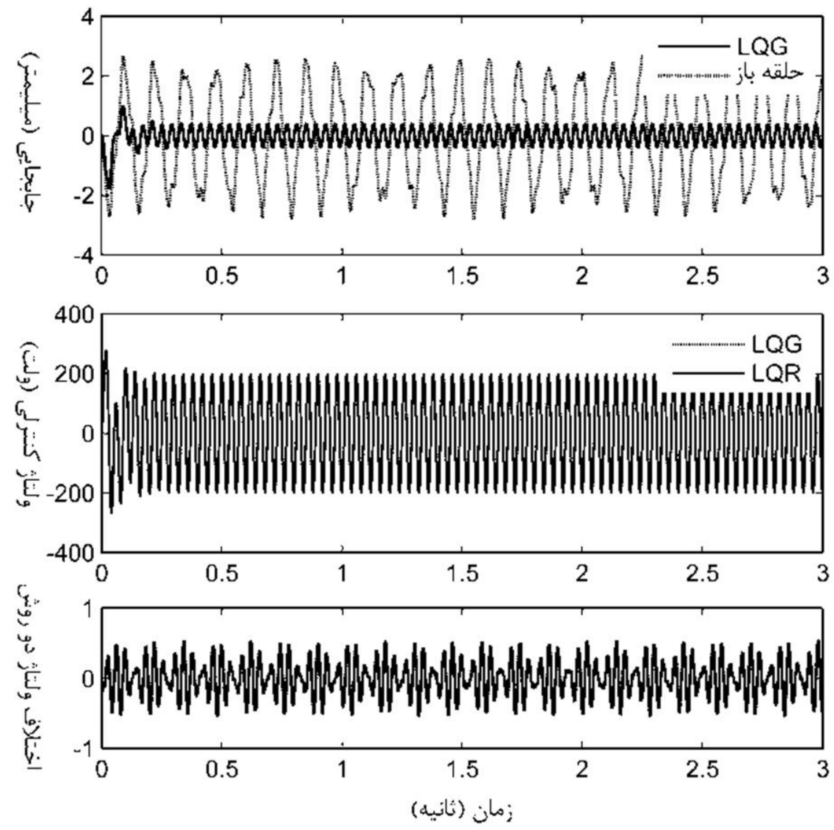
برای نشان‌دادن عملکرد روش کنترلی خطی مرتبه دو گاوسی، وصله بهینه شده با طول نامحدود درنظر گرفته شده‌است و کاهش ارتعاشات در دو تحریک جابجایی اولیه و سینوسی بررسی می‌شوند. در شکل 16 ولتاژ کنترلی و دامنه ارتعاشی در حالت تحریک جابه‌جایی در حالت نویز ورودی بر انتهای تیر نشان داده شده است. ولتاژ کنترلی در روش خطی مرتبه دو گاوسی بیشتر از ولتاژ اعمال شده در روش رگولاتور خطی مرتبه دو است و زمان پایداری سیستم در این روش، درحدود 10 ثانیه است. محل اعمال نویز بر سیستم، بر ولتاژ اعمالی و زمان کنترل سیستم در روش گاوسی خطی مرتبه دو بسیار مؤثر است. در شکل 17 اثر نویز اعمال شده در وسط تیر نشان داده شده است که در آن زمان پایداری سیستم کمتر از 3 ثانیه است و ولتاژ کنترلی نیز تفاوت کمتری با روش تنظیم‌کننده خطی مرتبه دو دارد. در شکل 18 عملکرد این کنترل‌کننده در ارتعاش سینوسی نشان داده شده است که در آن نویز بر انتهای تیر وارد شده است. اختلاف ولتاژ در دو روش کنترلی در این تحریک کمتر از 1 ولت است و این نشان می‌دهد اثر نویز در ارتعاش اجباری کمتر از ارتعاش آزاد این سیستم است.



