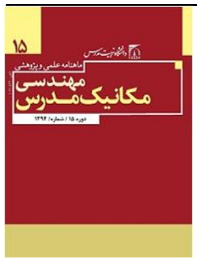
مجله مهندسی مکانیک مدرس، اسفند 1394، دوره 15، شماره 12، ص‌ص 75-83



ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

کنترل پذیری گیره ایی شبکه های دینامیکی بر اساس عملکرد حرکت همگام

علی غفاری[1*]، سلیمان عاربی[2]

1- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

2- دانشجوی دکترا، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

* تهران، 1999-19395، ghaffari@kntu.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 13 شهریور 1394

پذیرش: 18 مهر 1394

ارائه در سایت: 20 آبان 1394

کلید واژگان:

شبکه های دینامیکی

حرکت همگام

کنترل پذیری گیره ایی

حداقل گره های کنترل شونده

چکیده

انتخاب مناسب نوع و تعداد گره های کنترل شونده، نقش مهمی در بهبود کنترل پذیری و عملکرد شبکه های دینامیکی دارد. در این مقاله انتخاب گره‌های کنترل شونده بر اساس معیارهای مرکزیت گره‌ها در شبکه انجام شده است. برای هر معیار، کنترل پذیری و عملکرد حرکت همگام در شبکه های دینامیکی مورد مطالعه قرار گرفته است و بر این اساس، کمینه تعداد گره‌های کنترل شونده به منظور دستیابی به عملکرد مطلوب، برای چندین مدل ساختاری شبکه ها بدست آمده است. نتایج بررسی کنترل پذیری گیره ایی در شبکه های دینامیکی تصادفی نشان می‌دهد که کمترین تعداد گره‌های کنترل شونده، برای معیار مرکزیت میانی است. مشابه همین نتیجه برای شبکه های جهان کوچک نیز برقرار است با این تفاوت که در شبکه های متراکم تر، تعداد گره‌های کنترل شونده افزایش می یابد. بررسی نتایج در شبکه‌های مستقل از مقیاس نشان می‌دهد که معیار مرکزیت نزدیکی انتخابی مناسب بوده و بخصوص در شبکه‌ها با تعداد گره های بالاتر، منجر به کاهش تعداد گره‌های کنترل شونده می‌شود. نتیجه مهم دیگر، کاهش تعداد گره های کنترل شونده برای یک عملکرد مطلوب و بهبود کنترل پذیری با افزایش ضریب همسایگی در شبکه های جهان کوچک است. مشابه این نتیجه برای افزایش ضریب تجانس در شبکه های مستقل از مقیاس است.

Pinning controllability of dynamical networks based on synchronized motion performance

Ali Ghaffari[*], Soleyman Arebi

Department of Mechanical Engineering, K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran.
* P.O.B. 19395-1999 Tehran, Iran, ghaffari@kntu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 04 September 2015
Accepted 10 October 2015
Available Online 11 November 2015

Keywords:
Dynamical networks
pinning controllability
minimum driver nodes
desired performance

ABSTRACT

Right selection of the type and number of driver nodes plays an important role in improving the controllability and performance of the dynamical networks. In this paper the controllability and performance of a network has been studied when a new approach for selecting the driver nodes, based on the three main node centrality criteria, has been proposed. For each criterion, the percentage of the least number of driver nodes to achieve the desired performance has been calculated for several network model structures. The results for pure random networks show that for the ‘‘betweenness centrality criterion’’ the number of driver nodes is minimal. Similar results hold for Small World networks subject to the fact that for dense, the number of driver nodes increases. It is shown that the ‘‘closeness centrality criterion’’ is the proper choice for the State Free networks, especially when the network is dense. Another important result is that in Small World networks, increasing the nearest neighborhood coefficient decreases the number of driver nodes for a desired performance. Similar results hold for Scale Free networks where increasing the heterogeneity coefficient improves the network pinning controllability.

1- مقدمه

سیستم‌های دینامیکی با مقیاس بزرگ اغلب به صورت شبکه هایی از گره[1] ها مدل می شوند که به کمک یال[2] هایی به هم ارتباط دارند [1]. شبکه جهانی اینترنت، شبکه های اجتماعی، شبکه های عصبی، اجتماعات اکولوژیکی و بیولوژیکی، شبکه توزیع هوشمند برق و شبکه ربات‌های هوشمند، نمونه‌هایی از این شبکه ها در دنیای واقعی هستند. آنچه که در بررسی رفتار دینامیکی این شبکه ها مطرح است، رفتار گروهی آن‌هاست. در این میان همگام بودن[3] حرکت در شبکه، یکی از مهمترین رفتارهای گروهی در این شبکه هاست[2]. روش های مختلفی بصورت نظری برای بهبود عملکرد حرکت همگام در شبکه‌های دینامیکی وجود دارد. تغییر ساختار ارتباطی گره‌ها در شبکه، افزایش وزن ارتباط بین گره‌ها، افزایش و یا کاهش ارتباط در شبکه‌ها از جمله روش‌های معمول است [3]. با توجه به محدودیت ها در شبکه‌های دینامیکی واقعی، امکان اعمال روش‌های نظری ذکر شده در شبکه‌ها، اغلب وجود ندارد.

1- Node
2- Edge
3- Synchronization

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:
A. Ghaffari, S. Arebi, Pinning controllability of dynamical networks based on synchronized motion performance, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 11, pp. 75-83, 2015 (in Persian)

یکی از روش‌های قابل کاربرد برای بهبود عملکرد حرکت همگام در شبکه‌ها، اعمال کنترل از بیرون شبکه بر روی گره‌ها است. در بسیاری از شبکه‌های دینامیکی، امکان اعمال کنترل بر روی همه گره‌ها وجود ندارد. بنابراین تعیین تعداد گره‌های کنترل شونده[1] به منظور بهبود حرکت همگام شبکه، موضوعی مهم بوده که تحت عنوان کنترل پذیری گیره ایی[2] مطرح است [4]. مسئله اصلی در کنترل پذیری گیره‌ایی شبکه، تعیین حداقل تعداد گره‌های کنترل شونده و نوع آن‌ها به منظور دست‌یابی به عملکرد مطلوب حرکت همگام شبکه است. یکی از روش‌های تعیین حداقل تعداد گره‌های کنترل شونده در شبکه‌های دینامیکی جهت دار، استفاده از کنترل‌پذیری ساختاری[3] و تئوری حداکثر انطباق[4] است [5]. همچنین با استفاده از تعدد مقادیر ویژه ماتریس ارتباط شبکه می‌توان به اطلاعاتی در مورد گره‌های کنترل شونده دست یافت [6]. استفاده از نمایه کنترل پذیری[5] و حداقل سازی آن نیز یک روش مناسب برای تعیین این گره‌ها است [7]. نسبت مقدار ویژه حداکثر به مقدار ویژه دوم، به عنوان یک معیار برای کنترل پذیری شبکه است که با حداقل سازی آن می‌توان به اطلاعاتی در مورد تعداد گره‌های کنترل شونده دست یافت [8]. مرکزیت[6] گره‌ها در شبکه نیز به عنوان یک معیار اهمیت گره‌ها در شبکه مطرح است [9]. در روش‌های بیان شده برای تعیین گره‌های کنترل شونده، به عملکرد حرکت همگام توجه نشده است.

در این مقاله روشی برای انتخاب مناسب تعداد و نوع گره‌های کنترل شونده در شبکه های مختلف بر اساس معیارهای مرکزیت گره‌ها پیشنهاد شده است. حداقل تعداد گره‌های کنترل شونده بر اساس این معیارها، برای سه نوع شبکه با مدل ساختاری تصادفی[7] [10]، جهان کوچک[8] [11] و مستقل از مقیاس[9] [12] مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای هر یک از مدل‌های شبکه، ارتباط بین حداقل تعداد گره‌های کنترل شونده و ضریب احتمال ارتباط در شبکه بدست می‌آید تا بتوان نتیجه گیری کلی برای هر معیار بر اساس این ضریب داشت داشت.

