مجله مهندسی مکانیک مدرس، آبان 1394، دوره 15، شماره 8، ص‌ص 216-226

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

مدلسازی و کنترل ربات متحرک چرخ‌دار مجهز به تریلی با چرخ کروی غیرفعال

اصغر خان‌پور[1]، علی کیماسی خلجی[2]، سید علی اکبر موسویان[3*]

1- دانش آموخته کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

2- دانش آموخته دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

3- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

* تهران، صندوق پستی 1999-19395، moosavian@kntu.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 25 فروردین 1394
پذیرش: 15 خرداد 1394
ارائه در سایت: 07 تیر 1394

کلید واژگان:
ربات‌های متحرک چرخ‌دار تراکتور-تریلی
تعقیب مسیرهای حرکت زمانی
سیستم‌های غیرهولونومیک
کمبود عملگر
لیاپانوف

چکیده

کنترل ربات‌های متحرک چرخ‌دار براساس مسیرهای زمانی، یکی از مسائل مطرح در زمینه ربات‌های متحرک می‌باشد. همچنین، کنترل سیستم‌هایی که با کمبود عملگر مواجه هستند از پیچیدگی خاص و اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. در این مقاله، این دو موضوع مهم کنترلی تواماً در یک ربات متحرک تراکتور-تریلی؛ که در آن تراکتور یک ربات دو چرخ دیفرانسیلی و تریلی مجهز به دو چرخ کروی غیرفعال می‌باشد؛ مورد مطالعه قرار گرفته است. استفاده از چرخ‌های کروی به جای چرخ‌های استاندارد در تریلی، ربات را به شدت کم‌عملگر و غیرخطی می‌کند. کمبود عملگر سیستم، علاوه بر وجود تراکتور دیفرانسیلی، ناشی از تریلی با چرخ‌های کروی غیرفعال است که برای حذف قید درجات آزادی سیستم و قابلیت مانور در سیستم به کار رفته است. در این مقاله پس از معرفی ربات، مدل سینماتیکی و سینتیکی آن استخراج و مدل دینامیکی با ترکیب و تلفیق سینماتیک و سینتیک سیستم ارائه می‌شود. سپس، یک الگوریتم کنترلی جدید، که براساس یک مفهوم کاملاً فیزیکی سامان داده شده تحت عنوان الگوریتم کنترلی لیاپانوف- PID ارائه می‌شود. سپس اجتناب از ایجاد تکینگی در الگوریتم کنترلی پیشنهاد شده مورد تحلیل و بررسی قرار می‌گیرد و پایداری آن اثبات می‌شود. نتایج شبیه‌سازی حاکی از عملکرد مطلوب الگوریتم کنترلی پیشنهادی است. در پایان، نتایج پیاده‌سازی تجربی الگوریتم کنترلی پیشنهادی بر روی یک سیستم آزمایشگاهی ارائه می‌شود که کارایی قانون کنترلی پیشنهاد شده را نشان می‌دهد.

Dynamics and Control of a Wheeled Mobile Robot Attached by a Trailer with Passive Spherical Wheels

Asghar Khanpoor, Ali Keymasi Khalaji, Seyed Ali Akbar Moosavian*

Department of Mechanical Engineering, K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran
* P.O.B. 19395-1999 Tehran, Iran, moosavian@kntu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 14 April 2015
Accepted 05 June 2015
Available Online 28 June 2015

Keywords:
Tractor-Trailer Wheeled Mobile Robots
Trajectory Tracking
Nonholonomic Systems
Underactuation
Lyapunov Method

ABSTRACT

Trajectory tracking is one of the main control problems in the context of Wheeled Mobile Robots (WMRs). On the other hand, control of underactuated systems possesses a particular complexity and importance; so it has been the focus of many researchers in recent years. In this paper, these two important control subjects have been discussed for a Tractor-Trailer Wheeled Mobile Robot (TTWMR), which includes a differential drive wheeled mobile robot towing a passive spherical wheeled trailer. The use of spherical wheels instead of standard wheels in trailer makes the robot highly underactuated and nonlinear. Spherical wheels have been used for the trailer to increase robots' maneuverability. In fact, standard wheels create nonholonomic constraints by means of pure rolling and nonslip conditions, and reduce robot maneuverability. In this paper, after introducing the robot, kinematics and kinetics models have been obtained for the system. Then, based on physical intuition a new controller has been developed for the robot, named Lyapaunov-PID control algorithm. Then, singularity avoidance of the proposed algorithm has been analyzed and the stability of the algorithm has been discussed. Simulation results reveal the suitable performance of the proposed algorithm. Finally, experimental implementation results have been presented which verify the simulation results.

1- مقدمه

در میان ربات‌های متحرک، ربات‌های متحرک چرخ‌دار[1] جایگاه ویژه‌ای دارند. چرخ به عنوان یکی از روش‌های جابه‌جائی ربات، علاوه بر طراحی ساده، روابط ساده، ساخت ساده، دارای بازدهی بالایی است. همچنین تعادل در طرح‌های ربات چرخ‌دار معمولاً مشکل اساسی محسوب نمی‌شود و در ربات‌های سه چرخ این تضمین همواره وجود دارد که ربات در تعادل است [1].

از این رو مدلسازی و کنترل این سیستم‌ها مورد مطالعه‌ی بسیاری از محققان قرار گرفته است [2-7]. مدل‌سازی سینماتیکی، دینامیکی و ویژگی‌های ساختاری انواع ربات‌های متحرک چرخ‌دار در [8] بررسی شده است.

1- Wheeled Mobile Robots (WMRs)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:
A. Khanpoor, A. Keymasi Khalaji, S.A.A. Moosavian, Dynamics and Control of a Wheeled Mobile Robot Attached by a Trailer with Passive Spherical Wheels, *Modares Mechanical Engineering,* Vol. 15, No. 8, pp. 216-226, 2015 (In Persian)

ربات‌های متحرک چرخ‌دار به دلیل ساختار و استفاده از چرخ‌های استاندارد در آن، مقید به قیود غیرهولونومیک[1] می‌باشند، این قیود به دلیل غلتش خالص چرخ‌ها در حرکت رو به جلو و عدم لغزش جانبی ایجاد می‌شوند. قیود غیرهولونومیک در رده‌ی سرعت و شتاب بیان می‌شوند، به عبارت دیگر این قیود سرعت‌ها و شتاب‌های سیستم را محدود می‌کنند و از درجات آزادی موقعیت نمی‌کاهند و قیود به‌صورت ضمنی در کنار معادلات دینامیکی سیستم در نظر گرفته می‌شوند. قیود غیرهولونومیک علاوه بر افزایش پیچیدگی مدلسازی و کنترل این ربات‌ها به جذابیت این مسائل می‌افزایند [9]. در [10] خلاصه‌ای از روش‌های کنترلی در سیستم‌های غیرهولونومیک، در [12،11] تعقیب مسیر در فضای کارتزین[2]، در [13-15] پایدارسازی حول وضعیت معین[3] و در [16-17] تعقیب مسیرهای حرکت زمانی[4] مورد مطالعه قرار گرفته است. در [18] برای یک ربات دو چرخ دیفرانسیلی، ورودی‌های کنترل بر مبنای لیاپانوف[5] طراحی و به کمک الگوریتم ژنتیک بهینه‌سازی شده است. در [19] سینماتیک، کنترل و پایدارسازی ربات متحرک با یک تریلی مورد مطالعه قرار گرفته است. در [20] مدلسازی تعقیب مسیرهای حرکت زمانی برای یک ربات متحرک شبه‌خودرو[6] که دارای دو قید غیرهولونومیک است بررسی شده است. در [21] نیز سینماتیک و کنترل یک ربات متحرک چرخ‌دار با دو تریلی که دارای سه قید غیرهولونومیک است، مورد مطالعه قرار گرفته است. در [22] یک الگوریتم کنترلی غیر مدل مبنا[7] با استفاده از خطاهای فیلتر شده مشتقی- تناسبی[8] برای کنترل ربات متحرک چرخ‌دار (دو چرخ دیفرانسیلی) ارائه شده است. در [9] برای کنترل یک ربات تراکتور-تریلی از کنترل سینماتیکی فیدبک خروجی و یک کنترل مود لغزشی فازی[9] استفاده شده است که ربات را به‌صورت مجانبی حول مسیرهای حرکت زمانی مرجع پایدار می‌سازد. در [23] با استفاده از روش غیر مدل مبنا ترانهاده ماتریس ژاکوبین[10]، تعقیب مسیر حرکت زمانی مرجع توسط ربات تراکتور-تریلی انجام شده است.

در [24-27] کنترل سیستم‌های مکانیکی کم‌عملگر[11] مورد بحث قرار گرفته است. یک سیستم مکانیکی به دلایل مختلفی با کمبود عملگر مواجه می‌شود. مشهودترین دلیل، طراحی ذاتی اینگونه ربات‌ها است؛ مانند آکروبات[12]، همچنین کمبود عملگر در ربات‌های متحرک بوجود می‌آید؛ به عنوان مثال زمانی که یک بازوی مکانیکی ماهر برروی یک پایه‌ی متحرک، یک پایه‌ی فضایی و یا یک پایه‌ی زیردریایی نصب شود، دلیل دیگری که باعث ایجاد کمبود عملگر می‌شود، مدل ریاضی است که استفاده می‌شود؛ به عنوان مثال زمانی که انعطاف‌پذیری مفصل در مدل در نظر گرفته شود [24].

همانطور که اشاره شد، ربات‌های متحرک چرخدار تراکتور-تریلی[13] پیش‌تر مورد مطالعه‌ی محققان قرار گرفته است [28،23،21،19،15،9]. ربات متحرک دارای تریلی (تریلی مجهز به چرخ استاندارد) یک سیستم غیرخطی، کم عملگر و مقید به قیود غیرهولونومیک می‌باشد. تفاوت اساسی این پژوهش، به منظور افزایش مانور سیستم، استفاده از چرخ کروی به جای چرخ استاندارد در تریلی می‌باشد. چرخ‌های کروی بر خلاف چرخ‌های استاندارد با غلتش در دو راستا، قابلیت مانور و درجات آزادی بیشتری را برای ربات فراهم می‌کنند. به طورکلی یک ارتباط معکوس بین مانورپذیری[14] و کنترل‌پذیری[15] وجود دارد [1]، با توجه به تغییر در ساختار ربات و استفاده از چرخ کروی در تریلی ربات به شدت کم‌عملگر و غیرخطی می‌شود که کنترل سیستم را با پیچیدگی‌های بسیاری روبرو می‌کند. الگوریتم کنترلی که برای فائق آمدن بر این پیچیدگی‌ها پیشنهاده شده است، الگوریتم جدیدی است که لیاپانوف-PID نامگذاری شده است و دستاوردهای زیر را به همراه داشته است:

- مدلسازی ربات و ارائه مدل ترکیبی[16] که تلفیقی از مدل سینماتیکی و سینتیکی سیستم است.
- ارائه الگوریتم کنترلی جدید، به عنوان یک دستاورد کاملاً فیزیکی و قابل کاربرد برای سیستم‌های کم‌عملگر با ساختار مشابه
- طراحی قانون کنترلی بر مبنای الگوریتم لیاپانوف-PID[17] برای ربات تراکتور- تریلی موردنظر، که یک سیستم به شدت غیرخطی، کم‌عملگر و غیرهولونومیک می‌باشد.
- بررسی اجتناب از ایجاد تکینگی[18] در الگوریتم کنترلی
- تحلیل پایداری الگوریتم کنترلی
- پیاده‌سازی الگوریتم کنترلی بر روی یک سیستم آزمایشگاهی و ارائه نتایج تجربی

در این مقاله ابتدا ساختار ربات معرفی شده و مدل سینماتیکی و سینتیکی استخراج می‌شود. سپس به دلیل عدم فراهم نمودن اطلاعات مکفی در هر مدل و ناکارآمدی کنترل بر مبنای آن‌ها، مدل ترکیبی که تلفیقی از سینماتیک و سینتیک است، معرفی می‌شود که هم بیان مشخصی از سیستم در اختیار قرار می‌دهد و هم از مزایای دو مدل استفاده می‌کند. در ادامه الگوریتم کنترلی جدیدی که لیاپانوف-PID نامگذاری شد، ارائه می‌شود. در پایان با بررسی اجتناب از ایجاد تکینگی در سیستم کنترلی و اثبات پایداری الگوریتم کنترلی، نتایج پیاده‌سازی ارائه می‌شود.

