



# محاسبه ضریب شدت تنش ترک‌های سطحی در یک خانواده از دیسک‌های دوار نازک و ضخیم با استفاده از تابع وزن دو بعدی

رحمت الله قاجار<sup>1\*</sup>، میثم داودآبادی<sup>2</sup>، حامد سعیدی گوگرچین<sup>3</sup>

- 1- استاد، مهندسی مکانیک، آزمایشگاه خواص مکانیکی مواد دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران  
 2- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، آزمایشگاه خواص مکانیکی مواد دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران  
 3- استادیار، مهندسی خودرو، آزمایشگاه تحلیل شاره‌ها و سازه‌های خودرو دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران  
 \* تهران، صندوق پستی 19395-1999، ghajar@kntu.ac.ir

## اطلاعات مقاله

## چکیده

مقاله پژوهشی کامل  
 دریافت: 18 شهریور 1394  
 پذیرش: 20 مهر 1394  
 ارائه در سایت: 20 آبان 1394  
 کلیدواژگان:  
 دیسک دوار  
 تابع وزن دو بعدی  
 ضریب شدت تنش  
 ترک سطحی

در این پژوهش خانواده‌ای از دیسک‌های دوار پرکاربرد در صنایع توربین و کمپرسور ایران از دیدگاه مکانیک شکست مطالعه می‌شود. در شرایط کاری، تحت اثر بارهای مکانیکی و حرارتی ترک در دیواره داخلی دیسک جوانه می‌زند. هدف از این پژوهش ارائه یک تابع وزن دوبعدی برای مجموعه‌ای از دیسک‌های دوار حاوی ترک‌های طولی نیم بیضوی می‌باشد. بدین منظور، ابتدا شکل عمومی تابع وزن دوبعدی براساس توابع وزن ترک‌های محاط انتخاب می‌شود. تعیین ضرایب ثابت شکل عمومی این تابع وزن براساس نتایج ضریب شدت تنش مرجع در هندسه ترک‌دار تحت بارگذاری مرجع حاصل می‌شود. عدم وابستگی نتایج به تعداد جملات تابع وزن بررسی می‌شود. پس از استخراج تابع وزن برای دیسک‌هایی در گستره 90 تا 420 میلی‌متر ضخامت، امکان تعیین ضریب شدت تنش ترک در دیسک‌ها تحت بارگذاری دلخواه فراهم می‌گردد. این تابع وزن می‌تواند مقادیر ضریب شدت تنش برای هر نقطه دلخواه روی جبهه ترک، که سطوح آن تحت بارگذاری یک یا دوبعدی قرار دارند، را محاسبه نماید. نتایج نشان می‌دهد که در نسبت عمق ترک‌های بزرگ، ضریب شدت تنش در نقاط سطحی با افزایش نسبت ارتفاع پایه به ضخامت دیسک افزایش می‌یابد. در یک نسبت منظر معین شکل هندسی دیسک بر روی ضریب شدت تنش ترک موثر می‌باشد. مقایسه نتایج حاصل از تابع وزن و نتایج حاصل از روش اجزاء محدود از تطابق مناسبی برخوردار می‌باشد. امکان شبیه‌سازی رشد ترک خستگی و پیش‌بینی زمان بازبینی دیسک‌ها با به‌کارگیری این تابع وزن به سادگی فراهم می‌شود.

## Stress intensity factor calculation for surface crack in a family of thin and thick rotating disks using two dimensional weight functions

Rahmatollah Ghajar<sup>1\*</sup>, Meysam Davoud Abadi<sup>1</sup>, Hamed Saeidi Googarchin<sup>2</sup>

- 1- Department of Mechanical Engineering, Khajeh. Nasir. Toosi University of Technology, Tehran, Iran  
 2- Department of Automotive Engineering School, Iran University of Science & Technology, Tehran, Iran  
 \* P.O.B. 19395-1999, Tehran, Iran, ghajar@kntu.ac.ir

## ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
 Received 09 September 2015  
 Accepted 12 October 2015  
 Available Online 11 November 2015

**Keywords:**  
 Rotating disk  
 Two-dimensional weight function  
 Stress intensity factor  
 Surface crack

## ABSTRACT

A family of rotating disks used in Iranian turbine and compressor industry is investigated. Mechanical and thermal loads due to working condition leads to the crack initiation in the inner surface of the disk. The aim of this paper is the development of the two-dimensional weight function for the rotating disks containing semi-elliptical longitudinal cracks. The general form of the two-dimensional weight function is related to the proposed weight functions for embedded cracked domain in literature. In order to determine the unknown coefficient of the weight function, the reference stress intensity factors for cracked geometry subjected to reference loads are calculated. The analysis indicated that the results are independent of the number of terms in proposed weight function expansion. Extracting the weight function for disks from 90 to 420 mm thickness enables prediction of stress intensity factor for cracks in the structure subjected to arbitrary loading. The stress intensity factor for each point on the crack front subjected to one or two dimensional loads are calculated using the derived weight function. The results reveal that increasing the height to thickness ratio in rotating disks leads to the increase of the stress intensity factor for high depth ratio crack ones. Results show that the configuration of the disk sections affects the stress intensity factors of the same aspect ratio cracks in the structures. Comparison of the results obtained from the weight function method and those obtained with FEM are in good agreement.

## 1- مقدمه

کمپرسورسازی می‌باشند. در اثر سرعت کاری بالا و بارهای حرارتی، دیواره دیسک‌های دوار از جمله قطعات پرکاربرد در صنایع توربین‌سازی و داخلی دیسک در معرض تنش‌های بیشینه محیطی قرار می‌گیرد. لذا این

Please cite this article using:

R. Ghajar, M. Davoud Abadi, H. Saeidi Googarchin, Stress intensity factor calculation for surface crack in a family of thin and thick rotating disks using two dimensional weight functions, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 11, pp. 84-94, 2015 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

مجازی در هندسه بدون ترک و انتگرال‌گیری از آن قابل تعیین می‌باشد. استخراج تابع وزن معمولاً با استفاده از نتایج ضریب شدت تنش برای یک یا چند بارگذاری مرجع صورت می‌گیرد.

پژوهش‌های زیادی در زمینه تعیین تابع وزن برای ترک‌های نیم بیضوی انجام شده است. لیستبر و همکاران [2] با استفاده از دو بارگذاری مرجع تابع وزن را برای استوانه جدار ضخیم با ترک‌های محیطی داخلی ارائه کردند. ژنگ و همکاران [3] به کمک روش تابع وزن یک رابطه صریح برای ضریب شدت تنش برای نقاط سطحی و نقطه عمقی یک ترک نیم‌بیضوی ارائه نمودند. لی و همکاران [4] با استفاده از روش معادله انتگرال مرزی، تابع وزن را برای ترک‌های طولی و محیطی بیان کردند. وارفلومیو [5] تابع وزن را به منظور محاسبه ضرایب شدت تنش مود اول برای استوانه با ترک محیطی بیرونی سرتاسری تحت بار کششی ارائه کرد. در این مقاله یک رابطه کلی برای بازشدگی دهانه ترک مرجع بیان شده است. جونز و راتول [6] تابع وزن برای ترک‌های نیم بیضوی محیطی داخلی سرتاسری در استوانه تحت بارگذاریهای مختلف بدست آوردند. شاهانی و نبوی [7,8] به مطالعه لوله‌های جدار ضخیم حاوی ترک طولی نیم‌بیضوی تحت بارگذاری مکانیکی و حرارتی پرداختند. آن‌ها با استفاده از روش تابع وزن تغییرات ضریب شدت تنش در نقاط سطحی و عمیق‌ترین نقطه ترک را برای نسبت منظرهای مختلف مطالعه نمودند. قاجار و نبوی [9,10] یک رابطه بسته برای ضریب شدت تنش نقاط سطحی و عمیق‌ترین نقطه در ترک‌های داخلی محیطی سرتاسری در استوانه‌های جدار ضخیم ارائه نمودند. قاجار و سعیدی [11] به کمک روش تابع وزن دو بعدی مقادیر ضریب شدت تنش را برای تمام نقاط روی جبهه ترک طولی نیم‌بیضوی در جداره داخلی استوانه برای یک استوانه با نسبت شعاع معین و همچنین ترک نیم‌بیضوی در ورق با ضخامت محدود ارائه نمودند. قاجار و سعیدی [12] تغییرات ضریب شدت تنش را در لوله جدار ضخیم اتوفرتاژ به روش تابع وزن دو بعدی بررسی نمودند. قاجار و همکاران [13] روابط صریحی برای به‌دست آوردن ضریب شدت تنش مود اول برای استوانه‌هایی با نسبت شعاع به ضخامت 30 تحت بارگذاری مکانیکی و حرارتی ارائه نمودند و همزمان اندرکنش بارهای مکانیکی و حرارتی را نیز بررسی کردند.

مطالعات انجام شده در مورد ضریب شدت تنش با استفاده از تابع وزن در دو حوزه کلی بوده است. اکثر مطالعات مربوط به توابع وزن یک بعدی و برای حالتی است که تغییرات بار اعمالی به سطوح ترک فقط در راستای عمق ترک باشد. همچنین این توابع وزن فقط ضریب شدت تنش را برای دو نقطه عمقی و سطحی ترک به‌دست می‌آورند. این در حالی است که بار وارد شده بر سطوح ترک برای بسیاری از دیسک‌های ضخیم صنعتی دوطبقه می‌باشد. پژوهش‌های انجام شده در زمینه تابع وزن دوطبقه نیز محدود به استوانه برای یک حالت خاص از نسبت شعاع به ضخامت می‌باشد. اگر نسبت شعاع به ضخامت تغییر کند این توابع وزن پاسخگو نخواهند بود. دیسک‌های رایج در صنعت حتی دیسک‌هایی که در یک مجموعه استفاده می‌شوند دارای ابعاد و اندازه‌های مختلفی هستند و استخراج تابع وزن به این شیوه فقط در مورد یک دیسک خاص می‌تواند قابل استفاده باشد.

در این پژوهش تابع وزن دو بعدی برای یک خانواده از دیسک‌های رایج در صنعت استخراج می‌گردد. ناپیوستگی هندسی به‌صورت یک ترک نیم بیضوی طولی در سطح داخلی دیسک در نظر گرفته می‌شود. تابع وزن استخراجی، امکان تعیین ضریب شدت تنش در نقاط مختلف جبهه ترک برای خانواده از دیسک‌های دوار را فراهم می‌کند. همچنین میدان تنش یک

ناحیه مستعد رشد ترک و از دیدگاه مکانیک شکست بحرانی می‌باشد. به طوری که شکست‌های زیادی در دیسک توربین‌ها ملاحظه شده است. در مطالعات انجام شده شکست خستگی به‌عنوان اصلی‌ترین مکانیزم آسیب در این شکست‌ها گزارش شده است [1]. در شکل 1 سطح مقطع یک دیسک که در اثر رشد ترک خستگی دچار شکست شده است، مشاهده می‌گردد.

نواحی تیره‌تر و کوچک‌تر (که با حرف A معرفی شده‌اند)، مربوط به ناحیه جوانه‌زنی و رشد ترک خستگی می‌باشد. سایر نواحی که روشن‌تر بوده و دارای سطح شکست زبرتری نسبت به این ناحیه می‌باشند مربوط به شکست سریع هستند. همان‌طور که مشاهده می‌شود ترک در سطح درونی دیسک و در محل تماس دیسک با محور جوانه می‌زند. در اثر اعمال بارهای متناوب مکانیکی و حرارتی بعد از چند سیکل ترک به شکل نیم‌بیضوی در می‌آید و ممکن است که ادامه بار موجب رشد ترک و شکست نهایی دیسک گردد. با توجه به شرایط طراحی و سرعت دورانی بالای توربین‌ها، عیب جزئی در یک قطعه از توربین می‌تواند خسارت‌های شدیدی را به کل واحد وارد نماید. با توجه به محدود بودن عمر قطعات، تخمین عمر خستگی دیسک به‌منظور جلوگیری از بروز خسارت‌های جانی و مالی ضروری می‌باشد. نخستین گام در تخمین عمر خستگی به کمک مکانیک شکست الاستیک خطی، تعیین ضریب شدت تنش می‌باشد.