2- تعاریف و فرضیات

در این بخش به بیان برخی تعاریف و فرضیات مهم پرداخته می‌شود. یک شبکه دینامیکی از N گره n بعدی مشابه که به صورت خطی و پخشی با هم ارتباط دارند، به صورت معادله (1) بیان می شوند:

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x_i(t),t) + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} c_{ij} a_{ij}\, \Gamma\left(x_j(t) - x_i(t)\right) \quad , \quad i = 1,2,\dots.N \tag{1}$$

که در آن $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})^T \in R^n$ متغیرهای حالت گره i ام و $f_i\colon R^n \times [0,+\infty] \to R^n$ تابع پیوسته و مشتق پذیر و بیان کننده دینامیک هر گره است. ماتریس ارتباط $A = (a_{ij}) \in R^{N\times N}$ نشان دهنده ارتباط بین گره‌هاست بطوری که اگر گره i با گره j ارتباط داشته باشد $a_{ij} = 1$ و در غیر اینصورت $a_{ij} = 0$ است. c_{ij} وزن ارتباط بین گره‌های مرتبط است. $\Gamma = (\tau_{ij}) \in R^{n\times n}$ ماتریس ارتباط داخلی است بطوری که اگر $\tau_{ij} \neq 0$، گره های مرتبط به واسطه متغیرهای حالت i و j به هم مرتبط اند. شکل دیگر معادله (1) بر اساس ماتریس لاپلاسین است. ماتریس L بصورت $d_i = \sum_{i=1}^{N} a_{ij}$, $D = \mathrm{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ ،$L = D - A$ است که در شبکه های متصل، یک ماتریس کاهش پذیر و مقادیر ویژه به شکل $0 = \lambda_1 < \lambda_2 \le \dots \le \lambda_N$ است. معادله (1) بر اساس ماتریس لاپلاسین به شکل معادله (2) است:

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x_i(t),t) + \sum_{j=1}^{N} c_{ij} l_{ij}\, \Gamma x_j(t) \quad , \quad i = 1,2,\dots.N \tag{2}$$

فرضیات مربوط به ساختار شبکه های مورد بررسی در این مقاله به شرح زیر است:

- گره های شبکه دارای دینامیک مشابه هستند.
- وزن ارتباط بین گره‌های متصل یکسان است.
- ماتریس ارتباط بر اساس مدل‌های تولید شبکه بدست می آید.

فرض موجود در دینامیک گره‌ها، شرط لیپ شیتز است. تابع $f(.)$ شرط لیپ شیتز را ارضا می کند اگر ثابت Λ وجود داشته باشد بطوری که برای هر $u, v \in R^n$ داشته باشیم $\|f(u) - f(v)\| \le \Lambda\|u - v\|$.

با توجه به فرضیات بیان شده، معادله (2) به شکل معادله (3) بیان می‌شود:

$$\dot{x}_i(t) = f(x_i(t),t) + c\sum_{j=1}^{N} l_{ij}\, \Gamma x_j(t) \quad , \quad i = 1,2,\dots.N \tag{3}$$

شبکه (3) یک شبکه همگام نامیده می شود اگر:

$$\lim_{t\to\infty}\|x_i(t) - x_j(t)\| = 0 \quad , \quad i,j = 1,2,\dots,N \tag{4}$$

که در آن ||.|| نرم اقلیدسی است. همچنین اگر $s(t) \in R^n$ یک مسیر مطلوب، نقطه تعادل یا یک حل نوسانی باشد، شبکه همگام به $s(t)$ است اگر:

$$\lim_{t\to\infty}\|x_i(t) - s(t)\| = 0 \quad , \quad i = 1,\dots,N \tag{5}$$

که در آن $s(t)$ از معادله (6) بدست می آید:

$$\dot{s}(t) = f(s(t),t) \tag{6}$$

متغیر های حالت خطا به صورت معادله (7) نمایش داده می شوند:

$$e_i(t) = x_i(t) - s(t) \quad e_i(t) \in R^n \quad , \quad i = 1,2,\dots.N \tag{7}$$

مسئله کنترل گیره ایی برای یک شبکه که با معادله (3) توصیف شده است، شامل تعیین $u_i \in R^n$ وارد به بخش δ $(0 < \delta \ll 1)$ از شبکه است بطوری که شرط موجود در معادله (5) ارضا شود. اگر گره های $i_1, i_{2,}, \dots, i_k$ عضو مجموعه گره‌های کنترل شونده نباشند و گره‌های $i_{k+1}, i_{k+2,}, \dots, i_N$ عضو مجموعه گره‌های کنترل شونده باشند، با کم کردن معادله (6) از (3) معادله سیستم خطای کنترل شونده (8) تشکیل می شود:

$$\dot{e}_i(t) = f(x_i(t),t) - f(s(t),t) + c\sum_{j=1}^{N} l_{ij}\, \Gamma e_j(t) \quad , \quad i = 1,2,\dots.k \tag{8}$$

$$\dot{e}_i(t) = f(x_i(t),t) - f(s(t),t) + c\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\, \Gamma e_j(t) + u_i \, , \quad i = k+1, k+2, \dots.N \tag{9}$$

با توجه به معادله (9)، مسئله کنترل گیره ایی، شامل تعیین k و u_i است بطوری که حرکت همگام شبکه تضمین و عملکرد مناسبی داشته باشد.

1- Minimum driver nodes
2- Pinning controllability
3- Structural controllability
4- Maximum matching theory
5- Controllability indices
6- Centrality
7- Random networks
8- Small world networks
9- Scale free networks

3- تعیین ورودی کنترلی و شرط همگامی شبکه دینامیکی

برای بررسی همگامی شبکه و عملکرد آن، ورودی کنترلی به صورت فیدبک حالت و به شکل معادله (10) در نظر گرفته می شود.

$$u_i\,(t) = -cd_i\Gamma e_i(t) \quad \in R^n \quad i = 1,2,3,\ldots k \tag{10}$$

با این انتخاب، معیار همگامی شبکه با بررسی پایداری حرکت از طریق قضیه مستقیم لیاپانوف به شکل معادله (11) است [13]:

$$(\mathrm{I}_N \otimes \Lambda\Gamma) + \mathrm{c}((\mathrm{L}-\mathrm{D}) \otimes \Gamma) < 0 \tag{11}$$

که در آن $\otimes$ ضرب کرونکر ، I_N ماتریس واحد و $\mathrm{D} = \mathrm{diag}(0,0,\ldots,0,\mathrm{d}_{k+1},\mathrm{d}_{k+2},\ldots,\mathrm{d}_N)$ است. اثبات این معادله در پیوست آمده است. هر نوع انتخاب تعداد و نوع گره های کنترل شونده باید شرط (11) را ارضا کند. اگر $\theta = \lambda_{\max}(\frac{\Lambda+\Lambda^{\mathrm{T}}}{2})$ باشد، معادله (11) به شکل معادله (12) ساده می شود.

$$c > \frac{\theta}{|\lambda_{\max}(L-D)|} \tag{12}$$

معادله (12)، بیانگر کمینه مقدار وزن ارتباط در شبکه است که برای همگام شدن آن مورد نیاز است. بنابراین با داشتن خصوصیات دینامیک گره ها (θ)، خصوصیات ساختاری شبکه (L) و نیز تعداد و نوع گره‌های کنترل شونده (D)، می توان مقدار کمینه وزن ارتباط بین گره‌ها در شبکه به منظور همگام سازی حرکت از معادله (12) بدست می‌آید. در ادامه با ارائه یک مثال اثر اعمال ورودی کنترلی به بخشی از شبکه بر روی عملکرد حرکت همگام آن بررسی می شود.

مثال 1: شبکه ای متشکل از چهار نوسانگر لورنز با معادلات دینامیکی بیان شده در معادله (13) [14] و ساختار ارتباط مطابق شکل 1 را در نظر می گیریم.

$$\dot{x}(t) = \sigma(y(t)-x(t))$$

$$\dot{y}(t) = rx(t)-y(t)-x(t)z(t)$$

$$\dot{z}(t) = x(t)y(t)-\gamma z(t) \tag{13}$$

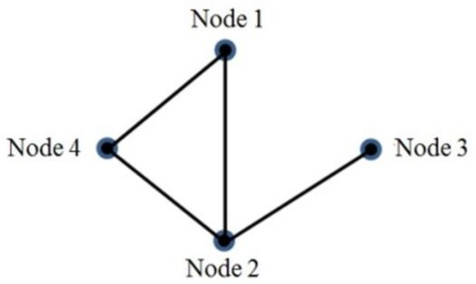
که در آن σ ، r و γ ثوابت معادله هستند. با انتخاب مقادیر $\sigma = 10$, $r = 28$, $\gamma = 8.3$ رفتار آشوبناک دارد. برای بررسی اثر اعمال کنترلر بر روی بهبود عملکرد حرکت همگام در شبکه، متغیر های حالت خطا در شبکه مثال 1 بدون اعمال کنترلر در شکل 2 و برای شبکه با اعمال کنترلر بر روی بخشی از آن (اعمال کنترلر بر روی گره شماره 3) در شکل 3 نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می شود، با اعمال کنترلر زمان رسیدن به حرکت همگام شبکه، کاهش می یابد. این در حالی است که مقدار وزن ارتباط در دو حالت مساوی و برابر $\mathrm{c} = 1$ است. این بررسی نشان می دهد که با اعمال کنترلر بر روی بخشی از شبکه، می‌توان به عملکرد بهتر بدون افزایش وزن ارتباط بین گره‌ها در شبکه دست یافت. اهمیت این نتیجه در این است که در بسیاری از شبکه‌های دینامیکی امکان تغییر وزن ارتباط شبکه به منظور بهبود عملکرد حرکت همگام آن وجود ندارد. و با اعمال کنترلر بر روی بخشی از آن می‌توان به عملکرد مطلوب دست یافت.