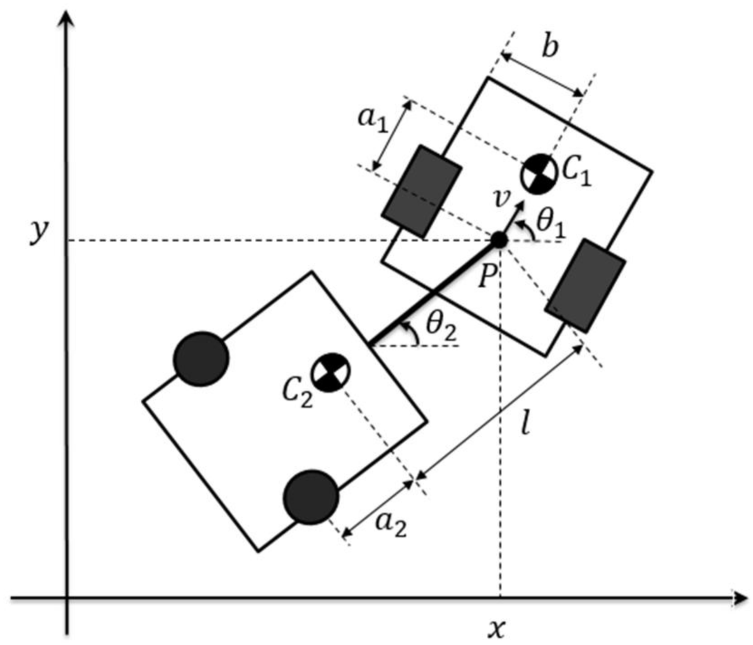
2- توصیف و مدلسازی سیستم

ربات تراکتور-تریلی شکل 1، یک ربات دو چرخ دیفرانسیلی به همراه یک تریلی می‌باشد، تراکتور از دو چرخ استاندار فعال[19] (هم محور با عملگرهای جداگانه) و یک چرخ کروی غیرفعال[20] تشکیل شده است. چرخ‌های استاندارد به دلیل ساختار ویژه خود یک قید غیرهولونومیکی به سیستم اعمال می‌کنند ولی چرخ کروی صرفاً به عنوان تکیه‌گاه بوده و برای حفظ تعادل ربات به کار رفته است و هیچ گونه قیدی به سیستم اعمال نمی‌کند. تریلی در نقطه P (مرکز محور دو چرخ) به تراکتور لولا شده که در شکل 2 نشان داده شده است. برای افزایش مانورپذیری سیستم، تریلی به دو چرخ کروی غیرفعال مجهز شده است. چرخ‌های کروی با غلتش در دو راستا علاوه بر افزایش قابلیت مانور و درجات آزادی ربات، هیچ‌گونه قیدی ایجاد نمی‌کنند، که این سیستم مورد نظر را به شدت کم عملگر می‌کند.

فرض می‌شود که هیچگونه لغزشی در چرخ‌ها وجود ندارد و حرکت صرفاً براساس غلتش خالص اتفاق می‌افتد، همچنین حرکت سیستم صفحه‌ای در نظر گرفته شده است. تمامی پارامترهای ربات در شکل 2 قابل مشاهده می‌باشند.

1- Nonholonomic Constraints
2- Path Following
3- Point Stabilization
4- Trajectory Tracking
5- Lyapunov Based
6- Car-Like
7- Non-Model Based
8- PD-action Filtered Errors
9- Fuzzy Sliding Mode Control
10- Transpose Jacobian Matrix
11- Undeactuated Mechanical Systems
12- Acrobot
13- Tractor-Trailer Wheeled Mobile Robots (TTWMRs)
14- Maneuverability
15- Controllability
16- Hybrid Model
17- Lyapunov-PID
18- Singularity Avoidance
19- Active
20- Passive

شکل 1 ربات ساخته شده در آزمایشگاه



شکل 2 ساختار ربات متحرک چرخ‌دار با تریلی مجهز به چرخ‌های کروی

2-1- مدل سینماتیکی

استفاده از چرخ‌های استاندارد در ربات‌های متحرک، به دلیل ساختار اینگونه چرخ‌ها (غلتش بدون لغزش و عدم حرکت جانبی) قیود غیرهولونومیکی را در اینگونه ربات‌ها ایجاد می‌کنند. این قیود به‌صورت رابطه (1) تعریف می‌شوند.

$$A(q)\dot{q} = 0 \tag{1}$$

که در آن $A(q)$ ماتریس قیدی $(m \times n)$، m تعداد قیود، n تعداد مختصات تعمیم‌یافته و q مختصات تعمیم‌یافته[1] می‌باشد.

$$q = [x \quad y \quad \theta_1 \quad \theta_2]^{\mathrm{T}} \tag{2}$$

قید غیرهولونومیکی مربوط به تراکتور به صورت رابطه‌ی (3) می‌باشد.

$$A(q)\dot{q} = \dot{x}\sin\theta_1 - \dot{y}\cos\theta_1 = 0 \tag{3}$$

بنابراین ماتریس قیود به صورت (4) خواهد بود.

$$A(q) = [\sin\theta_1 \quad -\cos\theta_1 \quad 0 \quad 0] \tag{4}$$

با توجه به اینکه میدان برداری $X = [x_1, x_2, x_3, x_4]^{\mathrm{T}}$ اگر $A.X = 0$ فضای تهی ماتریس A را افراز می‌کند، با باز آرایی روابط، مدل سینماتیکی به صورت رابطه‌ی (5) خواهد بود.

$$\dot{q} = S(q)\zeta \tag{5}$$

که در آن $S(q)$ ماتریس ژاکوبین سیستم و یک نگاشت از مختصات تعمیم یافته $\dot{q}$ به متغیرهای فضای کاری ζ است.

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{\theta}_1\\ \dot{\theta}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\theta_1 & 0 & 0\\ \sin\theta_1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{s}\\ \dot{\theta}_1\\ \dot{\theta}_2\end{bmatrix} \tag{6}$$

1- Generalized coordinates

ورودی‌های سیستم نیز سرعت دورانی چرخ‌های تراکتور (ω_r, ω_l) می‌باشد، که با تغییر متغیر (8) و (9) ورودی‌های سینماتیکی به $(\dot{s})$ سرعت خطی نقطه‌ی P (سرعت رو به جلوی تراکتور) و سرعت زاویه‌ای تراکتور $(\dot{\theta}_1)$ تبدیل می‌شوند.

$$u = [u_1 \quad u_2]^{\mathrm{T}} \tag{7}$$

$$u_1 = \dot{s} = \frac{r}{2}(\omega_r + \omega_l) \tag{8}$$

$$u_2 = \dot{\theta}_1 = \frac{r}{2b}(\omega_r - \omega_l) \tag{9}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= u_1\cos\theta_1\\ \dot{y} &= u_1\sin\theta_1\\ \dot{\theta}_1 &= u_2\\ \dot{\theta}_2 &= \dot{\theta}_2\end{aligned} \tag{10}$$

از مدل سینماتیکی (10) مشخص است هیچ رابطه‌ی سینماتیکی بین $\dot{\theta}_2$ و دیگر متغیرها و ورودی‌های سینماتیکی وجود ندارد، و این ناشی از استفاده از چرخ کروی و نبودن قید برای تریلی است که کمبود عملگر را ایجاد نموده است.

2-2- مدل سینتیکی

فرمولاسیون لاگرانژ برای یک سیستم مقید به‌صورت زیر است:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\right) - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k}\right) = f_k - \sum_{j=1}^{m}\lambda_j\, a_{jk} \tag{11}$$

که λ_jها ضرایب لاگرانژ، m تعداد معادلات قیدی و a_{jk} برابر با k-امین ضریب از معادله‌ی قیدی j-ام است. همچنین لاگرانژین $\mathcal{L}$ اختلاف بین انرژی جنبشی T و پتانسیل U می‌باشد. f_k نیروی تعمیم یافته k-ام می‌باشد.

$$\mathcal{L}(q,\dot{q}) = T(q,\dot{q}) - U(q) = \frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}B(q)\dot{q} - U(q) \tag{12}$$

$B(q)$ ماتریس اینرسی مثبت معین سیستم مکانیکی است. انرژی جنبشی سیستم برابر است با:

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2}m_1\left\{\left(\dot{x} - a_1\dot{\theta}_1\sin\theta_1\right)^2 + \left(\dot{y} + a_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1\right)^2\right\}\\ &+ \frac{1}{2}m_2\left\{\left(\dot{x} + l\dot{\theta}_2\sin\theta_2\right)^2 + \left(\dot{y} - l\dot{\theta}_2\cos\theta_2\right)^2\right\}\\ &+ \frac{1}{2}J_1\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}J_2\dot{\theta}_2^2\end{aligned} \tag{13}$$

با توجه به حرکت صفحه‌ای ربات و عدم تغییر انرژی پتانسیل گرانشی، لاگرانژین برابر با انرژی جنبشی می‌باشد. با انجام محاسبات، نتایج بدست آمده در روابط (17-14) آورده شده است.

$$\begin{aligned}&(m_1 + m_2)\ddot{x} - m_1 a_1\sin\theta_1\,\ddot{\theta}_1 + m_2 l\sin\theta_2\,\ddot{\theta}_2\\ &- m_1 a_1\cos\theta_1\,\dot{\theta}_1^2 + m_2 l\cos\theta_2\,\dot{\theta}_2^2\\ &= f\cos\theta_1 + \lambda_1\sin\theta_1\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}&(m_1 + m_2)\ddot{y} + m_1 a_1\cos\theta_1\,\ddot{\theta}_1 - m_2 l\cos\theta_2\,\ddot{\theta}_2\\ &- m_1 a_1\sin\theta_1\,\dot{\theta}_1^2 + m_2 l\sin\theta_2\,\dot{\theta}_2^2\\ &= f\sin\theta_1 - \lambda_1\cos\theta_1\end{aligned} \tag{15}$$

$$m_1 a_1(-\ddot{x}\sin\theta_1 + \ddot{y}\cos\theta_1) + (J_1 + m_1 a_1^2)\ddot{\theta}_1 = \tau \tag{16}$$

$$m_2 l\,(\ddot{x}\sin\theta_2 - \ddot{y}\cos\theta_2) + (J_2 + m_2 l^2)\ddot{\theta}_2 = 0 \tag{17}$$

که λ_1 مضرب لاگرانژ، f نیروی رانش تراکتور و τ گشتاور جهت‌گیری تراکتور می‌باشد. فرم ماتریسی معادلات به شکل (18) است:

$$M(q)\ddot{q} + V(q,\dot{q}) = E(q)\tau + A^{\mathrm{T}}(q)\lambda \tag{18}$$

برای حذف مضارب لاگرانژ، طرفین رابطه‌ی (3) در ماتریس ژاکوبین ضرب می‌شود که رابطه‌ی (19) نتیجه می‌شود.

$$S(q)A(q)\dot{q} = 0 \rightarrow S^{\mathrm{T}}(q)A^{\mathrm{T}}(q) = 0 \tag{19}$$

با توجه به رابطه‌ی (19) با ضرب ترانهاده ماتریس ژاکوبین در رابطه‌ی (18)، رابطه‌ی مزبور به فرم (20) تبدیل می‌شود.

$$S^{\mathrm{T}}(q)\,M(q)\ddot{q} + S^{\mathrm{T}}(q)\,V(q,\dot{q}) = S^{\mathrm{T}}(q)\,E(q)\tau \tag{20}$$

با مشتق‌گیری از رابطه‌ی (5) خواهیم داشت:

$$\ddot{q} = \dot{S}(q)\dot{\zeta} + S(q)\ddot{\zeta} \tag{21}$$

و جایگذاری (21) در (20) رابطه (22) نتیجه می‌شود.

$$S^{\mathrm{T}}(q)\, M(q)\big(\dot{S}(q)\dot{\zeta} + S(q)\ddot{\zeta}\big) + S^{\mathrm{T}}(q)\, V(q,\dot{q}) = S^{\mathrm{T}}(q)\, E(q)\tau \tag{22}$$

در نهایت معادلات دینامیکی به فرم ماتریسی زیر خواهند بود:

$$\begin{bmatrix} m_1 + m_2 & 0 & m_2 l \sin(\theta_2 - \theta_1) \\ 0 & J_1 + m_1 a_1^2 & 0 \\ m_2 l \sin(\theta_2 - \theta_1) & 0 & J_2 + m_2 l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{s} \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -m_1 a_1 \dot{\theta}_1^2 + m_2 l \cos(\theta_2 - \theta_1)\, \dot{\theta}_2^2 \\ m_1 a_1 \dot{s}\, \dot{\theta}_1 \\ -m_2 l \cos(\theta_2 - \theta_1)\, \dot{s}\, \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ \tau \\ 0 \end{bmatrix} \tag{23}$$

کمبود عملگر از مدل دینامیکی بدست آمده نیز مشهود است.