یکی از روش‌های تعیین ضریب شدت تنش روش تابع وزن است. مزیت عمده این روش نسبت به روش‌های عددی نظیر روش اجزاء محدود کاهش قابل توجه زمان محاسبه ضریب شدت تنش می‌باشد. به همین دلیل به‌عنوان یک روش کارآمد برای زمانی که به تعداد زیادی از حل‌های ضریب شدت تنش با بارگذاری پیچیده لازم است قابل کاربرد می‌باشد. به‌عنوان مثال می‌توان به شبیه‌سازی رشد ترک خستگی در یک سازه اشاره نمود. در این حالت به واسطه ارتباط بین نرخ رشد و ضریب شدت تنش به تعداد بسیار زیادی از حل‌های ضریب شدت تنش موردنیاز می‌باشد. بدیهی است در چنین شرایطی استفاده از این روش بسیار مفید و کارآمد می‌باشد. براساس این روش اگر تابع وزن برای یک هندسه معین معلوم باشد، برای هر بارگذاری دلخواه ضریب شدت تنش از ضرب تابع وزن در توزیع تنش بر روی ترک

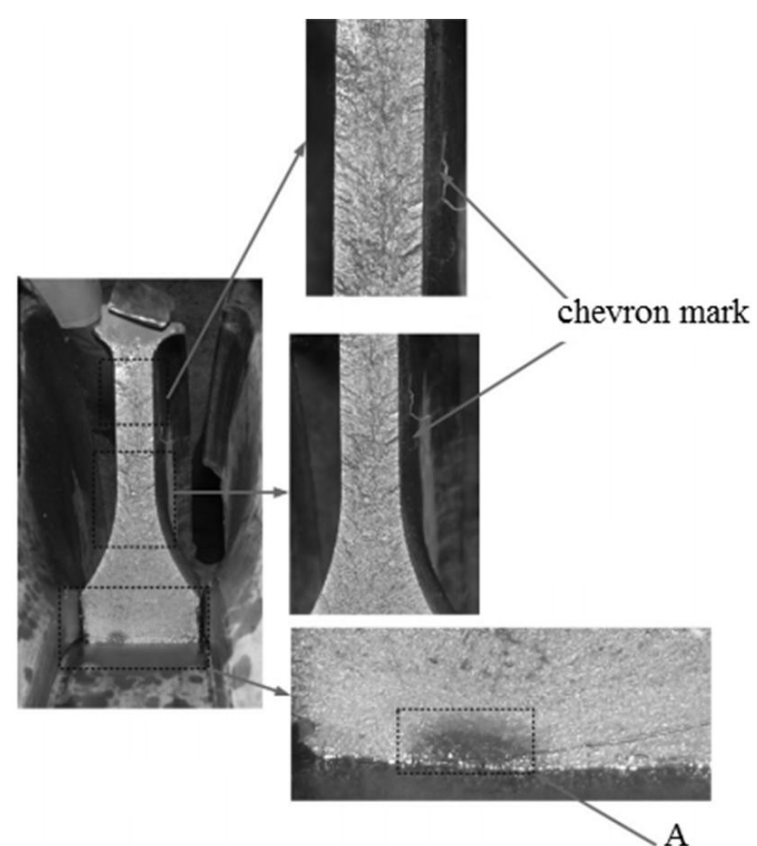


Fig. 1 The fracture surface of a turbine disk [1]

شکل 1 سطح شکست یک دیسک توربین [1]

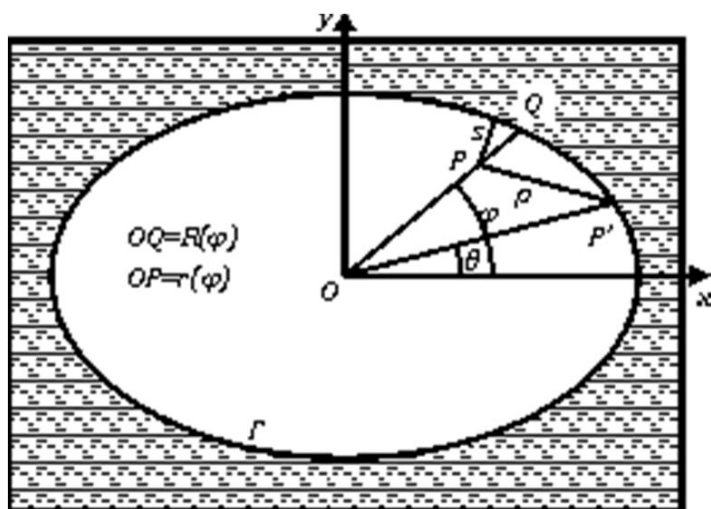


Fig. 2 Weight function notation for embedded elliptical crack [18]

شکل 2 پارامترهای تابع وزن برای ترک بیضوی محاط [18]

بررسی‌های انجام شده در مرجع [19] نشان داده که در مورد دیسک‌های دوار، ضریب شدت تنش و به تبع آن ضرایب ثابت به چهار پارامتر اصلی که در شکل 3 معرفی شده‌اند بستگی دارد. این چهار پارامتر به ترتیب ضریب منظر ترک  $\alpha$ ، نسبت عمق ترک  $\beta$ ، نسبت ارتفاع پایه به ضخامت دیسک  $\gamma$  و موقعیت بی بعد نقطه دلخواه روی جبهه ترک  $(2\phi/\pi)$  می‌باشند.

بنابراین شکل عمومی تابع وزن دوبعدی برای دیسک‌های دوار مطابق با رابطه (5) خواهد بود.

$$m(x, y; P') = \frac{\sqrt{2s}}{\pi^{3/2}\rho^2} \left[ 1 + \sum_{i=1}^n M_i(\alpha, \beta, \gamma, 2\phi/\pi) \left( 1 - \frac{r(\phi)}{R(\phi)} \right)^i \right] \quad (5)$$

### 3- خانواده دیسک دوار حاوی ترک طولی نیم بیضوی

یک خانواده از دیسک‌های دوار با تغییرات ابعاد هندسی بیان شده در جدول 1 مورد مطالعه قرار می‌گیرد. این بازه‌ها به نحوی انتخاب شده که یک خانواده

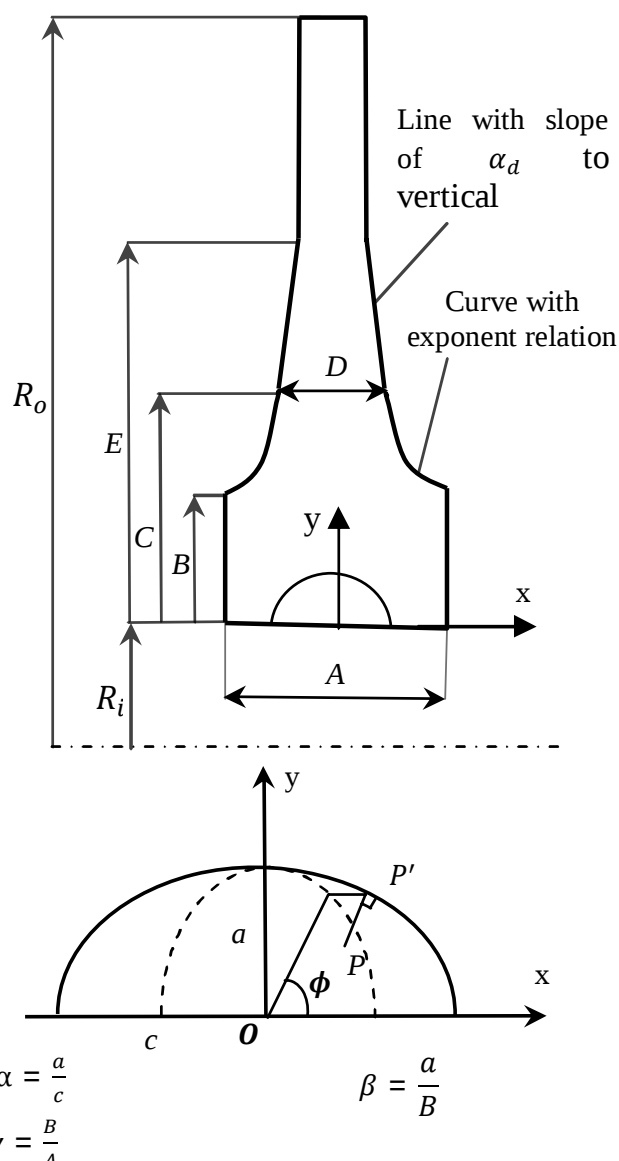


Fig. 3 Semi-elliptical surface crack in disk

شکل 3 ترک نیم بیضوی سطحی در دیسک

بعدی برای دیسک‌های با ضخامت کم و میدان تنش دو بعدی برای دیسک با ضخامت زیاد استخراج می‌گردد. با استفاده از میدان تنش، ضریب شدت تنش در هر دو نوع دیسک به روش تابع وزن محاسبه و با نتایج اجزاء محدود مقایسه می‌گردد.

### 2- روش تابع وزن

روش تابع وزن براساس اصل جمع آثار می‌باشد. بوئیکر و رایس [15,14] نشان دادند، اگر جابجایی‌های سطح ترک،  $u_r(x, a)$  و ضریب شدت تنش آن،  $K_r$  برای یک بارگذاری مرجع مشخص باشد، می‌توان به کمک روش تابع وزن ضریب شدت تنش برای هر بارگذاری دیگری را طبق رابطه (1) استخراج نمود.

$$K = \int_0^a \sigma(x) \cdot m(x, a) dx \quad (1)$$

که در آن  $K$  ضریب شدت تنش جدید و  $\sigma(x)$  توزیع تنش روی سطح ترک مجازی در هندسه بدون ترک و  $m(x, a)$  تابع وزن مسئله است و به صورت رابطه (2) تعریف می‌شود:

$$m(x, a) = \frac{H}{K_r} \frac{\partial u_r(x, a)}{\partial a} \quad (2)$$

که در آن  $a$  طول ترک،  $H$  ثابت ماده و  $x$  محوری در راستای طول ترک می‌باشد.

تعیین میدان‌های جابجایی سطوح ترک اغلب پیچیده می‌باشد به همین جهت پتروسکی و آخن‌باخ [16] با استفاده از خاصیت خود ارضایی تابع وزن عبارتی را برای تعیین تقریبی میدان‌های جابجایی بیان نمودند. دقت روش پتروسکی و آخن‌باخ وابسته به ضریب شدت تنش مرجع می‌باشد به همین دلیل گلینکا و شن [17] یک شکل عمومی از تابع وزن با ضرایب ثابت را بیان نمودند.

برای ترک دوبعدی که تغییرات بارگذاری روی سطح ترک در هر دو بعد می‌باشد، ضریب شدت تنش در طول جبهه ترک متغیر می‌باشد. رابطه (1) برای ترک‌های دو بعدی به صورت یک انتگرال دوگانه بر روی سطوح ترک تبدیل می‌شود.

$$K(P') = \iint \sigma(x, y) \cdot m(x, y; P') dS \quad (3)$$

در این جا  $m(x, y; P')$  تابع وزن بار نقطه‌ای می‌باشد که با استفاده از آن میزان ضریب شدت تنش در نقطه دلخواه  $P'$  برای جسمی که در معرض جفت بار متمرکز واحد در نقطه‌ای  $P(x, y)$  بر روی سطوح ترک قرار دارد، قابل تعیین می‌باشد.

شکل عمومی  $m(x, y; P')$  برای ترک‌های نیم بیضوی محاط<sup>1</sup> توسط وانگ و گلینکا [18] ارائه شده که به صورت رابطه (4) می‌باشد.

$$m(x, y; P') = \frac{\sqrt{2s}}{\pi^{3/2}\rho^2} \left[ 1 + \sum_{i=1}^n M_i(\theta, \alpha) \left( 1 - \frac{r(\phi)}{R(\phi)} \right)^i \right] \quad (4)$$

که در آن مطابق شکل 2،  $s$  کمترین فاصله بین جبهه ترک و محل وارد شدن بار نقطه‌ای و  $\rho$  فاصله بین محل وارد شدن بار نقطه‌ای تا نقطه‌ی  $P'$  می‌باشد.  $r(\phi)$  و  $R(\phi)$  در شکل 2 معرفی شده‌اند.  $\theta$  و  $\phi$  به ترتیب بیانگر مختصه قطبی نقاط  $P'$  و  $P$  بوده و  $\tan \theta = \alpha \tan \phi$  می‌باشد.

