مجله مهندسی مکانیک مدرس، دی 1394، دوره 15، شماره 10، ص‌ص 173-182

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

تحلیل ارتعاشات آزاد تیرهای تیموشنکوی چند تکه دورانی و دارای ترک با استفاده از روش انتقال دیفرانسیل

محمد رئیسی[1]، علیرضا آریایی[2*]

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه اصفهان، اصفهان

2- استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه اصفهان، اصفهان

*اصفهان، صندوق پستی: 73441-81746، ariaei@eng.ui.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 31 تیر 1394
پذیرش: 22 مرداد 1394
ارائه در سایت: 18 شهریور 1394

کلید واژگان:
تیرچند تکه دورانی
تیر تیموشنکو
روش انتقال دیفرانسیل
فرکانس طبیعی
شکل مود

چکیده

در این مقاله معادلات ارتعاشی تیر تیموشنکوی چند تکه دورانی و دارای ترک به‌دست می‌آید و با حل آن فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای تیر تعیین می‌شود. در ابتدا با بررسی شرایط سازگاری در محل شکستگی‌ها و ترک‌ها، روابط بین هر دو تکه تعیین می‌شود و با کاربرد روشی تحلیلی موسوم به روش انتقال دیفرانسیل، معادلات تبدیل یافته مربوط به شرایط سازگاری، شرایط مرزی و معادلات ارتعاشی اصلی سیستم به‌دست می‌آید. سپس با استفاده از این معادلات، فرکانس‌های طبیعی و در ادامه با کاربرد معکوس روش انتقال دیفرانسیل، شکل مودها تعیین می‌شود. به منظور اعتبارسنجی، نتایج حاصل با مقادیر به‌دست آمده از شبیه‌سازی در نرم‌افزار آباکوس و همچنین در حالت خاصی که تیر ثابت است، با مقادیر به‌دست آمده از روش ماتریس انتقال مقایسه می‌گردد که تطابق خوبی بین نتایج مشاهده می‌شود. در نهایت اثر زاویه‌ی شکستگی، سرعت دوران و موقعیت ترک روی فرکانس‌های طبیعی تیر مورد بررسی قرار می‌گیرد. مشاهده می‌شود که با افزایش سرعت دوران، فرکانس‌های طبیعی افزایش می‌یابد. همچنین با دور شدن ترک از تکیه‌گاه گیردار، فرکانس طبیعی اول افزایش و سایر فرکانس‌ها بسته به دور یا نزدیک شدن به گره‌های ارتعاشی، کاهش یا افزایش می‌یابند. نتایج اعتبارسنجی نشان‌دهنده دقت بالای روش انتقال دیفرانسیل برای تحلیل ارتعاشات آزاد این نوع سیستم است.

Free vibration analysis of cracked rotating multi-span Timoshenko beams using differential transform method

Mohammad Raeisi, Alireza Ariaei*

Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, University of Isfahan, Iran.
*P.O. B. 81746-73441, Isfahan, Iran, ariaei@eng.ui.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 22 July 2015
Accepted 13 Agust 2015
Available Online 09 September 2015

Keywords:
Rotating multi-spam beam
Timoshenko beam
Differential transform method
Natural frequency
Mode shape

ABSTRACT

Free vibration analysis of a cracked rotating multi-span Timoshenko beam is studied in this article to determine the natural frequences and mode shapes of this beam. First, the relationships between each two segments are obtained by considering the compatibility requirements in the frame angles and in the cracks. To determine the transformed compatibility requirements, the boundary conditions, and the vibrational equations, the so-called differential transform method (DTM) is used. Then, these equations are performed to determine the natural frequencies. The mode shapes of the beam are determined by using the inverse of differential transform method. The results have been validated against those obtained from Abaqus software for a rotating multi-span beam and the ones obtained from transfer matrix method for a non-rotating case in which an appropriate agreement is observed. Finally, the effects of the angle of break, the rotational speed, and the crack location on the natural frequencies are investigated. It is shown that the natural frequencies will be increased by increasing the rotational speed. Also, it is seen that the first natural frequency will be increased by moving the crack location from the cantilever support to free support and the variations of other frequencies are dependent on the crack distance to the vibrational nodes. The validation results show the accuracy of DTM in the process of studying the free vibration of this problem.

1- مقدمه

طراحی و تحلیل سازه‌های مهندسی مانند تیغه‌های روتور هلیکوپتر، تیغه‌های توربین بادی، ملخک هواپیما و... توجه بسیاری از پژوهشگران را به رفتار ارتعاشی تیرهای دورانی جلب کرده است. روش‌های تقریبی متفاوتی برای تحلیل ارتعاشی مسئله‌ی تیر دورانی مطرح شده است. هودگس و روتکوسکی [1] روش "المان محدود مرتبه متغیر" را برای به‌دست آوردن خواص ارتعاش آزاد تیر دورانی معرفی کردند. ناگولسواران [2] ارتعاش جانبی یک تیر یکنواخت اویلر-برنولی را بر مبنای حل عمومی معادله‌ی شکل مود و با

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:

M. Raeisi, A. Ariaei, Free vibration analysis of cracked rotating multi-span Timoshenko beams using differential transform method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 10, pp. 173-182, 2015 (In Persian)

استفاده از برهم‌نهی چهار تابع مستقل خطی بررسی کرد. رائو و گوپتا [3] روش المان محدود را برای به‌دست آوردن فرکانس طبیعی و شکل مودهای تیر دورانی با سطح مقطع متغیر به‌کار بردند. گوندا [4] یک المان مرتبه بالاتر را که تابع شکل آن با توابع چندجمله‌ای و مثلثاتی به‌دست آمده است پیشنهاد داد که برای تحلیل دینامیکی تیرهای دورانی با سطح مقطع متغیر مناسب است. سپس گوندا و کانگولی [5] فرض کردند که جابجایی عرضی به عنوان یک تابع مرتبه چهار تغییر می‌کند و شکل تابع جدیدی به‌دست می‌آید که قسمت استاتیکی معادله دیفرانسیل حاکم را ارضا می‌کند. پس از آن گوندا [7،6] یک روش جدید از المان محدود را برای تحلیل ارتعاش آزاد میله‌های دورانی با سرعت بالا ارائه داد که توابع شکل مود آن ترکیب خطی حل معادله دیفرانسیل استاتیکی حاکم بر یک فنر سخت و یک چندجمله‌ای درجه سه است. بازون [8] روابط بین فرکانس‌های درون‌صفحه‌ای و برون‌صفحه‌ای را بر حسب ضرایب ساوت‌ول مورد بررسی قرار داد. بازون [9] ارتعاش یک میله دورانی با سطح مقطع متغیر را با روش المان محدود مطالعه کرد که در آن ماتریس‌های جرم، الاستیک و سختی گریز از مرکز به طور روشنی برحسب نرخ باریک‌شوندگی بیان می‌شود. یو [10] به طور همزمان مشخصه‌های دینامیکی تیغه‌های چرخشی با جرم متمرکز را بررسی کرد. عطارنژاد و شهبا [11] از توابع جابجایی اصلی به‌دست آمده از حل معادله‌ی دیفرانسیل استاتیکی حاصل از حرکت صفحه‌ای تیر دورانی برای تعیین فرمول‌های المان محدود استفاده کردند. وانگ و ورلی [12] روش سختی دینامیکی بر مبنای روش فروبنیوس را برای به‌دست آوردن فرکانس‌های طبیعی تیر دورانی با سطح مقطع متغیر به‌کار بردند. لین و سیاو [13] معادلات حاکم بر ارتعاشات تیر دورانی تیموشنکو را با استفاده از قانون دالامبر و قانون کار مجازی با در نظر گرفتن اثر متقابل تغییر شکل‌های کششی و موجی و تأثیر نیروی کوریولیس روی فرکانس‌های طبیعی استخراج کردند.

در مقایسه با تحقیقات گسترده‌ای که روی تحلیل ارتعاشی تیرهای دورانی بی‌عیب انجام شده است، توجه کمتری به مشخصه‌های ارتعاشی تیرهای دورانی ترک‌دار صورت گرفته است. این در حالی است که سازه‌های دورانی به دلیل خستگی مداوم یا تغییرشکل‌های ساختاری به راحتی در معرض نقایصی همچون ترک هستند. کاملاً مشهود است که ترک روی یک تیر، انعطاف موضعی را افزایش و بنابراین خواص دینامیکی تیر مانند فرکانس‌ها و شکل مودها را تغییر می‌دهد. تاثیر ترک به طور گسترده در مقالات بررسی شده است و رویکردهای گوناگونی برای مدل کردن ترک ارائه شده است. چانگ و چن [14] روش المان محدود را برای تحلیل یک تیغه‌ی دورانی ضخیم ترک‌دار به‌کار بردند و سپس یک رویکرد موج‌های کوچک فضایی را برای نمایش ترک در این تیغه مطرح کردند. کیم [15] از روش المان محدود برای بحث روی تیر کامپوزیتی دورانی با یک ترک عرضی استفاده کرد. کوانگ [16] و هوانگ [17] به ترتیب مکان‌یابی ارتعاشی و پایداری تیغه‌های دورانی با سطح مقطع متغیر و یکنواخت را با در نظر گرفتن تأثیر مکان ترک با استفاده از روش گالرکین مورد بررسی قرار دادند.

روش انتقال دیفرانسیل بر مبنای بسط سری تیلور است و اولین بار توسط زهو [18] در حل مسائل مقدار مرزی در تحلیل مدارهای الکتریکی استفاده شده است. اوزدمیر و کایا [19] روش انتقال دیفرانسیل را برای تعیین فرکانس‌های طبیعی تیرهای غیریکنواخت به‌کار بردند. می [20] از روش انتقال دیفرانسیل برای تحلیل تیرهای دورانی استفاده کرد. برت و زنگ [21] ارتعاشات محوری تیرهای مرکب را با استفاده از این روش مطالعه کردند. در تحقیق دیگری جانگ و همکارانش [22] به کمک روش انتقال دیفرانسیل مسائل مقدار اولیه خطی و غیرخطی را بررسی کردند. مالک و دانگ [23] از این روش برای تحلیل ارتعاشات آزاد تیرهای اویلر- برنولی استفاده کردند. ایاز [24] حل عددی معادلات دیفرانسیل خطی را با استفاده از روش انتقال دیفرانسیل به‌دست آورد. هو و چن [25] به تحلیل ارتعاشی تیرهای تیموشنکو با استفاده از این روش پرداختند. ارتوک و مومانی [26] یک مقایسه عددی بین روش انتقال دیفرانسیل و روش تجزیه دامنه‌ها برای حل مسائل مقدار مرزی مرتبه چهار انجام دادند. طالبی و آریایی از روش انتقال دیفرانسیل برای بررسی ارتعاشات تیر دورانی اویلر-برنولی استفاده کردند [27].