2-3- مدل ترکیبی

کنترل ربات‌های متحرک چرخ‌دار عمدتاً بر مبنای کنترل سینماتیک انجام می‌شود، اما نبودن روابط و اطلاعات کافی و همچنین عدم وجود الگوریتم کنترلی مناسب برای سیستم‌های با کمبود عملگر، هم کنترل بر مبنای مدل سینماتیکی و هم مدل سینتیکی را با مشکل مواجه می‌نماید. بنابراین داشتن یک مدل که سیستم را به خوبی معرفی نماید، از اهمیت بالایی برخوردار است. بدین منظور مدل ترکیبی پیشنهاد می‌شود و معادلات فضای حالت سیستم بر مبنای ترکیب معادلات سینماتیک و سینتیک تشکیل می‌شود. بنابراین رابطه‌ی (17) به روابط (10) اضافه می‌شود.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u_1 \cos\theta_1 \\ \dot{y} &= u_1 \sin\theta_1 \\ \dot{\theta}_1 &= u_2 \\ \dot{\theta}_2 &= \dot{\theta}_2 \\ \ddot{x}\sin\theta_2 - \ddot{y}\,\cos\theta_2 &+ k\ddot{\theta}_2 = 0 \end{aligned} \tag{24}$$

که در آن $k = J_2/m_2 l + l$ می‌باشد.

بر خلاف روش‌های معمول کنترل ربات‌های متحرک چرخ‌دار، که θ_1 یکی از مختصات تعمیم‌یافته سیستم در نظر گرفته می‌شود، با افزودن $\dot{x}$ و $\dot{y}$ به مختصات تعمیم‌یافته سیستم، بردار متغیرهای حالت به صورت (25) در نظر گرفته می‌شود، هدف از این کار نیز اعمال و استفاده از تغییر متغیر (27) و (28) می‌باشد که معادلات سیستم را به (29) تغییر می‌دهد.

$$z = \left[x, \dot{x}, y, \dot{y}, \theta_2, \dot{\theta}_2\right]^{\mathrm{T}} \tag{25}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \dot{x} = z_2 \\ \dot{z}_2 &= \ddot{x} = \dot{u}_1 \cos\theta_1 - u_1 u_2 \sin\theta_1 \\ \dot{z}_3 &= \dot{y} = z_4 \\ \dot{z}_4 &= \ddot{y} = \dot{u}_1 \sin\theta_1 + u_1 u_2 \cos\theta_1 \\ \dot{z}_5 &= \dot{\theta}_2 = z_6 \\ \dot{z}_6 &= \ddot{\theta}_2 = \frac{1}{k}(-\ddot{x}\sin z_5 + \ddot{x}\cos z_5) \end{aligned} \tag{26}$$

با اعمال تغییر متغیرهای (23) و (24) به سیستم داریم:

$$v_1 = \dot{u}_1 \cos\theta_1 - u_1 u_2 \sin\theta_1 \tag{27}$$

$$v_2 = \dot{u}_1 \sin\theta_1 + u_1 u_2 \cos\theta_1 \tag{28}$$

فرم فضای حالت (29) نتیجه می‌شود.

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= v_1 \\ \dot{z}_3 &= z_4 \\ \dot{z}_4 &= v_2 \\ \dot{z}_5 &= z_6 \\ \dot{z}_6 &= \frac{1}{k}(-v_1 \sin z_5 + v_2 \cos z_5) \end{aligned} \tag{29}$$

3- طراحی الگوریتم کنترلی

کنترلرهای ربات‌های متحرک را می‌توان به دو دسته تقسیم کرد، برخی کنترلرها سینماتیک سیستم را کنترل می‌کنند و ورودی‌هایشان سرعت‌ها می‌باشند و برخی دیگر دینامیک سیستم را کنترل می‌کنند و ورودی‌های کنترلی آن‌ها نیروها و گشتاورهای تولید شده توسط عملگرها می‌باشند. بیشتر کارهایی که در زمینه‌ی ربات‌های متحرک چرخ‌دار انجام شده است از نوع کنترلر سینماتیکی بوده‌اند. دلایل اصلی این موضوع عبارتند از:

• مدل سینماتیکی ساده‌تر از مدل دینامیکی می‌باشد.

• بسیاری از ربات‌ها عملگرهایشان موتورهای الکتریکی می‌باشند، این موتورها اغلب دارای حلقه‌های کنترل سرعت با ورودی سرعت دورانی مطلوب می‌باشند که سرعت دورانی موتور را روی مقداری مشخص پایدار می‌سازند.

• مسئله‌ی کنترل ربات با گشتاور موتورها را می‌توان به مسئله‌ای با ورودی‌های کنترلی شتاب تبدیل نمود.

در واقع هدف اصلی از بدست آوردن مدل ترکیبی، هم استفاده از مزایای مذکور بوده و همچنین مشخص کردن وضعیت کامل ربات و رفع نقص مدل سینماتیکی به دلیل عدم وجود رابطه سینماتیکی متغیر غیرفعال θ_2 (جهت-گیری تریلی) با سایر متغیرها می‌باشد.

در ادامه یک الگوریتم کنترلی جدید که دارای یک مفهوم کاملاً فیزیکی است، معرفی می‌شود. برای تبیین بهتر و درک مفهوم فیزیکی این الگوریتم، دقت به روند دست‌یابی به الگوریتم اهمیت ویژه‌ای دارد.

یکی از روش‌های متداول درکنترل سینماتیک ربات دو چرخ دیفرانسیلی یا شبه‌خودرو طراحی ورودی‌های کنترلی بر مبنای لیاپانوف می‌باشد. همانطور که پیشتر گفته شد، جهت‌گیری تریلی هیچ‌گونه رابطه‌ی سینماتیکی با سایر متغیرها یا ورودی‌ها ندارد. بنابراین در ابتدا برای کنترل ربات، از کنترل آن صرف‌نظر می‌شود. در واقع هدف کنترل متغیرهای فعال سیستم، یعنی کنترل تراکتور، بر مبنای لیاپانوف می‌باشد. در این حالت هیچ‌گونه کنترلی بر وضعیت تریلی وجود ندارد و تریلی صرفاً به دلیل اتصال به تراکتور و روابط موجود حرکت نامعلومی را طی می‌کند.

3-1- توصیف فیزیکی الگوریتم کنترلی

برای شروع طراحی الگوریتم کنترلی ابتدا بردار خطای (30) را تعریف نموده که بر مبنای آن معادلات فضای حالت به (31) تبدیل می‌شود.

$$\begin{cases} e_1 = x - x_d \\ e_2 = \dot{x} - \dot{x}_d \\ e_3 = y - y_d \\ e_4 = \dot{y} - \dot{y}_d \end{cases} \tag{30}$$

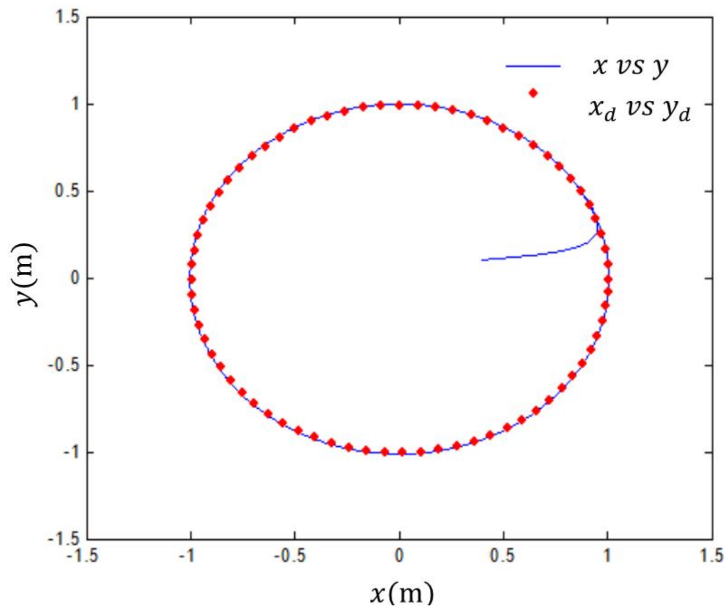
بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2 \\ \dot{e}_2 &= v_1 - v_{1d} \\ \dot{e}_3 &= e_4 \\ \dot{e}_4 &= v_2 - v_{2d} \\ \dot{z}_5 &= z_6 \\ \dot{z}_6 &= \frac{1}{k}(-v_1 \sin z_5 + v_2 \cos z_5) \end{aligned} \tag{31}$$

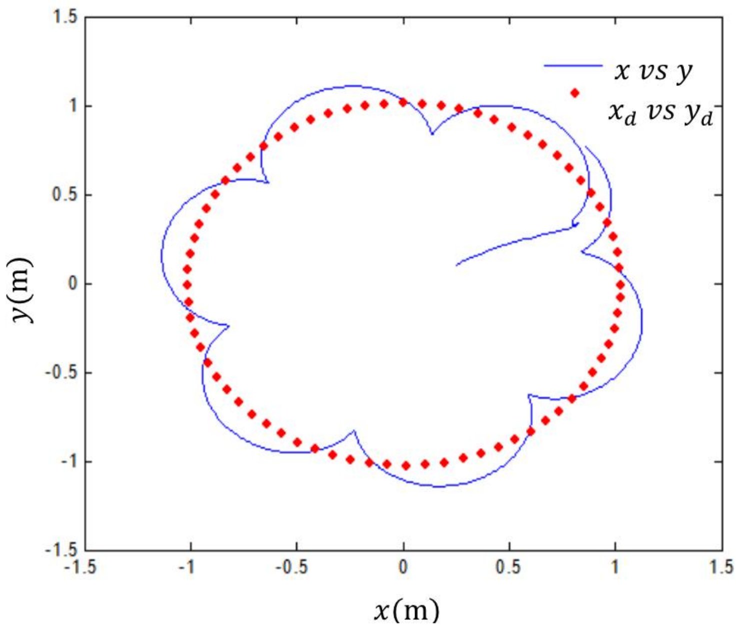
در ادامه تابع لیاپانوف پیشنهادی (32) معرفی می‌شود و براساس آن ورودی-های کنترلی که بتواند سیستم را پایدار نماید استخراج می‌شود. در واقع این تابع لیاپانوف پیشنهادی شامل متغیرهای مفصلی تراکتور بوده و فعلاً، هدف پایدارسازی تراکتور است.

$$\begin{aligned} V(e) &= \frac{1}{2}(\alpha_1 e_1^2 + \alpha_2 e_2^2 + \alpha_3 e_3^2 + \alpha_4 e_4^2) \\ &\alpha, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 > 0 \end{aligned} \tag{32}$$

که مشتق تابع لیاپانوف پیشنهادی به‌صورت (33) خواهد بود.