ضرایب ثابت  $M_i$  در رابطه (4) فقط تابع نسبت منظر ترک و موقعیت نقطه دلخواهی می‌باشند که قرار است ضریب شدت تنش برای آن نقطه تعیین گردد.

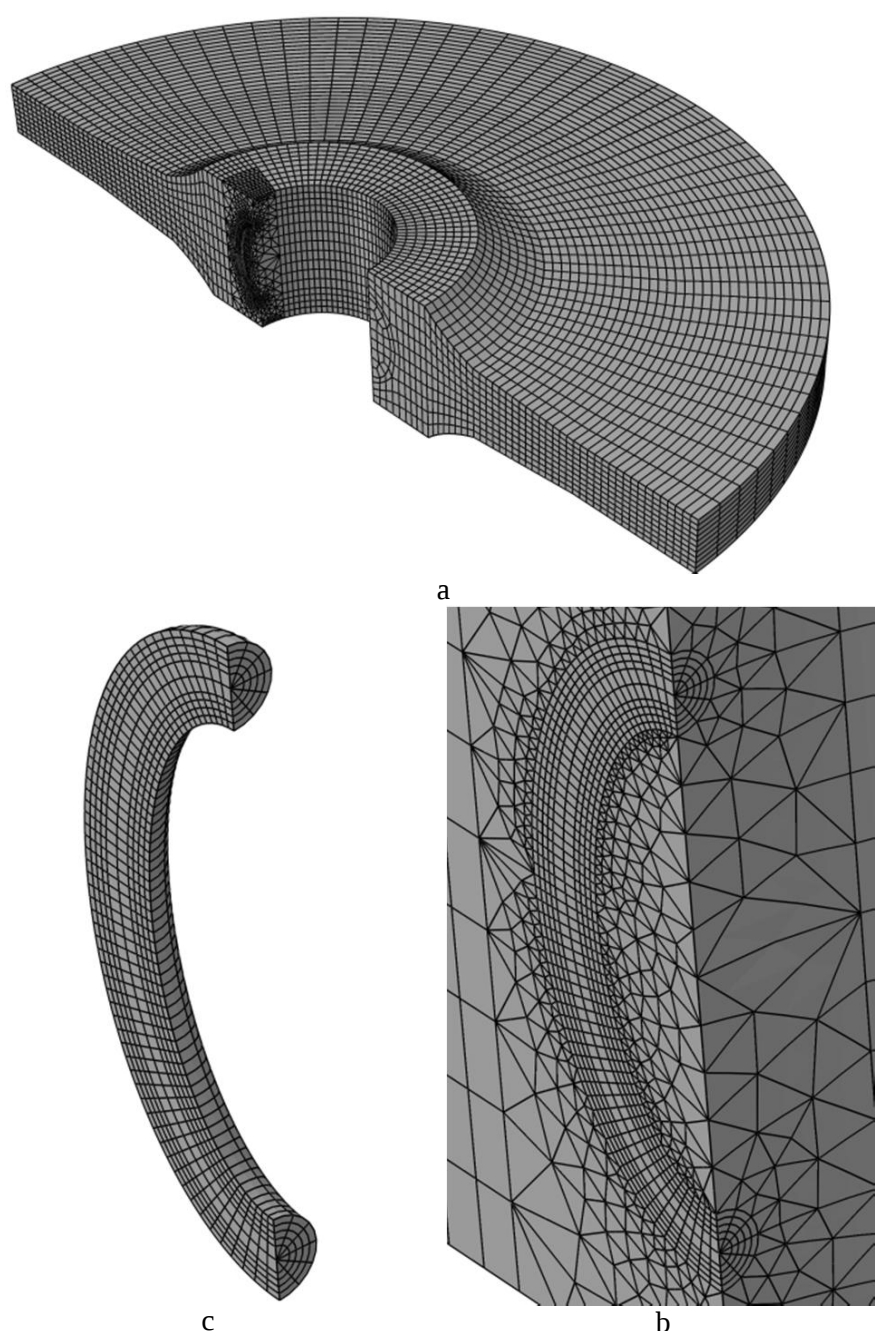
1- Embedded

تکینگی تنش در این نقطه از درجه 0.5 نیست و به عواملی نظیر خواص ماده (نسبت پواسون) و زاویه برخورد جبهه ترک با سطح آزاد بستگی دارد، اما این اثر در محدوده بسیار کوچکی از نقطه سطحی وجود خواهد داشت. به همین منظور در تحلیل حاضر از ضریب شدت تنش نقطه مجاور نقطه‌ی سطحی که به اندازه کافی نیز به آن نزدیک است بعنوان ضریب شدت تنش نقطه سطحی استفاده می‌شود.

برای آن که امکان افزایش تدریجی اندازه المان‌ها وجود داشته باشد در نواحی اطراف ترک از المان‌های هرمی و در سایر نواحی از المان‌های آجری مرتبه دو استفاده می‌شود. جهت استخراج ضرایب شدت تنش مرجع یک کد به زبان برنامه نویسی پایتون<sup>3</sup> نگارش شده و با استفاده از آن نتایج ضریب شدت تنش مرجع برای ترک‌هایی با نسبت منظرهای 0.2 تا 1، نسبت عمق‌های 0.05 تا 0.5 و نسبت ضخامت به پهنای دیسک 0.2 تا 0.5 استخراج می‌گردد.

#### 5- بررسی همگرایی تابع وزن

تابع وزن ارائه شده توسط وانگ و گلینکا در رابطه (4) شامل یک سری می‌باشد. در این بخش تعداد جملات لازم رابطه (5) برای همگرایی تابع



**Fig. 4** The sample mesh for semi-elliptical surface crack in disk: (a) disk, (b) around the crack, (c) the crack front

**شکل 4** نمونه‌ای از مش بندی ترک نیم بیضوی سطحی در دیسک: (a) دیسک، (b) نواحی اطراف ترک، (c) جبهه ترک

از دیسک‌های رایج در صنایع توربین سازی داخلی را پوشش دهد. یک ترک طولی نیم بیضوی در سطح داخلی دیسک در نظر گرفته می‌شود. ابتدا همگرایی تابع وزن بررسی شده و تعداد ثوابت موردنیاز برای همگرایی تابع وزن تعیین می‌شوند. سپس تابع وزن دو بعدی برای مسئله مورد نظر استخراج می‌گردد. در آخر تابع وزن برای هر دو بارگذاری یک بعدی و دو بعدی بر روی سطح ترک صحت سنجی می‌شود.

با جای گذاری رابطه (5) در (3) و با فرض معین بودن ضریب شدت تنش برای بارگذاری مرجع ضرایب ثابت تابع وزن دو بعدی با استفاده از رابطه (6) قابل تعیین می‌باشند.

$$K_r(\alpha, \beta, \gamma, 2\phi/\pi) = \iint \sigma_r \frac{\sqrt{2s}}{\pi^{3/2} \rho^2} \left[ 1 + \sum_{i=1}^n M_i(\alpha, \beta, \gamma, 2\phi/\pi) \left( 1 - \frac{r(\phi)}{R(\phi)} \right)^i \right] dS \quad (6)$$

در این رابطه  $\sigma_r$  بارگذاری مرجع وارد شده بر روی سطوح ترک جهت تعیین ضریب شدت تنش مرجع،  $K_r$  می‌باشد.

جهت استخراج ضرایب شدت تنش مرجع از روش اجزاء محدود استفاده می‌شود. با تعیین ضرایب شدت تنش مرجع برای بارگذاری‌های مختلف بر روی سطوح ترک و انتگرال گیری عددی از رابطه (6) ضرایب ثابت تابع وزن استخراج می‌گردند. با توجه به اینکه بسط سری موجود در رابطه (6) برای چند جمله نوشته می‌شود تعداد بارگذاری‌های مرجع مورد نیاز نیز متغیر می‌باشد. در بخش 5 اثبات می‌شود که برای تنها یک بارگذاری مرجع تابع وزن همگرا می‌شود.

#### 4- مدل سازی عددی

قدم نخست در استخراج تابع وزن بدست آوردن ضریب شدت تنش برای یک بارگذاری مرجع می‌باشد. در پژوهش حاضر به منظور استخراج نتایج ضریب شدت تنش برای بارگذاری مرجع از مدل سازی اجزاء محدود در نرم افزار آباکوس<sup>1</sup> استفاده می‌شود.

با توجه به وجود تقارن هندسی و بارگذاری نیمی از دیسک مدل سازی می‌گردد. مدل سازی با فرض ماده الاستیک خطی انجام می‌شود. در ترک نیم بیضوی پیشانی ترک به یک منحنی تبدیل می‌شود. مطابق شکل 4 به منظور المان بندی جبهه ترک از تونلی از المان‌های تکین استفاده می‌شود. این المان‌ها تکینگی<sup>2</sup> از مرتبه 0.5 را در تنش ایجاد می‌کنند. یکی از فرضیات مهم در مکانیک شکست الاستیک خطی پیوسته بودن جبهه ترک است این فرض برای نقاط سطحی ترک برقرار نیست. پوک [20] نشان داد که مقادیر عددی ضریب شدت تنش این نقاط سطحی قابل اطمینان نمی‌باشد. مرتبه

**جدول 1** بازه ابعاد هندسی دیسک

**Table 1** Range of disk geometric dimensions

| ابعاد هندسی دیسک                           | حد پایین | حد بالا |
|--------------------------------------------|----------|---------|
| شعاع داخلی دیسک $R_i$ (mm)                 | 127      | 170     |
| شعاع خارجی دیسک $R_o$ (mm)                 | 700      | 800     |
| ضخامت بخش ابتدایی $A$ (mm)                 | 90       | 420     |
| ارتفاع ناحیه با ضخامت ثابت $B$ (mm)        | 40       | 130     |
| ارتفاع ناحیه متغیر با رابطه توانی $C$ (mm) | 105      | 210     |
| ارتفاع ناحیه متغیر با رابطه خطی $E$ (mm)   | 130      | 230     |
| زاویه خط با خط قائم $\alpha_d$ (degree)    | 4        | 8       |

1- ABAQUS

2- Singularity

3- Python

جدول 2 بررسی همگرایی تابع وزن

Table 2 The convergence of weight function

| $\gamma=0.3225 \quad \beta=0.011 \quad \alpha=0.2$ |         |         |         |             |
|----------------------------------------------------|---------|---------|---------|-------------|
| $n=4$                                              | $n=3$   | $n=2$   | $n=1$   | $2\phi/\pi$ |
| 12.146                                             | 12.146  | 12.146  | 12.142  | 0           |
| 16.477                                             | 16.477  | 16.477  | 16.475  | 0.25        |
| 21.320                                             | 21.320  | 21.320  | 21.318  | 0.5         |
| 24.620                                             | 24.620  | 24.620  | 24.619  | 0.75        |
| 25.771                                             | 25.771  | 25.771  | 25.768  | 1           |
| $\gamma=0.3225 \quad \beta=0.1 \quad \alpha=0.2$   |         |         |         |             |
| 37.459                                             | 37.459  | 37.456  | 37.358  | 0           |
| 49.727                                             | 49.727  | 49.728  | 49.697  | 0.25        |
| 62.751                                             | 62.751  | 62.752  | 62.691  | 0.5         |
| 70.207                                             | 70.207  | 70.209  | 70.131  | 0.75        |
| 74.098                                             | 74.098  | 74.100  | 74.023  | 1           |
| $\gamma=0.3225 \quad \beta=0.2 \quad \alpha=0.2$   |         |         |         |             |
| 54.496                                             | 54.496  | 54.482  | 54.254  | 0           |
| 70.849                                             | 70.849  | 70.849  | 70.808  | 0.25        |
| 88.784                                             | 88.785  | 88.786  | 88.717  | 0.5         |
| 98.674                                             | 98.674  | 98.678  | 98.560  | 0.75        |
| 102.126                                            | 102.126 | 102.136 | 101.921 | 1           |

