مجله مهندسی مکانیک مدرس، بهمن 1394، دوره 15، شماره 11، ص‌ص 359-367

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

مدلسازی رفتار هایپرالاستیک لاستیک‌های ناهمگن مدرج تابعی تحت بارگذاری مکانیکی و حرارتی

یاور عنانی [1]، غلامحسین رحیمی [2*]

1- دانشجوی دکترا، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران
2- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران
* تهران، صندوق پستی 143-14115، rahimi_gh@modares.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 24 مرداد 1394
پذیرش: 20 مهر 1394
ارائه در سایت: 17 آبان 1394

کلید واژگان:
ماده هایپرالاستیک
تغییر شکل‌های بزرگ
لاستیک
مواد ناهمگن مدرج تابعی
همسانگرد صفحه‌ای

چکیده

در این مقاله رفتار لاستیک‌های ناهمگن مدرج تابعی با تغییر شکل بزرگ و تحت بارگذاری‌های مختلف و با فرض ماده هایپرالاستیک تراکم ناپذیر مدلسازی شده است. در بخش اول، رفتار لاستیک‌های همسانگرد ناهمگن مدرج تابعی، تحت بارگذاری کششی تک محوره، دو محوره و برش محض مورد بررسی قرار گرفته است. در بخش دوم رفتار لاستیک‌های همسانگرد ناهمگن مدرج تابعی تحت بارگذاری همزمان مکانیکی و حرارتی و با استفاده از تجزیه ضربی گرادیان تغییر شکل، تحلیل شده است. در بخش سوم نیز، رفتار لاستیک‌های عرضی ناهمگن مدرج تابعی تحت بارگذاری مکانیکی تک محوره، دو محوره و برش محض بررسی شده است. در مواد هایپرالاستیک ناهمگن مدرج تابعی خواص مکانیکی به طور پیوسته و در راستاهای مختلف ماده تغییر می‌کند. برای مدل کردن رفتار غیرخطی ماده از تئوری هایپرالاستیسیته و توابع انرژی کرنشی که تابعی از ناورداهای تانسور تغییر شکل چپ کوشی- گرین هستند، استفاده گردیده است. برای اینکه بتوان توابع انرژی موجود را برای مواد ناهمگن مدرج تابعی به کاربرد می‌بایست در آن اصلاحاتی صورت پذیرد، بنابراین تغییرات ثوابت مربوط به توابع انرژی ذکرشده نیز با توجه به ناهمگن مدرج تابعی بودن ماده به صورت نمایی و در طول میله فرض شده‌اند. به دلیل ناهمگن مدرج تابعی بودن ماده، تغییر طول نقاط مختلف میله بارگذاری شده نیز تابعی از تغییر خواص است. نتایج تحلیلی با داده‌های تجربی مقایسه شده و مشخص گردیده است، توابع به کار برده شده، با تقریب بسیار خوبی رفتار ماده را توصیف می‌کند.

Modeling of hyperelastic behavior of functionally graded rubber under mechanical and thermal load

Yavar Anani, Gholam Hossein Rahimi*

Department of Mechanical Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran
* P.O.B. 14115143 Tehran, Iran, rahimi_gh@modares.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 15 August 2015
Accepted 12 October 2015
Available Online 08 November 2015

Keywords:
Hyperelastic material
Finite deformation
Rubber
Functionally graded materials
Transversely Isotropic

ABSTRACT

In this paper, behavior of functionally graded rubbers with large deformation has been modeled under different loading conditions. Rubbers have been assumed incompressible hyperelastic material. In the first section of this paper, behavior of isotropic FG rubber has been investigated in uniaxial extension, equibiaxial extension and pure shear. In the second section, behavior of isotropic FG rubber is investigated in mechanical and thermal loads, simultaneously. For this purpose, multiplicative decomposition of deformation gradient tensor has been used. At last, behavior of transversely isotropic FG rubber has been investigated in uniaxial extension, equibiaxial extension and pure shear. Material properties vary continuously in different specific direction in FG hyperelastic materials. For modeling nonlinear behavior of hyperelastic materials, strain energy functions are used. Strain energy functions are function of invariants of left Cauchy-Green stretch tensor. Modification in strain energy functions is required in order to for them to be used as FG rubbers. For this purpose, material constants of strain energy functions have been assumed to vary exponentially in the axial direction of bar. Moreover, stretches in different points of the bar are considered to be function of material properties variation in the length direction. Analytical solution has been compared with experimental data and good agreement has been found between them, therefore the proposed constitutive law has modeled material behavior with a proper approximation.

1- مقدمه

دسته‌های مختلفی از مواد مثل الاستومرها، پلیمرها، فوم ها و بافت‌های بیولوژیکی قابلیت تغییر شکل‌های بزرگ هایپرالاستیک را دارند. مهم‌ترین و واضح‌ترین خاصیت فیزیکی لاستیک‌ها و مواد لاستیک-مانند، میزان کشش‌پذیری زیاد آن‌ها تحت تنش‌های کم (در مقایسه با مواد جامدی مثل فلزات) و وابستگی تنش به تاریخچه کرنش است. لاستیک‌ها به طور گسترده

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:
Y. Anani, Gh. H. Rahimi, Modeling of hyperelastic behavior of functionally graded rubber under mechanical and thermal load, *Modares Mechanical Engineering,* Vol. 15, No. 11, pp. 359-366, 2015 (In Persian)

به عنوان عایق ارتعاشی، قطعات ذخیره کننده انرژی در صنایع اتومبیل، سپر و حائل در قطعاتی که در معرض بارهای ضربه‌ای قرار دارد و سایر موارد به کار می روند. به طور کلی، رفتار مکانیکی مواد را می‌توان بسته به نوع ماده و کاربردی که برای آن در نظر گرفته‌شده تحت عناوین مختلفی دسته‌بندی نمود. بسیاری از مواد مورد استفاده در شاخه‌های مهندسی و فیزیک غیرالاستیک بوده و در هر تغییر شکل مجاز، تلف کننده انرژی می‌باشند. در مواردی که تغییرشکل و بارگذاری بزرگی بر یک قطعه اعمال می‌گردد، باید طراحی مناسبی نیز برای تولید آن در نظر گرفته شود. در شرایطی نیز لازم است استفاده بهینه از ماده تضمین شود تا از تغییرشکل غیرقابل‌قبول و یا شکست قطعه در خلال عملکرد پرهیز شود. در عمل این ملزومات طراحی می‌تواند با در اختیار گذاردن روش‌هایی برای تحلیل تنش و کرنش رفتارهای ماده مورد نظر فراهم گردد. اساسا این مسئله نیازمند برخی فرم های تئوری برای مدل کردن رفتار ماده، تکنیک های تجربی برای اندازه‌گیری پارامترهای آن و روش‌هایی برای انجام محاسبات مربوط به یک کاربرد خاص است. با افزایش کاربرد مواد غیرخطی لاستیک-مانند و سازه های پیشرفته ساخته‌شده از آن‌ها در صنایع مختلف و نیاز به تحلیل رفتار آن‌ها، تحلیل‌های غیرخطی مورد توجه اغلب محققین قرار گرفته است. طبیعت غیرخطی معادلات حاکم و عدم دسترسی به معادله رفتاری ماده- که بتواند رفتار ماده را به درستی توصیف نماید- دو مشکل عمده در حل مسایل مقدار مرزی غیرخطی می‌باشند. با توسعه و گسترش کامپیوترها و پیشرفت روزافزون روش‌های عددی از جمله روش اجزاء محدود، مشکل اول تا حدودی بر طرف شده است ولی مشکل دوم همچنان باقی مانده است. در مواد هایپرالاستیک، ماکزیمم مقدار کشش معمولا در محدوده 10-5 (نسبت طول ثانویه به طول اولیه) است و منحنی تنش-کشش غیرخطی است، لذا ماده از قانون هوک تبعیت نمی‌کند. برای کشش‌های کوچک می‌توان شیب منحنی را به عنوان مدول الاستیسیته تعریف کرد که در حدود یک مگاپاسکال است. کشش‌پذیری زیاد و مدول الاستیسیته پایین لاستیک‌ها در مقایسه با جامداتی مثل فلزات که مدول الاستیسیته آن‌ها حدود 200 گیگا پاسکال و ماکزیمم کشش‌پذیری آن‌ها حدود 1.01 است، باعث می‌شود تا اختلاف چشمگیری بین لاستیک‌ها و جامدات سختی مثل فلزات وجود داشته باشند. رفتار الاستیک غیرخطی مواد لاستیک-مانند می‌تواند با استفاده از توصیف فیزیکی اثر متقابل مولکول‌ها و با استفاده از تئوری هایی مثل تئوری کلاسیک گوسی، تئوری باندهای لغزشی، تئوری شبکه ماکرو مولکولی، که توسط افرادی چون ترلور، بویس و اروداِ، بیشاف و همکارانش، میسنر و ماتجکا بحث شده است [1-3]، بیان شود و یا با استفاده از روش‌هایی که مبتنی بر پدیده‌شناسی می‌باشند، توصیف گردد. توابع انرژی که با استفاده از روش‌های مولکولی فرمول‌بندی می‌شوند معمولا پیچیده بوده و مخصوص ماده خاصی می‌باشند. ولی در روش‌های مبتنی بر پدیده‌شناسی، ماده به صورت یک محیط پیوسته فرض می‌شود و یک تابع چگالی انرژی کرنشی استخراج می‌گردد که معمولا بر حسب ناورداهای تغییر شکل است. جهت نشان دادن رفتار غیرخطی ماده معمولا به چندین ثابت مادی نیاز است. این ثوابت با استفاده از نتایج تجربی آزمایش‌های انجام‌شده روی ماده تعیین می‌گردند. در خصوص بررسی رفتار هایپرالاستیک لاستیک‌ها، ترلور آزمایش‌های متعددی انجام داده است. پس از آن افراد مختلفی به ارائه توابع انرژی مختلفی که بتواند رفتار لاستیک‌ها را به خوبی بیان نماید پرداخته‌اند. از جمله معروف‌ترین این توابع انرژی، تابع انرژی مونی-ریولین، نئو هوکین، آگدن، یئوه است [4]. در خصوص رفتار سازه های هایپرالاستیک، اتارد تحلیل رفتار تیر تیموشنکو با تغییر شکل بزرگ را با در نظر گرفتن تابع انرژی نئو هوکین تعمیم‌یافته انجام داده است [5]. وی همچنین کمانش تیرهای هایپرالاستیک تحت بارگذاری محوری و عرضی را نیز مورد بررسی قرار داده است [6].