شکل 3 تعقیب مسیر مرجع زمانی در فضای کارتزین توسط تراکتور



شکل4 تعقیب مسیر مرجع زمانی در فضای کارتزین توسط تریلی

$$\dot{V}(e) = (\alpha_1 e_1 \dot{e}_1 + \alpha_2 e_2 \dot{e}_2 + \alpha_3 e_3 \dot{e}_3 + \alpha_4 e_4 \dot{e}_4) \tag{33}$$

با جایگذاری از معادلات فضای حالت (31) در (33) خواهیم داشت:

$$\dot{V}(e) = \alpha_1 e_1 e_2 + \alpha_2 e_2 (v_1 - v_{1d}) + \alpha_3 e_3 e_4 + \alpha_4 e_4 (v_2 - v_{2d}) \tag{34}$$

ورودی‌های کنترلی را به‌صورت (35) تعریف می‌کنیم.

$$\begin{cases} v_1 = v_{1d} - \alpha_2 e_2 - \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}\left(e_1 + \dfrac{e_1^2}{e_2}\right) \\ v_2 = v_{2d} - \alpha_4 e_4 - \dfrac{\alpha_3}{\alpha_4}\left(e_3 + \dfrac{e_3^2}{e_4}\right) \end{cases} \tag{35}$$

با جایگذاری ورودی‌های کنترلی (35) در مشتق تابع لیاپانوف (33) خواهیم داشت:

$$\dot{V}(e) = -\alpha_1 e_1^2 - (\alpha_2 e_2)^2 - \alpha_3 e_3^2 - (\alpha_4 e_4)^2 \leq 0 \tag{36}$$

از رابطه (36) مشخص است که مشتق تابع لیاپانوف یک تابع منفی معین می‌باشد، به عبارت دیگر متغیرهای موجود در تابع لیاپانوف (متغیرهای فعال تراکتور) در صورت عدم وجود ناپایداری داخلی، پایدار می‌باشند. بنابراین ورودی‌های (35)، ورودی‌های مناسبی به نظر می‌رسند. برای بررسی دقیق‌تر، شبیه‌سازی برای مسیر مرجع زمانی دایره‌ای (37) انجام شده است، شکل 3 و 4 به ترتیب نمایشگر تعقیب مسیر مرجع زمانی دایره‌ای در فضای کارتزین توسط تراکتور و تریلی می‌باشند.

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\omega t) \\ y &= r\sin(\omega t) \\ r &= 1\,, \omega = 0.5 \end{aligned} \tag{37}$$

همانطور که پیش‌بینی می‌شد، تراکتور به خوبی کنترل شده و مسیرهای زمانی موردنظر را به خوبی تعقیب می‌نماید، اما هیچ‌گونه کنترلی بر تریلی وجود نداشته و حول مسیر مطلوب نوسان می‌کند. برای رفع این مشکل از قرار دادن یک فنر و دمپر پیچشی در محل اتصال تریلی به تراکتور (نقطه P) استفاده می‌شود تا بتوان نوسانات ایجاد شده را مهار نمود. بنابراین معادله (17) که به دلیل قرار گرفتن فنر و دمپر پیچشی تغییر نموده، بازیابی می‌شود تا تأثیرات آن مشخص شود. هدف از اضافه کردن فنر و دمپر در ساختار سیستم، از بین بردن نوسانات تریلی حول مسیر مرجع زمانی می‌باشد، پس از انجام محاسبات فنر و دمپر، معادله (17) را به‌صورت معادله (41) تبدیل می‌کند. اضافه کردن فنر و دمپر هیچ تأثیر در انرژی جنبشی سیستم ندارد، فرمولاسیون کلی لاگرانژ به‌صورت (37) می‌باشد.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\right) - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k}\right) + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_k} = f_k - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j a_{jk} \tag{38}$$

انرژی پتانسیل سیستم به‌صورت (38) و انرژی جنبشی طبق (13) خواهد بود، و F در آن به‌صورت (39) است.

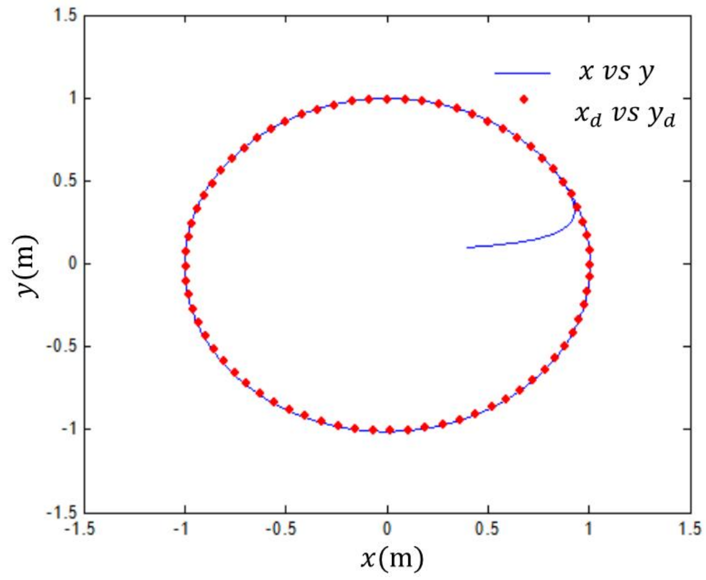
$$U = \frac{1}{2} k_t (\theta_1 - \theta_2)^2 \tag{39}$$

$$F = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} c_{rs}\dot{q}_r\dot{q}_s = \frac{1}{2} c_t \left(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2\right)^2 \tag{40}$$

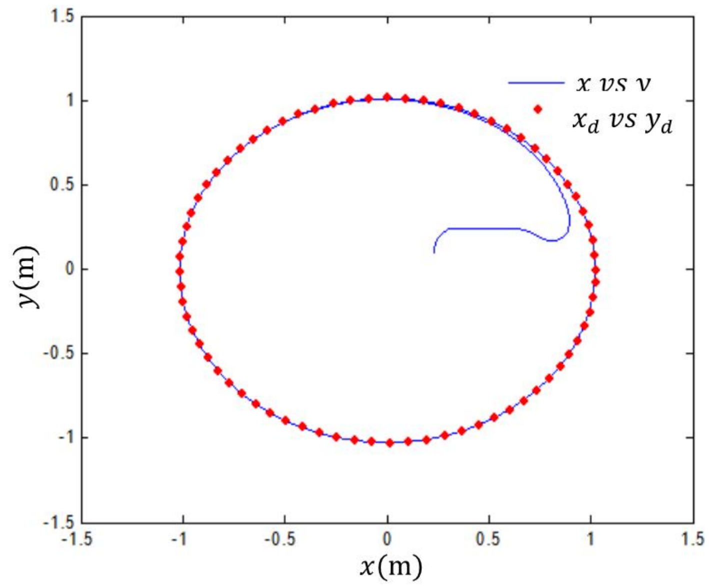
بنابراین معادلات دینامیکی سیستم به شکل زیر بدست خواهد آمد:

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{1}{k}\left(-\ddot{x}\sin\theta_2 + \ddot{y}\cos\theta_2 + k_t(\theta_1 - \theta_2) + c_t\left(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2\right)\right) \tag{41}$$

بنابراین با جایگذاری رابطه (41) در معادلات فضای حالت سیستم (31) و اعمال ورودی‌های طراحی شده بر مبنای تابع لیاپانوف پیشنهادی (32) و شبیه‌سازی مجدد برای مسیر مرجع زمانی (37)، نتایج حاصله در شکل 5 و 6 نشان داده شده است.



شکل 5 تعقیب مسیر مرجع زمانی در فضای کارتزین توسط تراکتور (با قرار دادن فنر و دمپر پیچشی در محل اتصال تریلی به تراکتور نقطه P)



شکل 6 تعقیب مسیر مرجع زمانی در فضای کارتزین توسط تریلی (با قرار دادن فنر و دمپر پیچشی در محل اتصال تریلی به تراکتور نقطه P)

نتایج بدست آمده از تحلیل صورت گرفته مبنی بر قرار دادن فنر و دمپر پیچشی در محل اتصال تریلی به تراکتور تأیید می‌کند که نوسانات تریلی مهار شده و سیستم به خوبی کنترل می‌شود. اما نکته‌ای که باید بدان توجه داشت، این است که هدف اصلی کنترل ربات بدون قرار دادن چنین فنر و دمپری می‌باشد، حال این ایده شکل می‌گیرد که الگوریتم کنترلی به نحوی تغییر کند که نقش فنر و دمپر پیچشی را نیز خود در سیستم ایفا نماید. در واقع مرحله‌ی بعدی تغییر الگوریتم کنترلی و قرار دادن فنر و دمپر مجازی در دل آن است، به عبارت دیگر یک الگوریتم کنترلی بر مبنای لیاپانوف مجهز به فنر و دمپر مجازی بدست خواهد آمد.

3-2- الگوریتم کنترلی لیاپانوف-PID

برای نیل به این هدف همان تابع لیاپانوف (32) برای پایداری متغیرهای فعال معرفی می‌شود، سپس به ورودی‌های کنترلی طراحی شده (35) که تابع لیاپانوف مزبور را پایدار می‌سازد، ترمی اضافه می‌شود به گونه‌ای که در پایداری تابع لیاپانوف تأثیری نداشته باشد و صرفاً متغیر غیرفعال یعنی جهت‌گیری تریلی را کنترل نماید. در واقع قرار است این ترم جدید نقش فنر و دمپر را ایفا کند. بنابراین ورودی‌های کنترلی جدید را به شکل (42) تعریف می‌کنیم.

$$\begin{cases}\bar{v}_1 = v_1 + \beta_1\gamma_1 \\ \bar{v}_2 = v_2 + \beta_2\gamma_2\end{cases} \tag{42}$$

که $\beta_1\gamma_1$ و $\beta_2\gamma_2$ در آن دو ترم اصلاحی اضافه شده نامعلوم می‌باشد و باید به گونه‌ای مشخص شوند که علاوه براینکه در پایداری و کنترل تراکتور تأثیر نداشته باشند مانند یک فنر و دمپر پیچشی مجازی در محل اتصال تریلی به تراکتور عمل کنند. با جایگذاری این ورودی‌های کنترلی جدید در مشتق تابع لیاپانوف (43) خواهیم داشت:

$$\dot{V}(e) = \alpha_1 e_1 e_2 + \alpha_2 e_2(\bar{v}_1 - v_{1d}) + \alpha_3 e_3 e_4 + \alpha_4 e_4(\bar{v}_2 - v_{2d}) \tag{43}$$

با جایگذاری (42) در (43) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\dot{V}(e) = \alpha_1 e_1 e_2 + \alpha_2 e_2\left(v_1 + \beta_1\gamma_1 - v_{1d}\right) + \alpha_3 e_3 e_4 \\ + \alpha_4 e_4\left(v_2 + \beta_2\gamma_2 - v_{2d}\right)\end{aligned} \tag{44}$$

با جایگذاری v_1 و v_2 از رابطه (35) در (43) و ساده‌سازی خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\dot{V}(e) = -e_1^2 - (\alpha_2 e_2)^2 - e_3^2 - (\alpha_4 e_4)^2 + \alpha_2 e_2 \beta_1 \gamma_1 \\ + \alpha_4 e_4 \beta_2 \gamma_2 \le 0\end{aligned} \tag{45}$$

هدف این است که دو ترم پایانی رابطه (45)، در مشتق تابع لیاپانوف تغییری ایجاد نکند، به عبارت دیگر رابطه (46) باید صفر شود

$$\alpha_2 e_2 \beta_1 \gamma_1 + \alpha_4 e_4 \beta_2 \gamma_2 = 0 \tag{46}$$

از رابطه‌ی (46) نتایج زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{cases}\beta_1 = +\alpha_4 e_4 \\ \beta_2 = -\alpha_2 e_2 \\ \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma\end{cases} \tag{47}$$