شکل 16 عملکرد سیستم کنترلی گاوسی در ارتعاش تحریک اولیه-نویز در انتهای تیر



شکل 17 عملکرد سیستم کنترلی گاوسی در ارتعاش تحریک اولیه- نویز در وسط تیر



شکل 18 عملکرد سیستم کنترلی گاوسی در ارتعاش سینوسی- نویز در انتهای تیر

4- نتیجه‌گیری

در این تحقیق کنترل ارتعاش تیر یکسرگیردار پس از بهینه‌سازی پیوسته طول و مکان وصله پیزوالکتریک انجام گرفته است. برای بهینه‌سازی از الگوریتم ژنتیک استفاده شده و تابع هزینه، تابع درجه دوم برحسب جابجایی و نیروی کنترلی در نظر گرفته شده است. مدل‌سازی سیستم به صورت تحلیلی، بر پایه تئوری تیر اویلر برنولی انجام گرفته و از اصل هامیلتون برای بدست آوردن معادلات حرکت استفاده شده است. در این روش ولتاژ کنترلی لایهٔ عملگر در معادلات شرایط مرزی سیستم ظاهر شده که مسأله را تبدیل به مسألهٔ مقدار ویژه با شرایط مرزی متغیر با زمان کرده‌است و با تعریف توابع جابجایی خاص و همگن‌سازی شرایط مرزی، ولتاژ کنترلی عملگر به صورت نیروی تحریک خارجی در معادلات حرکت سیستم ظاهر شد.

در این تحقیق، با معیار بهینه‌سازی ارائه شده و با در نظر گیری سه مد اول، نشان داده‌شد که بهترین طول عملگر در کنترل ارتعاش تیر، حداکثر طول مجاز نخواهد بود و با مقایسه تبدیل فوریه سیگنال ارتعاشی تیر در وصله‌های بهینه‌شده و وصله‌های دارای حداکثر طول مجاز این امر تایید شده است. درحالی که برخی محققان با درنظرگیری مد اول، طول هم‌اندازه وصله پیزوالکتریک با تیر را به عنوان طول بهینه تعیین نمودند. مکان بهینه وصله پیزوالکتریک با استفاده از معیار استفاده شده، ابتدای گیردار تیر تعیین شده- است که محققان با استفاده از سایر معیارها نیز به این نتیجه رسیده بودند. با بررسی کنترل ارتعاش تیر در تحریک جابجایی و تحریک اجباری، عملکرد وصله‌های پیزوالکتریک بهینه شده، با یکدیگر و با وصله کامل مورد مقایسه قرار گرفتند. وصله بهینه شده با طول محدود، به ولتاژ و زمان بیشتری برای کنترل ارتعاش تیر نسبت به وصله‌های بزرگتر نیاز دارد ولی دامنه ارتعاشات را به طور نسبی به مقدار مطلوب کاهش می‌دهد. در ارتعاشات با نیروی تحریک بالا که ولتاژ مصرفی افزایش می‌یابد، ممکن است ولتاژ از حد ظرفیت ماده پیزوالکتریک عبور کند، بنابراین برای پیزوالکتریک‌ها با محدودیت در اعمال ولتاژ، در تحریک‌های بزرگ، بهتر است از وصله بهینه‌شده بدون محدودیت طولی استفاده شود ولی در تحریک‌های نچندان بزرگ مانند تحریک‌های اعمال شده در این تحقیق، استفاده از وصله‌های بزرگ توجیهی ندارد و کاهش مطلوب ارتعاشات با وصله بهینه‌شده با طول محدود هم امکان‌پذیر است.

با اعمال روش کنترلی خطی مرتبه دو گاوسی با تخمین‌گر فیلترکالمن نشان داده شد که در تحریک جابجایی، ولتاژ کنترلی و زمان کنترل سیستم در این روش بیشتر از روش رگولاتور خطی مرتبه دو است ولی در تحریک سینوسی عملکرد این دو روش بسیار نزدیک است. با تغییر محل نویز در تیر نتیجه‌گیری شد که با نزدیک شدن محل اعمال نویز به ابتدای گیردار تیر، کنترل‌کننده خطی مرتبه دو گاوسی، کنترل را با ولتاژ کمتر و در زمان کوتاهتری انجام می‌دهد و اثر نویز بر سیستم کمتر است.