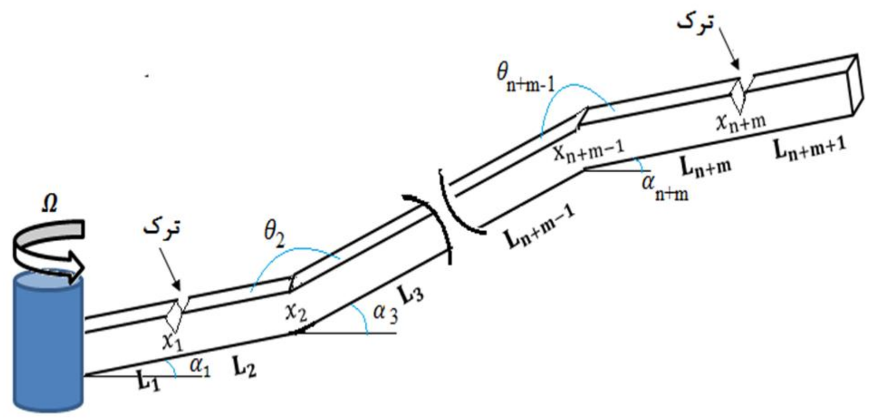
سازه‌های چند تکه معمولاً در طراحی مهندسی جرثقیل‌ها، پل‌ها و سازه‌ها هوافضایی مورد استفاده قرار می‌گیرند [28]. لین و رو [28] با استفاده از روش ماتریس انتقال، فرکانس‌های طبیعی یک قاب را با استفاده از تئوری تیر اویلر-برنولی محاسبه و نتایج به‌دست آمده را به ازای شرایط مرزی مختلف مقایسه کردند. لین و وو [29] با استفاده از روش ماتریس انتقال، فرکانس‌های طبیعی قاب بسته‌ای را با به‌کارگیری تئوری تیر تیموشنکو تعیین و نتایج حاصل را با مقادیر به‌دست آمده از آزمایش مقایسه نمودند. بخشی و آریایی [30] روش ماتریس انتقال را برای تعیین اثر شکستگی روی رفتار ارتعاشی تیرهای تیموشنکوی چندتکه با قیود انعطاف‌پذیر میانی تحت عبور سیستم دو درجه آزادی بسط دادند. در روش ماتریس انتقال به کار برده شده در مراجع [28-30]، شکل مود مربوط به هر تکه از تیر با استفاده از معادلات دیفرانسیلی حاکم بر مسئله به طور تحلیلی تعیین و سپس با استفاده از شرایط پیوستگی، ضرایب آن به ضرایب شکل مود بخش مجاور خود مربوط می‌شود.

در کلیه کارهای گذشته تیرهای دورانی بدون زاویه شکستگی بررسی شده است و یا تیرهای چند تکه ثابت به کمک روش ماتریس انتقال مورد مطالعه قرار گرفته است. در این پژوهش ضمن در نظر گرفتن یک تیر چند تکه در حال دوران، به دلیل عدم کارایی روش ماتریس انتقال برای این نوع تیر به واسطه عبارت مربوط به نیروی مرکزگرا در معادلات حاکم و قابل تعیین نبودن شکل مود تیر به‌طور تحلیلی، از روش انتقال دیفرانسیل جهت تحلیل رفتار ارتعاشی آن استفاده شده است. علاوه بر آن تأثیر ترک نیز به عنوان یک پدیده نامناسب در کاهش سختی و فرکانس مورد بررسی قرار گرفته است. در روش ماتریس انتقال، معادلات تبدیل یافته مربوط به شرایط سازگاری، شرایط مرزی و معادلات ارتعاشی سیستم به‌دست می‌آید و سپس با استفاده از این معادلات، فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای آن تعیین می‌شود. با مقایسه نتایج با مقادیر به‌دست آمده از شبیه‌سازی در نرم‌افزار آباکوس و همچنین روش ماتریس انتقال در حالت خاصی که تیر ثابت است، تطابق خوبی بین نتایج مشاهده می‌شود که نشان‌دهنده دقت بالای روش ماتریس انتقال برای تحلیل ارتعاشات آزاد این نوع سیستم است. از کاربردهای دیگر مسئله مورد مطالعه در این مقاله می‌توان به تقریب زدن تیرهای منحنی‌شکل دورانی اشاره کرد که در تجهیزات دوار نظیر پمپ‌های سانتریفیوژ و... دارای کاربرد فراوانی است.

2- معادلات حرکت

2-1- معادلات حاکم بر تیر تیموشنکوی چندتکه دورانی و دارای ترک

یک تیر چند تکه در حال دوران در نظر گرفته می‌شود. همانطور که شکل 1 نشان می‌دهد، این تیر به یک توپی به شعاع R متصل است که با سرعت



شکل 1 تیر چند تکه دورانی به همراه ترک

زاویه‌ای Ω حول محور ثابت می‌چرخد. این تیر دارای n زاویه‌ی شکستگی $\theta_1, \theta_2 \dots \theta_n$ و m ترک است. کل سیستم به $n+m+1$ قسمت در موقعیت هر زاویه و هر ترک تقسیم شده است. ترک با یک المان فنری پیچشی به سختی k_θ و یک المان فنری خطی به سختی k_t مدل می‌شود و فرض می‌گردد وجود ترک تغییری در توزیع جرم به وجود نمی‌آورد.

برای تحلیل ارتعاشات این سیستم از تئوری تیر تیموشنکو استفاده می‌شود. هر تکه تیر با حرکات طولی و عرضی خود تحلیل می‌شود که در آن دامنه ارتعاشی حرکات طولی و عرضی تکه iام به ترتیب با $u_i(x,t)$ و $w_i(x,t)$ در محدوده $x_{i-1} < x < x_i$ نشان داده می‌شود (شکل 2) که اندیس i نشان دهنده تکه iام و $i = 1,2,\dots,n+m+1$ است. طول کل این سیستم $L = (L_1 + L_2 + \dots + L_{n+m+1})$ است. x موقعیت هر نقطه‌ی تیر نسبت به مرکز توپی و در راستای تیر است.

نیروی مرکزگرا در هرتکه در دو راستا تجزیه می‌شود که یکی در راستای عمود برتکه و دیگری هم‌راستا با آن است. می‌توان نشان داد نیروی مرکزگرا در هر تکه با استفاده از رابطه (1) محاسبه می‌شود:

$$T_i(x) = \int_{x-\sum_{k=1}^{i-1} L_k}^{L_i} \rho A \Omega^2 \left[R + u\cos\alpha_i + \sum_{k=1}^{i-1} L_k \cos\alpha_k \right] du + \sum_{j=i}^{n+m} \int_0^{L_{j+1}} \rho A \Omega^2 \left[R + u\cos\alpha_{j+1} + \sum_{k=1}^{j} L_k \cos\alpha_k \right] du \quad , \quad i = 1,2,\dots,n+m+1 \tag{1}$$

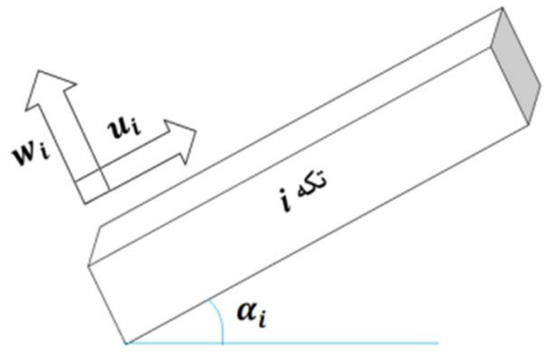
در رابطه (1)، T_i نیروی مرکزگرا در تکه‌ی iام است. همچنین α_i زاویه تکه iام نسبت به افق و در جهت پادساعتگرد و θ_i زاویه تکه $i+1$ نسبت به تکه i و در جهت ساعتگرد است. همچنین A و I به ترتیب سطح مقطع و گشتاور دوم سطح، E مدول یانگ، ρ چگالی ماده و G مدول برشی است که ثابت فرض می‌شوند. معادلات ارتعاشی عرضی و طولی حاکم بر تئوری تیر تیموشنکو به‌صورت معادلات (4-2) می‌باشند [31]:

$$\rho A \frac{\partial^2 w_i(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(T_{ai}(x) \frac{\partial w_i(x,t)}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(k'GA \left(\frac{\partial w_i(x,t)}{\partial x} - \varphi_i(x,t) \right) \right) = \frac{T_{ni}(x)}{L} \quad i = 1,2,\dots,n+m+1 \tag{2}$$

$$\rho I \frac{\partial^2 \varphi_i(x,t)}{\partial t^2} - \rho I \Omega^2 \varphi_i - GAk' \left(\frac{\partial w_i(x,t)}{\partial x} - \varphi_i(x,t) \right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(EI \frac{\partial \varphi_i(x,t)}{\partial x} \right) = 0 \ , \ i = 1,2,\dots,n+m+1 \tag{3}$$

$$EA \frac{\partial^2 u_i(x,t)}{\partial x^2} - \rho A \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = -\frac{T_{ai}(x)}{L} \ , \ i = 1,2,\dots,n+m+1 \tag{4}$$

که $x_{i-1} < x < x_i$، $L(= L_1 + L_2 + \dots + L_{n+m+1})$ طول کل، w_i،



شکل 2 راستای حرکت طولی و عرضی هرتکه

جابجایی عرضی، u_i جابجایی طولی، φ_i زاویه‌ی چرخش مقطع المان نسبت به تار خنثی، k' ضریب تصحیح برش، T_a نیروی مرکزگرای تجزیه شده هم-راستا با تکه و T_n نیروی مرکزگرای تجزیه شده در راستای عمود بر آن است.