وزن پیشنهادی برای انواع هندسه‌های ترک‌دار، از یک عبارت چند جمله‌ای (به عنوان ساده‌ترین شکل تابع برازش) برای برازش داده‌ها به روش حداقل مربعات استفاده می‌شود. برای این منظور از نرم‌افزار متلب استفاده می‌شود.

$$M(\alpha, \beta, \gamma, 2\phi/\pi) = A_0 + A_1 \left(\frac{2\phi}{\pi}\right) + A_2 \beta + A_3 \left(\frac{2\phi}{\pi}\right)^2 + A_4 \left(\frac{2\phi}{\pi}\right) \beta + A_5 \beta^2 + A_6 \left(\frac{2\phi}{\pi}\right)^3 + A_7 \left(\frac{2\phi}{\pi}\right)^2 \beta + A_8 \left(\frac{2\phi}{\pi}\right) \beta^2 + A_9 \left(\frac{2\phi}{\pi}\right)^4 + A_{10} \left(\frac{2\phi}{\pi}\right)^3 \beta + A_{11} \left(\frac{2\phi}{\pi}\right)^2 \beta^2 \quad (9)$$

$$A_i = \sum_{j=0}^4 B_{ij} \alpha^j \quad (10)$$

$$B_{ij} = \sum_{k=0}^3 C_{ijk} \gamma^k \quad (11)$$

همان‌گونه که اشاره شد، از برازش منحنی به روش حداقل مربعات ضرایب  $C_{ijk}$  استخراج می‌شود. این ضرایب در پیوست ارائه شده‌اند.

به‌منظور اطمینان از دقت برازش انجام شده، ضرایب تابع وزن به‌دست آمده از رابطه (9) با مقادیر واقعی آن‌ها برای چند حالت در شکل 5 مقایسه شده‌اند. مشاهده می‌شود که رابطه (9) از دقت بالایی برخوردار است.

تابع وزن ارائه شده به صورت (5) یک تابع وزن جامع برای حالتی که سطح ترک توزیع دو بعدی تنش را تحمل می‌کند، می‌باشد. با کاربرد این تابع، محاسبه ضریب شدت تنش هر نقطه دلخواه از جبهه ترک آسان خواهد بود. بررسی‌ها نشان داده‌اند که بسیاری از دیسک‌های مورد استفاده در صنعت به علت ضخیم بودن دارای توزیع دو بعدی تنش هستند. در چنین دیسک‌هایی توزیع تنش در دیسک هم تابع شعاع و هم تابع ضخامت می‌باشد و بار وارد شده به سطوح ترک نیز دو بعدی خواهد بود. بدیهی است که تابع وزن حاضر برای چنین دیسک‌هایی به آسانی قابل کاربرد می‌باشد.

## 7- نتایج و بحث

در این بخش ابتدا تابع وزن برای یک دیسک نازک و ضخیم با مقایسه نتایج

بررسی می‌شود. برای نیل به این هدف از نتایج ضریب شدت تنش برای چهار بارگذاری مرجع که در رابطه (7) ارائه شده‌اند استفاده می‌گردد.

$$\sigma_r(x, y) = \left(1 - \frac{y}{a}\right)^n \quad n = 0, 1, 2, 3 \quad (7)$$

با استفاده از این چهار بارگذاری مرجع، بسط سری موجود رابطه (6) به ترتیب برای یک، دو، سه و چهار جمله انجام می‌شود. روند کار به این صورت است که ابتدا یک بارگذاری مرجع در نظر گرفته شده سپس ضریب شدت تنش مرجع هندسه ترک دار تحت آن بارگذاری محاسبه می‌شود. با قرار دادن ضریب شدت تنش و بارگذاری مرجع در رابطه (6) یک معادله برحسب ضرایب  $M_i$  ایجاد می‌شود با صرف‌نظر از جملات مرتبه بالاتر و در نظر گرفتن یک جمله از سری فوق، ضریب  $M_1$  قابل تعیین است. برای بسط دو جمله از این سری به دو بارگذاری مرجع نیاز است که از قرار دادن آن‌ها به صورت جداگانه در رابطه (6) دو معادله مستقل با دو مجهول  $M_1$  و  $M_2$  حاصل می‌شود، که مقادیر مجهول به سادگی قابل محاسبه‌اند. بسط دادن سه و چهار جمله از سری نیز به همین ترتیب قابل انجام است. برای تعیین ضرایب  $M_i$  نیاز است که انتگرال موجود در رابطه (6) محاسبه شود. مشکل عمده در محاسبه این انتگرال این است که پارامترهای  $s$  و  $\rho$  در حالت عمومی در دستگاه مختصات کارتزین و سایر دستگاه‌های مختصات شناخته شده تعریف صریحی ندارند، به همین دلیل از تغییر دستگاه مختصات معرفی شده در مرجع [21] استفاده می‌شود. سپس انتگرال با استفاده از روش‌های عددی محاسبه می‌شود. بدین ترتیب با ضرایب  $M_i$  فرم تابع وزن تکمیل می‌گردد. پس از تعیین ضرایب تابع وزن ضریب شدت تنش برای یک بارگذاری مجزای دوبعدی به‌صورت جداگانه برای حالت یک تا چهار جمله از بسط سری رابطه (6) محاسبه و نتایج در جدول 2 ارائه می‌شوند. در این‌جا بار وارد شده جهت تعیین ضرایب  $M_i$  یک بعدی و مطابق با رابطه (7) می‌باشد. از آن‌جایی که در یک شکل عمومی تابع وزن ضرایب هندسی آن یکتا بوده و همچنین با توجه به ماهیت تابع وزن که فقط حاوی اثرات هندسی سازه ترک‌دار می‌باشد، لذا ضرایب به دست آمده برای تابع وزن پیشنهادی وابسته به بارگذاری نمی‌باشند. به عبارت دیگر برای هربارگذاری مرجع دیگر اعم از بار یک بعدی یا دو بعدی ضرایب به صورت یکسان به دست آمده و فقط تابع هندسه می‌باشند.

ضرایب شدت تنش برای ضریب منظر  $\alpha=0.2$ ، نسبت ارتفاع به ضخامت  $\gamma=0.3225$  و سه نسبت عمق  $\beta=0.011, 0.1, 0.2$  استخراج می‌گردند. همان‌طور که مشاهده می‌شود اختلاف ضرایب شدت تنش بدست آمده برای حالت‌های یک تا چهار جمله از بسط سری رابطه (6) ناچیز است. به عبارت دیگر جمله اول از سری رابطه (6) کافی می‌باشد.

## 6- استخراج تابع وزن دوبعدی

با توجه به معین بودن فرم عمومی تابع وزن دو بعدی ترک نیم‌بیضوی سطحی، تعیین این تابع وزن محدود به تعیین ثوابت  $M(\alpha, \beta, \gamma, 2\phi/\pi)$  می‌شود. با معین بودن ضریب شدت تنش برای یک بارگذاری مرجع (به صورت یک فشار ثابت بر روی سطوح ترک) و انتگرال گیری از رابطه (8) ضرایب ثابت تابع وزن استخراج می‌گردند.

$$K(\alpha, \beta, \gamma, 2\phi/\pi) = \iint \frac{\sqrt{2s}}{\pi^{3/2} \rho^2} [1 + M(\alpha, \beta, \gamma, 2\phi/\pi) \left(1 - \frac{r(\phi)}{R(\phi)}\right)] ds \quad (8)$$

رابطه (9) با استفاده از برازش منحنی به روش حداقل مربعات استخراج شده است. در همین راستا، پس از استخراج ضرایب ثابت شکل عمومی تابع

بعدی برای محاسبه ضریب شدت تنش ترک‌های نیم بیضوی در دیسک‌های دوار یافت نمی‌شود، و این پارامتر از لحاظ تجربی به صورت مستقیم قابل اندازه‌گیری نیست، لذا در اکثر مراجع [7,12,18] از مقایسه با نتایج به دست آمده از روش‌های عددی مانند روش اجزاء محدود برای صحت سنجی کار استفاده شده است. در این‌جا نیز به منظور اطمینان از صحت نتایج، مساله به روش اجزاء محدود حل و نتایج آن با نتایج تابع وزن مقایسه می‌گردد.

در نمودارهای شکل 6-a تا 6-e ضریب شدت تنش نقاط مختلف جبهه ترک برای دیسک با توزیع یک بعدی تنش حاصل از اجزاء محدود و تابع وزن مقایسه شده‌اند. مشاهده می‌شود که برای ضریب منظرهای کوچک‌تر از 0.6 ضریب شدت تنش نقطه عمقی ترک بیشتر از نقطه سطحی می‌باشد.

با افزایش نسبت منظر، نقطه بحرانی از نقطه عمقی به نقطه سطحی انتقال انتقال می‌یابد. به طور کلی در ترک‌های نیم بیضوی تحت بار ثابت یا متغیر در جهت عمق و در نسبت منظرهای کوچک، بیشینه ضریب شدت تنش در نقطه عمقی رخ می‌دهد. با افزایش نسبت منظر و در نسبت منظرهای بالا، نقطه بیشینه ضریب شدت تنش از نقطه عمقی به نقطه سطحی منتقل می‌شود. همچنین در نسبت منظرهای پایین اختلاف بین ضریب شدت تنش نقطه عمقی و نقطه سطحی ترک زیاد و با افزایش ضریب منظر این اختلاف کاهش می‌یابد تا جایی که در یک ضریب منظر مشخص نقطه بحرانی از نظر ضریب شدت تنش عوض می‌شود.

همین عامل باعث می‌شود که در فرآیند شبیه‌سازی رشد ترک، ترک اولیه با هر ضریب منظری بعد از مدتی به یک ضریب منظر مشخص همگرا شود. از آن‌جا که پارامتر ضریب شدت تنش وابسته به هندسه و بارگذاری سازه ترک‌دار می‌باشد، لذا با تغییر شرایط تنش صفحه‌ای در نقاط سطحی ترک به شرایط کرنش صفحه‌ای در عمیق‌ترین نقطه جبهه ترک و همچنین تغییرات انحنای جبهه ترک در فاصله بین نقاط سطحی و عمیق‌ترین نقطه، تغییرات ضریب شدت تنش در طول جبهه ترک (در زوایای  $\phi$  مختلف) در شکل‌های 6-a تا 6-e قابل مشاهده می‌باشد. در تحقیقات انجام شده تا کنون معمولاً شبیه‌سازی رشد ترک تا جایی ادامه می‌یافت که ضریب شدت تنش یکی از نقاط سطحی و یا عمقی بیش‌تر از چقرمگی شکست ماده گردد. ضمناً به دلیل تقارن هندسی و فیزیکی مسئله ضریب شدت تنش نسبت به نقطه عمقی ترک متقارن می‌باشد.