از طرف دیگر اکثر مواد موجود در طبیعت همگن نیستند و فرض همگن بودن مواد، تنها برای ساده سازی روابط استفاده می‌شود. یکی از فرضیات کاربردی برای در نظر گرفتن اثرات ناهمگنی، استفاده از فرض مواد ناهمگن مدرج تابعی است [7]. انتشار مقالات درباره مواد ناهمگن مدرج تابعی بعد از برگزاری دو سمپوزیوم جهانی مواد ناهمگن مدرج تابعی که در سال‌های 1990 و 1992 به ترتیب در سندایی و سانفرانسیسکو برگزار شد، افزایش یافت [9،8]. در پژوهشی، فوکوی (1991) در زمینه ساخت این مواد با استفاده از روش گریز از مرکز مطالبی ارائه کرد [10]. بررسی استاتیکی و دینامیکی سازه های ساخته‌شده از مواد ناهمگن مدرج تابعی در طی دهه گذشته توجه بسیاری از محققان را برانگیخته است. به عنوان مثال، سانکار حل الاستیسیته برای تیر اویلر-برنولی تحت بارگذاری استاتیکی عرضی را ارائه نمود [11]. در پژوهشی دیگر، بناتا حل تحلیلی برای تیرهای مواد ناهمگن مدرج تابعی تحت بارگذاری خمشی ارائه نموده است [12]. جهت شناخت و پیش‌بینی رفتار غیرخطی مواد طبیعی و مصنوعی مثل لاستیک‌ها و فوم‌ها و بافت‌های موجودات زنده که دارای رفتار الاستیک غیرخطی هستند–که می‌توان آن را به صورت رفتار هایپرالاستیک بیان کرد- و همچنین دارای درجاتی از ناهمگنی می‌باشند، نیاز به تبیین و تحلیل معادلات ساختاری آن‌ها است تا بر این اساس بتوان این مواد را که نیازمندی‌ها و کاربردهای فراوانی یافته‌اند را شبیه‌سازی نمود. در واقع، مواد هایپرالاستیک ناهمگن مدرج تابعی موادی هستند که علاوه بر رفتار هایپرالاستیک، خواص مکانیکی آن‌ها نیز به طور پیوسته از یک نقطه به نقطه دیگر در راستای معین تغییر می‌کند؛ به عبارت دیگر این مواد به طور تدریجی از ماده‌ای به ماده دیگر تبدیل می‌شوند. غیر همگنی می‌تواند در طی فرایند ولکانیزاسون لاستیک‌ها و یا در اثر تماس با یک محیط با دمای بالا و یا اکسیدکنندگی بالا ایجاد شود. اولین بار لاستیک‌های ناهمگن مدرج تابعی توسط ایکیدا در آزمایشگاه ساخته شد [13]. بیلگیلی، برنشتین و ارسطوپور اثرات ناهمگنی را بر روی قطعات لاستیکی تحت بارگذاری‌های کششی و برشی بررسی کردند [14]. در پژوهش دیگری نیز سه محقق فوق‌الذکر به بررسی اثرات بارگذاری حرارتی بر روی قطعات لاستیکی ناهمگن پرداختند [15]؛ ضمنا باترا نیز به بررسی رفتار مخازن جدار ضخیم ناهمگن غیرخطی با تغییر شکل‌های بزرگ با استفاده از روش‌های عددی پرداخته است [16]. در خصوص بررسی رفتار ویسکو-هایپرالاستیک لاستیک‌ها و فوم ها در بارگذاری کشش تک محوره، دو پژوهش توسط عنانی و همکاران انجام شده است [18،17]. حسنی و همکاران نیز به فرمول‌بندی و حل مسائل هایپرالاستیسیته تراکم ناپذیر، با روش تحلیل ایزوژئومتریک پرداخته‌اند [19]. با توجه به مسائل ذکرشده بالا، در بخش اول و دوم این مقاله معادله ساختاری میله ساخته‌شده از ماده هایپرالاستیک تراکم ناپذیر همسانگرد ناهمگن مدرج تابعی، تحت بارگذاری مکانیکی و بارگذاری همزمان مکانیکی و حرارتی با استفاده از تجزیه ضربی گرادیان تانسور گرادیان تغییر شکل، به دست می‌آید. علاوه بر این، در بخش سوم این مقاله نیز، تحلیل رفتار میله ساخته‌شده از ماده هایپرالاستیک ناهمگن مدرج تابعی تراکم ناپذیر همسانگرد صفحه‌ای تحت بارگذاری مکانیکی نیز مد نظر قرار گرفته است. در پایان این

مقاله، معادلات ساختاری استخراج‌شده و نتایج به دست آمده، با نتایج آزمایشگاهی موجود در بارگذاری‌های مختلف، مقایسه می‌گردد و میزان دقت تئوری به دست می‌آید.

2- هایپرالاستیسیته

رفتار الاستیک لاستیک‌ها و یا بافت‌های بیولوژیک، به صورت زیر بیان می‌گردد:

الف) رفتار ماده، الاستیک ایده آل فرض می‌گردد. این بدین معنی است که اولا در تغییر شکل‌های صورت گرفته در دمای ثابت و یا آدیاباتیک، تنش تنها تابع کرنش موجود است و مستقل از نرخ کرنش و تاریخچه بارگذاری است و ثانیا رفتار ماده بازگشت‌پذیر است که این بدین معناست که هیچ کار خالصی بر روی جسم هنگامی که در یک سیکل بسته تحت کرنش قرار می‌گیرد انجام نمی‌شود.

ب) ماده در مقابل تغییر حجم مقاومت می‌کند. مدول حجمی لاستیک‌ها تقریبا معادل و مساوی مدول حجمی فلزات است.

ج) ماده مقاومت کرنشی بسیار کمی دارد. مدول برشی این مواد 100000 مرتبه کوچک‌تر از مدول برشی اغلب فلزات است.

د) مدول برشی مستقل از دما است. مقاومت برشی ماده بر خلاف فلزات با افزایش دما، افزایش می‌یابد.

حالت خاص از الاستیسیته کوشی، هایپرالاستیسیته یا الاستیسیته گرین نام دارد. در این تئوری فرض این است که تابع انرژی کرنشی یا تابع انرژی ذخیره‌شده $W = W(F)$ در فضای گرادیان‌های تغییر شکل به صورتی تعریف شود که برای مواد بدون قید رابطه $\sigma = G(F) = J^{-1}F\frac{\partial W}{\partial F}$ برقرار باشد [4] که σ تانسور تنش کوشی، F، تانسور گرادیان تغییر شکل و J دترمینان F است. در واقع ماده‌ای هایپرالاستیک یا مستقل از مسیر نامیده می‌شود که کار انجام‌شده توسط تنش‌ها در فرآیندهای تغییر شکل تنها به پیکربندی اولیه در زمان t_0 و پیکربندی نهایی در زمان t بستگی داشته باشد. ذره‌ای را که ابتدا در مختصات مادی X قرار دارد در نظر بگیرید، با جابجایی این ذره به موقعیت جدید $x = x(X,t)$، پس از تغییر شکل، گرادیان تغییر شکل F، به صورت $F = \partial x/\partial X$ تعریف می‌شود. با استفاده از F، تانسورهای تغییر شکل کوشی-گرین چپ و راست به ترتیب به صورت $C = F^TF$ و $B = FF^T$ بیان می گردند.

3- تراکم ناپذیر همسانگرد ناهمگن مدرج تابعی

درلاستیک های تراکم ناپذیر، $I_3 = \det(B) = 1$ فرض می‌شود و با استفاده از روش ریویلین [4]، رابطه ساختاری برای مواد هایپرالاستیک تراکم ناپذیر و همسانگرد به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\sigma = -pI + 2\left(\frac{\partial W}{\partial I_1}B + \frac{\partial W}{\partial I_2}\left(I_1B - B^2\right)\right) \tag{1}$$

که p، فشار هیدرواستاتیک است و σ بیانگر تنش کوشی است. $W = W(I_1, I_2)$، تابع انرژی پتانسیل کرنشی است که به صورت چندجمله‌ای براساس (I_1-3) و (I_2-3) در نظر گرفته می‌شود که I_1، I_2 و I_3 ناورداهای تانسور B می باشند.