تیر شکل 1 دارای شش شرط مرزی در ابتدا وانتها به‌صورت معادلات (8-5) است:

$$w_1(0,t) = \varphi_1(0,t) = u_1(0,t) = 0 \tag{5}$$

$$\varphi_{n+m+1}(L,t) = 0 \tag{6}$$

$$w'_{n+m+1}(L,t) - \varphi_{n+m+1}(L,t) = 0 \tag{7}$$

$$u'_{n+m+1}(L,t) = 0 \tag{8}$$

با توجه به شرایط سازگاری در میدان جابجایی طولی، جابجایی عرضی، شیب، ممان خمشی، نیروی برشی و نیروی محوری، شرایط پیوستگی در هر شکستگی (شکل 3 الف) بصورت معادلات (14-9) است [28]:

$$w_{i+1}(x_i^+,t) = -w_i(x_i^-,t)\cos(\theta_i) + u_i(x_i^-,t)\sin(\theta_i) \tag{9}$$

$$u_{i+1}(x_i^+,t) = -w_i(x_i^-,t)\sin(\theta_i) + u_i(x_i^-,t)\cos(\theta_i) \tag{10}$$

$$w'_{i+1}(x_i^+,t) = w'_i(x_i^-,t) \tag{11}$$

$$EI\varphi'_{i+1}(x_i^+,t) = EI\varphi'_i(x_i^-,t) \tag{12}$$

$$-kGA[w'_{i+1}(x_i^+,t) - \varphi_{i+1}(x_i^+,t)] = kGA[w'_i(x_i^-,t) - \varphi_i(x_i^-,t)]\cos(\theta_i) - EAu'_i(x_i^-,t)\sin(\theta_i) \tag{13}$$

$$EAu'_{i+1}(x_i^+,t) = -kGA[w'_i(x_i^-,t) - \varphi_i(x_i^-,t)]\sin(\theta_i) - EAu'_i(x_i^-,t)\cos(\theta_i) \tag{14}$$

که در آن‌ها x_i^- و x_i^+ بیان کننده نقطه‌ی قبل و بعد از شکستگی هستند.

به همین ترتیب شرایط پیوستگی در محل ترک (شکل 3 ب) به‌صورت معادلات (20-15) خواهد بود [32]:

$$EI\varphi'_{i+1}(x_c^+,t) = EI\varphi'_i(x_c^-,t) \tag{15}$$

$$[w'_{i+1}(x_c^+,t) - \varphi_{i+1}(x_c^+,t)] = [w'_i(x_c^-,t) - \varphi_i(x_c^-,t)] \tag{16}$$

$$[w_{i+1}(x_c^+,t) - w_i(x_c^-,t)] = \frac{1}{Lk_{ti}} k'AG[w'_{i+1}(x_c^+,t) - \varphi_{i+1}(x_c^+,t)] \tag{17}$$

$$\varphi_{i+1}(x_c^+,t) - \varphi_i(x_c^-,t) = \frac{1}{Lk_{\theta i}} EAG[\varphi'_{i+1}(x_c^+,t)] \tag{18}$$

$$u_{i+1}(x_c^+,t) = u_i(x_c^-,t) \tag{19}$$

$$u'_{i+1}(x_c^+,t) = u'_i(x_c^-,t) \tag{20}$$

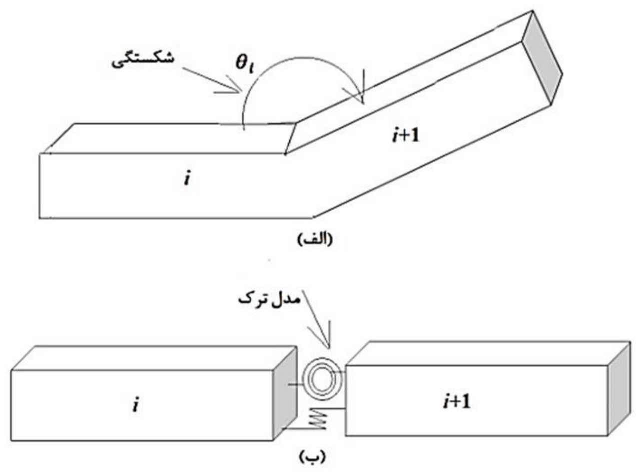
که در آن‌ها x_c^- و x_c^+ بیان کننده نقطه قبل و بعد از ترک x_c بوده و k_{ti} و $k_{\theta i}$ با معادلات (21) و (22) تعریف می‌شوند [32]:

$$k_{ti} = \frac{1}{C_v} \frac{EA}{h} \tag{21}$$

$$k_{\theta i} = \frac{1}{C_\theta} \frac{EI}{h} \tag{22}$$

که C_v و C_θ تابع شکل هندسی تیر و توابعی وابسته به مقدار $\gamma = \frac{a_c}{h}$ هستند که در آن a_c عمق ترک و h ضخامت تیر است. برای سطح مقطع مستطیلی C_v و C_θ به‌صورت معادلات (23) و (24) بیان می‌شوند [32]:

$$C_v = \left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)^2(-0.22 + 3.82\gamma + 1.54\gamma^2 - 14.64\gamma^3 + 9.6\gamma^4) \tag{23}$$



شکل 3 (الف) شکستگی (ب) مدل ترک

$$C_\theta = 2(\frac{\gamma}{1-\gamma})^2(5.93 - 19.69\,\gamma + 37.14\,\gamma^2 - 35.84\,\gamma^3 + 13.12\,\gamma^4) \quad (24)$$

2-2- بی‌بعد سازی پارامترها

اینک برای بی‌بعد سازی معادلات، پارامترهای بی‌بعد شده‌ای مطابق رابطه‌ی (25) تعریف می‌شوند:

$$\zeta = \frac{x}{L},\quad \delta = \frac{R}{L},\quad \eta^2 = \frac{\rho A\Omega^2 L^4}{EI},\quad \mu^2 = \frac{\rho A\omega^2 L^4}{EI},$$
$$s^2 = \frac{EI}{k'AGL^2},\quad r^2 = \frac{I}{AL^2},\quad l_i = \frac{L_i}{L},$$
$$(L = L_1 + L_2 + \cdots + L_{n+m+1}) \quad (25)$$

که در این رابطه ζ موقعیت بی‌بعد هر نقطه‌ی تیر، δ شعاع بی‌بعد توپی تیر، μ فرکانس طبیعی بی‌بعد، η سرعت زاویه‌ای بی‌بعد، L طول کل تیر و l_i طول بی‌بعد هرتکه‌ی تیر است. دو پارامتر تعریف‌شده‌ی بی‌بعد s و r به ترتیب مربوط به تغییر شکل برشی و اینرسی دورانی تیر هستند.

معادلات (2-4) به فرم بی بعدشده به صورت روابط (26-28) خواهند بود:

$$\eta^2\frac{d^2W_i}{d\zeta^2}Ta_i(\zeta) + \mu^2 W_i + \eta^2\frac{dW_i}{d\zeta}\frac{dTa_i(\zeta)}{d\zeta} + \frac{1}{s^2}\left(\frac{d^2W_i}{d\zeta^2} - \frac{d\theta_i}{d\zeta}\right) = \eta^2 Tn_i(\zeta) \quad (26)$$

$$(\mu^2 + \eta^2)\theta_i + \frac{1}{r^2}\frac{d^2\theta_i}{d\zeta^2} + \frac{1}{s^2 r^2}\left(\frac{dW_i}{d\zeta} - \theta_i\right) = 0 \quad (27)$$

$$\mu^2 U_i + \frac{1}{r^2}\frac{d^2U_i}{d\zeta^2} = -\eta^2 Ta_i(\zeta) \quad ,i = 1,2,\ldots,n+m+1 \quad (28)$$

با استفاده از پارامترهای بی‌بعد شده رابطه‌ی (25)، شرایط مرزی به‌صورت معادلات (29-32) در می‌آیند:

$$w_1(0,t) = \varphi_1(0,t) = u_1(0,t) = 0 \quad (29)$$
$$\varphi_{n+m+1}(1,t) = 0 \quad (30)$$
$$w'_{n+m+1}(1,t) - \varphi_{n+m+1}(1,t) = 0 \quad (31)$$
$$u'_{n+m+1}(1,t) = 0 \quad (32)$$

همچنین شرایط پیوستگی بی‌بعد شده برای شکستگی به‌صورت معادلات (33-38) خواهند بود:

$$w_{i+1}(\zeta_i^+,t) = -w_i(\zeta_i^-,t)\cos(\theta_i) + u_i(\zeta_i^-,t)\sin(\theta_i) \quad (33)$$
$$u_{i+1}(x_i^+,t) = -w_i(\zeta_i^-,t)\sin(\theta_i) + u_i(\zeta_i^-,t)\cos(\theta_i) \quad (34)$$
$$w'_{i+1}(\zeta_i^+,t) = w'_i(\zeta_i^-,t) \quad (35)$$
$$\varphi'_{i+1}(\zeta_i^+,t) = \varphi'_i(\zeta_i^-,t) \quad (36)$$
$$-\frac{1}{s^2}[w'_{i+1}(\xi_i^+,t) - \varphi_{i+1}(\xi_i^+,t)] = \frac{1}{s^2}[w'_i(\xi_i^-,t) - \varphi_i(\xi_i^-,t)]\sin(\theta_i) - r^2\,u'_i(\xi_i^-,t)\sin(\theta_i) \quad (37)$$
$$r^2 u'_{i+1}(\xi_i^+,t) = -\frac{1}{s^2}[w'_i(\xi_i^-,t) - \varphi_i(\xi_i^-,t)]\sin(\theta_i) - r^2 u'_i(\xi_i^-,t)\cos(\theta_i) \quad (38)$$

که در آن ζ_i^- و ζ_i^+ بیان کننده نقطه قبل و بعد از شکستگی ζ_i هستند که ζ_i مطابق رابطه‌ی (39) تعریف می‌شود:

$$\zeta_i = \frac{x_i}{L} \quad (39)$$

شرایط پیوستگی بی‌بعد شده در محل ترک بصورت معادلات (40-45) خواهد بود:

$$\varphi'_{i+1}(\zeta_c^+,t) = \varphi'_i(\zeta_c^-,t) \quad (40)$$
$$[w'_{i+1}(\zeta_c^+,t) - \varphi_{i+1}(\zeta_c^+,t)] = [w'_i(\zeta_c^-,t) - \varphi_i(\zeta_c^-,t)] \quad (41)$$
$$[w_{i+1}(\zeta_c^+,t) - w_i(\zeta_c^-,t)] = \frac{1}{Lk_{ti}}k'AG[w'_{i+1}(\zeta_c^+,t) - \varphi_{i+1}(\zeta_c^+,t)] \quad (42)$$
$$\varphi_{i+1}(\zeta_c^+,t) - \varphi_i(\zeta_c^-,t) = \frac{1}{Lk_{\theta i}}EAG[\varphi'_{i+1}(\zeta_c^+,t)] \quad (43)$$
$$u_{i+1}(\zeta_c^+,t) = u_i(\zeta_c^-,t) \quad (44)$$
$$u'_{i+1}(\zeta_c^+,t) = u'_i(\zeta_c^-,t) \quad (45)$$

که در آن ζ_c^- و ζ_c^+ بیان کننده نقطه قبل و بعد از ترک ζ_c هستند که ζ_c مطابق رابطه‌ی (46) تعریف می‌شود:

$$\zeta_c = \frac{x_c}{L} \quad (46)$$

3-2- روش انتقال دیفرانسیل

یک تابع $f(x)$ که در یک ناحیه دلخواه تعریف شده است در نظر گرفته می‌شود که در آن نقطه $x = x_0$ می‌تواند معرف هر نقطه در آن ناحیه باشد. هدف تعریف تابع $f(x)$ با سری‌های توانی حول نقطه x_0 است. انتقال دیفرانسیل تابع $f(x)$ به صورت معادله (47) است:

$$F[k] = \frac{1}{k!}(\frac{d^k f(x)}{dx^k})_{x=x_0} \quad (47)$$

که در آن تابع $f(x)$ تابع اصلی و $F[k]$ تابع انتقال است. تابع انتقال معکوس به صورت معادله (48) بیان می‌شود:

$$f(x) = \sum_{t=0}^{\infty}(x - x_0)^k F[k] \quad (48)$$

با جایگذاری معادله (47) در معادله (48) می‌توان دریافت که مفهوم انتقال دیفرانسیل از بسط سری تیلور استخراج می‌شود. در کاربردهای واقعی، تابع $f(x)$ در معادله (48) با تعداد جملات محدود بیان می‌شود و این معادله را می‌توان به‌صورت معادله (49) بازنویسی کرد:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{q}\frac{(x-x_0)^k}{k!}(\frac{d^k f(x)}{dx^k})_{x=x_0} \quad (49)$$

در رابطه (49)، q به همگرایی فرکانس‌های طبیعی بستگی دارد. قوانین حاکم بر روش انتقال دیفرانسیل و شرایط مرزی که در این تحقیق از آن‌ها استفاده می‌شود به‌ترتیب در جدول‌های 1 و 2 معرفی شده‌اند.