## 7-2- صحت سنجی برای دیسک با توزیع دو بعدی تنش

در مورد دیسک‌های دوار ضخیم توزیع تنش در راستای ضخامت دیسک نیز متغیر می‌باشد. این دیسک‌ها بیشتر در تجهیزات توان بالا کاربرد دارند. در این بخش یک دیسک مورد استفاده در تجهیزات توان بالا مورد بررسی قرار می‌گیرد. بارگذاری مطابق با شرایط کاری دیسک می‌باشد. حل تحلیلی میدان تنش برای چنین حالتی پیچیده می‌باشد به همین دلیل برای بدست آوردن توزیع تنش مماسی ناشی از بارگذاری حرارتی و مکانیکی در سطح ترک مجازی در دیسک بدون ترک از روش اجزاء محدود استفاده می‌شود. در این حالت سرعت دوران دیسک 157 rad/sec و دما روی سطوح داخلی و خارجی دیسک به ترتیب 100 و 300 درجه سانتی‌گراد می‌باشد. منحنی توزیع تنش در سطح ترک مجازی در نمونه بدون ترک در شکل 7 آورده شده است. در این‌جا منظور از  $r$  شعاع دیسک و  $z$  ضخامت آن می‌باشد. این منحنی برای ناحیه داخلی دیسک که ترک در آن شبیه‌سازی شده رسم شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود ماکزیمم تنش مماسی در شعاع داخلی دیسک و بخش میانی ضخامت  $z=0$  رخ می‌دهد که با افزایش شعاع و دور شدن از

با نتایج روش اجزاء محدود صحت سنجی می‌گردد. منظور از دیسک نازک دیسکی می‌باشد که به علت کم بودن ضخامت در آن فرض تنش صفحه‌ای بر آن حاکم بوده و توزیع تنش آن یک بعدی باشد. همچنین منظور از دیسک ضخیم دیسکی می‌باشد که به علت زیاد بودن ضخامت حالت تنش صفحه‌ای بر آن حاکم نبوده بنابراین توزیع تنش در دیسک دو بعدی می‌باشد. سپس با استفاده از تابع وزن اثر هندسه دیسک بر روی ضریب شدت نقاط عمقی و سطحی در چند نسبت عمق مختلف بررسی می‌شود. خواص مکانیکی و حرارتی دیسک‌ها به صورت مدول الاستیسیته،  $E = 208$  (GPa)، نسبت پواسون،  $\nu = 0.3$ ، چگالی،  $\rho = 7860$  (kg/m<sup>3</sup>) و ضریب انبساط حرارتی،  $\alpha_t = 0.000013$  (1/°C) می‌باشد.

## 7-1- صحت سنجی برای دیسک با توزیع یک بعدی تنش

در این بخش با استفاده از تابع وزن دو بعدی ارائه شده نتایج ضریب شدت تنش برای یک دیسک با توزیع یک بعدی تنش با انتگرال‌گیری از رابطه (12) استخراج می‌گردد.

$$K(\alpha, \beta, \gamma, 2\phi/\pi) = \iint \sigma_{\theta}(y) \frac{\sqrt{2s}}{\pi^{3/2} \rho^2} [1 + M(\alpha, \beta, \gamma, 2\phi/\pi) (1 - \frac{r(\phi)}{R(\phi)})] dS \quad (12)$$

در این رابطه  $\sigma_{\theta}$  تنش مماسی در دیسک می‌باشد که بر روی سطح ترک وارد می‌شود.

ابعاد دیسک مطابق با ابعاد یک دیسک واقعی مورد استفاده در صنایع توربین سازی داخلی در نظر گرفته می‌شود. این دیسک به دلیل کاربرد در صنایع توان پایین دارای ضخامت زیادی نیست و حالت تنش صفحه‌ای حاکم می‌باشد. شکل هندسی سطح مقطع دیسک مطابق با شکل 3 است. میدان تنش دیسک با استفاده از روابط ترموالاستیسته دیسک‌های ضخامت ثابت و ضخامت متغیر استخراج شده است. بارگذاری مکانیکی به صورت دورانی با سرعت 314 rad/sec و دما روی سطح داخلی و خارجی به ترتیب 100 و 300 درجه سانتی‌گراد می‌باشد. این بارگذاری‌ها مطابق با شرایط کاری واقعی یک دیسک مورد استفاده در صنعت انتخاب شده است.

از آنجا که در مراجع در دسترس حل تحلیلی بر مبنای الاستیسیته سه

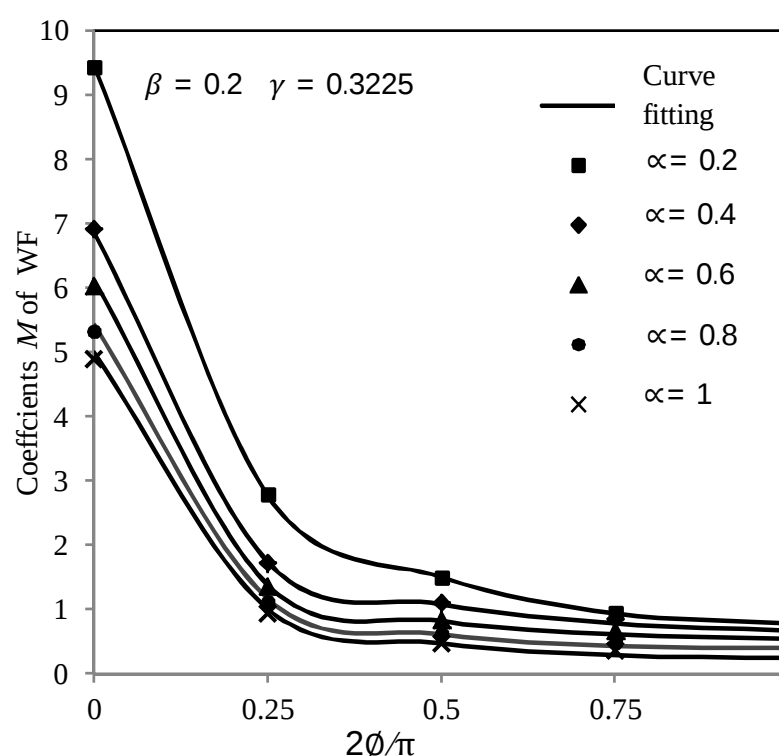
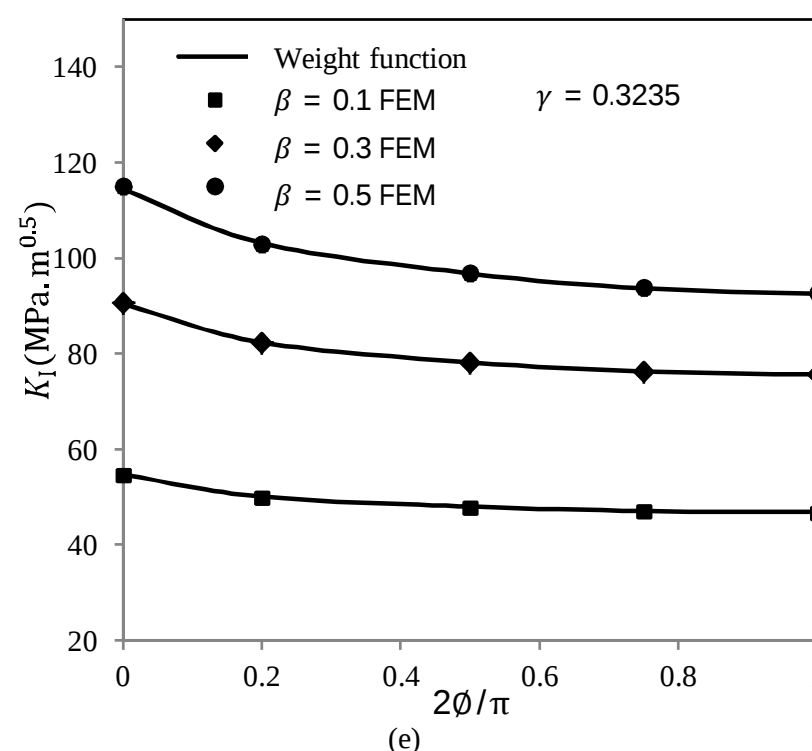
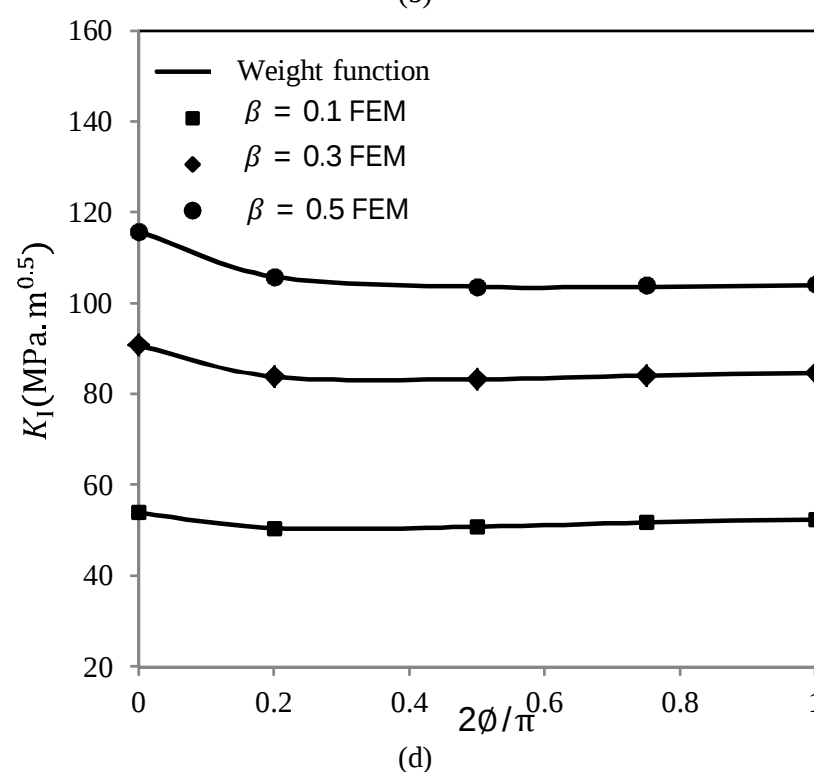
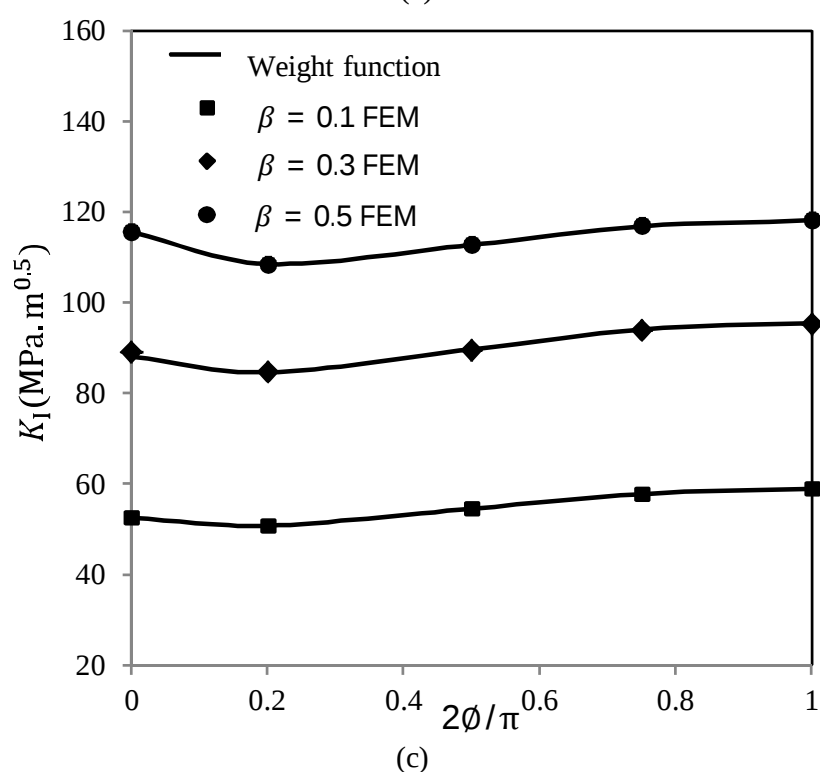
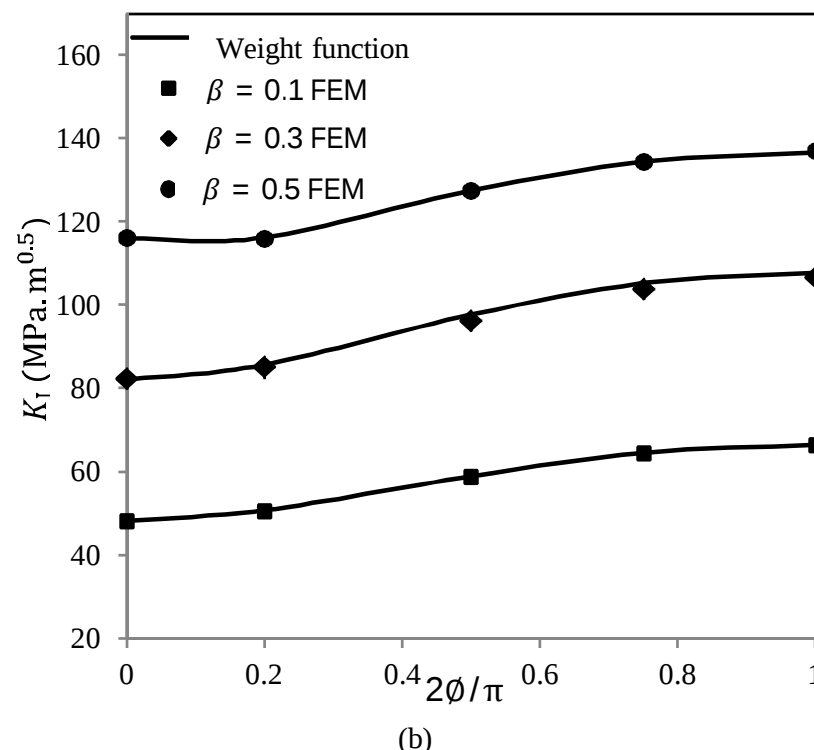
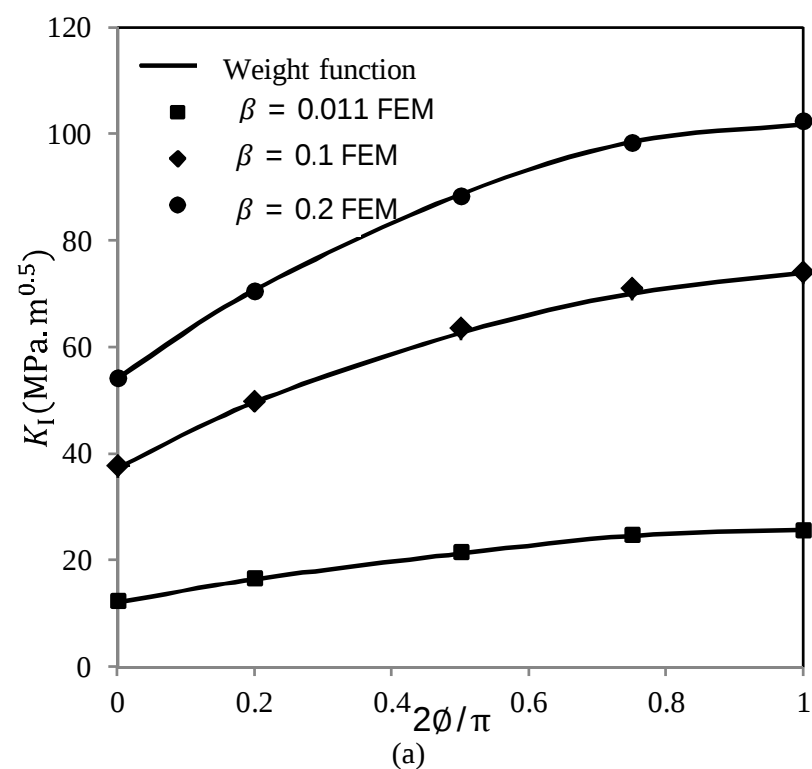