میله هایپرالاستیک ناهمگن مدرج تابعی تحت بارگذاری کششی تک محوره در نظر گرفته می‌شود. جابجایی هر نقطه از این میله به دلیل شرایط ناهمگنی در طول میله، به صورت تابعی از طول میله است. در این مقاله کشیدگی در طول میله به صورت $\lambda_1(x) = \lambda_0\left(\frac{x}{l}\right)$ فرض می‌شود. لذا تانسور گرادیان تغییر شکل، F به صورت زیر به دست می‌آید:

$$F = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_0\left(\frac{x}{l}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda_0\left(\frac{x}{l}\right)}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda_0\left(\frac{x}{l}\right)}} \end{bmatrix} \tag{2}$$

در حالت بارگذاری کشش تک محوره، $B = C$ می‌شود. در این حالت تانسور تغییر شکل چپ کوشی- گرین B به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$C = B = \begin{bmatrix} {\lambda_1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {\lambda_0}^2\left(\frac{x}{l}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_0\left(\frac{x}{l}\right)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_0\left(\frac{x}{l}\right)} \end{bmatrix} \tag{3}$$

3-1- تابع انرژی نئو هوکین

تابع انرژی به صورت تابع انرژی نئو هوکین $W = \mu(x)(I_1 - 3)$ در نظر گرفته می‌شود [4]، که μ بیانگر مدول برشی ماده در پیکربندی تغییر شکل یافته است. در این بخش، برای مواد ناهمگن مدرج تابعی، $\mu(x) = \mu_0 \exp\left(\frac{x}{l}\right)$ در نظر گرفته می‌شود. بنابراین تابع انرژی نئو هوکین برای مواد ناهمگن مدرج تابعی به صورت زیر است:

$$W = \mu_0 \exp\left(\frac{x}{l}\right)(I_1 - 3) \tag{4}$$

با قرار دادن ناورداهای B در معادله (4) تابع انرژی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$W = \mu_0 \exp\left(\frac{x}{l}\right)(I_1 - 3) = \mu_0 \exp\left(\frac{x}{l}\right)\left(\frac{{\lambda_0}^3\left(\frac{x}{l}\right)^3 + 2}{\lambda_0\left(\frac{x}{l}\right)} - 3\right) \tag{5}$$

و با استفاده از رابطه (1) تنش کوشی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\sigma = -p\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 2\mu_0 \exp\left(\frac{x}{l}\right)\begin{bmatrix} {\lambda_0}^2\left(\frac{x}{l}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_0\left(\frac{x}{l}\right)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_0\left(\frac{x}{l}\right)} \end{bmatrix} \tag{6}$$

تنش در راستای اعمال بار به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\sigma_1 = -p + 2\mu_0 \exp\left(\frac{x}{l}\right){\lambda_0}^2\left(\frac{x}{l}\right)^2 \tag{7}$$

فشارهیدرواستاتیک با استفاده از شرط $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ و رابطه $B_{22} = B_{33} = {B_{11}}^{-0.5}$ به دست می آید.

$$p = 2\mu_0 \exp\left(\frac{x}{l}\right)\frac{1}{\lambda_0\left(\frac{x}{l}\right)} \tag{8}$$

در نهایت رابطه ساختاری در حالت بارگذاری تک محوره بر حسب کشیدگی‌ها به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\sigma_1 = 2\mu_0 \exp\left(\frac{x}{l}\right)\left(-\frac{l}{\lambda_0 x} + {\lambda_0}^2\left(\frac{x}{l}\right)^2\right) \tag{9}$$

رابطه کشیدگی λ_1 و کرنش مهندسی ε_1، در جهت نیروی تک محوره اعمال‌شده، به صورت $\lambda_1 = 1 + \varepsilon_1$ است. داده‌های تجربی مورد استفاده، از نمودارهای تنش-کشیدگی در حالت استاتیکی و برای لاستیک آزمایش‌شده توسط تریلور استخراج شده است [20]. در حالت شبه استاتیکی، آزمایش با نرخ کرنش $0.001\left(\frac{1}{\text{ثانیه}}\right)$ انجام می‌شود. با استفاده از روش حداقل کردن مربعات خطاها، مقدار (مگاپاسکال) $\mu_0 = 0.113$ به دست می‌آید. در یافتن

این ضرایب فرض می‌شود در نرخ کرنش‌های پایین پاسخ ماده مستقل از نرخ زمانی است. مقایسه بین منحنی‌های تجربی و مدل به‌کاررفته، در نمودار تنش کوشی بر حسب کشیدگی، در شکل 1 آمده است که میزان خطای استاندارد 9.3 درصد را نشان می‌دهد که بیانگر نزدیکی نتایج تجربی و مدل تحلیلی است، لذا صحت مدل ساختاری هایپرالاستیک به‌کاررفته، مورد تأیید قرار می‌گیرد.

برای به دست آوردن سازواری مناسب ماده، از رابطه توانی $W = \mu_0 \left(\frac{x}{l}\right)^n (I_1 - 3)$ برای تابع انرژی استفاده می‌گردد که در این حالت، با در نظر گرفتن مقدار $\mu_0 = 0.113$ ، n مناسب برای ماده مورد بحث با توجه به مقادیر تنش-کرنش به دست می‌آید که در این حالت بارگذاری، مقدار مناسب $n = 2.63$ به دست می‌آید. برای تأیید درستی ثوابت به دست آمده فوق، رفتار ماده هایپرالاستیک در بارگذاری‌های کشش دو محوره و برش محض نیز با استفاده از این ثوابت مورد بررسی قرار می‌گیرد. تانسور گرادیان تغییر شکل، F در بارگذاری کشش دو محوره به صورت زیر است:

$$F = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_1^2} \end{bmatrix} \tag{10}$$

با استفاده از روابط (1) و (4) و (10)، و با در نظر گرفتن $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ و $\sigma_3 = 0$ در بارگذاری کشش دو محوره، تنش به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma = 2\mu_0 \exp\left(\frac{x}{l}\right)\left(-\left(\frac{l}{\lambda_0 x}\right)^4 + \lambda_0^2 \left(\frac{x}{l}\right)^2\right) \tag{11}$$

برای انجام آزمایش بارگذاری برشی محض در مواد هایپرالاستیک تراکم ناپذیر، ماده در یک جهت کشیده می‌شود درحالی‌که در جهت دوم مقید گردیده است و جهت سوم نیز فاقد تنش است که در شکل 2 نشان داده شده است. به دلیل اینکه رفتار ماده کاملا نزدیک تراکم ناپذیر است، حالت بارگذاری برش محض، با 45 درجه دوران نسبت به جهت بارگذاری کششی در قطعه نشان داده‌شده در شکل 2 در نظر گرفته می‌شود. بنابراین، تانسور گرادیان تغییر شکل، F در این حالت به صورت زیر است:

$$F = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_1} \end{bmatrix} \tag{12}$$

با استفاده از روابط (1) و (4) و (12)، و با در نظر گرفتن $\sigma_3 = 0$ تنش در راستای یک به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\sigma_1 = 2\mu_0 \exp\left(\frac{x}{l}\right)\left(-\left(\frac{l}{\lambda_0 x}\right)^2 + \lambda_0^2 \left(\frac{x}{l}\right)^2\right) \tag{13}$$

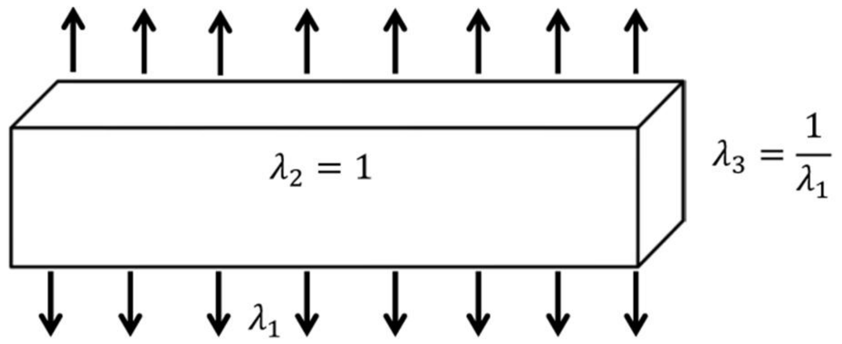

Fig. 2 Planner tension test specimen outline (Pure shear)

شکل 2 نمای شماتیک قطعه تحت بارگذاری کشش صفحه ای(برش محض)

نتایج آزمایشگاهی موجود و نتایج تئوری در بارگذاری کشش دو محوره و برش محض در شکل‌های 3 و 4 نشان شده است. مقایسه نتایج آزمایشگاهی و تئوری، بیانگر این است که تئوری به‌کاررفته، با تقریب بسیار خوبی، می‌تواند رفتار مواد هایپرالاستیک در بارگذاری‌های کشش دو محور و برش محض را نیز مدل نماید.