4- بررسی کنترل پذیری گیره‌ایی در شبکه های دینامیکی

به منظور بررسی کنترل پذیری گیره‌ایی در شبکه، معیار عملکرد بر اساس زمان استقرار حرکت همگام در نظر گرفته می شود. الگوریتم یافتن تعداد گره های کنترل شونده برای هر شبکه بدین شرح است:

گام اول: با توجه به ساختار شبکه دینامیکی واقعی یکی از سه مدل شبکه (مدل شبکه تصادفی، جهان کوچک و مستقل از مقیاس) و همچنین دینامیک موجود در گره ها و وزن ارتباطی بین گره‌ها انتخاب و مشخص می شود. همچنین مدت زمان استقرار حرکت همگام به عنوان معیار عملکرد شبکه تعریف می شود.

گام دوم: برای شبکه تعیین شده در گام اول، معیار انتخاب گره‌های



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Fig. 1 Topology structure and equivalent adjacency matrix for example 1

شکل 1 ساختار ارتباط و ماتریس ارتباط معادل برای مثال 1

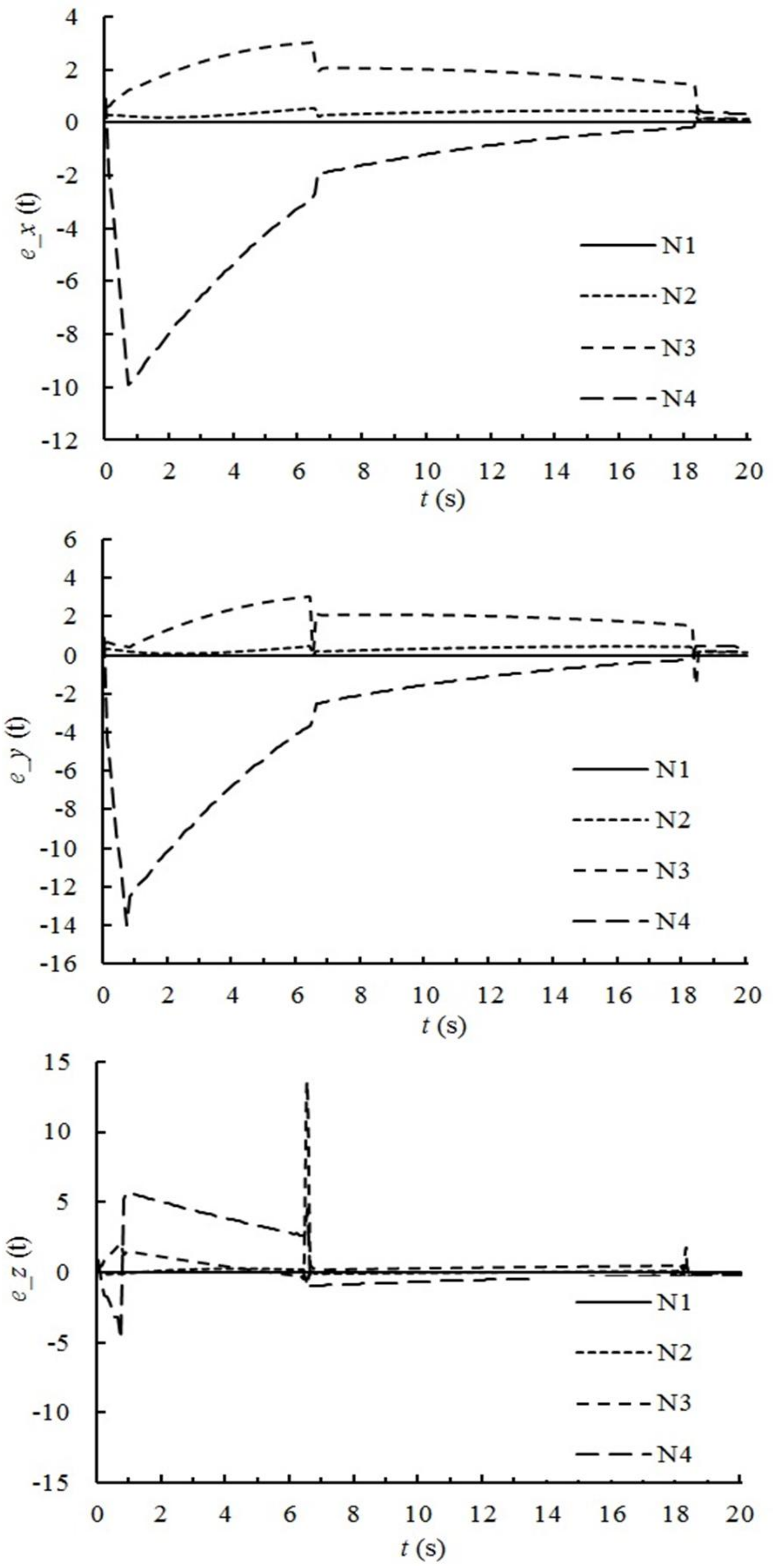


Fig. 2 Error state variables for the network without control system with c = 1 in example 1

شکل 2 متغیرهای حالت خطا برای شبکه بدون سیستم کنترلی با c = 1 در مثال 1

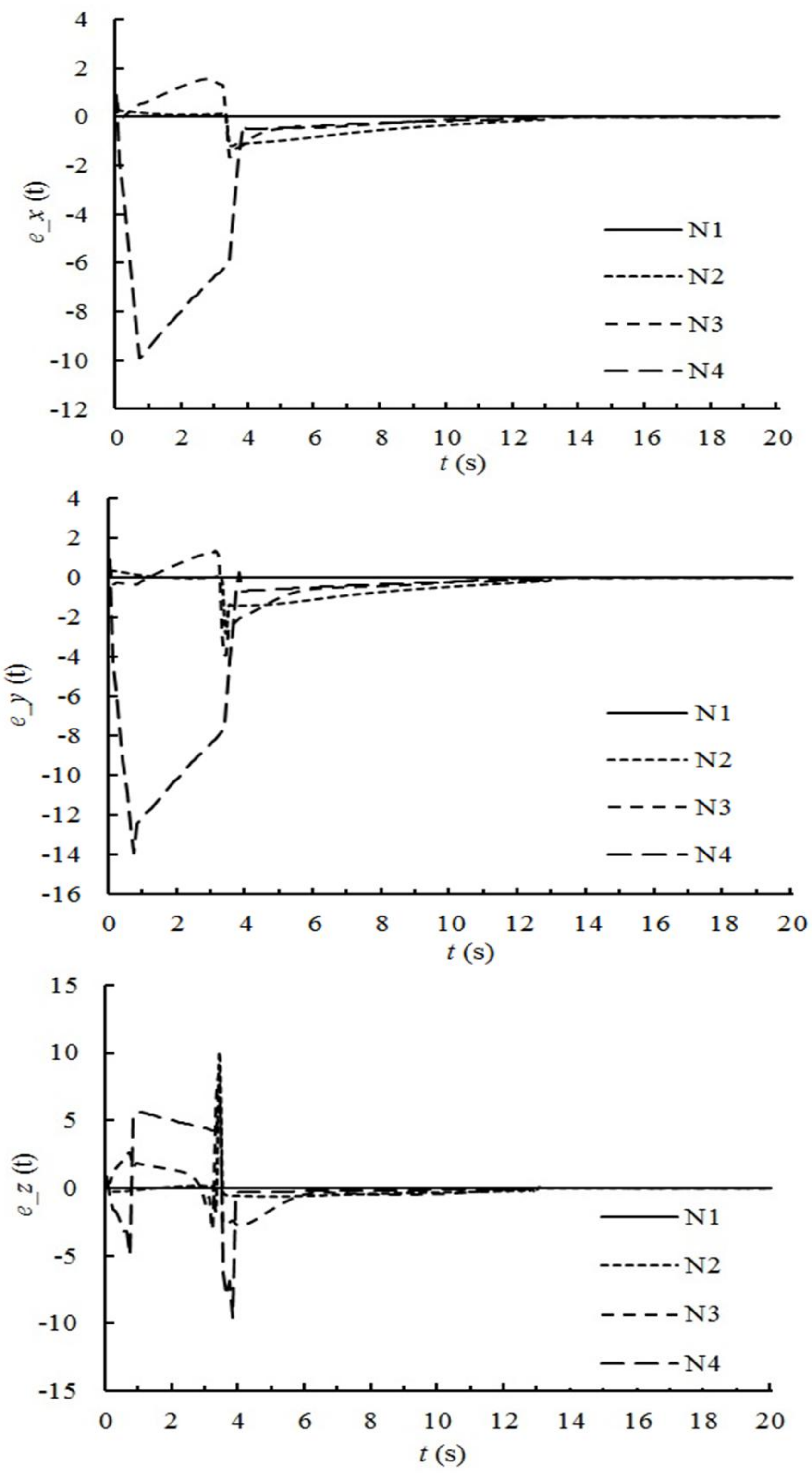


Fig. 3 Error state variables for the network with control system in Node 3 with $c = 1$ in example 1

شکل 3 متغیرهای حالت خطا برای شبکه با اعمال کنترلر بر روی گره شماره 3 با $c = 1$ در مثال 1

کنترل شونده تعیین و با شبیه سازی سیستم کنترل شده با کنترلر توصیف با معادله (10) ، حداقل تعداد گره‌های کنترل شونده (بصورت درصدی از کل تعداد گره‌ها در شبکه) برای رسیدن به عملکرد مورد نظر طوری تعیین می‌شود بطوری که که شرط همگامی شبکه در معادله (11) ارضا گردد.