5- مراجع

[1] M. Dadfarnia, N. Jalili, Z. Liu, D. M. Dawson, An observer-based piezoelectric control of flexible Cartesian robot arms: theory and experiment, *Control Engineering Practice,* Vol. 12, pp. 1041-1053, 2004.
[2] X. Zhang, C. Shao, S. Li, D. Xu, A. G. Erdman, Robust H∞ vibration control for flexible linkage mechanism systems with piezoelectric sensors and actuators, *Journal of Sound and Vibration,* Vol. 243, pp. 145-155, 2001.
[3] C. M. A. Vasques, J. Dias Rodrigues, Active vibration control of smart piezoelectric beams: comparison of classical and optimal feedback control strategies, *Computers & Structures,* Vol. 84, No. 22–23, pp. 1402-1414, 2006.
[4] Y.-M. H. Seung-Bok Choi, *Piezoelectric Actuators : Control Applications of Smart Materials,* Taylor and Francis, 2010.
[5] N. Jalili, *Piezoelectric-Based Vibration Control, From Macro to Micro/Nano Scale Systems,* Springer, 2010.
[6] I. Kucuk, I. S. Sadek, E. Zeini, S. Adali, Optimal vibration control of piezolaminated smart beams by the maximum principle, *Computers & Structures,* Vol. 89, No. 9–10, pp. 744-749, 2011.
[7] J. Ducarne, O. Thomas, J. F. Deü, Placement and dimension optimization of shunted piezoelectric patches for vibration reduction, *Journal of Sound and Vibration,* Vol. 331, No. 14, pp. 3286-3303, 2012.
[8] Q. Wang, C. M. Wang, A controllability index for optimal design of piezoelectric actuators in vibration control of beam structures, *Journal of Sound and Vibration,* Vol. 242, No. 3, pp. 507-518, 2001.
[9] S. Devasia, T. Meressi, B. Paden, E. Bayo, Piezoelectric actuator design for vibration suppression: placement and sizing, *Journal of Guidance,. Control and Dynamics,* Vol. 2, pp. 1367-1372, 1992.
[10] R. Barboni, A. Mannini, E. Fantini, P. Gaudenzi, Optimal placement of PZT actuators for the control of beam dynamics, *Smart Materials and Structures,* Vol. 9, No. 1, pp. 110-120, 2000.
[11] Y. G. Sung, Modelling and control with piezoactuators for a simply supported beam under a moving mass, *Journal of Sound and Vibration,* Vol. 250, No. 4, pp. 617-626, 2002.
[12] K. R. Kumar, S. Narayanan, Active vibration control of beams with optimal placement of piezoelectric sensor/actuator pairs, *Smart Materials and Structures,* Vol. 17, No. 5, pp. 1-15, 2008.
[13] M. I. Frecker, Recent advances in optimization of smart structures and actuators, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures,* Vol. 14, No. 4-5, pp. 207-216, April 1, 2003.
[14] V. Gupta, M. Sharma, N. Thakur, Optimization criteria for optimal placement of piezoelectric sensors and actuators on a smart structure: A technical review, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures,* Vol. 21, No. 12, pp. 1227-1243, 2010.

[15] M. A. Hamed, Vibration control of composite beams using piezoelectric layers, in *The 3rd International Conference on Acoustics and Vibration,* Tehran, Iran, 2013. (In Persian)
[16] J. M. Simões Moita ,V. M. Franco Correia, P. G. Martins, C. M. Mota Soares, C. A. Mota Soares, Optimal design in vibration control of adaptive structures using a simulated annealing algorithm, *Composite Structures,* Vol. 75, No. 1–4, pp. 79-87, 2006.
[17] P. Gaudenzi, R. Carbonaro, E. Benzi, Control of beam vibrations by means of piezoelectric devices: theory and experiments, *Composite Structures,* Vol. 50, No. 4, pp. 373-379, 2000.
[18] S. Kumar, R. Srivastava, R. Srivastava, Active vibration control of smart piezo cantilever beam using pid controller, *International Journal of Research in Engineering and Technology,* Vol. 3, pp. 392-399, 2014.
[19] L. Meirovitch, *Fundamentals of Vibrations,* International Edition, pp. 442-447, 2001.
[20] J. N. Reddy, On laminated composite plates with integrated sensors and actuators, *Engineering Structures,* Vol. 21, pp. 568-593, 1999.
[21] L. Sui, X. Xiong, G. Shi, Piezoelectric actuator design and application on active vibration control, *Physics Procedia,* Vol. 25, No. 0, pp. 1388-1396, 2012.