4- لاستیک تراکم ناپذیر همسانگرد ناهمگن مدرج تابعی تحت بارگذاری همزمان مکانیکی حرارتی

یکی از متداول‌ترین روش‌ها برای ساختن مدل های ترموالاستیک در کرنش‌های بزرگ استفاده از تجزیه ضربی گرادیان تغییر شکل به قسمت‌های الاستیک و غیر الاستیک است که اولین بار توسط گرین و توبولسکی پیشنهاد گردید [4]. در این بخش نیز تجزیه ضربی گرادیان تغییر شکل برای مدل به‌کاررفته که برای تغییر شکل بزرگ به فرم زیر و مطابق شکل 5 در نظر گرفته می‌شود:

$$F = F_T F_M \tag{14}$$

F گرادیان تغییر شکل کلی را نشان می‌دهد و F_T و F_M به ترتیب گرادیان تغییر شکل وابسته به تغییر شکل حرارتی و مکانیکی است. F_T گرادیان تغییر شکل حرارتی است و به صورت زیر بیان می‌شود:

$$F_T = \gamma(T) I \tag{15}$$

با فرض مستقل از دما بودن ضریب انبساط طولی و کوچک بودن تغییر شکل‌های حرارتی در مقایسه با تغییر شکل مکانیکی، تابع تغییر شکل حرارتی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\gamma(T) = 1 + \alpha T = 1 + \alpha(\theta - \theta_0) \tag{16}$$

دترمینان تانسور گرادیان تغییر شکل، به صورت زیر در می‌آید:

$$J = J_M J_T \tag{17}$$

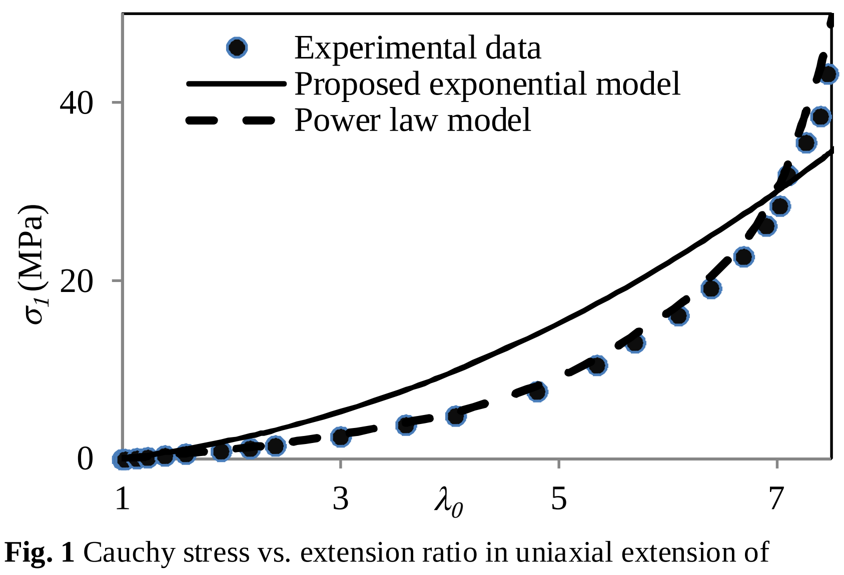

Fig. 1 Cauchy stress vs. extension ratio in uniaxial extension of isotropic functionally graded hyperelastic material

شکل 1 تنش کوشی بر حسب کشیدگی در ماده هایپرالاستیک ناهمگن مدرج تابعی همسانگرد تحت بارگذاری کشش تک محوره

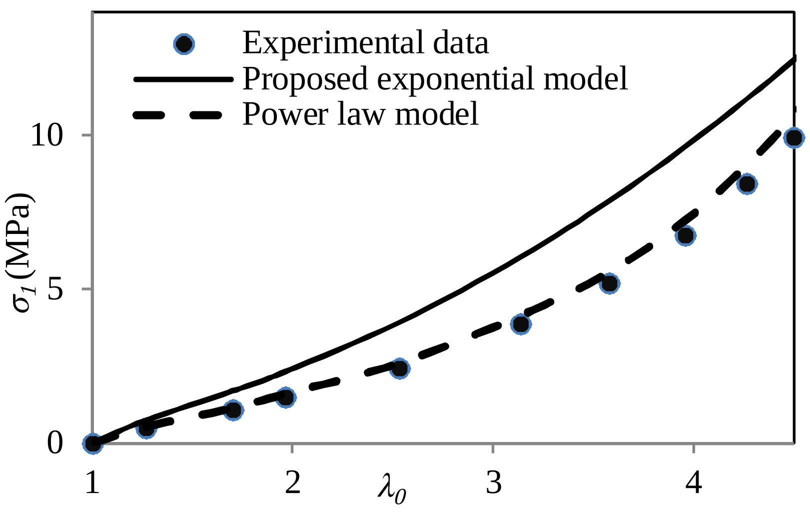

Fig. 3 Cauchy stress vs. extension ratio in equibiaxial extension of isotropic functionally graded hyperelastic material

شکل 3 تنش کوشی بر حسب کشیدگی در ماده هایپرالاستیک ناهمگن مدرج تابعی همسانگرد تحت بارگذاری کشش دو محوره

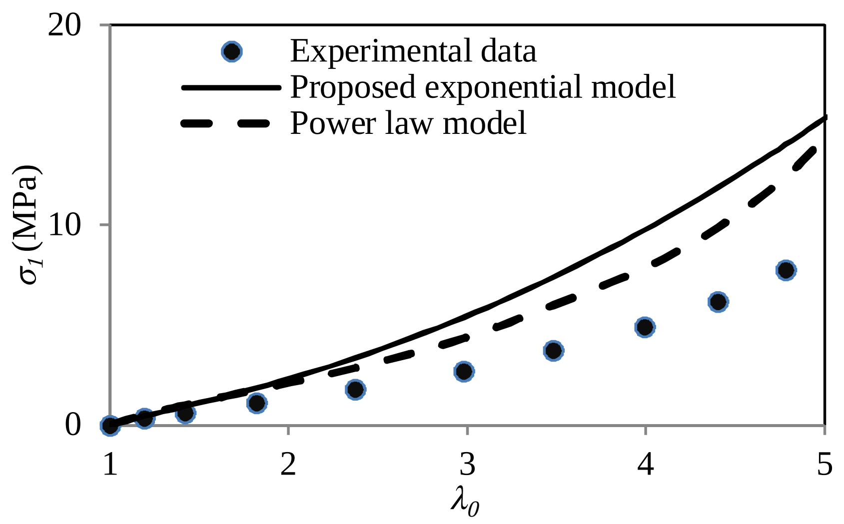

Fig. 4 Cauchy stress vs. extension ratio in pure shear of isotropic functionally graded hyperelastic material

شکل 4 تنش کوشی بر حسب کشیدگی در ماده هایپرالاستیک ناهمگن مدرج تابعی همسانگرد تحت بارگذاری برش محض

با در نظر گرفتن تراکم ناپذیر بودن تغییر شکل مکانیکی، رابطه بین تغییر شکل‌های مکانیکی و کلی به صورت زیر در می‌آید:

$$J_M = 1 \tag{18}$$

$$J = J_T = \gamma^3 \tag{19}$$

$$C_M = F_M{}^T F_M = \frac{C}{\gamma^2},\; B_M = F_M F_M{}^T = \frac{B}{\gamma^2} \tag{20}$$

$$\mathrm{I}_{1M} = \operatorname{tr} C_M = \frac{\mathrm{I}_1}{\gamma^2} \tag{21}$$

$$I_{2M} = \frac{1}{2}[(\operatorname{tr} C_M)^2 - \operatorname{tr} C_M^2] = I_2/\gamma^4 \tag{22}$$

$$I_{3M} = \det C_M = I_3/\gamma^6 \tag{23}$$

درلاستیک های تراکم ناپذیر، $I_{3M} = 1$ فرض می‌شود و رابطه ساختاری برای مواد هایپرالاستیک تراکم ناپذیر و همسانگرد تحت بارگذاری همزمان مکانیکی و حرارتی به صورت زیر بیان می‌شود [4]:

$$\sigma = -pI + 2\frac{\rho_0(x)}{\gamma^7} F\left(\gamma^2 \frac{\partial W}{\partial I_{1M}} I + \frac{\partial W}{\partial I_{2M}}(I_1 I - C)\right) F^T \tag{24}$$

در میله هایپرالاستیک ناهمگن مدرج تابعی تحت بارگذاری کششی و حرارتی، جابجایی مکانیکی هر نقطه از این میله به دلیل شرایط ناهمگنی در طول ماده، به صورت تابعی از طول میله در نظر گرفته می‌شود؛ بنابراین کشیدگی‌ها در طول میله به صورت $\lambda_1(x) = \lambda_0\left(\frac{x}{l}\right)$ فرض می‌شود. ضمنا بین کشیدگی‌ها نیز روابط زیر برقرار است:

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \gamma^3 \text{ و } \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{\gamma^{3/2}}{\sqrt{\lambda_1}} \tag{25}$$

در این حالت گرادیان تغییر شکل و تانسور تغییر شکل چپ کوشی-گرین به صورت زیر بیان می‌شوند:

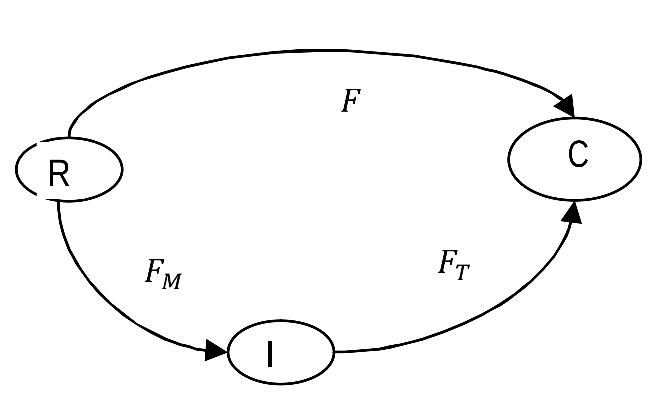

Fig. 5 Multiplicative decomposition of deformation gradient tensor into thermal and mechanical parts

شکل 5 تجزیه ضربی گرادیان تغییر شکل برای تغییر شکل مکانیکی و حرارتی

$$F = \begin{bmatrix} \lambda_0\left(\frac{x}{l}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\gamma^{3/2}}{\sqrt{\lambda_1}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\gamma^{3/2}}{\sqrt{\lambda_1}} \end{bmatrix}, C = B = \begin{bmatrix} \lambda_0{}^2\left(\frac{x}{l}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\gamma^3}{\lambda_0\left(\frac{x}{l}\right)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\gamma^3}{\lambda_0\left(\frac{x}{l}\right)} \end{bmatrix} \tag{26}$$

توزیع دما در میله که ابتدا در دمای θ_0 است و پس از بارگذاری حرارتی دمای دو سر آن θ_1 و θ_2 هستند به صورت $T = \theta - \theta_0 = \frac{\theta_2 - \theta_1}{l}x + \theta_1$ است و لذا معادله (16) به صورت زیر در می‌آید:

$$\gamma(T) = 1 + \alpha T = 1 + \alpha\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{l}x + \theta_1\right) \tag{27}$$

در مثال‌های مربوط به بارگذاری حرارتی $\alpha = 0.000342\ (\frac{1}{\text{کلوین}})$ در نظر گرفته می‌شود و فرض می‌شود که میله لاستیکی به طول یک متر ابتدا در دمای 20 سانتی گراد قرار دارد و بعد از بارگذاری حرارتی دمای دو انتهای آن به ترتیب 40 و 80 درجه سانتی‌گراد خواهد بود.