گام سوم: گام اول و دوم برای شبکه ها با مدل‌های ساختاری مختلف و ضریب احتمال ارتباط مختلف انجام و نتیجه‌ها مقایسه شده تا بتوان نتیجه گیری نهایی در مورد هر یک از معیارهای انتخاب گره‌های کنترل شونده انجام داد.

4-1- بررسی کنترل پذیری گیره ایی در شبکه های دینامیکی تصادفی

در این بخش به بررسی کنترل پذیری شبکه های دینامیکی تصادفی پرداخته می شود. شبکه های تصادفی ابتدا در سال 1959 ارائه شدند. در این شبکه ها، گره‌ها با احتمال ثابت p به گره های دیگر ارتباط پیدا می‌کنند. به منظور بررسی کنترل پذیری گیره ایی در این شبکه ها، میزان گره‌های کنترل شونده بر اساس ضریب احتمال شبکه برای شبکه‌ها با تعداد مختلف گره ها و بر اساس معیار بیشینه مرکزیت میانی[1] گره‌ها در شکل 4- الف نشان داده شده است این مقادیر برای معیارهای بیشینه مرکزیت نزدیکی[2] و بیشینه مرکزیت بردار ویژه[3] به ترتیب در شکل های 4- ب و 4- ج نشان داده شده است. این نتایج برای دینامیک لورنز در گره‌ها، زمان رسیدن به حرکت همگام معادل با 20 ثانیه، وزن ارتباط معادل $c = 1$ و کنترلر توصیف شده در معادله (10) بدست آمده است.

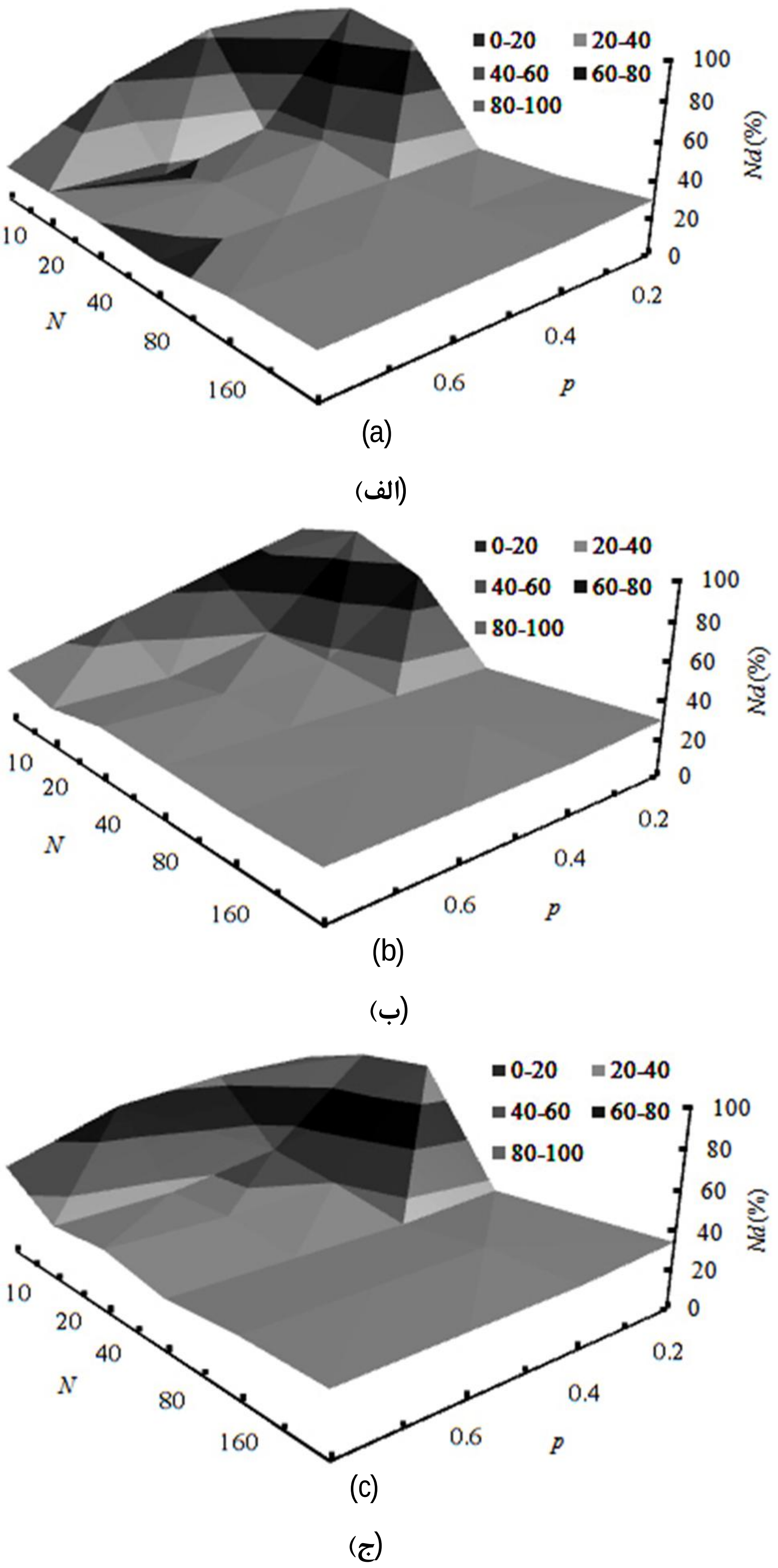


Fig. 4 Driver nodes quantity based on the centrality criteria in the Random networks a) Betweenness centrality criterion b) Closeness centrality criterion c) Eigen vector centrality criterion

شکل 4 تعداد گره‌های کنترل شونده بر اساس معیار انتخاب مرکزیت در شبکه های دینامیکی تصادفی: الف) معیار مرکزیت میانی ب) معیار مرکزیت نزدیکی ج) معیار مرکزیت بردار ویژه

1- Betweenness Centrality
2- Closeness Centrality
3- Eigen vector Centrality

نتایج بررسی کنترل پذیری گیره ایی برای شبکه‌های دینامیکی تصادفی نشان می‌دهد که در صورت انتخاب گره‌های کنترل شونده با معیارهای مرکزیت، با افزایش ضریب احتمال ارتباط در شبکه، تعداد این گره‌ها برای رسیدن به عملکرد مطلوب کاهش می‌یابد. به طور مثال، در شبکه‌ها با 160 گره و با ضریب احتمال 0.8، با کنترل نزدیک به 22 درصد گره‌ها، می‌توان به عملکرد مطلوب دست یافت. این در حالی است که اگر ضریب احتمال 0.2 باشد، می بایست 30 درصد گره‌ها کنترل شوند. همچنین در شبکه‌ها با تعداد گره‌های کمتر، تعداد گره‌های کنترل شونده بخصوص در ضریب احتمال کمتر، افزایش می‌یابد. بطوری که در شبکه‌ها با تعداد 10 گره، حداقل 90 درصد گره‌ها می بایست کنترل شوند تا عملکرد مطلوب در حرکت همگام حاصل شود. نتیجه مهم دیگری که از این نتایج می‌توان گرفت، کاهش تعداد گره‌های کنترل شونده برای معیار مرکزیت میانی است. در شبکه‌ها با تعداد گره‌های مختلف و در ضریب احتمال‌های ارتباط مختلف، کمترین تعداد گره‌های کنترل شونده به منظور دستیابی به عملکرد مطلوب حرکت همگام که در اینجا زمان رسیدن به حرکت همگام است، مربوط به معیار کنترل گره‌ها بر اساس مرکزیت میانی است. این به معنی کارایی این معیار در انتخاب گره‌های کنترل شونده است.