اینک با به‌کارگیری روش انتقال دیفرانسیل در معادلات (26-28)، این معادلات به ازای $x_0 = 0$ به شکل معادلات (50-52) در می‌آید:

$$\{\eta^2[(\delta + l_1\cos\alpha_1 + \cdots + l_{i-1}\cos\alpha_{i-1}) \times (l_1 + \cdots + l_i) + \frac{(l_i{}^2 - (l_1 + \cdots + l_{i-1})^2)\cos\alpha_i}{2} + c_i] \times \cos\alpha_i + \frac{1}{s^2}\}$$
$$(k+1)(k+2)W_i[k+2] - \eta^2((\delta + l_1\cos\alpha_1 + \cdots + l_{i-1}\cos\alpha_{i-1}) - (l_1 + \cdots + l_{i-1})\cos\alpha_i)\cos\alpha_i(k+1)^2 W_i[k+1]$$
$$+ \left[\mu^2 - \frac{\eta^2(\cos\alpha_i)^2 k(k+1)}{2}\right]W_i[k] - \frac{1}{s^2}(k+1)\theta_i[k+1]$$
$$= \eta^2\{(\delta + l_1\cos\alpha_1 + \cdots + l_{i-1}\cos\alpha_{i-1}) \times (l_1 + \cdots + l_i - \delta(k-1))$$
$$+ \frac{l_i{}^2 - (\delta(k-2) - 2\delta(k-1)(l_1 + \cdots + l_{i-1}) + (l_1 + \cdots + l_{i-1})^2)}{2}$$
$$\cos\alpha_i + c_i\} \times \sin\alpha_i \quad (50)$$

جدول1 قوانین حاکم بر روش انتقال معادلات دیفرانسیل

تابع اصلی	تابع انتقال
$f(x) = g(x) \pm h(x)$	$F[k] = G[k] \pm H[k]$
$f(x) = \mu g(x)$	$F[k] = \mu\, G[k]$
$f(x) = g(x)h(x)$	$F[k] = \sum_{k=0}^{\infty} G[k-l]H[l]$
$f(x) = \frac{d^n g(x)}{dx^n}$	$F[k] = \frac{(k+n)!}{k!} G[k+n]$
$f(x) = x^n$	$F[k] = \delta(k-n) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } k \neq n \\ 0 & \text{اگر } k = n \end{cases}$

جدول2 قوانین انتقال دیفرانسیل در شرایط مرزی

شرط مرزی اصلی	شرط مرزی انتقال
$f(0) = 0$	$F[0] = 0$
$\frac{df}{dx}(0) = 0$	$F[1] = 0$
$\frac{d^2 f}{dx^2}(0) = 0$	$F[2] = 0$
$\frac{d^3 f}{dx^3}(0) = 0$	$F[3] = 0$
$f(1) = 0$	$\sum_{k=0}^{\infty} F(k) = 0$
$\frac{df}{dx}(1) = 0$	$\sum_{k=0}^{\infty} kF(k) = 0$
$\frac{d^2 f}{dx^2}(1) = 0$	$\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)F(k) = 0$
$\frac{d^3 f}{dx^3}(1) = 0$	$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)(k-2)F(k) = 0$

$$\frac{1}{r^2}(k+1)(k+2)\theta_i[k+2] + \left(\mu^2 + \eta^2 - \frac{1}{s^2 r^2}\right)\theta_i[k] + \frac{1}{s^2 r^2}(k+1)W_i[k+1] = 0 \quad (51)$$

$$\frac{1}{r^2}(k+1)(k+2)U_i[k+2] + \mu^2 U_i[k] \eta^2\{(\delta + l_1\cos\alpha_1 + \cdots + l_{i-1}\cos\alpha_{i-1}) \times \left(l_1 + \cdots + l_i - \delta(k-1)\right) + \frac{{l_i}^2 - (\delta(k-2) - 2\delta(k-1)(l_1 + \cdots + l_{i-1}) + (l_1 + \cdots + l_{i-1})^2)}{2}\cos\alpha_i + c_i\} \times \cos\alpha_i = 0 \quad (52)$$

در روابط (50-52)، c_i ها از رابطه‌ی (53) به‌دست می‌آیند:

$$c_i = \sum_{k=i}^{n+m}\left(\delta l_{k+1} + \frac{{l_{k+1}}^2\cos\alpha_{k+1}}{2} + \sum_{j=1}^{k} l_j l_{k+1}\cos\alpha_j\right) \quad (53)$$

با اعمال روش انتقال دیفرانسیل در شرایط مرزی (30-32) و در نظر گرفتن $x_0 = 0$ شرایط مرزی به صورت معادلات (54-56) در می‌آیند:

$$\sum_{k=0}^{\infty} k\phi_{n+m+1}[k] = 0 \quad (54)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(kW_{n+m+1}[k] - \phi_{n+m+1}[k]) = 0 \quad (55)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} kU_{n+m+1}[k] = 0 \quad (56)$$

به همین ترتیب شش شرط پیوستگی در محل شکستگی بین تکه‌ی iام و i+1ام بصورت معادلات (57-62) خواهند بود:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\zeta_i)^k W_{i+1}[k] = -\sum_{k=0}^{\infty}(\zeta_i)^k W_i[k]\cos(\theta_i) + \sum_{k=0}^{\infty}(\zeta_i)^k U_i[k]\sin(\theta_i) \quad (57)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\zeta_i)^k U_{i+1}[k] = -\sum_{k=0}^{\infty}(\zeta_i)^k W_i[k]\sin(\theta_i) - \sum_{k=0}^{\infty}(\zeta_i)^k U_i[k]\cos(\theta_i) \quad (58)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\zeta_i)^{k-1} k(W_{i+1}[k] - W_i[k]) = 0 \quad (59)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\zeta_i)^{k-1} k(\phi_{i+1}[k] - \phi_i[k]) = 0 \quad (60)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\zeta_i)^{k-1} kW_{i+1}[k] - \sum_{k=0}^{\infty}(\zeta_i)^k \phi_{i+1}[k] = -\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\zeta_i)^{k-1} kW_i[k] - \sum_{k=0}^{\infty}(\zeta_i)^k \phi_i[k]\right)\cos(\theta_i) + \frac{E}{k'G}\sum_{k=1}^{\infty}(\zeta_i)^{k-1} kU_i[k]\sin(\theta_i) \quad (61)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\zeta_i)^{k-1} kU_{i+1}[k] = -\frac{k'G}{E}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\zeta_i)^{k-1} kW_i[k] - \sum_{k=0}^{\infty}(\zeta_i)^k \phi_i[k]\right)\sin(\theta_i) - \sum_{k=1}^{\infty}(\zeta_i)^{k-1} kU_i[k]\cos(\theta_i) \quad (62)$$

شش شرط پیوستگی در محل ترک نیز به‌صورت معادلات (63-68) خواهند بود:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\zeta_c)^{k-1} k(\phi_{i+1}[k] - \phi_i[k]) = 0 \quad (63)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\zeta_c)^{k-1} k(W_{i+1}[k] - W_i[k]) = \sum_{k=0}^{\infty}(\zeta_c)^k(\phi_{i+1}[k] - \phi_i[k]) \quad (64)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\zeta_c)^k(W_{i+1}[k] - W_i[k]) = \lambda\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\zeta_c)^{k-1} kW_{i+1}[k] - \sum_{k=0}^{\infty}(\zeta_c)^k \phi_{i+1}[k]\right) \quad (65)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\zeta_c)^k(\phi_{i+1}[k] - \phi_i[k]) = \psi\sum_{k=1}^{\infty}(\zeta_c)^{k-1} k\phi_{i+1}[k] \quad (66)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\zeta_c)^{k-1} k(U_{i+1}[k] - U_i[k]) = 0 \quad (67)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\zeta_c)^k(U_{i+1}[k] - U_i[k]) = 0 \quad (68)$$

که در آن $W_i[k]$، $U_i[k]$، $\phi_i[k]$ به ترتیب تبدیل یافته $w_i(\zeta)$، $u_i(\zeta)$، و $\varphi_i(\zeta)$ و $i = 1,2,\ldots,n+m+1$ هستند. همچنین در روابط بالا ψ و λ با معادلات (69) و (70) بیان می‌شوند:

$$\psi = \frac{1}{k_{ti}}k'AG \quad (69)$$

$$\lambda = \frac{1}{k_{\theta i}}EI \quad (70)$$

با توجه به شرایط مرزی (29) می‌توان به رابطه‌ی (71) رسید:

$$W_1[0] = \phi_1[0] = U_1[0] = 0 \quad (71)$$

از طرفی روابط (72-80) فرض می‌شوند:

$$\boldsymbol{W_1[1] = C_{31}} \quad (72)$$

$$\boldsymbol{\phi_1[1] = C_{41}} \quad (73)$$

$$\boldsymbol{U_1[1] = C_{51}} \quad (74)$$

$$\boldsymbol{W_i[0] = C_{0i}} \quad (75)$$

$$\boldsymbol{\phi_i[0] = C_{1i}} \quad (76)$$

$$\boldsymbol{U_i[0] = C_{2i}} \quad (77)$$

$$\boldsymbol{W_i[1] = C_{3i}} \quad (78)$$

$$\phi_i[1]=C_{4i} \tag{79}$$

$$U_i[1]=C_{5i} \qquad ,i=2,3,\dots m+n+1 \tag{80}$$

با جایگذاری این روابط در معادلات (54-68) برای مقادیر مختلف k، برای یک تیر با $n+m+1$ تکه، یک دستگاه معادله با $6(n+m)+3$ معادله و $6(n+m)+3$ مجهول به‌دست می‌آید. در اینجا یک ماتریس $(6(n+m)+3)\times(6(n+m)+3)$ از ضرایب مجهول C_{31}، C_{41}، C_{51}، C_{0i}، C_{1i}، C_{2i}، C_{3i}، C_{4i} و C_{5i} وجود دارد که با صفر قرار دادن دترمینان آن یک معادله بر حسب η، δ و μ (فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد) به‌دست می‌آید. حال می‌توان برای مقادیر مختلف η و δ، فرکانس‌های بی‌بعد را محاسبه کرد.