4-1- تابع انرژی نئو هوکین

تابع انرژی به صورت تابع انرژی نئو هوکین $W = c(x)(I_{1M} - 3)$ در نظر گرفته می‌شود [4]؛ که c بیانگر مدول برشی ماده در پیکربندی تغییر شکل یافته است. در این مقاله، چگالی و ثابت ماده در تابع انرژی به ترتیب به صورت $c(x) = c_0 \exp\left(\frac{x}{l}\right)$ و $\rho(x) = \rho_0 \exp\left(\frac{x}{l}\right)$ در نظر گرفته می‌شود؛ بنابراین تابع انرژی نئو هوکین برای مواد ناهمگن مدرج تابعی به صورت زیر می باشد:

$$W = c_0 \exp\left(\frac{x}{l}\right)(I_{1M} - 3) \tag{28}$$

با قرار دادن ناورداهای B از رابطه (26) در معادله (28) تابع انرژی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$W = c_0 \exp\left(\frac{x}{l}\right)(I_{1M} - 3) = c_0 \exp\left(\frac{x}{l}\right)\left(\frac{\lambda_{1M}{}^3 + 2\gamma^3}{\lambda_{1M}} - 3\right)$$
$$= c_0 \exp\left(\frac{x}{l}\right)\left(\frac{\lambda_{0M}{}^3\left(\frac{x}{l}\right)^3 + 2}{\lambda_{0M}\left(\frac{x}{l}\right)} - 3\right) \tag{29}$$

و با استفاده از رابطه (24) تنش کوشی به فرم زیر محاسبه می‌گردد:

$$\sigma = -p\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 2\frac{\rho(x)C_0}{\gamma^5}\exp\left(\frac{x}{l}\right)\begin{bmatrix} \lambda_0{}^2\left(\frac{x}{l}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_0\left(\frac{x}{l}\right)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_0\left(\frac{x}{l}\right)} \end{bmatrix} \tag{30}$$

تنش در راستای اعمال بار به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\sigma_1 = -p + 2\frac{\rho(x)c_0}{\gamma^5}\exp\left(\frac{x}{l}\right)\lambda_0{}^2\left(\frac{x}{l}\right)^2 \tag{31}$$

فشارهیدرواستاتیک با استفاده از شر ط $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ و رابطه $B_{22} = B_{33} = B_{11}{}^{-0.5}$ به دست می آید.

$$p = 2\frac{\rho(x)c_0}{\gamma^5}\exp\left(\frac{x}{l}\right)\frac{1}{\lambda_0\left(\frac{x}{l}\right)} \tag{32}$$

در نهایت رابطه ساختاری در حالت بارگذاری تک محوره بر حسب کشیدگی‌ها به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\sigma_1 = \frac{K_0}{\gamma^5}\exp\left(2\frac{x}{l}\right)\left(\frac{-l}{\lambda_0 x} + \lambda_0{}^2\left(\frac{x}{l}\right)^2\right) \tag{33}$$

که $K_0 = c_0\rho_0$ است. داده‌های تجربی مورد استفاده، از نمودارهای تنش-کشیدگی در حالت استاتیکی و برای لاستیک آزمایش‌شده توسط تریلور استخراج شده است [20]. در حالت شبه استاتیکی آزمایش با نرخ کرنش

$0.001\ (\frac{1}{\text{ثانیه}})$ انجام می‌شود. با استفاده از روش حداقل کردن مربعات خطاها مقدار (مگاپاسکال) $K_0 = 0.0834$ به دست می‌آید. در یافتن این ضرایب فرض می‌شود در نرخ کرنش‌های پایین پاسخ ماده مستقل از نرخ زمانی است. مقایسه بین منحنی‌های تجربی و مدل به‌کاررفته، در نمودار تنش کوشی بر حسب کشیدگی، در شکل 6 آمده است که میزان خطای استاندارد 6.62 درصد را نشان می‌دهد که بیانگر نزدیکی نتایج تجربی و مدل تحلیلی است، لذا صحت مدل ساختاری هایپرالاستیک به‌کاررفته، مورد تأیید قرار می‌گیرد. برای به دست آوردن سازواری مناسب ماده، از رابطه توانی به شکل $W = c_0\left(\frac{x}{l}\right)^n (I_{1M} - 3)$ برای تابع انرژی استفاده می‌گردد. در این حالت، با در نظر گرفتن مقادیر به دست آمده برای توزیع نمایی ضرایب تابع انرژی، مقدار n مناسب برای ماده مورد بحث با توجه به مقادیر تنش-کرنش به دست می‌آید که در این حالت بارگذاری $n = 1.42$ به دست می‌آید. برای تأیید درستی ثوابت به دست آمده فوق، رفتار ماده هایپرالاستیک در بارگذاری‌های کشش دو محوره و برش محض نیز مورد بررسی قرار می‌گیرد. با استفاده از روابط (24) و (28) و (10)، و با در نظر گرفتن $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ و $\sigma_3 = 0$ در بارگذاری کشش دو محوره، تنش به صورت زیر به دست می آید:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma = \frac{K_0}{\gamma^5}\exp\left(2\frac{x}{l}\right)\left(-\left(\frac{l}{\lambda_0 x}\right)^4 + \lambda_0^2\left(\frac{x}{l}\right)^2\right) \qquad (34)$$

در بارگذاری برشی محض، با استفاده از روابط (24) و (28) و (12)، و با در نظر گرفتن $\sigma_3 = 0$ تنش در راستای یک به صورت زیردست می‌آید:

$$\sigma_1 = \frac{K_0}{\gamma^5}\exp\left(2\frac{x}{l}\right)\left(-\left(\frac{l}{\lambda_0 x}\right)^2 + \lambda_0^2\left(\frac{x}{l}\right)^2\right) \qquad (35)$$

نتایج آزمایشگاهی موجود و نتایج تئوری در بارگذاری کشش دو محوره و برش محض در شکل‌های 7 و 8 نمایش داده شده است. مقایسه این نتایج بیانگر این است که تئوری به‌کاررفته با تقریب بسیار خوبی می‌تواند رفتار مواد هایپرالاستیک در بارگذاری‌های مذکور را مدل نماید.

5- لاستیک تراکم ناپذیر همسانگرد عرضی ناهمگن مدرج تابعی

در مواد همسانگرد خواص ماده در هر نقطه، در جهات مختلف یکسان است اما به طور کلی، نمی‌توان تمامی مواد موجود در طبیعت و مواد مصنوعی را به عنوان ماده همسانگرد مدلسازی کرد، زیرا شرایط طبیعی و فرآیندهای ساخت، موجب ایجاد ناهمسانگردی در ماده می‌گردند. در بسیاری از مواد موجود، خواص ماده در جهات مشخصی تغییر می‌کند که سبب ایجاد ناهمسانگردی در آن می‌شود. به طور کلی، در مواد مختلف، تعداد این جهات

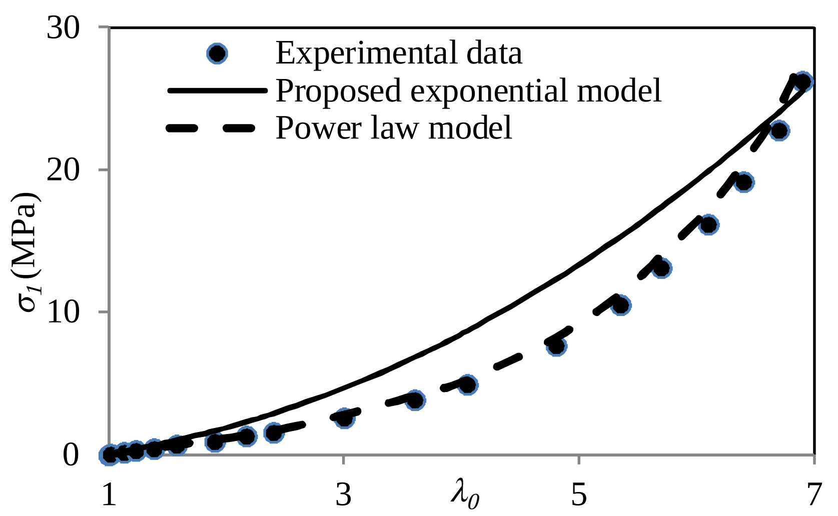

Fig. 6 Cauchy stress vs. extension ratio of isotropic functionally graded hyperelastic material in simultaneous thermal loading and uniaxial mechanical extension