4-2- بررسی کنترل پذیری گیره ایی در شبکه‌های دینامیکی جهان کوچک

شبکه جهان کوچک، شبکه ایی است که گره‌های آن در همسایگی هم نیستند ولی هر گره با طی فاصله کوتاهی و با چند گام کوچک می‌تواند به گره دیگر برسد. دارا بودن طول مسیر مشخصه کوتاه و ضریب خوشه بندی[1] بالا دو مشخصه اصلی از شبکه‌های جهان کوچک است. شبکه‌های مختلفی با این نوع شبکه مدل می‌شوند. شبکه‌های اجتماعی، ارتباطات در دنیای مجازی و شبکه ژن‌ها، شبکه حمل و نقل جاده‌ایی، زنجیره غذایی، سیستم توزیع برق هوشمند، شبکه نورون مغز نمونه‌هایی از شبکه‌های واقعی هستند که با شبکه جهان کوچک مدل می‌شوند.

به منظور بررسی کنترل پذیری گیره ایی شبکه‌ها با خصوصیت جهان کوچک، تعداد گره‌های کنترل شونده بر حسب ضریب احتمال ارتباط شبکه و تعداد گره‌های آن، برای معیارهای مختلف انتخاب گره‌ها و برای دو ضریب همسایگی مختلف[2]، در شکل 5 و شکل 6 نشان داده شده اند. در این شبکه ها نیز دینامیک لورنز در گره‌ها، زمان رسیدن به حرکت همگام معادل با 20 ثانیه، وزن ارتباط معادل $c = 1$ و کنترلر توصیف شده در معادله (10) انتخاب شده است. نتایج برای شبکه‌های جهان کوچک نیز نشان می‌دهد که در صورت انتخاب گره‌های کنترل شونده با معیارهای مرکزیت، با افزایش ضریب احتمال ارتباط در شبکه، تعداد این گره‌ها برای رسیدن به عملکرد مطلوب کاهش می‌یابد. همچنین برای این نوع شبکه‌ها، تعداد گره‌های کنترل شونده با معیار مرکزیت میانی کمترین مقدار را در بین معیارها دارد. مهمترین تفاوت نتایج برای شبکه‌های جهان کوچک نسبت به شبکه‌های تصادفی، افزایش تعداد گره‌های کنترل شونده در شبکه‌ها با تعداد گره‌های بالاست. بطور مثال در شبکه جهان کوچک با 160 گره و ضریب ارتباط 0.6، می بایست 70 درصد گره‌ها کنترل شوند تا به عملکرد مطلوب دست یافت. در حالی که این مقدار در شبکه‌های تصادفی نزدیک به 30 درصد از کل گره ها بود. علت این افزایش، به ساختار شبکه‌های جهان کوچک مرتبط است. با

1- Clustering Coefficient
2- k-nearest neighbors

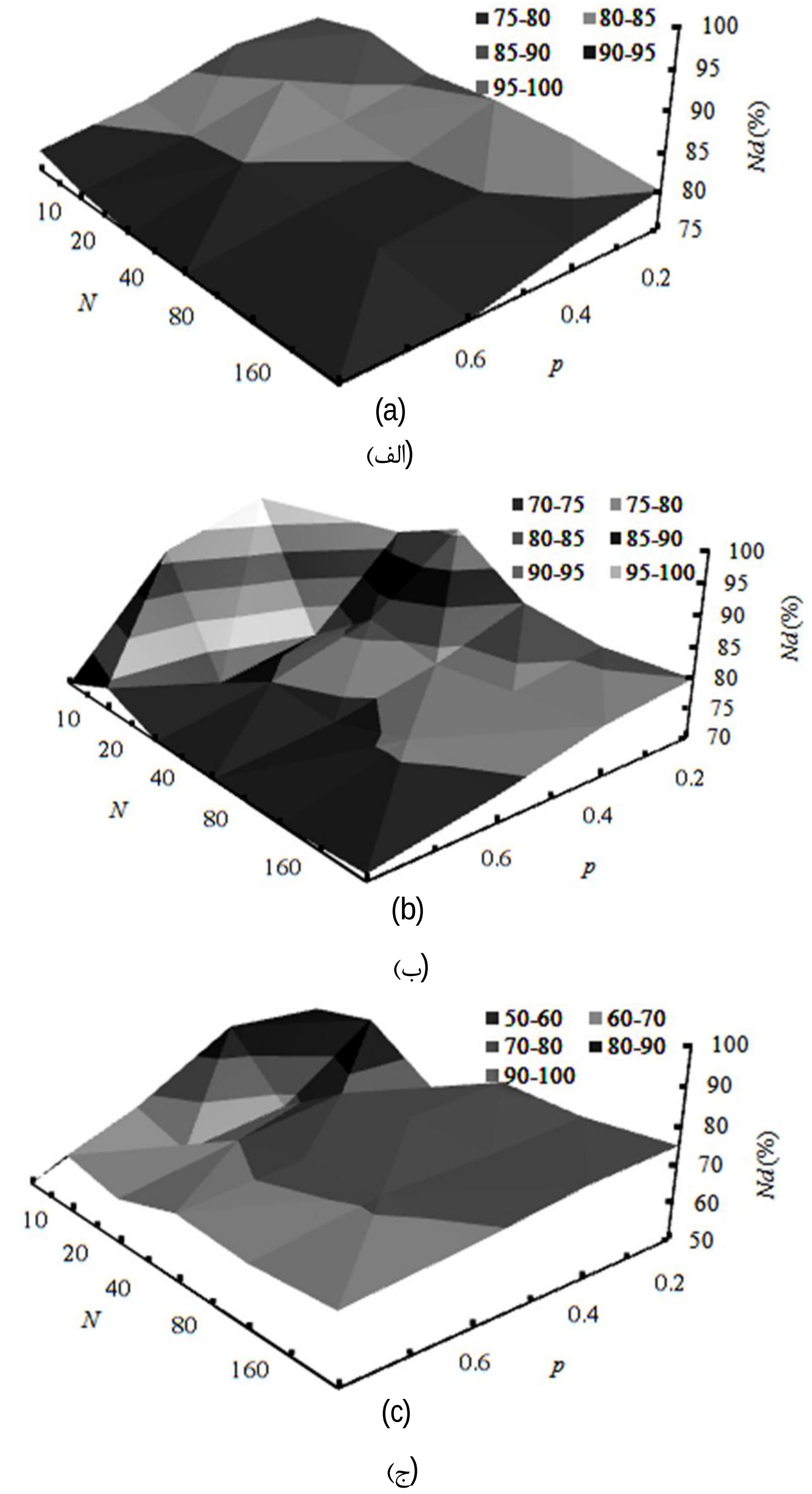
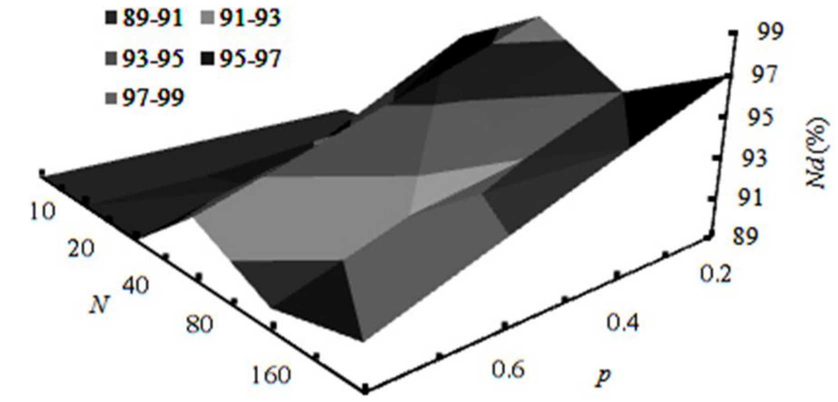


Fig. 5 Driver nodes quantity based on the centrality criteria in the Small-World networks ($k = 1$) a) Betweenness centrality criterion b) Closeness centrality criterion c) Eigen vector centrality criterion

شکل 5 تعداد گره های کنترل شونده بر اساس معیار انتخاب مرکزیت در شبکه‌های دینامیکی جهان کوچک ($k = 1$) الف) معیار مرکزیت میانی ب) معیار مرکزیت نزدیکی ج) معیار مرکزیت بردار ویژه

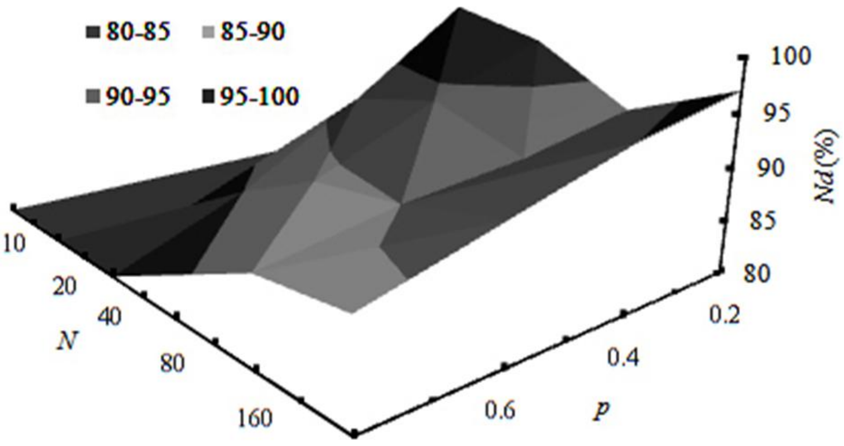
مقایسه نتایج شبکه‌های تصادفی و جهان کوچک، می‌توان دریافت که درجه کنترل پذیری شبکه‌های جهان کوچک کمتر از شبکه‌های تصادفی است. این تفاوت بخصوص در شبکه‌ها با تعداد گره بالاتر بیشتر، مشخص تر است.