3- نتایج عددی

در این قسمت ابتدا یک تیر دوتکه دورانی بدون ترک و سپس یک تیر دورانی ترک‌دار مورد بررسی قرار می‌گیرد. در تیر اول تأثیر سرعت‌های مختلف دوران و زوایای شکستگی مختلف و در تیر دوم تأثیر موقعیت ترک مورد بررسی قرار می‌گیرد. به منظور مقایسه نتایج، برنامه‌ای نیز با کاربرد روش ماتریس انتقال در نرم‌افزار متلب نوشته شده و برای تیر بدون دوران مورد استفاده قرار گرفته است.

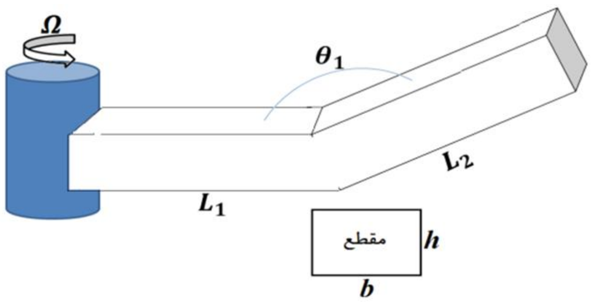
3-1- تیر دوتکه دورانی بدون ترک

شکل 4 نمایی شماتیک از یک تیر دوتکه دورانی بدون ترک را نشان می‌دهد. پارامترهای هندسی و فیزیکی این تیر عبارت از L_1 =120 mm، L_2 =120 mm، ضخامت و عمق تیر در طول آن ثابت و به ترتیب برابر h =20 mm و b =12 mm، مدول یانگ E =209 GPa، ضریب پوآسون υ =0/3، ضریب تصحیح برش κ'=0/8، مدول برش G =E/(2×(1+υ)) و چگالی ρ = 7860 kgm^{-3} می‌باشند.

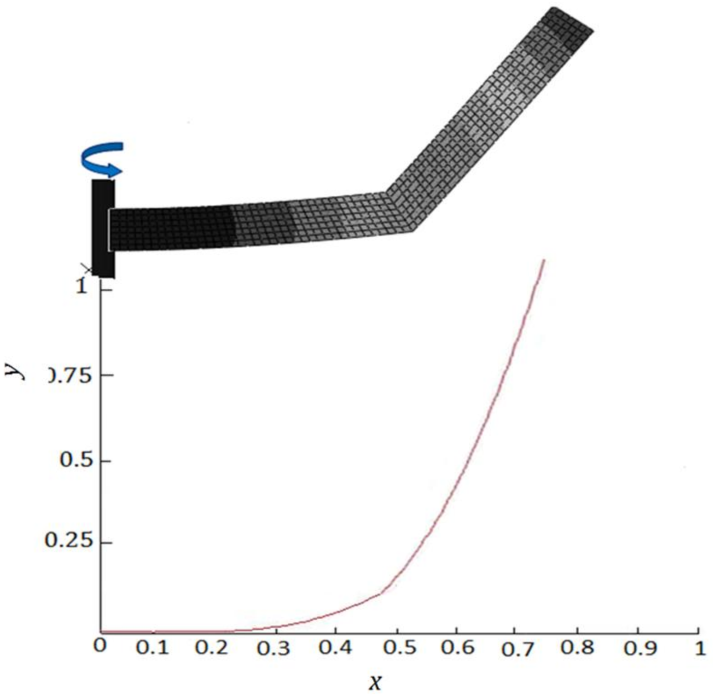
شکل‌های 5 تا 9 شکل مودهای اول تا پنجم را برای θ_1 =135 o و η =3 نشان می‌دهد که با شکل مودهای به‌دست آمده از آباکوس مقایسه و تطابق خوبی مشاهده شده است.

در جدول 3 پنج فرکانس طبیعی اول بی‌بعد برای این تیر برای سرعت‌های زاویه‌ای مختلف و زوایای مختلف نشان داده شده است و با مقادیر به‌دست آمده از نرم‌افزار آباکوس و همچنین روش ماتریس انتقال برای سرعت زاویه‌ای صفر مقایسه شده است. مشاهده می‌شود که با افزایش سرعت دوران، فرکانس‌های طبیعی نیز افزایش می‌یابند. دلیل این مسئله را می‌توان افزایش سختی سیستم با افزایش نیروی کششی مرکزگرا ذکر کرد. اختلاف مشاهده‌شده در این جدول بین نتایج حاصل از روش‌های مختلف کمتر از 0/4 درصد است.

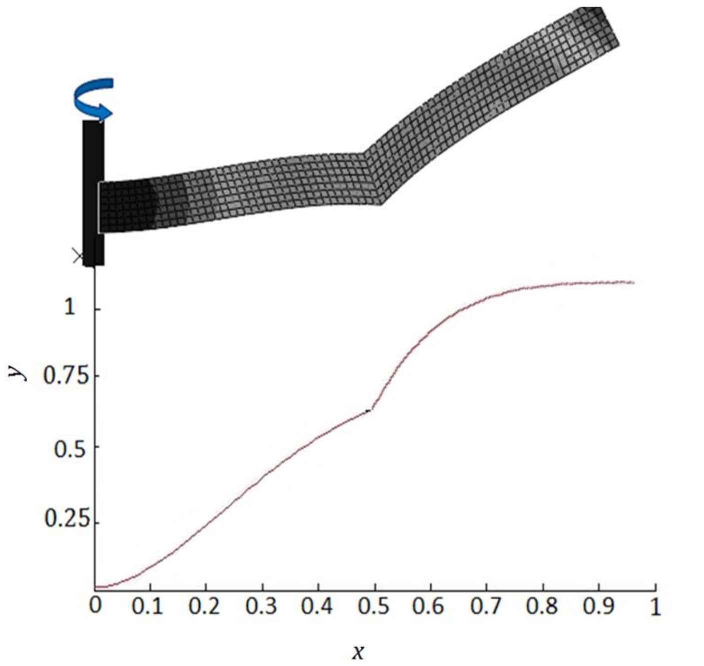
برای داشتن تصویر بهتری از نتایج جدول 3، این نتایج در شکل‌های 10 – 14 رسم شده‌اند. همانطور که در این شکل‌ها مشخص است افزایش سرعت دورانی در یک زاویه ثابت منجر به افزایش فرکانس‌های طبیعی می‌شود، همچنین تغییر زاویه در برخی فرکانس‌ها باعث افزایش و در برخی منجر به کاهش فرکانس می‌شود و بر بعضی فرکانس‌ها تأثیر محسوسی ندارد. برای نمونه مطابق شکل 10 افزایش زاویه بر فرکانس طبیعی اول تقریباً بی‌تأثیراست اما در شکل 11 و شکل 13، افزایش زاویه به ترتیب منجر به افزایش فرکانس دوم و کاهش فرکانس چهارم شده است.



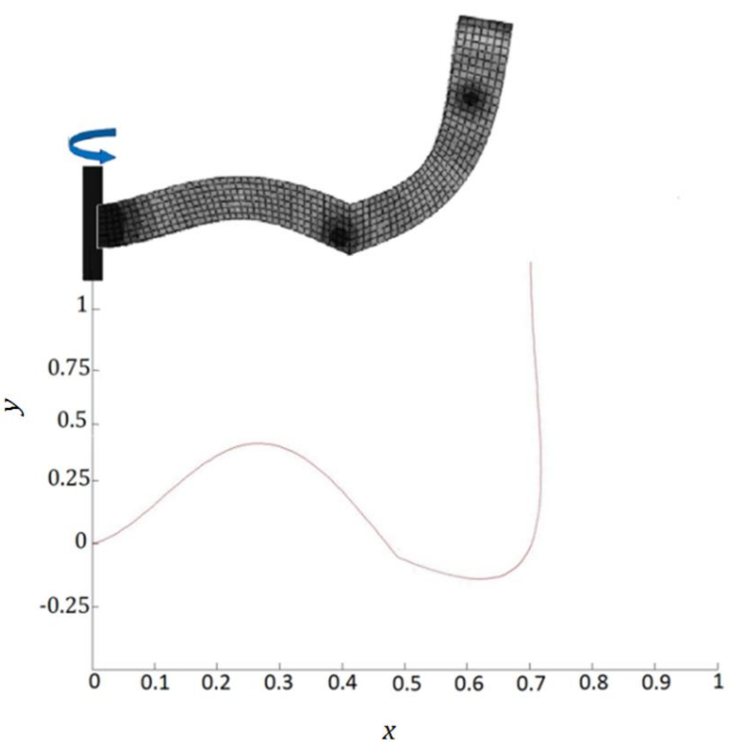
شکل 4 شمای یک تیر دوتکه دوار



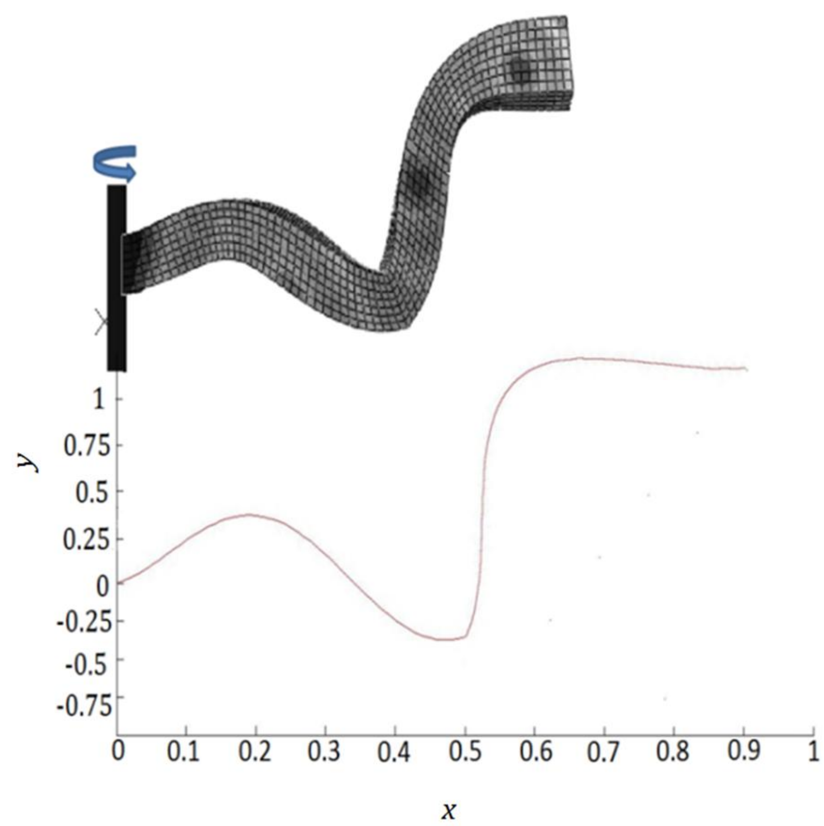
شکل 5 شکل مود اول به‌دست آمده از روش انتقال دیفرانسیل و آباکوس