Fig. 5 The comparison of the curve fitting formula and coefficients  $M$  of the weight function

شکل 5 مقایسه روابط برازش منحنی و ضرایب  $M$  تابع وزن



(a)  $\alpha = 0.2$

(b)  $\alpha = 0.4$

(c)  $\alpha = 0.6$

(d)  $\alpha = 0.8$

(e)  $\alpha = 1$

**Fig. 6** The comparison between the stress intensity factors obtained with the weight function and finite element methods for one-dimensional distribution of stress and  $\gamma = 0.3235$

شکل 6 مقایسه ضریب شدت بدست آمده از تابع وزن و اجزاء محدود برای توزیع یک بعدی تنش و  $\gamma = 0.3235$

دوران دیسک نیز باعث ایجاد تنش مثبت در این ناحیه می‌گردد. بنابراین تنش وارد شده بر روی سطوح ترک همواره کششی بوده و بسته شدن ترک رخ نمی‌دهد.

بخش میانی میزان آن کاهش می‌یابد. در مورد دیسک‌های مورد کاربرد در صنعت عمدتاً دما روی سطح بیرونی دیسک بیشتر از دما روی سطح داخلی می‌باشد که باعث ایجاد تنش مماسی مثبت در این ناحیه می‌شود. همزمان

### 7-3- بررسی اثر هندسه دیسک بر روی ضریب شدت تنش

در شکل‌های 9 و 10 نتایج ضریب شدت تنش به دست آمده از روش تابع وزن دوبعدی برای نسبت منظر  $\alpha = 0.6$  و چهار نسبت عمق  $\alpha = 0.05, 0.1, 0.3, 0.5$ ، به ترتیب جهت دو نقطه عمقی و سطحی ارائه شده است. هدف بررسی تاثیر نسبت ارتفاع پایه به ضخامت،  $\gamma$ ، بر ضریب شدت تنش می‌باشد. همان‌طور که مشاهده می‌شود در نسبت عمق‌های پایین ضریب شدت تنش به  $\gamma$  بستگی ندارد. به عبارت دیگر برای ترک‌های یکسان در دیسک‌های مختلف نتایج ضریب شدت تنش یکسانی به دست می‌آید. اما با افزایش نسبت عمق که به معنای افزایش اندازه ترک می‌باشد، ضریب شدت تنش در نقاط عمقی و سطحی وابسته به  $\gamma$  می‌باشد. در این حالت ضریب شدت تنش نقطه سطحی با افزایش  $\gamma$  افزایش می‌یابد. اما در نقطه عمقی ضریب شدت تنش ابتدا افزایش و سپس کاهش و مجدداً افزایش می‌یابد. علت آنکه در نسبت عمق‌های پایین ضریب شدت تنش به هندسه دیسک وابسته نیست آن است که در این حالت ابعاد ترک در مقایسه با ابعاد دیسک کوچک است و بنابراین اثر هندسه دیسک بر ضریب شدت تنش ناچیز می‌باشد. بدیهی است که شکل هندسی دیسک بر روی میدان تنش ایجاد شده در آن موثر خواهد بود. اما در این‌جا برای تمامی حالات یک میدان تنش یکسان بر روی سطوح ترک اعمال شده است.

### 8- نتیجه‌گیری

در این پژوهش، تابع وزن دوبعدی برای یک خانواده از دیسک‌های دوار سرعت بالا استخراج گردید. بازه ابعادی به نحوی انتخاب شد که بخشی از دیسک‌های رایج در صنایع توربین‌سازی داخلی را پوشش دهد. نشان داده شد که شکل عمومی تابع وزن ارائه شده توسط وانگ و گلینکا تنها با استفاده از یک بارگذاری مرجع و انتخاب یک جمله از سری آن همگرا و از دقت کافی برخوردار است. با استفاده از برازش منحنی یک عبارت چند جمله‌ای برای تعیین ضرایب ثابت تابع وزن ارائه گردید. نشان داده شد عبارت چند جمله‌ای ارائه شده از دقت کافی برای تعیین ضرایب تابع وزن برخوردار می‌باشد. دیسک‌های مورد استفاده در تجهیزات توان پایین دارای ضخامت کم و توزیع یک بعدی تنش و دیسک‌های مورد استفاده در تجهیزات توان بالا به دلیل ضخیم بودن دارای توزیع دوبعدی تنش می‌باشند. ضریب شدت تنش نقاط مختلف جبهه ترک به‌صورت جداگانه برای دیسک ضخیم و دیسک نازک استخراج گردید. نتایج ضریب شدت تنش همزمان از روش اجزاء محدود نیز استخراج و با نتایج تابع وزن مقایسه شدند. اختلاف ضریب شدت تنش بدست آمده از دو روش برای تمامی نقاط کمتر از 5 درصد بوده که قابل قبول می‌باشد. برای یک هندسه ترک معین اثر شکل هندسی دیسک بر روی ضریب شدت تنش نقاط عمقی و سطحی بررسی شد. نتایج نشان داد برای نسبت عمق‌های پایین، شکل هندسی دیسک تاثیری بر ضریب شدت تنش ندارد و در نسبت عمق‌های بالا با افزایش نسبت ارتفاع پایه به ضخامت،  $\gamma$ ، ضریب شدت تنش نقطه سطحی ترک افزایش می‌یابد. ضریب شدت تنش نقطه عمقی نیز روند خاصی نداشته و در بعضی حالات افزایش و در بعضی حالات کاهش می‌یابد. تابع وزن استخراجی می‌تواند به عنوان ابزاری کارآمد برای شبیه‌سازی رشد ترک در دیسک‌های دوار معرفی شده، مورد استفاده قرار گیرد.

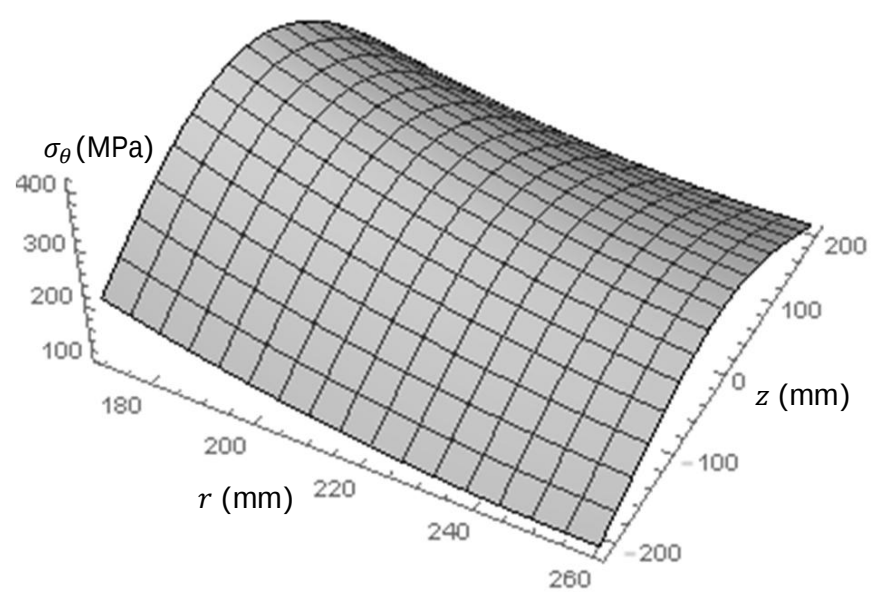


Fig. 7 The tangential stress distribution in a thick disk obtained with FEM method

شکل 7 توزیع تنش محیطی در یک دیسک ضخیم به روش اجزاء محدود

با معین بودن توزیع تنش در دیسک با استفاده از رابطه (13) مقادیر ضریب شدت تنش برای نقطه مختلف جبهه ترک قابل تعیین می‌باشد.

$$K(\alpha, \beta, \gamma, 2\phi/\pi) = \iint \sigma_{\theta}(x, y) \frac{\sqrt{2s}}{\pi^{3/2} \rho^2} [1 + M(\alpha, \beta, \gamma, 2\phi/\pi)$$

$$\left(1 - \frac{r(\phi)}{R(\phi)}\right) dS \quad (13)$$

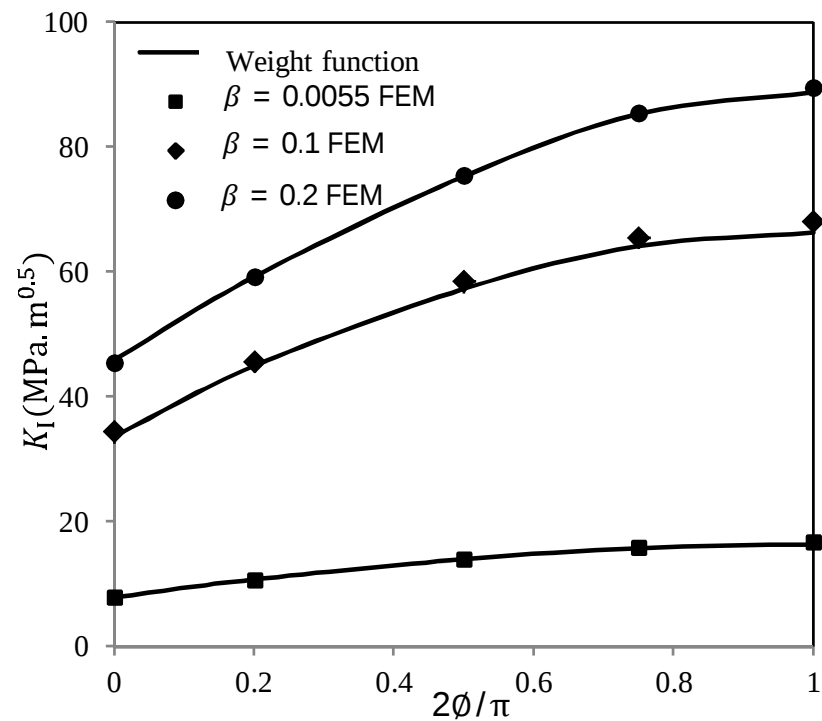
که در آن  $\sigma_{\theta}(x, y)$  توزیع دوبعدی تنش در دیسک می‌باشد.