در ادامه برای بررسی تأثیر ضریب همسایگی شبکه‌های جهان کوچک بر روی تعداد گره‌های کنترل شونده، نتایج برای ضریب همسایگی $k = 3$ در شکل 6 نشان داده شده است. مقایسه نتایج برای دو ضریب همسایگی نشان می‌دهد که با افزایش ضریب همسایگی شبکه جهان کوچک، در شبکه‌ها با تعداد گره کمتر، تعداد گره‌های کنترل شونده کاهش می‌یابد. همچنین در هر سه معیار انتخاب گره‌های کنترل شونده، میانگین تعداد گره‌های کنترل شونده برای شبکه جهان کوچک با ضریب همسایگی بالاتر، کاهش یافته است. این به معنای افزایش کمیت کنترل پذیری گیره ایی در این شبکه هاست.



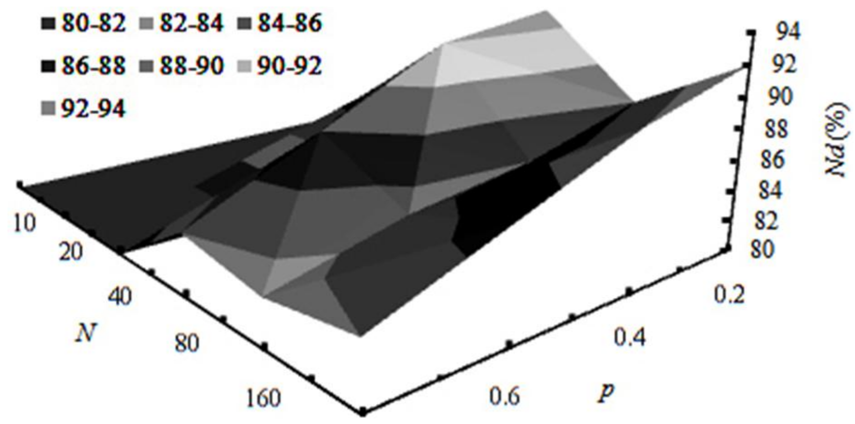
(a)

(الف)



(b)

(ب)



(c)

(ج)

Fig. 6 Driver nodes quantity based on the centrality criteria in the Small-World networks ($k = 3$) a) Betweenness centrality criterion b) Closeness centrality criterion c) Eigen vector centrality criterion

شکل 6 تعداد گره‌های کنترل شونده بر اساس معیار انتخاب مرکزیت در شبکه‌های دینامیکی جهان کوچک ($k = 3$) الف) معیار مرکزیت میانی ب) معیار مرکزیت نزدیکی ج) معیار مرکزیت بردار ویژه

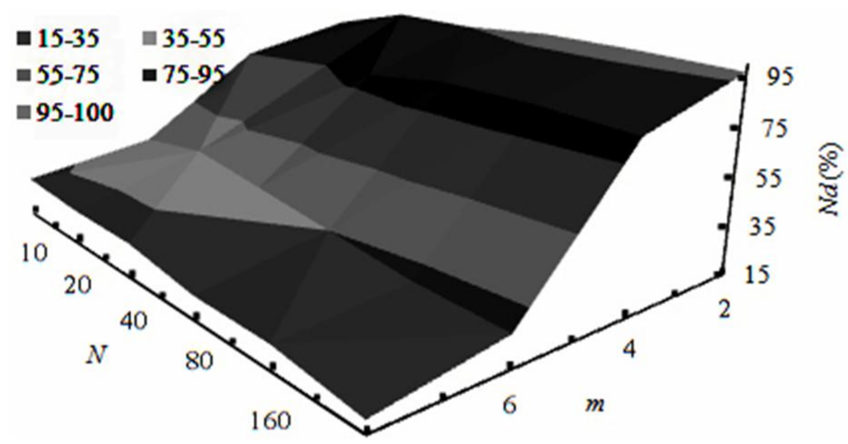
3-4- بررسی کنترل پذیری گیره ایی در شبکه‌های دینامیکی مستقل از مقیاس

شبکه‌های دینامیکی مستقل از مقیاس از قانون توان[1] در توزیع درجه گره ها استفاده می‌کنند. شبکه‌های دینامیکی که بر اساس این مدل ساخته می شوند، شامل دو اصل رشد[2] و انتساب حرفه ایی[3] هستند . اصل رشد بیان می‌کند که گره‌های جدید با یک نرخ مشخص وارد می‌شوند. و قانون انتساب حرفه ایی بیان می‌کند که گره‌های جدید تمایل دارند با گره‌هایی با همان درجه ارتباط داشته باشند. این دو قانون بر اساس الگوهای موجود در شبکه های اینترنتی تشخیص داده شده اند [12]. به منظور بررسی کنترل پذیری گیره ایی این شبکه‌ها، تعداد گره‌های کنترل شونده بر حسب ضریب احتمال

1- Power low
2- Growth
3- Professional attachment

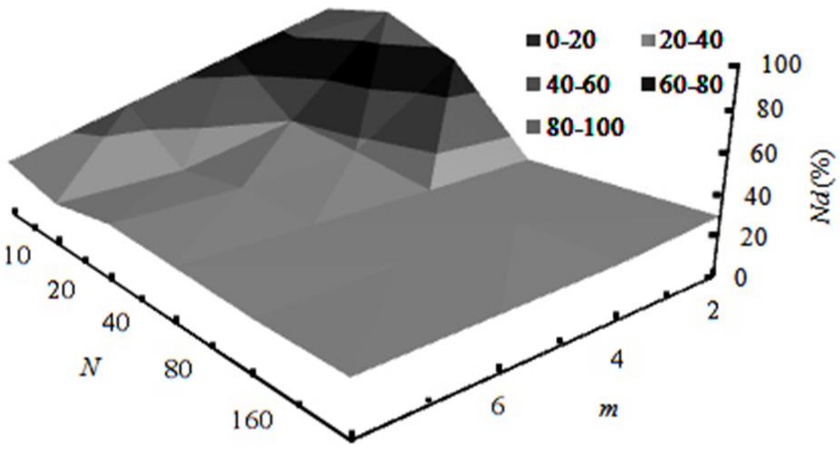
ارتباط شبکه و تعداد گره‌های آن، برای معیارهای مختلف انتخاب گره‌ها، برای ضریب تجانس[4] $B = 1$ در شکل 7 نشان داده شده اند. در این شبکه‌ها نیز دینامیک لورنز در گره‌ها، زمان رسیدن به حرکت همگام معادل با 20 ثانیه، وزن ارتباط معادل $c = 1$ و کنترلر توصیف شده در معادله (10) انتخاب شده است.

بررسی نتایج در شبکه های مستقل از مقیاس، نشان می‌دهد که انتخاب گره‌های کنترل شونده بر اساس معیار مرکزیت نزدیکی بخصوص در شبکه‌ها با تعداد گره‌های بالاتر، منجر به کاهش تعداد گره‌های کنترل شونده می‌شود. این به معنای بهبود کنترل پذیری گیره ایی شبکه های مستقل از مقیاس با انتخاب گره‌های کنترل شونده از معیار مرکزیت نزدیکی است. نتیجه مهم



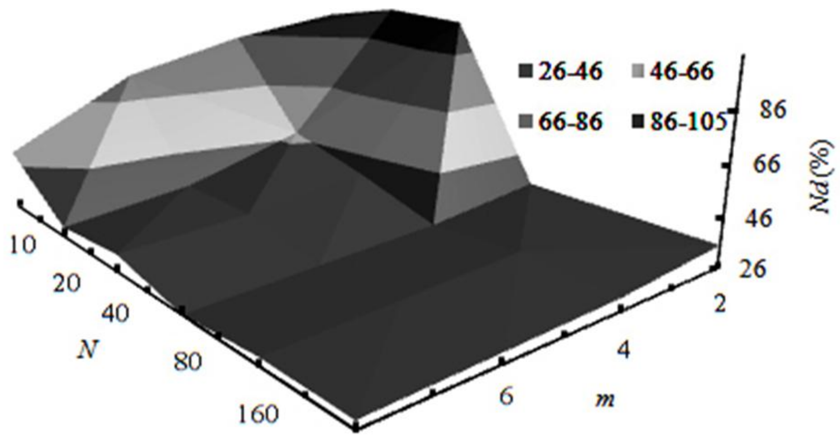
(a)