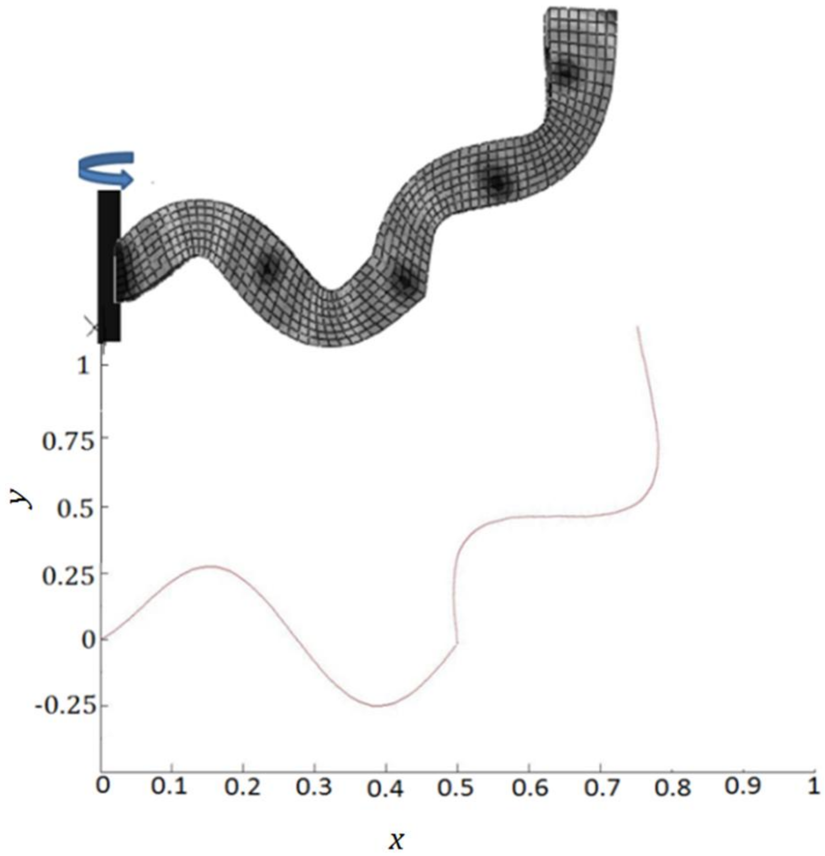
شکل 6 شکل مود دوم به‌دست آمده از روش انتقال دیفرانسیل و آباکوس



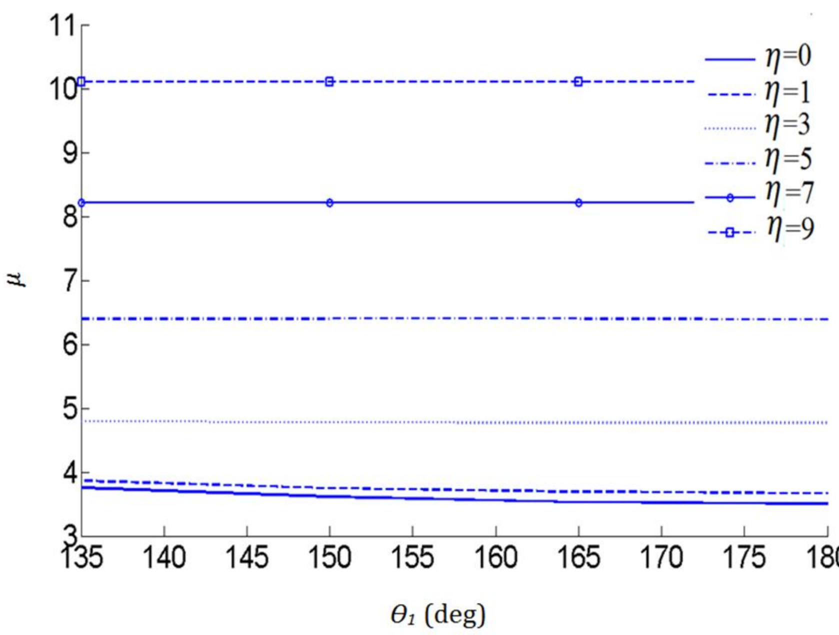
شکل 7 شکل مود سوم به‌دست آمده از روش انتقال دیفرانسیل و آباکوس



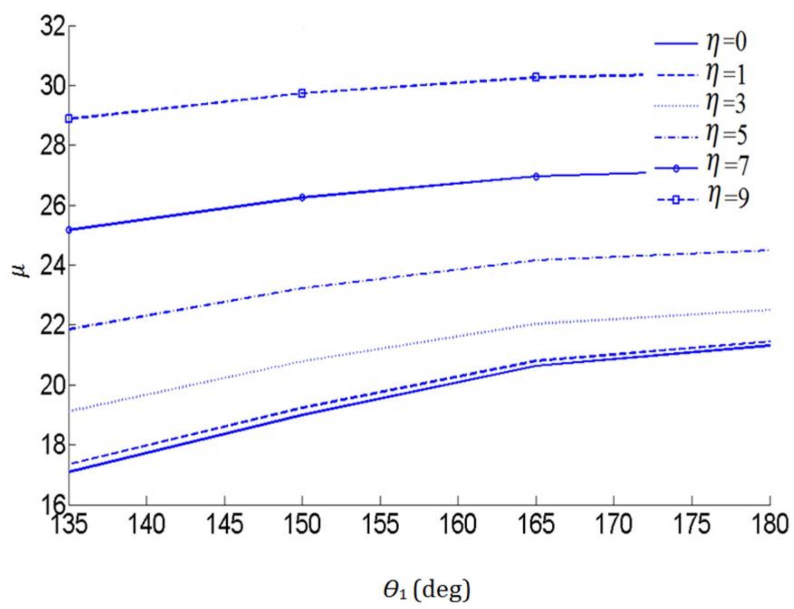
شکل 8 شکل مود چهارم به‌دست آمده از روش انتقال دیفرانسیل و آباکوس



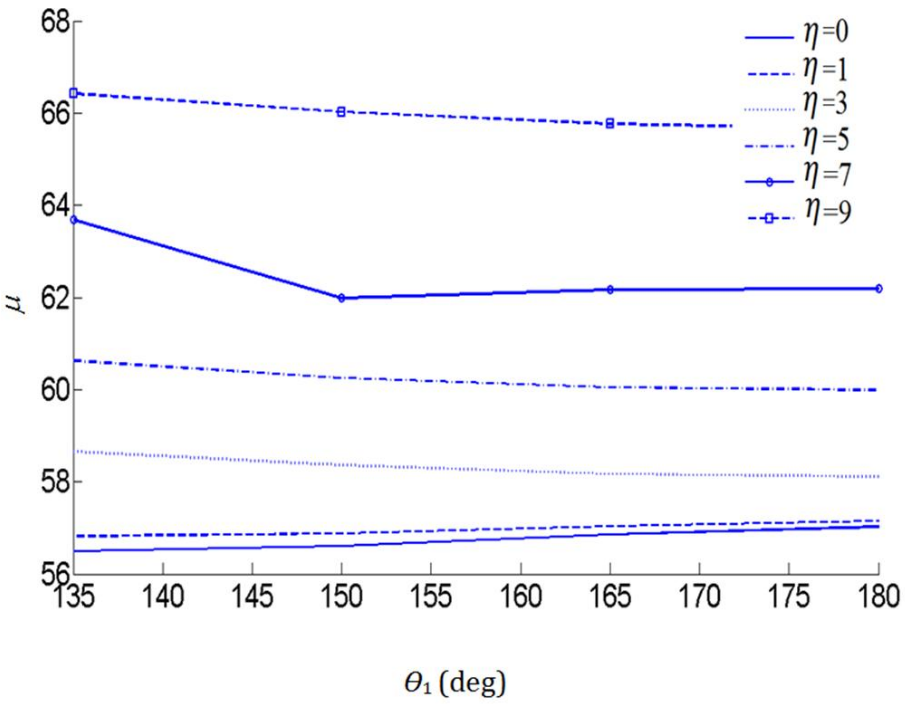
شکل 9 شکل مود پنجم به‌دست آمده از روش انتقال دیفرانسیل و آباکوس



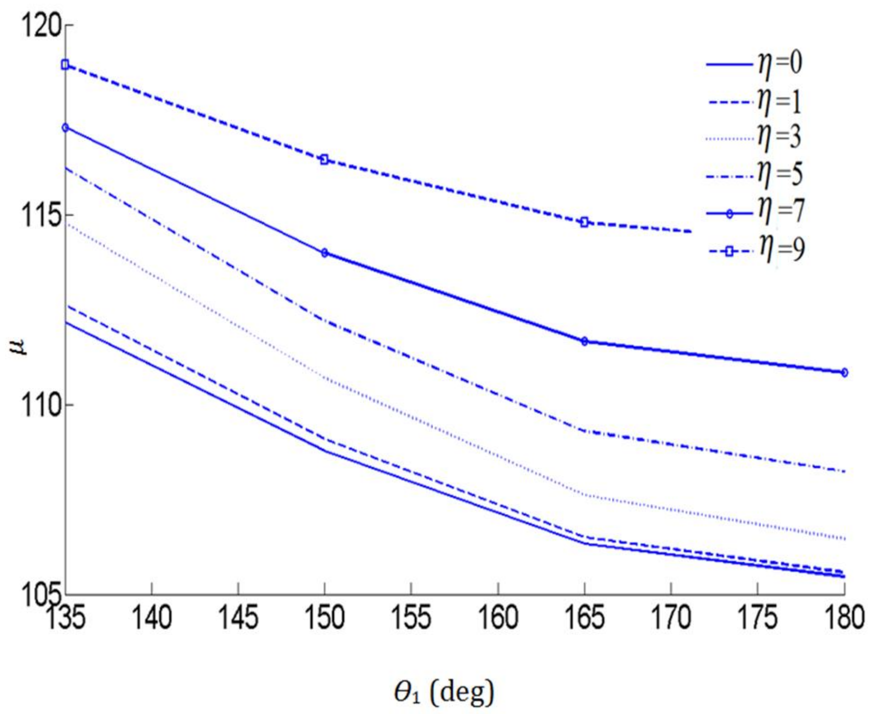
شکل 10 فرکانس طبیعی بی‌بعد اول برای سرعت‌های دورانی بی‌بعد و زاویه‌های شکستگی مختلف