در شکل‌های 8-a تا 8-c نتایج ضرایب شدت تنش برای بارگذاری دو بعدی بدست آمده از تابع وزن و اجزاء محدود برای  $\alpha = 0.2, 0.5, 0.9$  مقایسه شده‌اند. اشکال دقت بالای تابع وزن را نشان می‌دهند.

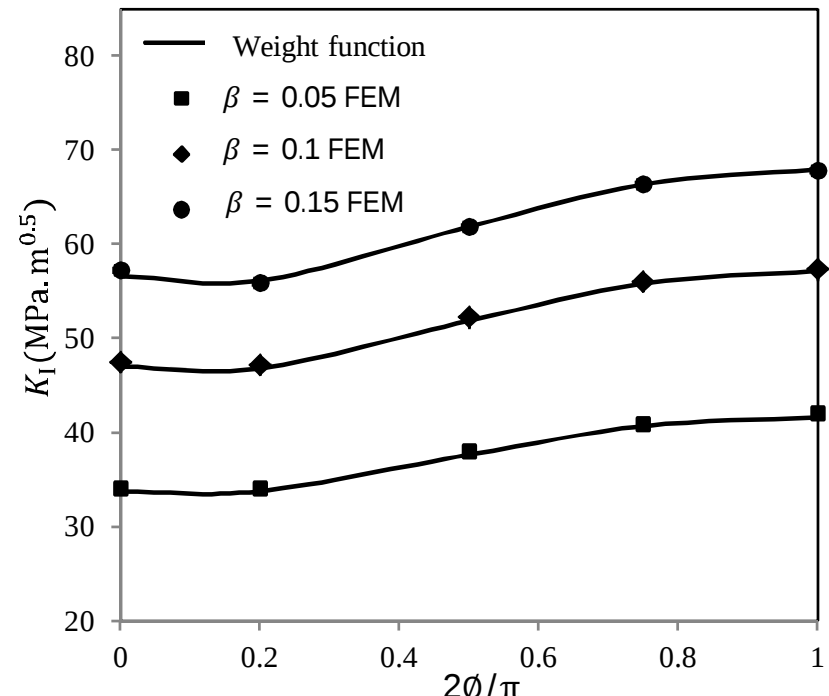
در خصوص تعیین عمر خستگی چنین سازه‌هایی، مقادیر ضریب شدت تنش در ترک‌های کوچکتر از اهمیت بیشتری برخوردار می‌باشد، زیرا که بخش عمده عمر سازه در حین رشد ترک خستگی صرف چنین ترک‌هایی می‌شود.

در شکل 8-a نتایج برای نسبت عمق ترک 0.0055 نیز رسم شده است. این عمق ترک مربوط به یک ترک با عمق 0.5 میلی‌متر در یک دیسک مورد استفاده در صنعت می‌باشد. همان‌طور که مشاهده می‌شود در این حالت نیز تابع وزن از دقت بالایی برخوردار است علت انتخاب این عمق ترک قابلیت دستگاه‌های رایج در تشخیص ترک با حداقل عمق 0.5 میلی‌متر می‌باشد. بنابراین این عمق ترک می‌تواند یک عمق ترک مناسب برای ترک اولیه در شبیه‌سازی رشد ترک باشد.

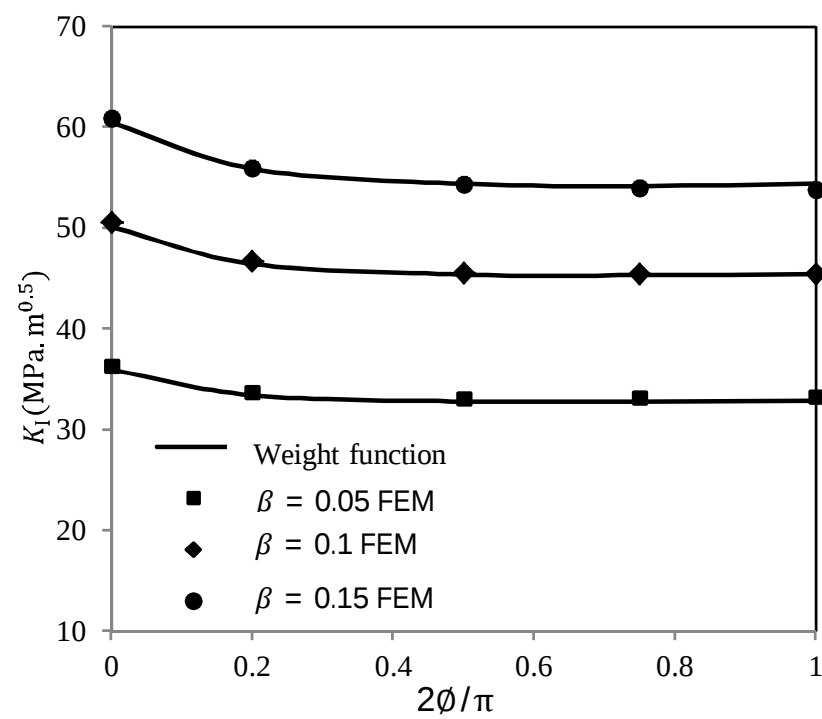
برای حالت بارگذاری دو بعدی نیز ضریب شدت تنش بیشینه برای نسبت منظرهای پایین در نقطه عمقی ترک می‌باشد و با افزایش نسبت منظر به نقطه سطحی انتقال می‌یابد. این قضیه در مورد بارگذاری اعمال شده در این بخش صحت دارد و در مورد بارگذاری‌های دوبعدی لزوماً ضریب شدت تنش بیشینه در نقاط عمقی و یا سطحی ترک رخ نمی‌دهد. همچنین در این حالت نیز به دلیل تقارن هندسی و بارگذاری نتایج ضریب شدت تنش نسبت به نقطه عمقی ترک متقارن می‌باشند.



(a)



(b)



(c)

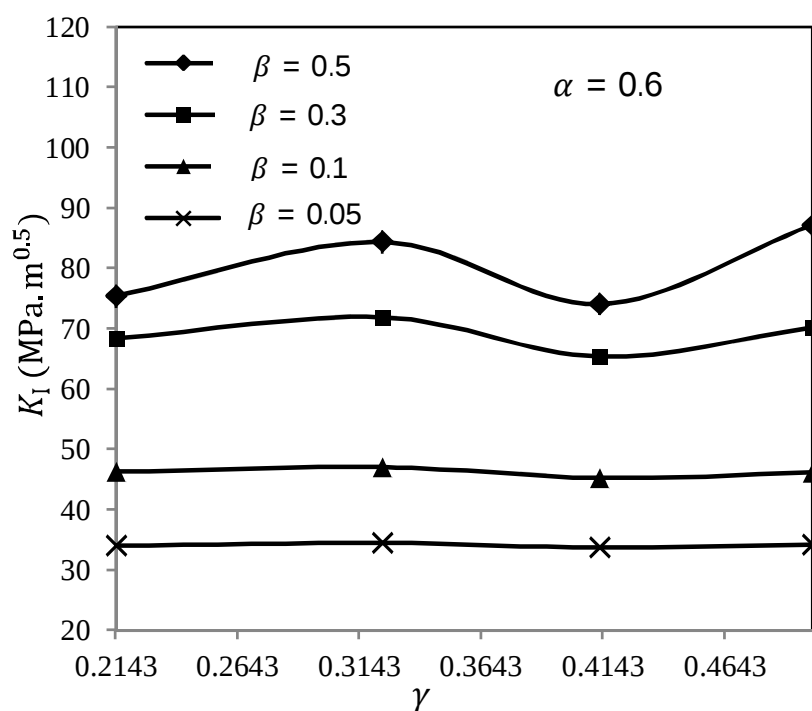
(a)  $\alpha = 0.2$

(b)  $\alpha = 0.5$

(c)  $\alpha = 0.9$

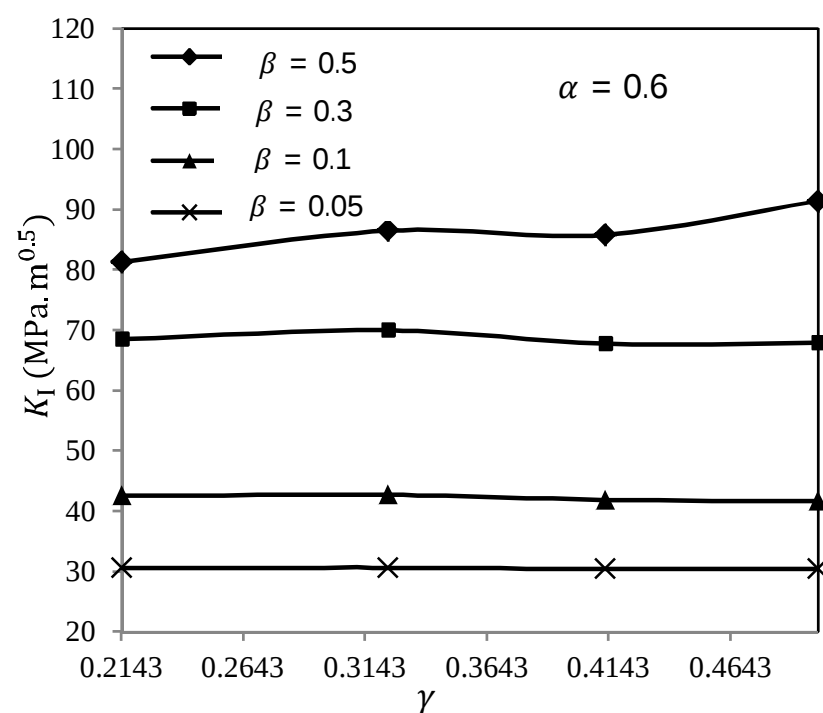
**Fig. 8** The comparison between the stress intensity factors obtained with the weight function and finite element methods for two-dimensional distribution of stress and  $\gamma = 0.2143$

شکل 8 مقایسه ضریب شدت بدست آمده از تابع وزن و اجزاء محدود برای توزیع دو بعدی تنش و  $\alpha = 0.2143$



**Fig. 10** The variation of the deepest point stress intensity factor for different disks

شکل 10 تغییرات ضریب شدت تنش نقطه عمقی برای دیسک‌های مختلف



**Fig. 9** The variation of the surface point stress intensity factor for different disks

شکل 9 تغییرات ضریب شدت تنش نقطه سطحی برای دیسک‌های مختلف

## 9- فهرست علائم

جدول 3 ضرایب ثابت  $C_{ij0}$

**Table 3** The constant coefficients  $C_{ij0}$

| $i$ | $j=0$    | $j=1$    | $j=2$    | $j=3$    | $j=4$    |
|-----|----------|----------|----------|----------|----------|
| 0   | 44.83    | -238.6   | 506.5    | -435.6   | 122.33   |
| 1   | -93.64   | 210.5    | -282.4   | 169.46   | -20.873  |
| 2   | -1170.1  | 7389.5   | -16878.7 | 16178.6  | -5502.6  |
| 3   | 185.62   | -274.7   | 304.7    | -316.18  | 154.4    |
| 4   | 2009.42  | -13077.4 | 30130.3  | -28829.3 | 9786.4   |
| 5   | 7298.93  | -46753.3 | 106815.5 | -103786  | 36463.25 |
| 6   | -262.04  | 683.35   | -1091.83 | 1016.26  | -407.13  |
| 7   | -485.5   | 4046.58  | -11577.4 | 12637.8  | -4703.24 |
| 8   | -12001.1 | 75903.93 | -170252  | 162361.2 | -56121.8 |
| 9   | 140.672  | -558.634 | 1077.72  | -996.286 | 359.278  |
| 10  | -239.3   | 801.885  | 203.47   | -1885.44 | 1146.54  |
| 11  | 3469.45  | -21211.8 | 45069.22 | -40414.3 | 13078.23 |