(الف)



(ب)

(b)



(c)

(ج)

Fig. 7 Driver nodes quantity based on the centrality criteria in the Scale Free networks ($B = 1$) a) Betweenness centrality criterion b) Closeness centrality criterion c) Eigen vector centrality criterion

شکل 7 تعداد گره های کنترل شونده بر اساس معیار انتخاب مرکزیت در شبکه های دینامیکی مستقل از مقیاس ($B = 1$) الف) معیار مرکزیت میانی ب) معیار مرکزیت نزدیکی ج) معیار مرکزیت بردار ویژه

4- Professional attachment

دیگر این است که تعداد گره‌های کنترل شونده که بر اساس معیار مرکزیت نزدیکی و مرکزیت بردار ویژه انتخاب می‌شوند، در تمامی ضرایب ارتباط، کمتر از تعداد گره‌های انتخاب شده با معیار مرکزیت میانی هستند. تعداد گره های کنترل شونده در شبکه‌های مستقل از مقیاس با ضریب تجانس B= 3 نیز در شکل 8 نشان داده شده است. مقایسه نتایج در شکل‌های 7 و 8 نشان می‌دهد با افزایش ضریب تجانس در این شبکه‌ها، تعداد گره‌های کنترل شونده کاهش می‌یابد. این کاهش در شبکه‌ها با تعداد بیشتر مشهود تر است.

به منظور جمع بندی بر روی نتایج بدست آمده از کنترل پذیری گیره ایی شبکه‌های دینامیکی بر اساس عملکرد حرکت همگام، خلاصه نتایج در جدول 1 نشان داده شده است. نتایج برای شبکه ها با مدل های ساختاری مختلف با اندازه های تنک[1] و چگال[2] مشخص شده اند.

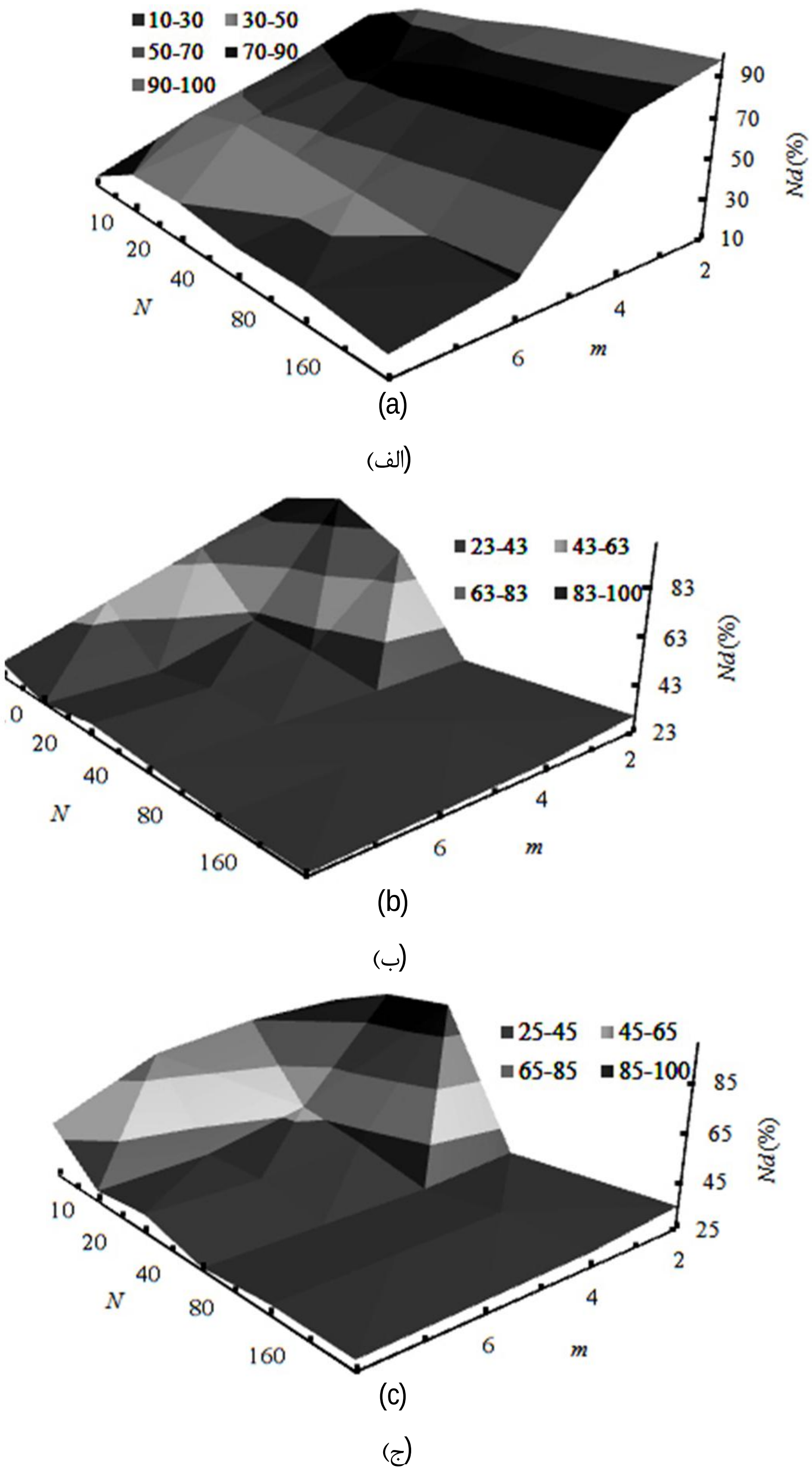


Fig. 8 Driver nodes quantity based on the centrality criteria in the Scale Free networks ($B = 3$) a) Betweenness centrality criterion b) Closeness centrality criterion c) Eigen vector centrality criterion

شکل 8 تعداد گره های کنترل شونده بر اساس معیار انتخاب مرکزیت در شبکه های دینامیکی مستقل از مقیاس (B= 3) الف) معیار مرکزیت میانی ب) معیار مرکزیت نزدیکی ج) معیار مرکزیت بردار ویژه

جدول 1 نتایج بررسی کنترل پذیری گیره ایی شبکه های دینامیکی بر اساس عملکرد حرکت همگام

Table 1 Results for pinning controllability of the dynamical networks based on the synchronized motion performance

نوع شبکه	اندازه شبکه	معیار مناسب انتخاب گره های کنترل شونده
شبکه های تصادفی	تنک	معیار مرکزیت میانی
	چگال	معیار مرکزیت میانی
شبکه جهان کوچک	تنک	معیار مرکزیت میانی
	چگال	معیار مرکزیت میانی
شبکه مستقل از مقیاس	تنک	معیار مرکزیت نزدیکی
	چگال	معیار مرکزیت نزدیکی

5- نتیجه گیری

مسئله تعیین تعداد و نوع گره‌های کنترل شونده که تحت عنوان کنترل پذیری گیره ایی در شبکه‌های دینامیکی مطرح است، در این مقاله مورد بررسی قرار گرفته است. برای این منظور معیارهای مرکزیت میانی، مرکزیت نزدیکی و مرکزیت مقادیر ویژه به عنوان سه معیار اصلی که نشان دهنده میزان اهمیت گره‌ها در یک شبکه دینامیکی هستند، مورد بررسی قرار گرفته اند. برای هر یک از این معیارها، عملکرد حرکت همگام شبکه مورد توجه بوده است. نتایج نشان می‌دهد در صورتی که بخشی از گره‌های شبکه کنترل شوند، عملکرد حرکت همگام شبکه در مدت زمان رسیدن به حرکت همگام بهبود می‌یابد. نتایج بررسی کنترل پذیری گیره ایی برای شبکه‌های دینامیکی تصادفی نشان می‌دهد که کمترین تعداد گره‌های کنترل شونده به منظور دستیابی به عملکرد مطلوب حرکت همگام که در اینجا زمان رسیدن به حرکت همگام است، مربوط به معیار کنترل گره‌ها بر اساس مرکزیت میانی است. این نتیجه برای شبکه‌های جهان کوچک نیز برقرار بوده با این تفاوت که برای شبکه های جهان، تعداد گره‌های کنترل شونده در شبکه‌ها با اندازه بزرگتر، بیشتر می‌شود. در ادامه بررسی نتایج در شبکه‌های مستقل از مقیاس، نشان می‌دهد که انتخاب گره‌های کنترل شونده بر اساس معیار مرکزیت نزدیکی بخصوص در شبکه‌ها با تعداد گره‌های بالاتر، منجر به کاهش تعداد گره‌های کنترل شونده می‌شود. نتیجه مهم دیگر این است که تعداد گره‌های کنترل شونده که بر اساس معیار مرکزیت نزدیکی و مرکزیت بردار ویژه انتخاب می‌شوند، در تمامی ضرایب ارتباط، کمتر از تعداد گره‌های انتخاب شده با معیار مرکزیت میانی هستند. در پایان بررسی اثر ضریب همسایگی در شبکه های جهان کوچک و ضریب تجانس در شبکه‌های مستقل از مقیاس بر روی کنترل پذیری گیره ایی نشان می‌دهد با افزایش این دو ضریب، تعداد گره‌های کنترل شونده کاهش می‌یابد. این کاهش در شبکه‌ها با تعداد بیشتر مشهود تر است.