حال کافیست که γ در رابطه زیر مشخص شود:

$$\begin{cases}\bar{v}_1 = v_1 + \alpha_4 e_4 \gamma \\ \bar{v}_2 = v_2 - \alpha_2 e_2 \gamma\end{cases} \tag{48}$$

برای این منظور، با جایگذاری ورودی‌های جدید (48) در رابطه‌ی متغیر غیرفعال (جهت‌گیری تریلی) یعنی رابطه آخر از معادلات فضای حالت (29)، خواهیم داشت:

$$\dot{z}_6 = \frac{1}{k}(-v_1 \sin z_5 + v_2 \cos z_5) \tag{49}$$

با توجه به اینکه $z_5 = \theta_2$ و $z_6 = \dot{\theta}_2$ می‌باشد، خواهیم داشت:

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{1}{k}\left(-(v_1 + \alpha_4 e_4 \gamma)\sin\theta_2 + (v_2 - \alpha_2 e_2 \gamma)\cos\theta_2\right) \tag{50}$$

$$\begin{aligned}\ddot{\theta}_2 = \frac{1}{k}\{(-v_1 \sin\theta_2 + v_2 \cos\theta_2) \\ - (\alpha_4 e_4 \sin\theta_2 + \alpha_2 e_2 \cos\theta_2)\gamma\}\end{aligned} \tag{51}$$

با مقایسه رابطه (51) با زمانی که در سیستم فنر و دمپر پیچشی وجود داشت، یعنی رابطه (40) و با توجه به اینکه قرار است ترم پایانی معادله (51) که به دلیل اضافه کردن ترم‌های اصلاحی در مسأله ایجاد شده است، یعنی $(\alpha_4 e_4 \sin\theta_2 + \alpha_2 e_2 \cos\theta_2)\gamma$، عملکرد فنر و دمپر را داشته باشد، نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$-(\alpha_4 e_4 \sin\theta_2 + \alpha_2 e_2 \cos\theta_2)\gamma = k_t(\theta_1 - \theta_2) + c_t(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \tag{52}$$

بنابراین γ به شکل زیر بدست خواهد آمد:

$$\gamma = -\frac{k_t(\theta_1 - \theta_2) + c_t(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)}{(\alpha_4 e_4 \sin\theta_2 + \alpha_2 e_2 \cos\theta_2)} \tag{53}$$

حال پس از درک مفهوم آن می‌توان فراتر عمل کرد و به کمک خطی‌سازی فیدبک در رابطه (51)، و استفاده از کنترلر PID، γ به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}\gamma = \frac{1}{\alpha_4 e_4 \sin\theta_2 + \alpha_2 e_2 \cos\theta_2}\Big\{(-v_1 \sin\theta_2 \\ + v_2 \cos\theta_2) - k\left(\ddot{\theta}_{2d} + k_d(\dot{\theta}_{2d} - \dot{\theta}_2) + k_p(\theta_{2d} - \theta_2) \\ + k_i \int (\theta_{2d} - \theta_2)\, dt\right)\Big\}\end{aligned} \tag{54}$$

حال کافیست بهره‌های کنترلی در رابطه (54) محاسبه شود، با جایگذاری رابطه‌ی (54) در رابطه‌ی (51) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\ddot{\theta}_2 = \ddot{\theta}_{2d} + k_d(\dot{\theta}_{2d} - \dot{\theta}_2) + k_p(\theta_{2d} - \theta_2) \\ + k_i \int (\theta_{2d} - \theta_2)\, dt\end{aligned} \tag{55}$$

خطای مربوط به θ_2 به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$e_5(t) = \theta_2 - \theta_{2d} \tag{56}$$

با جایگذاری رابطه‌ی خطا در رابطه (55) به معادله زیر می‌رسیم:

$$\ddot{e}_5 + k_d \dot{e}_5 + k_p e_5 + k_i \int e_5\, dt = 0 \tag{57}$$

با گرفتن تبدیل لاپلاس خواهیم داشت:

$$E_5(s)(s^3 + k_d s^2 + k_p s + k_i) = 0 \tag{58}$$

با جانشانی قطب‌ها، به عنوان مثال در 1- بهره‌های کنترلی محاسبه می‌شود.

$$(s+1)^3 = s^3 + 3s^2 + 3s + 1 = 0 \tag{59}$$

$$\begin{cases}k_d = 3 \\ k_p = 3 \\ k_i = 1\end{cases} \tag{60}$$

اکنون هدف مورد نظر محقق گردید، ورودی‌های کنترلی طبق رابطه (48) محاسبه می‌شوند، که v_1 و v_2 در آن از رابطه (35) و γ از رابطه (53) یا (54) مشخص می‌گردد.

3-3- اجتناب از ایجاد تکینگی در الگوریتم کنترلی

برای جلوگیری از ایجاد انفراد و تکینگی در سیستم باید تمهیداتی اندیشید. در صورت وقوع انفراد، علت اصلی قرار گرفتن مقادیر خطا در مخرج رابطه (54) می‌باشد، اگر قرار باشد خطاها به سمت صفر میل کنند، عبارت مورد نظر به سمت بی‌نهایت میل می‌کند. بنابراین باید به سراغ رفع این مشکل رفت. از آنجایی که مقادیر خطا به سمت صفر میل می‌کنند و تغییرات ناچیزی دارند، عبارت (60) مقداری کوچک با تغییرات ناچیز خواهد بود.

$$\alpha_4 e_4 \sin\theta_2 + \alpha_2 e_2 \cos\theta_2 = const + \varepsilon \tag{61}$$

مقدار تغییرات ε ناچیز است، بنابراین قابل صرف نظر است. حال با توجه به اینکه این مقدار کوچک در مخرج واقع شده، مقدار بزرگی را تولید می‌نماید، بنابراین این مقدار بزرگ نیز عدد ثابت در نظر گرفته می‌شود.

$$\frac{1}{\alpha_4 e_4 \sin\theta_2 + \alpha_2 e_2 \cos\theta_2} = \frac{1}{const + \varepsilon} = \rho \tag{62}$$

به عبارت دیگر γ در ورودی کنترلی (48) به‌صورت زیر می‌باشد.

$$\gamma = \rho\Big[\left(-v_1\sin\theta_2 + v_2\cos\theta_2\right) - k\Big(\ddot{\theta}_{2d} + k_d\big(\dot{\theta}_{2d} - \dot{\theta}_2\big) + k_p\left(\theta_{2d} - \theta_2\right) + k_i\int\left(\theta_{2d} - \theta_2\right)dt\Big)\Big] \tag{63}$$

که در آن ρ مقدار ثابت و بزرگی است و v_1، v_2 طبق رابطه (35) محاسبه می‌شوند.

3-4- اثبات پایداری الگوریتم کنترلی

قضیه پایدار مجانبی لیاپانوف (کاملاً پایداری) [29]: اگر یک تابع لیاپانوف در ناحیه S اطراف مبدأ وجود داشته باشد و اگر مشتق تابع لیاپانوف $\frac{d}{dx}V(x)$ در طول مسیر منفی معین باشد، در این صورت مبدأ کاملاً پایدار است.

معادلات سیستم (64) را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}
\dot{e}_1 &= e_2\\
\dot{e}_2 &= v_1 - v_{1d}\\
\dot{e}_3 &= e_4\\
\dot{e}_4 &= v_2 - v_{2d}\\
\dot{z}_5 &= z_6\\
\dot{z}_6 &= \frac{1}{k}\left(-v_1\sin z_5 + v_2\cos z_5\right)
\end{aligned} \tag{64}$$

ورودی‌های کنترلی طراحی شده، مطابق (64) می‌باشد.

$$\begin{cases}
\bar{v}_1 = v_{1d} - \alpha_2 e_2 - \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}\left(e_1 + \dfrac{e_1^2}{e_2}\right) + \alpha_4 e_4 \gamma\\
\bar{v}_2 = v_{2d} - \alpha_4 e_4 - \dfrac{\alpha_3}{\alpha_4}\left(e_3 + \dfrac{e_3^2}{e_4}\right) - \alpha_2 e_2 \gamma
\end{cases} \tag{65}$$

که γ در آن از رابطه (62) محاسبه می‌شود.

تابع لیاپانوف پیشنهادی به‌صورت (66) است:

$$\begin{aligned}
V(e) &= \frac{1}{2}\left(\alpha_1 e_1^2 + \alpha_2 e_2^2 + \alpha_3 e_3^2 + \alpha_4 e_4^2\right)\\
&\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 > 0
\end{aligned} \tag{66}$$

که مشتق تابع لیاپانوف پیشنهادی به‌صورت (66) خواهد بود.

$$\dot{V}(e) = \left(\alpha_1 e_1 \dot{e}_1 + \alpha_2 e_2 \dot{e}_2 + \alpha_3 e_3 \dot{e}_3 + \alpha_4 e_4 \dot{e}_4\right) \tag{67}$$

با جایگذاری از معادلات فضای حالت (63) در مشتق تابع لیاپانوف (66) خواهیم داشت:

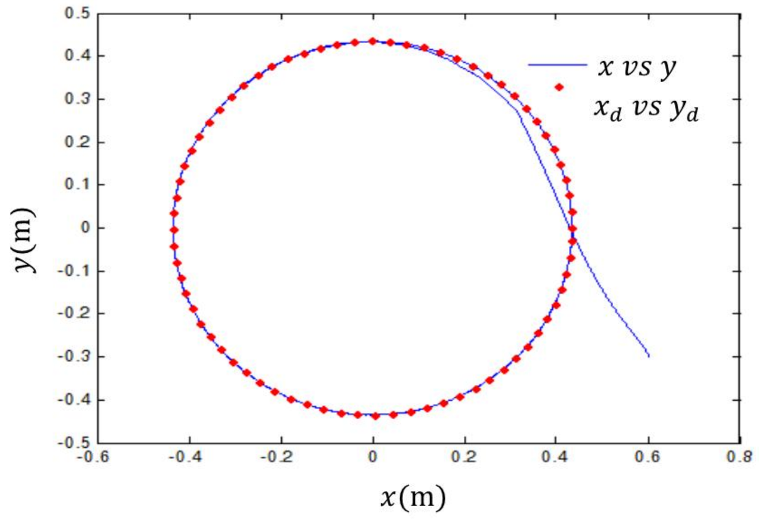
$$\dot{V}(e) = \alpha_1 e_1 e_2 + \alpha_2 e_2\left(v_{1d} - \alpha_2 e_2 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\left(e_1 + \frac{e_1^2}{e_2}\right) + \alpha_4 e_4 \gamma - v_{1d}\right) + \alpha_3 e_3 e_4 + \alpha_4 e_4\left(v_{2d} - \alpha_4 e_4 - \frac{\alpha_3}{\alpha_4}\left(e_3 + \frac{e_3^2}{e_4}\right) - \alpha_2 e_2 \gamma - v_{2d}\right) \tag{68}$$

$$\dot{V}(e) = -\alpha_1 e_1^2 - \left(\alpha_2 e_2\right)^2 - \alpha_3 e_3^2 - \left(\alpha_4 e_4\right)^2 \le 0 \tag{69}$$

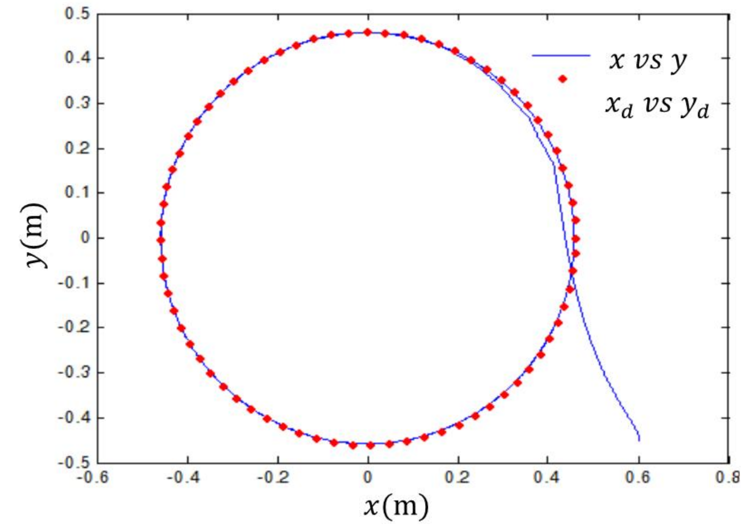
طبق قضیه فوق و با توجه به اینکه مشتق تابع لیاپانوف منفی معین می‌باشد، مبدأ مختصات کاملاً پایدار است، فقط باید به این نکته توجه نمود که به دلیل حذف γ به واسطه روابط موجود، احتمال ایجاد ناپایداری داخلی وجود دارد، بنابراین اگر γ مقداری محدود و پایدار باشد، پایداری سیستم تضمین می‌گردد. با توجه به اینکه γ خود کنترلر PID (فنر و دمپر مجازی) می‌باشد، اگر به‌صورت پایدار طراحی شود (بهره های کنترلی به گونه‌ای انتخاب شوند که کنترلر پایدار باشد)، پایداری سیستم تضمین می‌شود.