شکل 11 فرکانس طبیعی بی‌بعد دوم برای سرعت‌های دورانی بی‌بعد و زاویه‌های شکستگی مختلف



شکل 12 فرکانس طبیعی بی‌بعد سوم برای سرعت‌های دورانی بی‌بعد و زاویه‌های شکستگی مختلف



شکل 13 فرکانس طبیعی بی‌بعد چهارم برای سرعت‌های دورانی بی‌بعد و زاویه‌های شکستگی مختلف

جدول 3 پنج فرکانس طبیعی بی‌بعد اول برای سرعت‌های زاویه‌ای و زاویه‌های شکستگی مختلف

η	θ°	روش	فرکانس طبیعی بی‌بعد اول	دوم	سوم	چهارم	پنجم
0	135	انتقال دیفرانسیل	3/79	17/05	56/43	112/19	161/23
		آباکوس	3/76	17/09	56/49	112/17	161/25
		ماتریس انتقال	3/78	17/13	56/44	112/21	161/22
	150	انتقال دیفرانسیل	3/59	17/91	56/57	108/69	161/57
		آباکوس	3/61	17/99	56/61	108/77	161/56
		ماتریس انتقال	3/65	17/93	56/59	108/71	161/59
	165	انتقال دیفرانسیل	3/54	20/58	56/81	106/41	161/87
		آباکوس	3/53	20/63	56/86	106/33	161/89
		ماتریس انتقال	3/57	20/59	56/79	106/39	161/86
	180	انتقال دیفرانسیل	3/51	21/27	56/99	105/39	162/02
		آباکوس	3/51	21/31	57/03	105/46	162/02
		ماتریس انتقال	3/52	21/33	57/05	105/41	162/03
1	135	انتقال دیفرانسیل	3/81	17/44	56/79	112/63	161/35
		آباکوس	3/86	17/35	56/82	112/61	161/36
	150	انتقال دیفرانسیل	3/69	19/21	56/79	109/12	161/67
		آباکوس	3/75	19/23	56/88	109/09	161/66
	165	انتقال دیفرانسیل	3/63	20/71	57/14	106/54	161/97
		آباکوس	3/69	20/80	57/04	106/50	161/99
	180	انتقال دیفرانسیل	3/66	21/39	57/11	105/52	162/13
		آباکوس	3/67	21/44	57/15	105/57	162/12
3	135	انتقال دیفرانسیل	4/77	19/20	58/70	114/69	162/23
		آباکوس	4/79	19/11	58/65	114/78	162/22
	150	انتقال دیفرانسیل	4/72	20/72	58/40	110/59	162/47
		آباکوس	4/78	20/79	58/36	110/69	162/49
	165	انتقال دیفرانسیل	4/71	22/10	58/14	107/63	162/83
		آباکوس	4/77	22/04	58/17	107/61	162/81
	180	انتقال دیفرانسیل	4/77	22/53	58/16	106/37	162/93
		آباکوس	4/77	22/50	58/11	106/46	162/93
5	135	انتقال دیفرانسیل	6/43	21/80	60/55	116/28	163/95
		آباکوس	6/39	21/86	60/62	116/22	163/97
	150	انتقال دیفرانسیل	6/41	23/15	60/21	112/21	164/23
		آباکوس	6/39	23/22	60/25	112/19	164/20
	165	انتقال دیفرانسیل	6/47	24/04	60/12	109/25	164/49
		آباکوس	6/39	24/16	60/05	109/29	164/46
	180	انتقال دیفرانسیل	6/42	24/43	59/91	108/34	164/56
		آباکوس	6/39	24/49	59/99	108/23	164/56

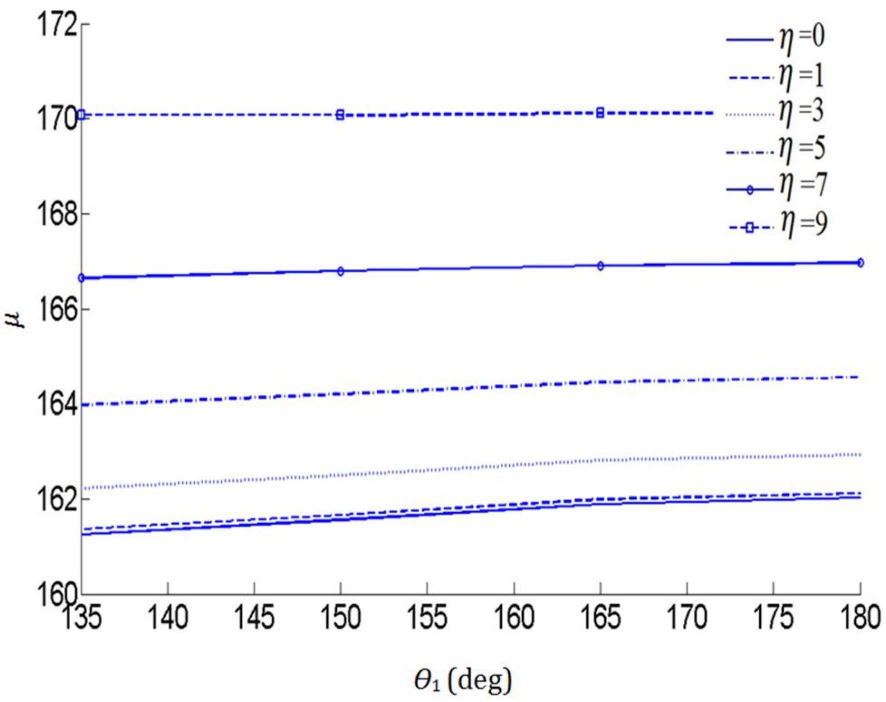
3-2- تیر دوتکه دورانی ترک‌دار

در این قسمت یک تیر دوتکه دورانی ترک‌دار برای موقعیت‌های مختلف ترک بررسی می‌شود (شکل 15). پارامترهای هندسی و فیزیکی این تیر $L=240$ mm، ضخامت و عمق تیر در طول تیر ثابت و به ترتیب برابر با $h=20$ mm و b=12 mm، مدول یانگ $E=209$ GPa، چگالی $\rho=7860\,\mathrm{kgm^{-3}}$، ضریب پواسون $\upsilon=0/3$، ضریب تصحیح برش $\kappa'=0/8$، مدول برش $G=E/(2\times(1+\upsilon))$ و $\theta=135^{\circ}$ می‌باشند. برای ترک نیز $a_c/h=0/3$ که موقعیت‌های مختلف آن با x_c نشان داده می‌شود.

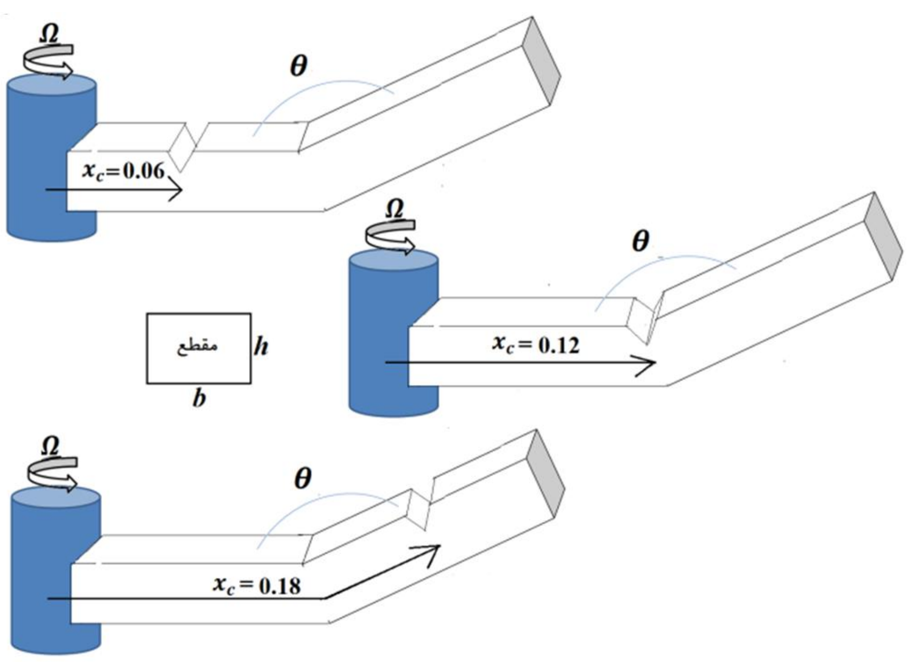
در جدول 4 پنج فرکانس طبیعی اول بی‌بعد برای این تیر برای سرعت‌های زاویه‌ای بی‌بعد مختلف و موقعیت‌های مختلف ترک نشان داده شده است و با مقادیر به‌دست آمده از نرم‌افزار آباکوس و همچنین روش ماتریس انتقال برای سرعت زاویه‌ای صفر مقایسه شده است. پیش‌تر اشاره شد که ترک باعث کاهش سختی موضعی تیر و در نتیجه منجر به کاهش فرکانس می‌شود. همانطور که از نتایج جدول 4 مشهود است تأثیر تغییر موقعیت ترک بر فرکانس‌های مختلف متفاوت است. در فرکانس اول با افزایش فاصله ترک از