6- فهرست علائم

علائم لاتین

a	درایه ماتریس ارتباط
B	ضریب تجانس
c	وزن ارتباط

1- Sparse
2- Dense

d	درایه ماتریس کنترلر
k	ضریب همسایگی
l	درایه ماتریس لاپلاسین
N	تعداد گره های شبکه
N_d	تعداد گره های کنترل شونده
p	ضریب احتمال ارتباط
r	ضریب در معادله لورنز
u	ورودی کنترلی

علائم یونانی

Γ	ماتریس ارتباط داخلی
Λ	ضریب لیپ شیتز
λ	مقدار ویژه
θ	متوسط مقادیر ویژه
σ	ضریب در معادله لورنز
γ	ضریب در معادله لورنز

زیرنویس‌ها

i	شمارنده گره
j	شمارنده گره

7- تقدیر و تشکر

نویسندگان این مقاله، از پروفسور J.J.Slotine از دانشگاه MIT و دکتر Gourang Chen از دانشکاه ملی تایوان برای مکالمات بسیار سودمندشان، تشکر ویژه می نمایند.

8- پیوست

پیوست الف: اثبات نامساوی (11)

برای اثبات پایداری و بدست آوردن شرط آن، تابع لیاپانوف مطابق معادله (14) را در نظر می گیریم:

$$V(t) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} e_i^T(t)\, e_i(t) \quad (14)$$

مشتق تابع $V(t)$ در طول مسیر معادله (6) به صورت معادله (15) است:

$$\dot{V}(t) = \sum_{i=1}^{N} e_i^T(t)\, \dot{e}_i(t) \quad (15)$$

با جاگذاری معادله (9) در (15) ، معادله به شکل معادله (16) نوشته می‌شود:

$$\dot{V}(t) = \sum_{i=1}^{N} e_i^T(t)\left[\left(f(e_i(t),t) + c\sum_{j=1}^{N} l_{ij}\,\Gamma e_j(t)\right)\right] - \sum_{i=1}^{N} d_i(t) e_i^T(t)\,\Gamma e_i(t) \quad (16)$$

اعضای ماتریس $D = \mathrm{diag}(0,0,\dots,0,d_{k+1},d_{k+2},\dots,d_N)$ $d_i(t)$ هستند که نشان دهنده گره‌های کنترل شونده در شبکه می باشد.

با توجه به شرط لیپ شیتز بیان شده در بخش 2 و استفاده از خواص ضرب کرونکر، معادله (16) به شکل معادله (17) نوشته می شود:

$$\dot{V}(t) \le e^T(t)[(I_N \otimes \Lambda\Gamma) + c(L \otimes \Gamma)] - [c(D \otimes \Gamma)]e_j(t) < 0 \quad (17)$$

برای پایداری مجانبی حرکت همگام، مشتق تابع لیاپانوف باید منفی معین باشد. بنابراین شرط معادله (18) باید برقرار باشد:

$$(I_N \otimes \Lambda\Gamma) + c(L \otimes \Gamma) - c(D \otimes \Gamma) < 0 \quad (18)$$

پیوست ب: روابط معیارهای مرکزیت در شبکه های دینامیکی

مرکزیت در شبکه های دینامیکی، بیانگر میزان اهمیت گره ها در شبکه هاست که بر اساس خصوصیاتی مانند ارتباطات گره‌ها در شبکه و نیز میزان تأثیرگذاری و تأثیرپذیری آن‌ها در شبکه تعیین می‌شود. بر این اساس سه نوع معیار مرکزیت در شبکه، شامل مرکزیت میانی، مرکزیت نزدیکی و مرکزیت بردار ویژه به صورت زیر تعریف می شوند:

اندیس مرکزیت میانی با رابطه (19) محاسبه می گردد[15].

$$C_B(v) = \sum_{s\neq v\neq t\in V} \frac{\sigma_{st}(v)}{\sigma_{st}} \quad (19)$$

که در آن σ_{st} تعداد کوتاهترین مسیرها از گره s به گره t است. $\sigma_{st}(v)$ نیز تعداد کوتاهترین مسیرها از گره s به گره t است که از گره v عبور می‌کند.

اندیس مرکزیت نزدیکی با رابطه (20) محاسبه می شود[16].

$$C(x) = \frac{1}{\sum_y d(x,y)} \quad (20)$$

که در آن $d(x,y)$ جمع فواصل گره x از تمامی گره های دیگر است.

اندیس مرکزیت بردار ویژه با رابطه (21) محاسبه می شود[17].

$$C_x(v) = \frac{1}{\lambda}\sum_{t\in A} a_{v,t}\ x_t \quad (21)$$

که در آن λ مقدار ویژه ماکزیمم ماتریس ارتباط است.

9- مراجع

[1] S. H. Strogatz, Exploring complex networks, *Nature*, Vol. 410, No. 6825, pp. 268-276, 2001 .

[2] A. Arenas, A. Diaz-Guilera, C. J. Pérez-Vicente, Synchronization processes in complex networks, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Vol. 224, No. 1, pp. 27-34 ,2006.

[3] M. Jalili, Enhancing synchronizability of diffusively coupled dynamical networks: a survey, *Neural Networks and Learning Systems, IEEE Transactions on*, Vol. 24, No. 7, pp. 1009-1022, 2013 .

[4] G. Ali, A. Soleyman, Pinning control for synchronization of nonlinear complex dynamical network with suboptimal SDRE controllers, *Nonlinear Dynamics*, 2015 .in press.DOI 10.1007/s11071-015-2383-8

[5] Y.-Y. Liu, J.-J. Slotine, A.-L. Barabási, Controllability of complex networks, *nature*, Vol. 473, No. 7346, pp. 167-173, 2011 .

[6] Z. Yuan, C .Zhao, Z. Di, W.-X. Wang, Y.-C. Lai, Exact controllability of complex networks, *Nature communications*, Vol. 4,No 1, pp. 1-9, 2013 .

[7] F. Pasqualetti, S. Zampieri, F. Bullo, Controllability metrics, limitations and algorithms for complex networks, *Control of Network Systems, IEEE Transactions on*, Vol. 1, No. 1, pp. 40-52, 2014 .

[8] M. Jalili, O. A. Sichani, X. Yu, Optimal pinning controllability of complex networks: Dependence on network structure, *Physical Review E*, Vol. 91, No. 1, pp. 012803, 2015 .

[9] Y. Tang, H .Gao, J. Kurths, J.-a. Fang, Evolutionary pinning control and its application in UAV coordination, *Industrial Informatics, IEEE Transactions on*, Vol. 8, No. 4, pp. 828-838, 2012 .

[10] P. ERDdS, A. WI, On random graphs I, *Publication Mathematic Debrecen*, Vol. 6, pp 290-297,1979.

[11] D. J. Watts, S. H. Strogatz, Collective dynamics of ‘small-world’networks, *nature*, Vol. 393, No. 6684, pp. 440-442, 1998 .

[12] A.-L. Barabási, R. Albert, Emergence of scaling in random networks, *science*, Vol. 286, No. 5439, pp. 509-5,1999.

[13] W. Yu, G. Chen, J. Lü, On pinning synchronization of complex dynamical networks, *Automatica*, Vol. 45, No. 2, pp. 429-435, 2009 .

[14] Gomroki. M, Abedini. M, Salarieh. H, Meghdari. A, Identification of Lorenz chaotic system based on synchronization using fractional order calculus, *Modares MechanicalEngineering*, Vol. 14, No. 7, pp. 68-76, 2014 .(in Persian فارسی)

[15] U. Brandes, A faster algorithm for betweenness centrality, *Journal of Mathematical Sociology*, Vol. 25, No. 2, pp. 163-177, 2001 .

[16] K. Okamoto, W. Chen, X.-Y. Li ,*Ranking of closeness centrality for large-scale social networks*, in: *Frontiers in Algorithmics*, Eds., pp. 186-195: Springer, 2008 .

[17] P. Bonacich, Some unique properties of eigenvector centrality, *Social Networks*, Vol. 29, No. 4, pp. 555-564, 2007 .