3-5- شبیه‌سازی

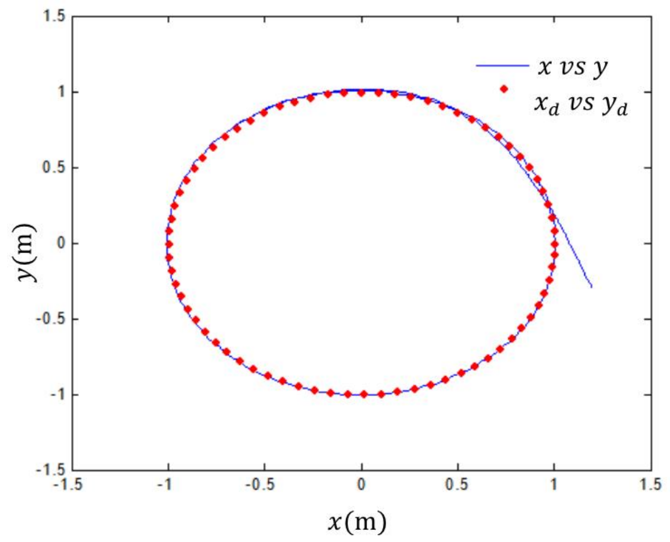
با شبیه‌سازی مجدد برای مسیر مرجع زمانی (70) و (71)، نتایج حاصله حاکی از آن است که الگوریتم کنترلی علاوه برکنترل تراکتور به خوبی تریلی را نیز کنترل می‌کند. شکل 7 و 8 به ترتیب نشان‌دهنده تعقیب مسیر مرجع زمانی در فضای کارتزین برای تراکتور و تریلی می‌باشند.



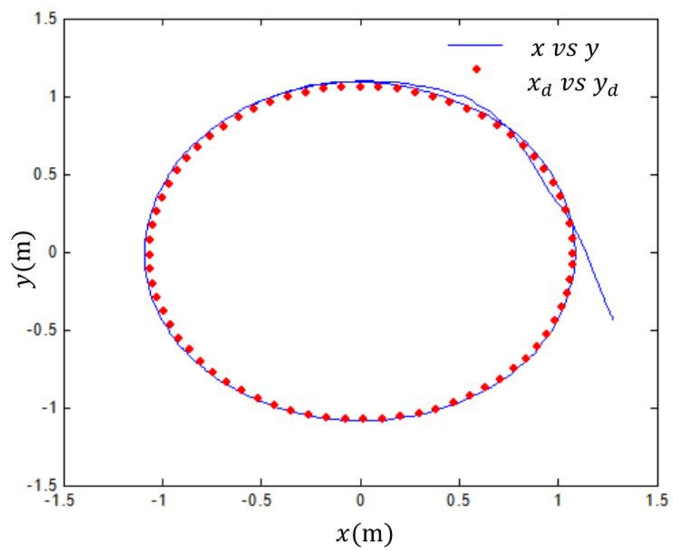
شکل 7 تعقیب مسیر مرجع زمانی در فضای کارتزین توسط تراکتور (نتایج شبیه‌سازی با استفاده از الگوریتم لیاپانوف-PID)



شکل 8 تعقیب مسیر مرجع زمانی در فضای کارتزین توسط تریلی (نتایج شبیه‌سازی با استفاده از الگوریتم لیاپانوف-PID)



شکل 9 تعقیب مسیر مرجع زمانی در فضای کارتزین توسط تراکتور (نتایج شبیه‌سازی با استفاده از الگوریتم لیاپانوف-PID)



شکل 10 تعقیب مسیر مرجع زمانی در فضای کارتزین توسط تریلی (نتایج شبیه‌سازی با استفاده از الگوریتم لیاپانوف-PID)

$$x_d = 0.43\cos\left(\frac{t}{8} + 0.35\right) \quad (70)$$

$$y_d = 0.43\sin\left(\frac{t}{8} + 0.35\right) \quad (71)$$

برای بررسی بیشتر عملکرد الگوریتم کنترلی در سرعت‌های بالاتر، شبیه‌سازی مجدداً برای مسیر مرجع زمانی (72) و (73) انجام شد، که نتایج بدست آمده در شکل (9) و (10) قابل مشاهده می‌باشد.

$$x_d = \cos(t) \quad (72)$$

$$y_d = \sin(t) \quad (73)$$

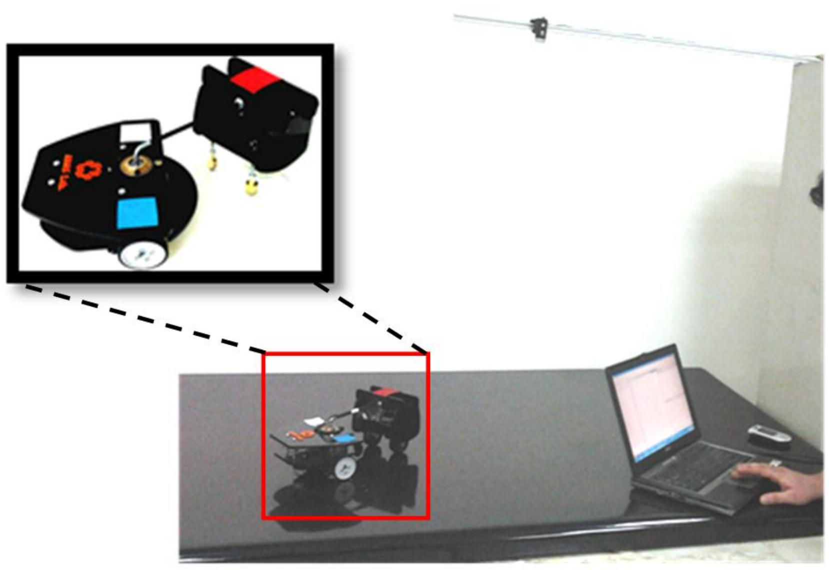
همانطور که از نتایج بدست آمده مشخص است، الگوریتم کنترلی در سرعت-های بالا نیز عملکرد قابل قبولی دارد.

4- پیاده‌سازی و نتایج تجربی

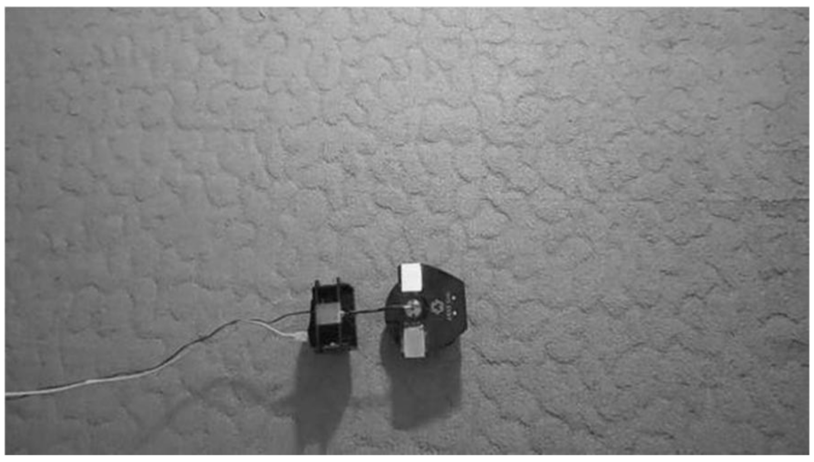
در این بخش، الگوریتم کنترلی لیاپانوف-PID بر روی سیستم آزمایشگاهی (ربات شکل 1) پیاده‌سازی می‌شود. برای پیاده‌سازی الگوریتم کنترلی بر روی ربات، از پردازش تصویر و تشخیص سه رنگ سفید، آبی و قرمز (همانطور که در شکل (1) نشان داده شده است) استفاده می‌شود تا موقعیت تراکتور و تریلی و متغیرهای آن‌ها بدست آید. مسیر مرجع به شکل دایره‌ای تعریف می-شود که x_d و y_d به ترتیب در معادله (70) و (71) مشخص می‌باشند.

سیستم آزمایشگاهی همانگونه که در شکل 1 نشان داده شده است از یک ربات چرخ‌دار به همراه یک تریلی تشکیل می‌شود. تراکتور از طریق دو چرخ دارای عملگر حرکت می‌کند و از یک چرخ کروی به منظور حفظ پایداری آن استفاده شده است.

حرکت چرخ‌های دارای عملگر از طریق موتورهای جریان مستقیم دارای ولتاژ عملکردی 12 ولت و گشتاور نگهدارنده 1/62 نیوتن-متر شکل می‌گیرد. برای اندازه‌گیری وضعیت ربات (شامل مختصات تعمیم‌یافته‌ی سیستم) از یک دوربین نصب شده بالای صفحه حرکت و پردازش تصویر به هنگام، استفاده شده است. دوربین استفاده شده دارای تفکیک‌پذیریِ 480 ×640 پیکسل و نرخ تصویر برداری 30 تصویر در ثانیه است. اطلاعات از طریق اتصال یونیورسال به کامپیوتر انتقال می‌گردد. کامپیوتر مورد استفاده دارای ویژگیهای (پردازش‌گر اینتل 2 گیگا هرتز، 32 بیت، حافظه با دسترسی تصادفی 2 گیگا بایت) می‌باشد و به منظور پردازش تصویر، تولید ورودی‌های کنترلی و انتقال اطلاعات استفاده شده است. فرکانس سیستم حلقه بسته 30 هرتز انتخاب شده است. حد بالای فرکانس سیستم تجربی، به نرخ تصویر برداری دوربین استفاده شده (30 تصویر در ثانیه) محدود می‌باشد. کنترل سیستم از طریق نرم‌افزار متلب پیاده‌سازی شده است. شکل 11 تصویری از سیستم آزمایشگاهی را نشان می‌دهد.