شکل 6 تنش کوشی بر حسب کشیدگی در ماده هایپرالاستیک ناهمگن مدرج تابعی همسانگرد تحت بارگذاری همزمان کششی تک محوره و حرارتی

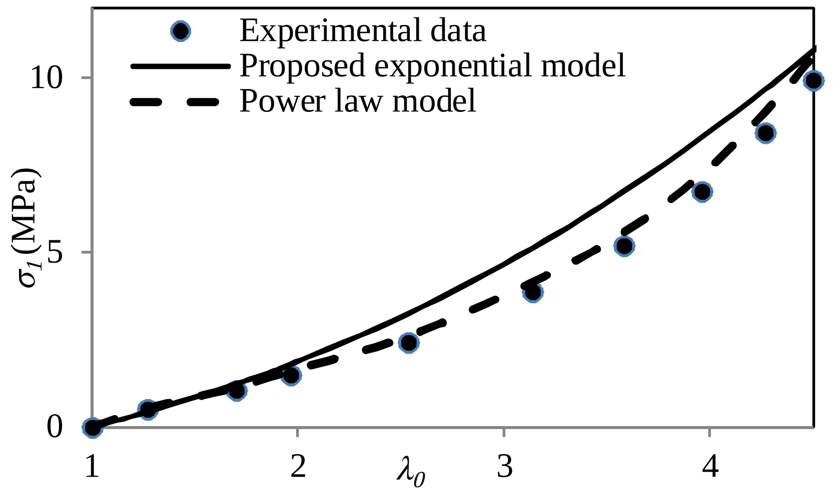

Fig.7 Cauchy stress vs. extension ratio of isotropic functionally graded hyperelastic material in simultaneous thermal loading and equibiaxial mechanical extension

شکل 7 تنش کوشی بر حسب کشیدگی در ماده هایپرالاستیک ناهمگن مدرج تابعی همسانگرد تحت بارگذاری همزمان کششی دو محوره و حرارتی

مشخصه که ماده در راستای آن‌ها ناهمسانگرد است، متفاوت است. دسته‌ای مهم از مواد ناهمسانگرد، مواد همسانگرد عرضی هستند که ماده در یک صفحه به صورت همسانگرد است و خواص ماده در جهت مشخص و عمود بر این صفحه تغییر می‌کند. از جمله این مواد می‌توان به بعضی از بافت‌های بدن مانند رگ آئورت و یا مثانه نام برد. همچنین کامپوزیت های تقویت‌شده در یک راستای خاص نیز در این دسته از مواد قرار می‌گیرند. به همین ترتیب در الاستیسیته کوشی، تنش ماده همسانگرد عرضی با جهت مشخصه M به صورت زیر تعریف می‌گردد [4].

$$\sigma = \mathrm{g}(F, M \otimes M) \qquad (36)$$

در ماده هایپرالاستیک تراکم ناپذیر همسانگرد عرضی، راستای مشخصه ناهمسانگردی در حالت تغییر شکل نیافته با بردار M بیان می‌گردد. در این صورت بردار عمود بر صفحه همسانگرد در حالت تغییر شکل یافته به صورت $m = FM$ بیان می‌شود. تابع انرژی مواد ناهمسانگرد صفحه‌ای، علاوه بر ناورداهای تانسور B، تابع دو ناوردای دیگر نیز است که تابعی از جهت و راستای مشخصه ناهمسانگردی و تانسور B هستند و به صورت زیر می‌باشند:

$$I_4 = m \cdot m \qquad (37)$$

$$I_5 = m \cdot (Bm) \qquad (38)$$

در مواد هایپرالاستیک تراکم ناپذیر همسانگرد صفحه‌ای، تانسور تنش

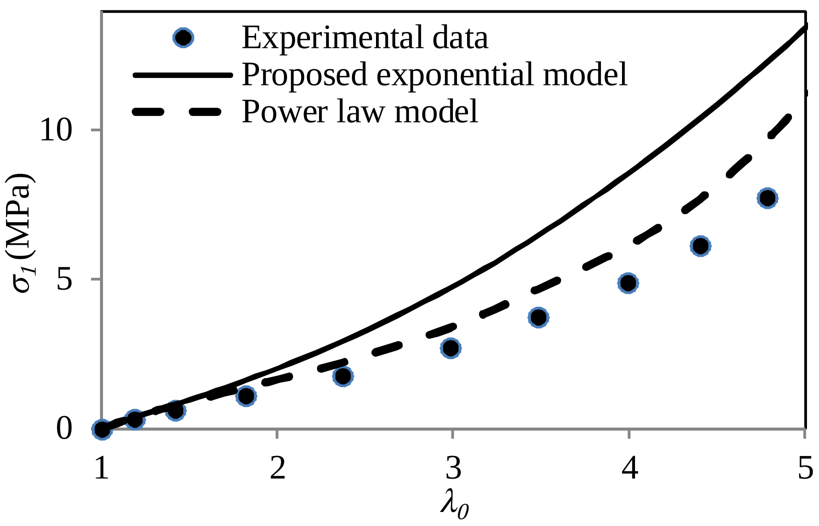

Fig. 8 Cauchy stress vs. extension ratio of isotropic functionally graded hyperelastic material in simultaneous thermal and pure shear mechanical loading

شکل 8 تنش کوشی بر حسب کشیدگی در ماده هایپرالاستیک ناهمگن مدرج تابعی همسانگرد تحت بارگذاری همزمان حرارتی و برش محض

کوشی به صورت زیر به دست می‌آید [4]:

$$\sigma = -pI + 2\left(\frac{\partial W}{\partial I_1}B + \frac{\partial W}{\partial I_2}\left(I_1 B - B^2\right)\right) + 2\frac{\partial W}{\partial I_4}(m\otimes m) + 2\frac{\partial W}{\partial I_5}(m\otimes Bm + Bm\otimes m) \qquad (39)$$

که p، فشارهیدرواستاتیک است و σ بیانگر تنش کوشی است. $W = W(I_1, I_2, I_4, I_5)$ نیز تابع انرژی پتانسیل کرنشی می باشد.

جابجایی هر نقطه از این میله به دلیل شرایط ناهمگنی در طول ماده، به صورت تابعی از طول آن در نظر گرفته می‌شود؛ بنابراین کشیدگی در طول میله به صورت $\lambda_1(x) = \lambda_0\left(\frac{x}{l}\right)$ فرض می‌شود. تانسور گرادیان تغییر شکل، F به صورت زیر به دست می‌آید:

$$F = \begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda_0\left(\frac{x}{l}\right) & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda_0\left(\frac{x}{l}\right)}} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda_0\left(\frac{x}{l}\right)}}\end{bmatrix} \qquad (40)$$

در حالت بارگذاری کشش تک محوره، $B = C$ می‌شود. در این حالت تانسور تغییر شکل چپ کوشی- گرین B به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$C = B = \begin{bmatrix}\lambda_1^2 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\lambda_1} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda_0^2\left(\frac{x}{l}\right)^2 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\lambda_0\left(\frac{x}{l}\right)} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_0\left(\frac{x}{l}\right)}\end{bmatrix} \qquad (41)$$

5-1- تابع انرژی به‌کاررفته برای مواد همسانگرد صفحه ای

در این بخش تابع انرژی به صورت رابطه زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$W = G(I_1) + H(I_4) \qquad (42)$$

مدل در نظر گرفته‌شده در واقع، تابع انرژی را به دو بخش همسانگرد و ناهمسانگرد تقسیم می‌کند.. در این بخش تابع انرژی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود[21 و22]:

$$W = \frac{\eta(x)}{2}\left((I_1 - 3) + \zeta(I_4 - 1)^2\right) \qquad (43)$$

که $\eta(x) = \eta_0 \exp\left(\frac{x}{l}\right)$ است و ζ بیانگر میزان و درجه ناهمسانگردی در راستای در نظر گرفته‌شده است. امتداد ناهمسانگردی M در راستای طول در نظر گرفته می‌شود و با قرار دادن تابع انرژی فوق در رابطه(39)، تنش کوشی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\sigma = -p\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} + \eta_0 \exp\left(\frac{x}{l}\right)\begin{bmatrix}\lambda_0^2\left(\frac{x}{l}\right)^2 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\lambda_0\left(\frac{x}{l}\right)} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_0\left(\frac{x}{l}\right)}\end{bmatrix} + 2\zeta\eta_0 \exp\left(\frac{x}{l}\right)(I_4 - 1)\begin{bmatrix}\lambda_0^2\left(\frac{x}{l}\right)^2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \qquad (44)$$

تنش در راستای اعمال بار به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\sigma_1 = -p + \eta_0 \exp\left(\frac{x}{l}\right)\lambda_0^2\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 2\zeta\eta_0 \exp\left(\frac{x}{l}\right) * \left(\lambda_0^4\left(\frac{x}{l}\right)^4 - \lambda_0^2\left(\frac{x}{l}\right)^2\right) \qquad (45)$$

فشارهیدرواستاتیک با استفاده از شرط $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ و رابطه $B_{22} = B_{33} = B_{11}^{-0.5}$ به دست می آید.

$$p = \eta_0 \exp\left(\frac{x}{l}\right)\frac{1}{\lambda_0\left(\frac{x}{l}\right)} \qquad (46)$$