جدول 4 ضرایب ثابت  $C_{ij1}$

**Table 4** The constant coefficients  $C_{ij1}$

| $i$ | $j=0$    | $j=1$    | $j=2$    | $j=3$    | $j=4$    |
|-----|----------|----------|----------|----------|----------|
| 0   | -357.2   | 2372.56  | -5273.3  | 4715.8   | -1410.16 |
| 1   | 627.4    | -3268.67 | 6361.97  | -5410.3  | 1578.1   |
| 2   | 11105.6  | -69588.2 | 157947   | -150752  | 51148.2  |
| 3   | -1065.43 | 5353.87  | -10459.8 | 10291.4  | -3860.58 |
| 4   | -19203.5 | 123579.3 | -282251  | 268319   | -90641.3 |
| 5   | -70423.1 | 448459   | -1020466 | 988678.8 | -346684  |
| 6   | 1457.87  | -7605.55 | 14021    | -12506.4 | 4477.52  |
| 7   | 6322.4   | -49813.1 | 136529.7 | -146640  | 54393.9  |
| 8   | 110363.5 | -690053  | 1533412  | -1450513 | 497921.5 |
| 9   | -813.31  | 4912.75  | -9626    | 8427.89  | -2830.66 |
| 10  | 668.87   | 4062.25  | 30973.3  | 48201    | 22209.4  |
| 11  | 27797.3  | 162946.1 | -330380  | 280935   | 85659.6  |

جدول 5 ضرایب ثابت  $C_{ij2}$

**Table 5** The constant coefficients  $C_{ij2}$

| $i$ | $j=0$    | $j=1$    | $j=2$    | $j=3$    | $j=4$    |
|-----|----------|----------|----------|----------|----------|
| 0   | 1055.7   | -6989.8  | 15566.9  | -14041.9 | 4281.97  |
| 1   | -2233    | 12502.8  | -26064.4 | 23803    | -7713.86 |
| 2   | -32138.5 | 197538.5 | -441736  | 416529.5 | -139854  |
| 3   | 3996.2   | -22616.8 | 48889.6  | -49340.5 | 18620.8  |
| 4   | 54167.1  | -340459  | 762743.2 | -712325  | 236565.7 |
| 5   | 215757.7 | -1361233 | 3076588  | -2965906 | 1036284  |
| 6   | 4495.8   | 24651.4  | -47691.1 | 43739.6  | -15773.8 |
| 7   | -20482.8 | 158757   | -429536  | 459007   | -170219  |
| 8   | -317787  | 1950606  | -4266925 | 3980704  | -1350246 |
| 9   | 2129.1   | -12771   | 24232    | -20402   | 6611.16  |
| 10  | 2013.84  | -42919.2 | 171758.5 | -228579  | 98487.6  |
| 11  | 63664.17 | -339035  | 606424.7 | -434253  | 103178.3 |

|               |                                         |
|---------------|-----------------------------------------|
| $A$           | ضخامت بخش ابتدایی دیسک                  |
| $A_i$         | ضرایب توابع برازش                       |
| $a$           | عمق ترک نیم بیضوی سطحی                  |
| $B$           | ارتفاع ناحیه با ضخامت ثابت دیسک         |
| $B_{ij}$      | ضرایب تابع برازش                        |
| $C$           | ارتفاع ناحیه متغیر با رابطه توانی دیسک  |
| $C_{ijk}$     | ضرایب تابع برازش                        |
| $c$           | طول ترک نیم بیضوی سطحی                  |
| $D$           | ضخامت ناحیه متغیر با رابطه توانی دیسک   |
| $E$           | ارتفاع ناحیه متغیر با رابطه خطی دیسک    |
| $K$           | ضریب شدت تنش                            |
| $M$           | ضرایب ثابت تابع وزن                     |
| $m(x, y; P')$ | تابع وزن بار نقطه‌ای                    |
| $P$           | بار نقطه‌ای وارد شده بر روی سطوح ترک    |
| $P'$          | نقطه‌ی دلخواه روی جبهه ترک              |
| $R_i$         | شعاع داخلی دیسک                         |
| $R_o$         | شعاع بیرونی دیسک                        |
| $r(\varphi)$  | پارامتر تابع وزن دوبعدی                 |
| $R(\varphi)$  | پارامتر تابع وزن دوبعدی                 |
| $s$           | کمترین فاصله محل اعمال نیرو تا جبهه ترک |

## علائم یونانی

|                 |                                                         |
|-----------------|---------------------------------------------------------|
| $\alpha$        | نسبت منظر ترک                                           |
| $\beta$         | نسبت عمق ترک                                            |
| $\gamma$        | نسبت ارتفاع ناحیه ابتدایی دیسک به ضخامت آن              |
| $\alpha_d$      | زاویه خط در ناحیه ضخامت متغیر دیسک                      |
| $\alpha_t$      | ضریب انبساط حرارتی                                      |
| $\phi$          | موقعیت قطبی                                             |
| $\varphi$       | زاویه جبهه ترک                                          |
| $\theta$        | زاویه محل اعمال بار نقطه‌ای                             |
| $\rho$          | فاصله محل اعمال بار نقطه‌ای تا نقطه دلخواه روی جبهه ترک |
| $\sigma_\theta$ | تنش مماسی در دیسک (MPa)                                 |

## زیرنویس‌ها

|     |                        |
|-----|------------------------|
| $i$ | شمارنده                |
| $j$ | شمارنده                |
| $k$ | شمارنده                |
| $r$ | مرجع بودن ضریب شدت تنش |
| $I$ | مود شکست اول           |

## 10- پیوست

ضرایب ثابت  $C_{ijk}$  در رابطه (11).

- [7] A. R. Shahani S. M. Nabavi, Closed form stress intensity factors for a semi-elliptical crack in a thick-walled cylinder under thermal stress, *International Journal of Fatigue*, Vol. 28, pp. 9236-933, 2006.
- [8] A. R. Shahani S. M. Nabavi, Transient thermal stress intensity factors for an internal longitudinal semi-elliptical crack in a thick-walled cylinder, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 16, pp. 2585-2602, 2007.
- [9] R. Ghajar S. M. Nabavi, Closed-form thermal stress intensity factors for an internal circumferential crack in a thick-walled cylinder, *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, Vol. 33, pp. 504-512, 2010.
- [10] S. M. Nabavi R. Ghajar, Analysis of thermal stress intensity factors for cracked cylinders using weight function method, *Internathional Journal of Engineering Science*, Vol. 48, pp. 1811-1823, 2010.
- [11] H. Saeidi Googarchin R. Ghajar, Stress intensity factors calculation for surface crack in cylinders on the longitudinal gradient pressure using general point load weight function, *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, doi: 10.1111 .
- [12] R. Ghajar H. Saeidi Googarchin, Investigation of pressure gradient effect on stress intensity factor variations in autofrettaged cracked thick-walled tubes using two dimensional weight function method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, pp. 137-145, 2014. (in Persian فارسی)
- [13] Ghajar M. Abbaspour Niasani, H. Saeidi Googarchin, Explicit expressions of stress intensity factor for external semi-elliptical circumferential cracks in a cylinder under mechanical and thermal loads, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, pp. 90-98, 2014. (in Persian فارسی)
- [14] H . F. Bueckner, Novel principle for the computation of stress intensity factor, *Zamm*, Vol. 50, pp. 529-546, 1970.
- [15] J . R. Rice, Some remarks on elastic crack tip stress fields, *International Journal of Solids Structures*, Vol. 8, pp. 751-758, 1970.
- [16] H. J. Petroski, Achenbakh, Computation of the weight function from a stress intensity factor, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 27, pp. 697-715, 1987.
- [17] G. Glinka G. Shen, Universal features of weight functions for cracks in mode I, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 40, pp. 135-146, 1991.
- [18] X. Wang G. Glinka, Determination of approximate point load weight functions for embedded elliptical cracks, *International Journal of Fatigue*, Vol. 31, pp. 1816-1827, 2009.
- [19] M. Davud Abadi, *Fatigue crack growth investigation of high velocity rotating disk family subjected to mechanical and thermal loads using weight function*, Msc Thesis, Department of Mechanical Engineering, K. N. Toosi University of Technology, Tehran, 2015. (in Persian فارسی)
- [20] L. P. Pook, Crack profiles and corner point singularities, *Fatigue & fracture of engineering materials & structures*, Vol. 23, pp. 141-150, 2000.
- [21] R. Ghajar, H. Saeidi Googarchin, Z. Sarvi, Stress intensity factor determination for semielliptical crack front subjected to nonuniform stress, *ISME*, Vol. 1, pp. 1-4, 2015.

جدول 6 ضرایب ثابت  $C_{ij3}$ 

| $j=4$    | $j=3$    | $j=2$    | $j=1$    | $j=0$    | $i$ |
|----------|----------|----------|----------|----------|-----|
| -3880.45 | 12714.8  | -14154.8 | 6409.4   | -979.6   | 0   |
| 8859.3   | -26556.4 | 28493    | -13368.4 | 2319     | 1   |
| 123278   | -372537  | 401642   | -183096  | 30420.3  | 2   |
| -21478.5 | 56913.5  | -55855.5 | 24995.8  | -4187.6  | 3   |
| -197050  | 608167   | -667702  | 306020.1 | -50107.4 | 4   |
| -1011659 | 2906023  | -3029275 | 1348784  | -215405  | 5   |
| 14433.83 | -40321.2 | 44120.1  | -22669.8 | 4053.26  | 6   |
| 171040.4 | -462586  | 436365   | -164122  | 21671.2  | 7   |
| 1191597  | -3561365 | 3876136  | -1801334 | 298592.3 | 8   |
| -3469.91 | 12169.16 | -16345.8 | 9453.66  | -1624.64 | 9   |
| -124831  | 297836.9 | -238140  | 69647.8  | -5684.72 | 10  |
| 37188.77 | 58184.25 | -247989  | 196793.1 | -44176.8 | 11  |

## 11- مراجع

- [1] G.H. Farrahi M. Tirehdast, K. Mazaheri, Failure analysis of a gas turbine compressor, *Engineering Failure Analysis*, Vol. 17, pp. 474-484, 2011.
- [2] T. D. Liebster G. Glinka, D.J. Burns, S. R. Mettu, Calculation stress intensity factors for internal circumferential cracks by using weightfunctions, *PVP-high pressure technology*, Vol. 281, pp. 1-6, 1994.
- [3] X. J. Zheng G. Glinka, R. Dubey, Calculation of stress intensity factors for semi-elliptical cracks in a thick-wall cylinder, *International Journal Press Vessel Piping*, Vol. 62, pp. 249-258, 1995.
- [4] H.-Y. Lee Y.-W. Kim, b. I. Yun, Stress intensity factor solution for radial and circumferential cracks in hollow cylinders using indirect boundary integral, *International Journal of Pressure Vessel and Piping*, Vol. 69, pp. 45-52, 1996.
- [5] I. V. Varfolomeyev, Weight function for external circumferential cracks in hollow cylinder subjected to axisymmetric opening mode loading, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 60, pp. 333-339, 1998.
- [6] I. S. Jones G. Rothwell, Reference stress intensity factors with application to weight functions for internal circumferential cracks in cylinders, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 68, pp. 435-454, 2001.