شکل 11 سیستم آزمایشگاهی



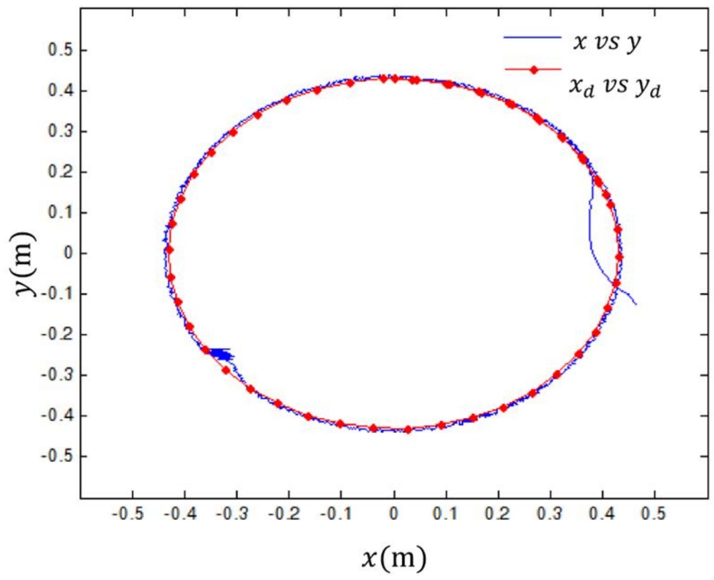
شکل 12 تصویر ربات از دید دوربین در حالت خاکستری

در شکل 12 نمونه‌ای از تصویر گرفته شده توسط دوربین در حالت خاکستری[1] برای استفاده در الگوریتم پردازش تصویر مشاهده می‌شود. در ذیل برخی از اقدامات انجام شده لازم به منظور به دست آوردن دقت بالاتر در پردازش تصویر آورده شده است.

- دستگاه جمع آوری تصویر[2]؛ برای تصویربرداری از یک دوربین با نرخ فریم 30 فریم بر ثانیه استفاده شده است. نرخ فریم دوربین یک عامل مهم در دقت زمان واقعی بودن ماژول پردازش تصویر می باشد.
- کالیبراسیون دوربین[3]؛ به منظور تخمین موقعیت یک رنگ خاص نسبت به یک چارچوب اینرسی، کالیبراسیون دوربین انجام شده است.
- ترمیم تصویر[4]؛ هدف از بازسازی تصویر حذف نویز (نویز سنسور، تاری حرکت، و غیره) از تصاویر می باشد. ساده ترین روش ممکن برای حذف نویز استفاده از انواع مختلفی از فیلترها می‌باشد. هدف استفاده از ترمیم تصویر حذف مناطق رنگ کوچکتر یا بزرگتر از برچسب های رنگی می‌باشد.
- تشخیص[5]؛ تشخیص برچسب‌های رنگی توسط محاسبات نسبتاً ساده و سریع برای پیدا کردن یک برچسب رنگی خاص در میان چند منطقه رنگی مورد انتظار انجام شده است تا نتایج درست تری را تولید نماید.
- تعقیب[6]؛ دنبال کردن حرکت نقاط رنگی در دنباله تصاویر نیز برای حصول اطمینان از عدم اشتباه.

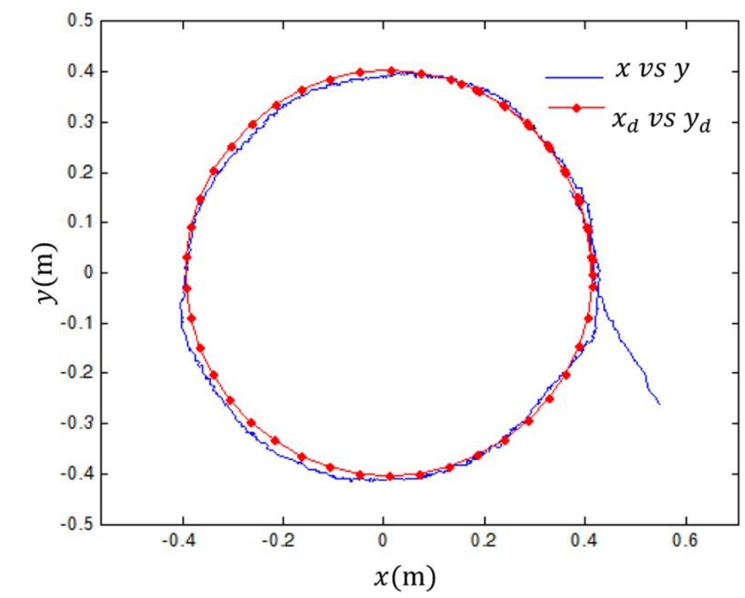
همچنین به منظور افزایش سرعت الگوریتم پردازش تصویر، از MEX-فایل در محیط سیمولینک/متلب استفاده شده است.

با توجه به موارد ذکر شده، نتایج پیاده‌سازی در شکل‌های 13 تا 20 قابل مشاهده می‌باشند. نتایج پیاده‌سازی تأیید کننده‌ی نتایج شبیه‌سازی می‌باشند.

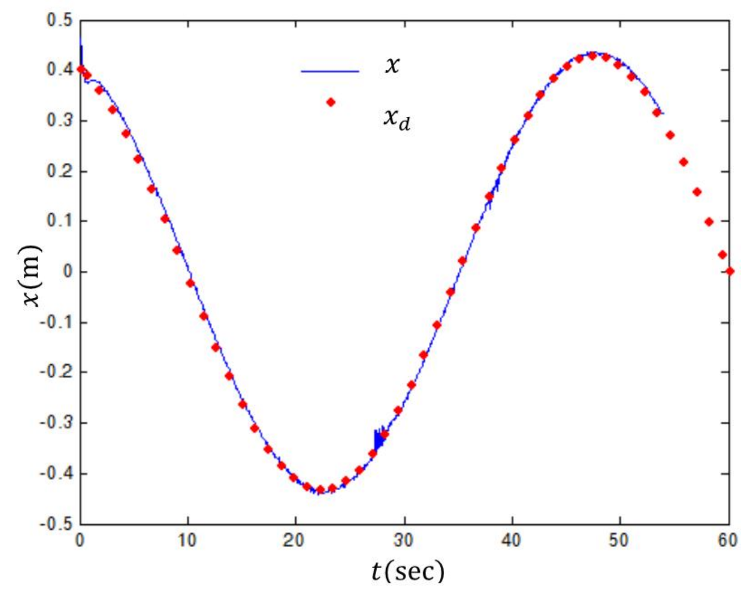


شکل13 تعقیب مسیر مرجع زمانی در فضای کارتزین توسط تراکتور؛ نتایج تجربی

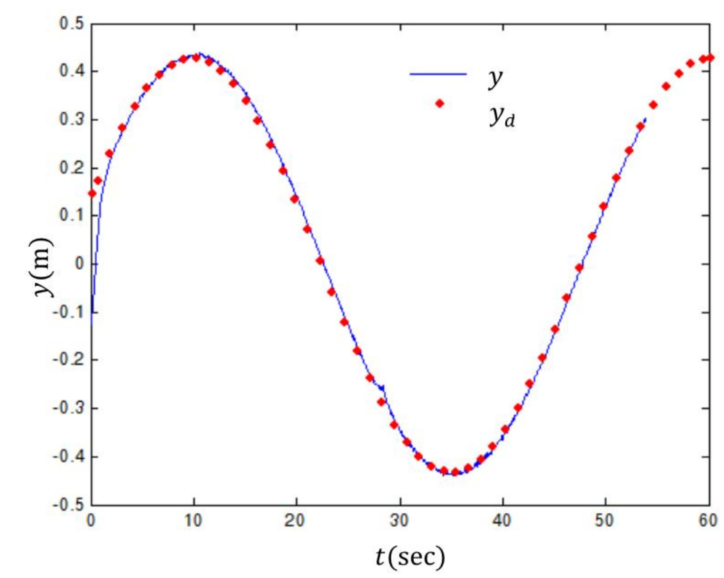
1- Gray scale
2- Image Acquisition Device
3- Camera Calibration
4- Image Restoration
5- Detection
6- Tracking



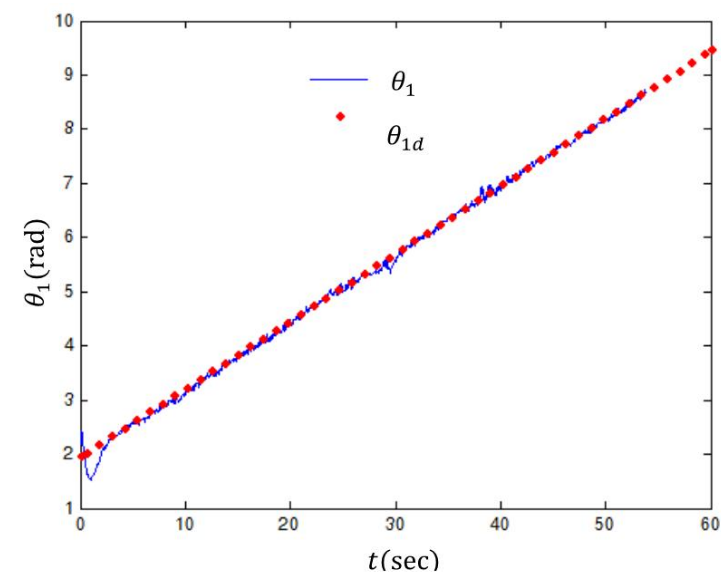
شکل 14 تعقیب مسیر مرجع زمانی در فضای کارتزین توسط تریلی؛ نتایج تجربی



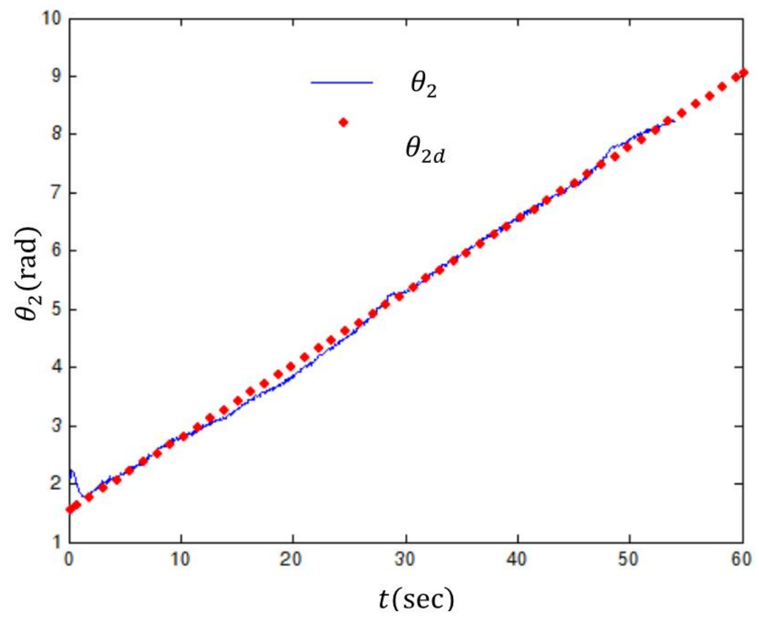
شکل 15 تعقیب مسیر مرجع زمانی برای متغیر x، موقعیت افقی تراکتور؛ نتایج تجربی



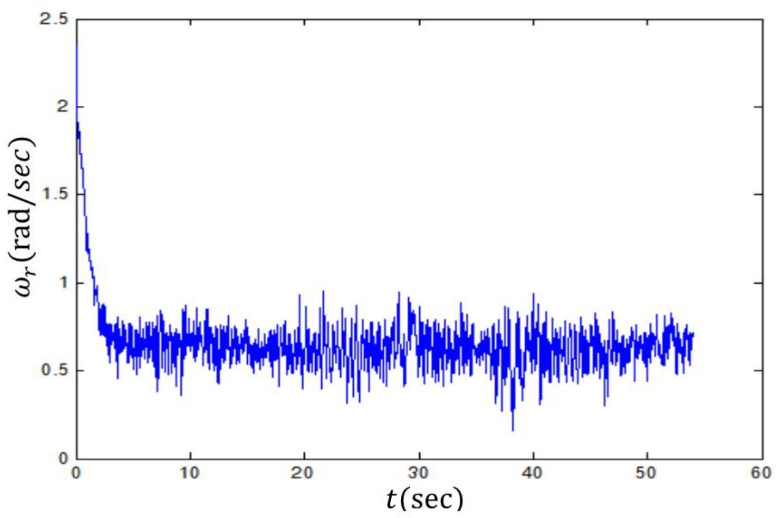
شکل 16 تعقیب مسیر مرجع زمانی برای متغیر y، موقعیت عمودی تراکتور؛ نتایج تجربی