در نهایت رابطه ساختاری در حالت بارگذاری تک محوره بر حسب کشیدگی‌ها به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\sigma_1 = \eta_0 \exp\left(\frac{x}{l}\right)\left(-\frac{l}{\lambda_0 x} + \lambda_0^2\left(\frac{x}{l}\right)^2\right) + 2\zeta\eta_0 \exp\left(\frac{x}{l}\right) * \left(\lambda_0^4\left(\frac{x}{l}\right)^4 - \lambda_0^2\left(\frac{x}{l}\right)^2\right) \qquad (47)$$

رابطه کشیدگی، λ_1 و کرنش مهندسی ε_1، در جهت نیروی تک محوره اعمال‌شده، به صورت $\lambda_1 = 1 + \varepsilon_1$ است. داده‌های تجربی مورد استفاده، از نمودارهای تنش-کشیدگی در حالت استاتیکی و برای لاستیک آزمایش‌شده توسط تریلور استخراج شده است [20]. در حالت شبه استاتیکی آزمایش با نرخ کرنش 0.001 $\left(\frac{1}{\text{ثانیه}}\right)$ انجام می‌شود. با استفاده از روش حداقل کردن مربعات خطاها مقادیر (مگاپاسکال) $\eta_0 = 0.0164$ و $\zeta = 0.14$ به دست می‌آید. در یافتن این ضرایب فرض می‌شود در نرخ کرنش‌های پایین پاسخ ماده مستقل از نرخ زمانی است. مقایسه بین منحنی‌های تجربی و مدل به‌کاررفته، در نمودار تنش کوشی بر حسب کشیدگی، در شکل 9 آمده است که میزان خطای استاندارد 3.41 درصد را نشان می‌دهد که بیانگر نزدیکی نتایج تجربی و مدل تحلیلی است، لذا صحت مدل ساختاری هایپرالاستیک فوق، مورد تأیید قرار می‌گیرد. برای به دست آوردن سازواری مناسب ماده، از رابطه توانی $\eta(x) = \eta_0\left(\frac{x}{l}\right)^n (I_1 - 3)$ برای تابع انرژی استفاده می‌گردد که در این حالت، با در نظر گرفتن مقادیر به دست آمده برای توزیع نمایی $\eta(x)$، مقدار n مناسب برای ماده مورد بحث با توجه به مقادیر تنش-کرنش به دست می‌آید که در این حالت بارگذاری، $n = 2.18$ به دست می‌آید. برای تأیید درستی ثوابت به دست آمده فوق، رفتار ماده هایپرالاستیک در بارگذاری‌های کشش دو محوره و برش محض نیز مورد بررسی قرار می‌گیرد. با استفاده از روابط (39) و (43) و (10)، و با در نظر گرفتن $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ و $\sigma_3 = 0$ در بارگذاری کشش دو محوره، تنش به صورت زیر به دست می آید:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma = \eta_0 \exp\left(\frac{x}{l}\right)\left(-\left(\frac{l}{\lambda_0 x}\right)^4 + \lambda_0^2\left(\frac{x}{l}\right)^2\right) + \zeta\eta_0 \exp\left(\frac{x}{l}\right)\left(\lambda_0^4\left(\frac{x}{l}\right)^4 - \lambda_0^2\left(\frac{x}{l}\right)^2\right) \qquad (48)$$

در بارگذاری برشی محض، با استفاده از روابط (39) و (43) و (12)، و با در نظر گرفتن $\sigma_3 = 0$ تنش در راستای یک به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\sigma_1 = \eta_0 \exp\left(\frac{x}{l}\right)\left(-\left(\frac{l}{\lambda_0 x}\right)^2 + \lambda_0^2\left(\frac{x}{l}\right)^2\right) + 2\zeta\eta_0 \exp\left(\frac{x}{l}\right)\left(\lambda_0^4\left(\frac{x}{l}\right)^4 - \lambda_0^2\left(\frac{x}{l}\right)^2\right) \qquad (49)$$

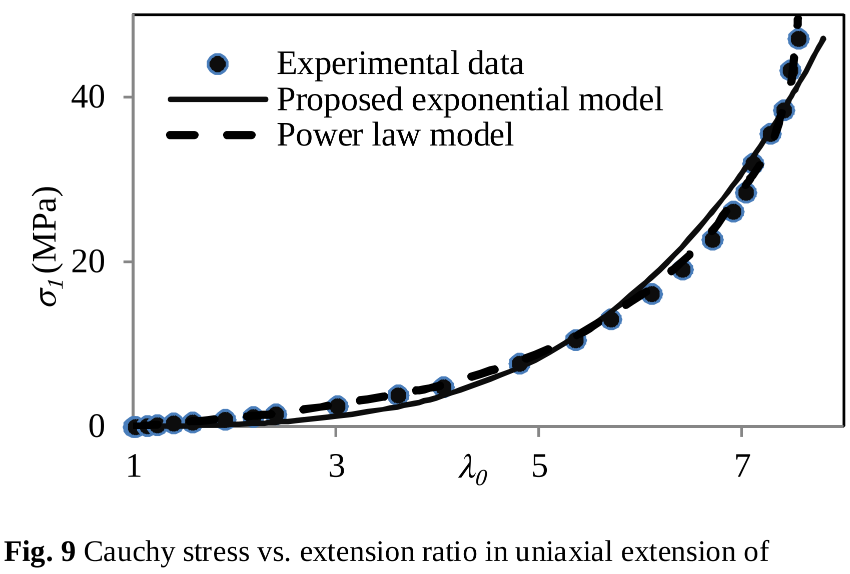

Fig. 9 Cauchy stress vs. extension ratio in uniaxial extension of transversely isotropic functionally graded hyperelastic material

شکل 9 تنش کوشی بر حسب کشیدگی در ماده هایپرالاستیک ناهمگن مدرج تابعی همسانگرد عرضی تحت بارگذاری کشش تک محوره

نتایج آزمایشگاهی موجود و نتایج تئوری در بارگذاری کشش دو محوره و برش محض در شکل‌های 10 و 11 نشان داده شده است. مقایسه این نتایج بیانگر این است که تئوری به‌کاررفته، با تقریب بسیار خوبی می‌تواند رفتار مواد هایپرالاستیک در بارگذاری‌های مذکور را مدل نماید.

6- بحث و نتیجه‌گیری

با استفاده از روش به کار گرفته‌شده در فرمول‌بندی روابط ساختاری در این مقاله، معادلات جدیدی برای توصیف تغییر شکل‌های بزرگ در لاستیک‌های تراکم ناپذیر ناهمگن مدرج تابعی همسانگرد تحت بارگذاری مکانیکی و یا بارگذاری همزمان مکانیکی و حرارتی به دست می‌آید. همچنین روابط ساختاری برای توصیف تغییر شکل‌های بزرگ لاستیک‌های تراکم ناپذیر ناهمگن مدرج تابعی همسانگرد عرضی تحت بارگذاری مکانیکی به دست آمده است. در بارگذاری مکانیکی، معادله ساختاری بر اساس روابط هایپرالاستیک و در حالت استاتیک است. روابط ماده هایپرالاستیک بر مبنای تابع انرژی پتانسیل کرنشی الاستیک استوار است. در ماده ناهمگن مدرج تابعی فرض می‌شود که ثوابت تابع انرژی و خواص ماده به صورت نمایی در طول میله تغییر می‌کنند. در بارگذاری همزمان مکانیکی و حرارتی، روش به کار برده شده استفاده از تجزیه ضربی گرادیان تغییر شکل است و سپس با به دست آوردن توزیع دما و استفاده از توابع انرژی معادله ساختاری ماده به دست می‌آید. در استخراج معادله ساختاری مواد همسانگرد عرضی، علاوه بر سه

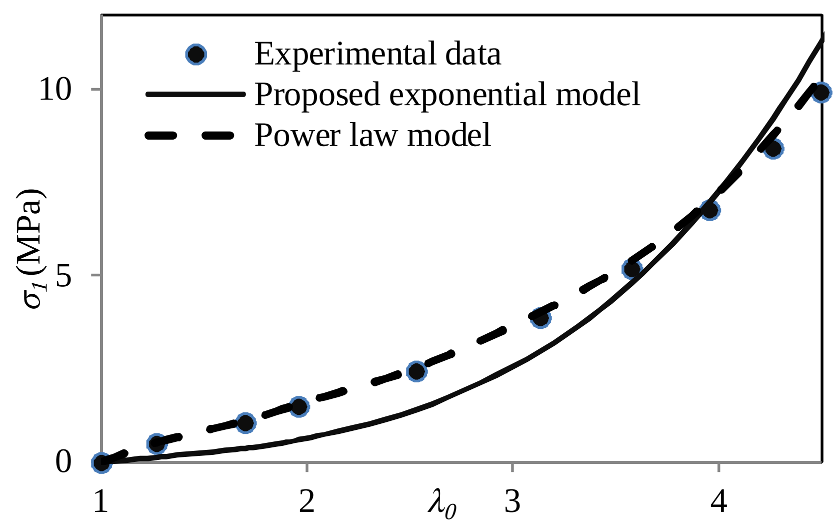

Fig. 10 Cauchy stress vs. extension ratio in equibiaxial of transversely isotropic functionally graded hyperelastic material

شکل 10 تنش کوشی بر حسب کشیدگی در ماده هایپرالاستیک ناهمگن مدرج تابعی همسانگرد عرضی تحت بارگذاری کشش دو محوره