جدول 4 پنج فرکانس طبیعی بی‌بعد اول برای سرعت‌های زاویه‌ای و موقعیت‌های مختلف ترک

η	x_c	روش	فرکانس طبیعی بی‌بعد: اول	دوم	سوم	چهارم	پنجم
	0/06	انتقال دیفرانسیل	3/53	16/75	53/14	104/84	160/72
		ماتریس انتقال	3/49	16/83	53/18	104/88	160/74
		آباکوس	3/47	16/83	53/18	104/89	160/75
0	0/12	انتقال دیفرانسیل	3/62	14/53	55/71	109/47	159/92
		ماتریس انتقال	3/63	14/58	55/73	109/51	159/95
		آباکوس	3/61	14/59	55/76	109/54	159/90
	0/18	انتقال دیفرانسیل	3/75	16/44	51/56	105/82	160/45
		ماتریس انتقال	3/74	16/49	51/59	105/89	160/49
		آباکوس	3/71	16/53	51/57	105/88	160/47
	0/06	انتقال دیفرانسیل	3/56	17/19	53/59	105/57	160/85
		آباکوس	3/59	17/11	53/65	105/50	160/82
1	0/12	انتقال دیفرانسیل	3/74	14/83	56/04	109/71	159/99
		آباکوس	3/72	14/92	56/09	109/78	159/96
	0/ 18	انتقال دیفرانسیل	3/84	16/73	51/86	106/39	160/61
		آباکوس	3/81	16/79	51/91	106/34	160/62
	0/06	انتقال دیفرانسیل	4/59	18/96	55/84	108/41	161/51
		آباکوس	4/62	18/97	55/89	108/42	161/49
3	0/12	انتقال دیفرانسیل	4/63	17/23	57/91	110/85	160/62
		آباکوس	4/69	17/18	57/85	110/85	160/64
	0/18	انتقال دیفرانسیل	4/74	18/54	53/83	108/71	161/60
		آباکوس	4/76	18/56	53/88	108/66	161/61
	0/06	انتقال دیفرانسیل	6/26	21/76	58/03	110/41	163/25
		آباکوس	6/30	21/71	58/00	110/49	163/21
5	0/12	انتقال دیفرانسیل	6/31	20/43	58/84	111/23	162/39
		آباکوس	6/34	20/48	58/88	111/21	162/42
	0/18	انتقال دیفرانسیل	6/35	21/32	56/45	110/29	163/38
		آباکوس	6/37	21/34	56/39	110/33	163/36



شکل 14 فرکانس طبیعی بی‌بعد پنجم برای سرعت‌های دورانی بی‌بعد و زاویه‌های شکستگی مختلف



شکل 15 مکان‌های مختلف ترک

تکیه‌گاه گیردار، فرکانس افزایش می‌یابد و به فرکانس اول تیر بدون ترک نزدیک می‌شود. در سایر فرکانس‌های طبیعی با نزدیک و یا دور شدن ترک از گره‌های ارتعاشی، فرکانس مربوط به ترتیب افزایش و یا کاهش می‌یابد. اختلاف مشاهده‌شده در این جدول بین نتایج حاصل از روش‌های مختلف کمتر از 0/5 درصد است.

4- نتیجه‌گیری

در این مقاله ارتعاشات تیر دورانی چند تکه ترک‌دار مورد بررسی قرار گرفت. برای حل معادلات از روش نیمه تحلیلی انتقال دیفرانسیل استفاده و فرکانس-ها و شکل مودهای سیستم تعیین شد. تأثیر زاویه‌ی شکستگی، سرعت دوران و موقعیت ترک روی فرکانس‌های طبیعی مورد بررسی قرار گرفت و مشاهده شد که تغییر زاویه شکستگی اثر متفاوتی روی فرکانس‌های مختلف دارد به-گونه‌ای‌که منجر به افزایش بعضی فرکانس‌ها همزمان با کاهش برخی دیگر می‌شود. با افزایش سرعت دوران نیز فرکانس‌های طبیعی سیستم افزایش یافت. همچنین با دور شدن ترک از تکیه‌گاه گیردار، فرکانس طبیعی اول افزایش و سایر فرکانس‌ها بسته به دور شدن یا نزدیک شدن به گره‌های ارتعاشی، کاهش یا افزایش یافتند. نتایج به‌دست آمده با مقادیر حاصل از نرم‌افزار آباکوس و همچنین برای تیرهای ثابت با نتایج حاصل از روش ماتریس انتقال که از تحلیل سیستم‌های دورانی ناتوان است مقایسه گردید. تطابق خوب نتایج نشان‌دهنده دقت روش انتقال دیفرانسیل در تحلیل ارتعاشات این سیستم است.

5- فهرست علائم

A	مساحت (m²)
a_c	عمق ترک (m)
b	عرض تیر(m)
E	مدول یانگ (Pa)
h	ارتفاع تیر (m)
I	گشتاور دوم سطح (m⁴)
L	طول تیر (m)
x_c	فاصله‌ی ترک تا انتهای ثابت (m)

علائم یونانی

η	سرعت زاویه‌ای بی‌بعد
μ	فرکانس طبیعی بی‌بعد
ρ	چگالی (kgm^{-3})
ω	فرکانس طبیعی ($rads^{-1}$)

6- مراجع

[1] D.H. Hodges, M.J. Rutkowski, Free vibration analysis of rotating beams by a variable order finite element method, *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, Vol. 19, pp. 1459–1466, 1981.
[2] S. Naguleswaran, Lateral vibration of a centrifugally tensioned Euler-Bernoulli beam, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 176, No. 5, pp. 613-624, 1994.
[3] S.S. Rao, R.S. Gupta, Finite element vibration analysis of rotating Timoshenko beams, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 242, No. 1, pp. 103-124, 2001.
[4] J.B. Gunda, A.P. Singh, P.S. Chhabra, R. Ganguli, Free vibration analysis of rotating tapered blades using Fourier-p super element, *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 27, pp. 243–257, 2007.
[5] J.B. Gunda, R. Ganguli, New rational interpolation functions for finite element analysis of rotating beams, *International Journal of Mechanical sciences*, Vol. 50, pp. 578-588, 2008.
[6] J.B. Gunda, R. Ganguli, Stiff-String basis functions for vibration analysis of high speed rotating beams, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 75, pp. 245021-245025, 2008.
[7] J.B. Gunda, R.K. Gupta, R. Ganguli, Hybrid stiff-string polynomial basis functions for vibration analysis of high speed rotating beams, *Computers and Structures*, Vol. 87, No. (3-5), pp. 254–265, 2009.
[8] A. Bazoune, Relationship between softening and stiffening effects in terms of south well coefficients, *Journal of Sound Vibration*, Vol. 287, No. (4-5), pp. 1027–1030, 2005.
[9] A. Bazoune, Effect of tapering on natural frequencies of rotating beams, *Shock and Vibration*, Vol. 14, pp. 169–179, 2007.
[10] H.H. Yoo, J.Y. Kwak, J. Chung, Vibration analysis of rotating pre-twisted blades with a concentrated mass, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 240, No. 5, pp. 891-908, 2001.
[11] R. Attarnejad, A. Shahba, Basic displacement functions for centrifugally stiffened tapered beams, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, Vol. 27, No. 9, pp. 1385-1397, 2011.
[12] G. Wang, N.M. Wereley, Free vibration analysis of rotating blades with Uniform tapers, *American in statute Journal of Aeronautics and Astronautics*, Vol. 42, No. 12, pp. 2429-2437, 2004.
[13] S.C. Lin, K.M. Hsiao, Vibration analysis of a rotating Timoshenko beam, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 240, pp. 303–322, 2001.
[14] C.C. Chang, L.W. Chen, Damage detection of cracked thick rotating blades by a spatial wave let based approach, *Applied acoustics*, Vol. 65, No. 11, pp. 1095–1111, 2004.
[15] S.S. Kim, J.H. Kim, Rotating composite beam with a breathing crack, *Composite Structures*, 2003, Vol. 60, No. 1, pp. 83–90.
[16] J.H. Kuang, B.W. Huang, The effect of blade cracks on mode localization in rotating bladed disks, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 227, No. 1, pp. 85–103, 1999.
[17] B.W. Huang, Effect of number of blades and distribution of cracks on vibration localization in a cracked pre-twisted blade system, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 48, No. 1, pp. 1–10, 2006.
[18] J.K. Zhou, Differential Transformation and its Application for Electrical Circuits Wuhan, *Huazhong University Press*, Wuhan, China, 1986.
[19] O.O. Ozdemir, M.O. Kaya, Flap wise bending vibration analysis of a rotating tapered cantilever Bernoulli-Euler beam by differential transform method, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 289, pp. 413–420, 2006.
[20] C. Mei, Application of differential transformation technique to free vibration analysis of a centrifugally stiffened beam", *Computers and Structures*, 2008, Vol. 86, pp. 1280–1284.
[21] CW. Bert, H. Zeng, Analysis of axial vibration of compound bars by differential transformation method, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 275, pp. 641–647, 2004.
[22] MJ. Jang, CL. Chen, YC. Liu, On solving the initial-value problems using differential transformation method, *Journal of Applied Mathematics Computers*, Vol. 115, pp. 145–160, 2000.
[23] M. Malik, HH. Dang, Vibration Analysis of Continuous systems by Differential Transformation, *Journal of Applied Mathematics Computers*, Vol. 96, pp. 17–26,1998.
[24] F. Ayaz, Application of differential transforms method to differential–algebraic equations, *Journal of Applied Mathematics Computers*, Vol. 152, pp. 648–657, 2004.
[25] SH. Ho, CK. Chen, Free transverse vibration of an axially loaded non-uniform sinning twisted Timoshenko beam using differential transform, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 48, pp. 1323–1331,2006.
[26] VS. Ertürk, S. Momani, Comparing numerical methods for solving fourth-order boundary value problems, *Journal of Applied Mathematics Computers*, Vol. 188, pp. 1963–1968, 2007.
[27] S. Talebi, A. Ariaei, Vibration analysis of rotating tapered cantilever beams and their crack detection using genetic algorithm, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 13, No. 18, pp. 1-13, 2013. (In Persian)
[28] H. P. Lin, J. Ro, Vibration analysis of planar serial-frame structures, *Journal of sound and vibration*, Vol. 262, pp. 1113-1131, 2003.
[29] H. P Lin, J. D. Wu, Dynamic analysis of planar closed-frame structures, *Journal of sound and vibration*, Vol. 282, pp. 249-264, 2005.
[30] A. Bakhshi, A. Ariaei, Vibration analysis of a multi-span Timoshenko beam with flexible constraints subjected to a two degrees-of-freedom moving system, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 14, pp.282-290, 2014. (In Persian)
[31] PF. Rizos, N. Aspragathos, AD. Dimargonas, Identification of crack location and magnitude in a cantilever beam from the vibration modes, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 138, No. 3, pp. 381–388, 1990.
[32] A. Ariaei, S. Ziaei-Rad, M. Malekzadeh, Dynamic response of a multi-span Timoshenko beam with internal and external flexible constraints subject to a moving mass, *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 83, No. 57, pp. 1257-1272, 2013.