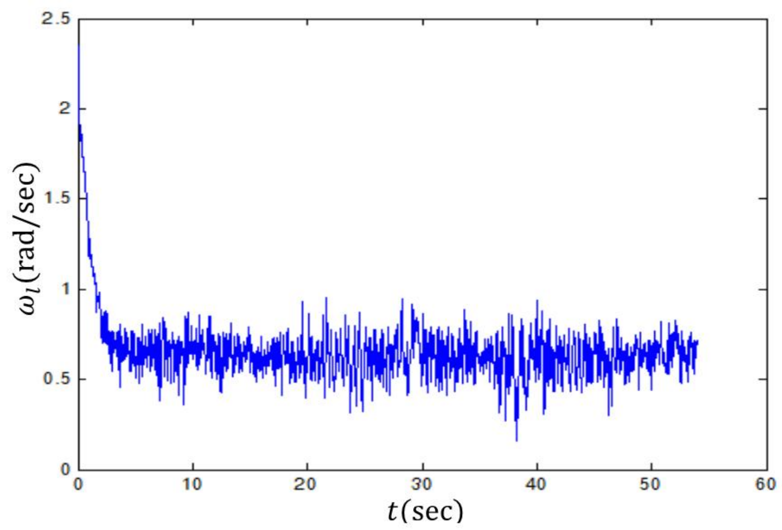
شکل 17 تعقیب مسیر مرجع زمانی برای متغیر θ_1، زاویه تراکتور نسبت به افق؛ نتایج تجربی



شکل 18 تعقیب مسیر مرجع زمانی برای متغیر θ_2، زاویه تریلی نسبت به افق؛ نتایج تجربی



شکل 19 ورودی سینماتیکی؛ سرعت زاویه‌ای چرخ راست تراکتور (rad/sec) بر حسب زمان(sec)



شکل 20 ورودی سینماتیکی؛ سرعت زاویه‌ای چرخ چپ تراکتور (rad/sec) بر حسب زمان(sec)

5- نتیجه‌گیری

در این مقاله مسئله‌ی کنترل و تعقیب مسیرهای مرجع زمانی توسط ربات دو چرخ دیفرانسیلی با تریلی مجهز به چرخ کروی مورد بررسی قرارگرفته است. ربات مزبور، یک سیستم به شدت کم‌عملگر، غیرخطی، چند متغیره و غیرهولونومیک می‌باشد. نخست با معرفی ربات، معادلات سینماتیکی و سینتیکی آن استخراج گردید و به دلیل محدودیت‌های موجود مدل ترکیبی معرفی شد. سپس یک الگوریتم کنترلی جدید تحت عنوان لیاپانوف-PID، برای کنترل ربات طراحی گردید. این الگوریتم را می‌توان برای سیستم‌های کم عملگر دیگر با ساختاری مشابه نیز استفاده نمود. در پایان با پیاده‌سازی الگوریتم کنترلی مزبور بر روی نمونه آزمایشگاهی ربات، نتایج تجربی ارائه گردید. نتایج تجربی بدست آمده، کارآمدی الگوریتم کنترلی را تأیید می‌کند.

6- فهرست علائم

$A(q)$	ماتریس قیدی
a_1	فاصله مرکز جرم تراکتور تا نقطه‌ی میانی محور تراکتور P
a_2	فاصله مرکز جرم تریلی تا چرخ‌های تریلی
a_{jk}	k-امین ضریب از معادله قیدی j-ام
c_i	مرکز جرم تراکتور و تریلی
c_t	ضریب دمپر پیچشی
$E(q)$	ماتریس تبدیل ورودی
e	بردار خطای متغیرهای حالت
f	نیروی رانش تراکتور
$G(q)$	ماتریس گرانش
J_i	ممان اینرسی تراکتور و تریلی
k_t	ضریب فنر پیچشی
k_p	بهره تناسبی کنترلر
k_i	بهره انتگرالی کنترلر
k_d	بهره مشتق‌گیر کنترلر
l	فاصله مرکز جرم تریلی تا نقطه‌ی میانی محور تراکتور P
m_i	جرم تراکتور و تریلی
$M(q)$	ماتریس اینرسی
P	نقطه‌ی میانی محور چرخ‌های تراکتور
q	بردار مختصات تعمیم یافته ربات
r	شعاع چرخ‌های تراکتور
$\dot{s}$	سرعت خطی نقطه میانی محور تراکتور P
$S(q)$	ماتریس ژاکوبین
$T(q,\dot{q})$	انرژی جنبشی سیستم
u	بردار ورودی سینماتیکی
$U(q)$	انرژی پتانسیل سیستم
$V(q,\dot{q})$	ماتریس کریولیس
$V(e)$	تابع لیاپانوف
x,y	موقعیت نقطه میانی محور تراکتور P
z	بردار متغیرهای حالت

علائم یونانی

$\mathcal{L}(q,\dot{q})$	لاگرانژین
λ	مضارب لاگرانژ
$\beta_i\gamma_i$	ترم اصلاح کننده ورودی‌ها
τ	گشتاور جهت‌گیری تراکتور
θ_i	زاویه تراکتور و تریلی نسبت به افق
ω_l	سرعت زاویه‌ای چرخ چپ تراکتور
ω_r	سرعت زاویه‌ای چرخ راست تراکتور
ζ	بردار مختصات فضای کاری ربات

7- مراجع

[1] R. Siegwart and I. R. Nourbakhsh, Introduction to Autonomous Mobile Robots, Massachusetts: The MIT Press, 2004.

[2] P. Zarafshan and S. A. A. Moosavian, "Adaptive Hybrid Supperession Control of a Wheeled Mobile Robot With Flexible Solar Panels," *Modares Mechanical Engineering,* vol. 18, no. 5, pp. 130-143, 2013 (In persian).

[3] K. Alipour and S. A. A. Moosavian, "Effect of Terrain Traction, Suspension Stiffness and Grasp Posture on the Tip-over Stability of Wheeled Robots with Multiple Arms," *Journal of Advanced Robotics,* vol. 26, no. 8-9, pp. 817-842, 2012.

[4] K. Alipour and S. A. A. Moosavian, "How to Ensure Stable Motion of Suspended Wheeled Mobile Robots," *Journal of Industrial Robot,* vol. 38, no. 2, pp. 139-152, 2011.

[5] K. Alipour, S. A. A. Moosavian and Y. Bahramzadeh, "Dynamics of Wheeled Mobile Robots with Flexible Suspension: Analytical Model and Verification," *International Journal of Robotics and Automation ,* vol. 23, no. 4, pp. 242-250, 2008.

[6] S. A. A. Moosavian and A. Mirani, "Dynamics and Motion Control of Wheeled Robotic Systems," *Esteghlal Journal of Robotics and Automation,* vol. 24, no. 2, pp. 193-214, 2006.

[7] R. Rastegari and S. A. A. Moosavian, "Multiple Impedance Control of Non-Holonomic Wheeled Mobile Robotic Systems Performing Object Manipulation Tasks," *Journal of Engineering Faculty, Tehran University,* vol. 39, no. 1, pp. 15-30, 2005 (In Persian).

[8] G. Campion, G. Bastin and B. Danrea Novel, "Structural properties and classification of kinematic and dynamic models of wheeled mobile robots," *IEEE Transactions on Robotics and Automation,* vol. 12, no. 1, pp. 47-62, 1996.

[9] A. Keymasi Khalaji and S. A. A. Moosavian, "Design and implementation of a fuzzy sliding mode control law for a wheeled robot towing a trailer," *Modares Mechanical Engineering,* vol. 14, no. 4, pp. 81-88, 2014 (In Persian).

[10] I. Kolmanovsky and N. H. McClamroch, "Developments in nonholonomic control problems," *IEEE Control Systems,* vol. 15, no. 6, pp. 20-36, 1995.

[11] L. Lapierre, R. Zapata and P. Lepinay, "Combined path-following and obstacle avoidance control of wheeled robot," *The International Journal of Robotics Research,* vol. 26, no. 4, pp. 361-375, 2007.

[12] S. Sun and P. Cui, "Path tracking and a partical point stabilization of mobile robot," *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing,* vol. 20, no. 1, pp. 29-34, 2004.

[13] C. Prieur and A. Astolfi, "Robust stabilization of chained systems via hybrid control," *IEEE Transaction on Automatic Control,* vol. 48, no. 10, pp. 1768-1772, 2003.

[14] C. Wang, "Semiglobal practical stabilization of nonholonomic wheeled mobile robots with saturated inputs," *Automatica,* vol. 44, no. 3, pp. 816-822, 2008.

[15] A. Keymasi Khalaji and S. A. A. moosavian, "Regulation of differential driven wheeled robot towing a trailer," in *Proceeding of RSI/ISM International Conference on Robotics and Mechatronics (ICRoM 2013),* Sharif University of Technology, Tehran, Iran, 2013.

[16] C. Y. Chen, T. H. S. Li, Y. C. Yeh and C. C. Chang, "Design and implementation of an adaptive sliding-mode dynamic controller for wheeled mobile robots," *Mechatronics,* vol. 19, no. 2, pp. 156-166, 2009.

[17] F. N. Matins, W. C. Celeste, R. Carelli, M. Sarcinelli-Filho and T. F. Bastosfilho, "An adaptive dynamic controller for autonomous mobile robot trajectory tracking," *Control Engineering Practice,* vol. 16, no. 11, pp. 1354-1363, 2008.

[18] A. Keymasi khalaji and S. A. A. Moosavian, "Optimal control of trajectory tracking of a mobile robot," in *PRoceeding of the ISME National Conference on Mechanics,* Tehran University, Tehran, Iran, 2009 (In Persian).

[19] A. Keymasi and S. A. A. Moosavian, "Modeling and tracking control of a wheeled mobile robot towing a trailer," in *Proc. of the Mechanical Engineering,* Tehran, Iran, 2010.

[20] G. A. De Luca and C. Samson, Feedback control of nonholonomic car-like robot, J. P. Laumond, Ed, Springer, 1998.

[21] S. A. A. Moosavian, M. Rahimi Bidgoli and A. Keymasi Khalaji, "Tracking control of a wheeled mobile robot towing two trailer," in *Proc. ISME Int. COnf. on Mechanical Engineering,* Iran, Tehran, 2013.

[22] R. Rahimi Bidgoli, A. Keymasi Khalaji and S. A. A. Moosavian, "Trajectory Tracking control of a wheeled mobile robot by a non-model-based algorithm using PD-action filtered errors," *Modares Mechanical Engineering,* vol. 14, no. 12, pp. 171-178, 2014 (In Persian).

[23] A. Keymasi and S. A. A. Moosavian, "Modified transpose jacobian for control of a tractor-trailer wheeled robot," in *Proc. of RSI/ISM International Conference on Robotics and Mechatronics (ICROM 2013),* Tehran, Iran, 2013.

[24] M. W. Spong, "Underactuated mechanical systems," in *Control Problems in Robotics and Automation,* Berlin Heidelberg, Springer, 1998, pp. 135-150.

[25] K. Y. Wichuland, O. J. S. rDalen and O. Egeland, "Control of vehicles with second-order nonholonomic constraints: Underactuated vehicles," in *European Control Conference,* 1995.

[26] M. Spong, "Modeling and control of eleastic joint robots," *Transaction of the ASME, J. Dynamic Systems, Measurment and Control,* pp. 310-319, 1987.

[27] M. Karimi and S. A. A. Moosavian, "Control and manipulability management of underactuated manipulators," *Journal of Advanced Robotics,* vol. 24, no. 4, pp. 605-626, 2010.

[28] A. Keymasi Khalaji and S. A. A. Moosavian, "Robust adaptive controller for a Tractor-Trailer mobile robot," *IEEE-ASME Transaction on mechatronics,* vol. 19, no. 3, pp. 943-953, 2014.

[29] E. Slotine and W. Li, Applied Nonlinear control, Massachusett: Prentice Hall, 1991.