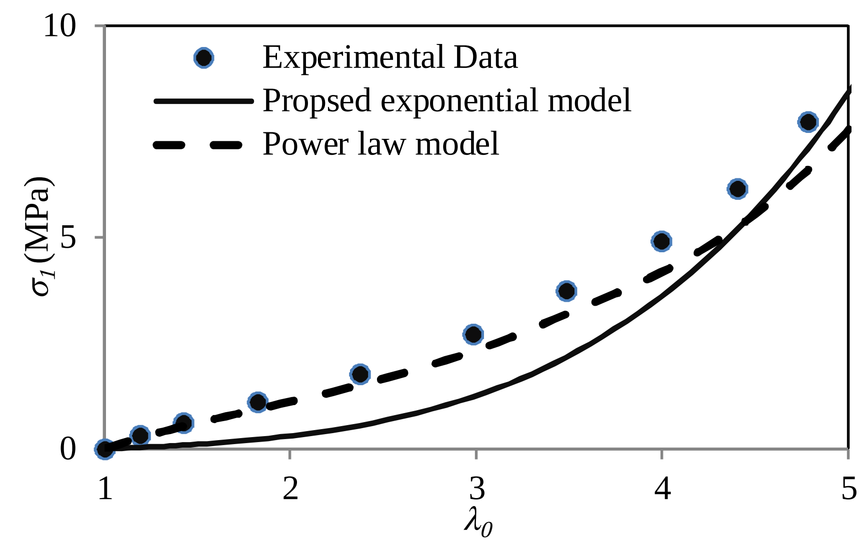

Fig. 11 Cauchy stress vs. extension ratio in pure shear of transversely isotropic functionally graded hyperelastic material

شکل 11 تنش کوشی بر حسب کشیدگی در ماده هایپرالاستیک ناهمگن مدرج تابعی همسانگرد عرضی تحت بارگذاری برش محض

ناوردای اصلی تانسور چپ تغییر شکل از ناورداهای چهارم و پنجم که تابع تانسور چپ تغییر شکل و راستای ناهمسانگردی هستند استفاده شده است.

میزان صحت و دقت معادلات ساختاری بر اساس نتایج آزمایشگاهی موجود سنجیده شده و تطابق خوبی بین نتایج عملی و ارائه‌شده در این مقاله به دست آمده است. با استفاده از روش به‌کاررفته و معادلات ساختاری به دست آمده، می‌توان روابط تنش-کرنش سازه های مختلف ساخته‌شده از مواد هایپرالاستیک مدرج تابعی را تحت بارگذاری‌های مختلف استخراج نمود که یکی از مهم‌ترین کاربردهای این مواد در لاستیک اتومبیل‌ها و شیرهای کنترلی نیروگاه‌ها و پتروشیمی‌ها است.

7- فهرست علائم

B	تانسور تغییر شکل چپ کوشی- گرین
B_M	تانسور تغییر شکل چپ کوشی- گرین مکانیکی
C	تانسور تغییر شکل راست کوشی- گرین
C_M	تانسور تغییر شکل راست کوشی- گرین مکانیکی
E	تانسور کرنش گرین
F	تانسور گرادیان تغییر شکل
F_M	تانسور گرادیان تغییر شکل مکانیکی
F_T	تانسور گرادیان تغییر شکل حرارتی
I_1	ناوردای اول تانسور تغییر شکل چپ کوشی- گرین
I_{1M}	ناوردای اول تانسور تغییر شکل چپ کوشی- گرین مکانیکی
I_2	ناوردای دوم تانسور تغییر شکل چپ کوشی- گرین
I_{2M}	ناوردای دوم تانسور تغییر شکل چپ کوشی- گرین مکانیکی
I_3	ناوردای سوم تانسور تغییر شکل چپ کوشی- گرین
I_{3M}	ناوردای سوم تانسور تغییر شکل چپ کوشی- گرین مکانیکی
I_4	ناوردای چهارم به‌کاررفته در تابع انرژی مواد همسانگرد صفحه ای
I_5	ناوردای پنجم به‌کاررفته در تابع انرژی مواد همسانگرد صفحه ای
J	دترمینان تانسور گرادیان تغییر شکل
J_M	دترمینان تانسور گرادیان تغییر شکل مکانیکی
J_T	دترمینان تانسور گرادیان تغییر شکل حرارتی
M	راستای ناهمسانگردی در پیکربندی تغییر شکل نیافته
m	راستای ناهمسانگردی در پیکربندی تغییر شکل یافته
p	فشار هیدرواستاتیک (Nm^{-2})
S	تنش نامی (Nm^{-2})
T	دما (K)
$T^{(2)}$	تنش دوم پیولا-کرشهف (Nm^{-2})
W	تابع انرژی کرنشی

علائم یونانی

α	ضریب انبساط طولی (m^{-1})
γ	مؤلفه تانسور گرادیان تغییر شکل حرارتی
ζ	درصد و میزان ناهمسانگردی
θ	دما (C)
λ	کشیدگی
λ_M	کشیدگی مکانیکی
ρ	چگالی (kgm^{-3})
σ	تانسور تنش کوشی (Nm^{-2})

8- مراجع

[1] H. M. James, H. M., E. Guth, 1943, Theory of the elastic properties of rubber, *Journal of Chemical Physics*, Vol. 11, No. 10, pp. 455-481, 1943.
[2] L. R. G. Treloar, *The physics of rubber elasticity*, Second Edittion, pp 120-160, New York: Oxford University Press, 2005.
[3] P.J. Flory, theory of elasticity of polymer networks, the effect of local constraints on junctions, *Journal of Chemical Physics.* Vol. 66, No. 12, pp. 5720-5729, 1997.
[4] Y. B. Fu, R. W. Ogden, *Nonlinear Elasticity: Theory and Applications*, First Edition, pp 75-125, London: Cambridge University Press, 2001.
[5] M. M. Attard, Finite strain beam theory, *Inernational Journal of Solids and Structures*, Vol. 40, No. 17, pp. 4563–4584. 2003.
[6] M. M. Attard, G. W. Hunt, Hyperelastic constitutive modeling under finite strain, *International Journal of Solids and Structures* , Vol. 41, pp. 5327–5350, 2004.
[7] S. Suresh, A. Mortensen, *Fundamentals of functionally graded materials*, First Edition, pp 23-40, London: IOM Communication Limited, 1998.
[8] M. Yamanouchi., M. Koizumi, I. Shiota, *Proceeding of first international symposium on functionally gradient materials*, Japan, pp. 273-281. 1990.
[9] M. Koizumi, *Ceramic Engineer Science Proceeding*, Japan, pp. 333–347, 1992.
[10] Y. Fukui, Fundamental investigation of functionally graded material manufacturing system using centrifugal force, *International Jounal of Japan Society of Mechanical Engineering, Series III*, Vol. 34, pp.144-148, 1998.
[11] B. V. Sankar., An elasticity solution for functionally graded beams, *Composites Sciences and Technology*, Vol. 61, No. 5, pp. 689-696, 2001.
[12] M. A. Benatta, I. Mechab, A. Tounsi, E. A. Adda Bedia, Static analysis of functionally graded short beams including warping and shear deformation effects. *Computational Materials Science*, Vol. 44, No. 2, pp. 765-773, 2008.
[13] Y. Ikeda, Graded styrene-butadiene rubber vulcanizates., Journal of *Applied. Polymer Science*, Vol. 87, pp. 61-67, 2003.
[14] E. Bilgili, B. Bernstein, H. Arastoopour, Influence of material nonhomogeneity on the shearing response of a Neo-Hookean slab, *Rubber Chemistry and Technol*ogy, Vol. 75, pp. 347–363, 2002.
[15] E. Bilgili, B. Bernstein, H. Arastoopour, Effect of material nonhomogeneity on the inhomogeneous shearing deformation of a Gent slab subjected to a temperature gradient. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 38, pp. 1351–1368, 2003.
[16] R. Batra, Optimal design of functionally graded incompressible linear elastic cylinders and spheres. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, Vol. 46, No. 8, pp.2050–2057, 2008.
[17] Y. Anani, R. Naghdabadi, R. Avazmohammadi, Modeling of visco-hyperelastic behavior of foams in uniaxial tension, *Proceedings of The 16th International Conference on Iranian Society of Mechanical Engineering(ISME 2008)*, Kerman, Iran, 2008. (in Persianفارسی)
[18] Y. Anani, R. Naghdabadi, Modeling of visco-hyperelastic behavior of rubbers in uniaxial tension, *Proceedings* of *7th Conference of Iranian Aerospace Society(AERO 2008)*, Tehran, Iran, 2008. (in Persianفارسی)
[19] B. Hassani, S. M. Tavakkoli, M. Ardiani, Solution of nonlinear nearly incompressible hyperelastic problems by isogeometric analysis method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol.15, No.6, pp.240-248, 2015(in Persianفارسی)
[20] L. R. G.,Treloar, Stress-strain data for vulcanised rubber under various types of deformation, *Trans. Faraday Soc*. Vol. 40, pp. 59–70, 1944.
[21] G. Y. Qiu, T. J. Pence, Remarks on the behavior of simple directionally reinforced incompressible nonlinearly elastic solids, *Journal of Elasticity*, Vol. 49, No. 1, pp 1-30, 1997.
[22] R. Izadi, M. R. Hematiyan, An inverse method for determination of elastic constants of three-dimensional orthotropic, monoclinic and anisotropic materials, *Modares Mechanical Engineering*, Vol.15, No.5, pp.367-376, 2015 (in Persianفارسی)