



فرمول بندی اجزای محدود برای تحلیل استاتیکی غیرخطی ورق های ارتوتروپ با استفاده از تئوری ورق اصلاح شده دو متغیره

سید جعفر روزگار^{1*}، سید محمد سیدین²

1- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شیراز، شیراز

2- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شیراز، شیراز

* شیراز، صندوق پستی 71555-313، rouzegar@sutech.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 31 شهریور 1394

پذیرش: 11 آبان 1394

ارائه در سایت: 09 آذر 1394

کلید واژگان:

روش اجزای محدود

خمش غیرخطی

تئوری دو متغیره اصلاح شده

ورق ضخیم

روش نیوتن - رافسون

چکیده

در این مقاله به ارائه فرمول بندی اجزای محدود برای تحلیل خمش غیرخطی ورق های ایزوتروپ و ارتوتروپ براساس تئوری دو متغیره اصلاح شده پرداخته شده است. تئوری دو متغیره اصلاح شده یک تئوری برشی مرتبه بالا بوده که قابلیت مناسبی در تحلیل ورق های نازک و ضخیم دارد. این تئوری اثرات برش خارج از صفحه در امتداد ضخامت را به صورت سهمی پیش بینی می کند بنابراین در این تئوری شرایط سطوح بدون تنش ارضا می شود و نیازی به ضریب اصلاح برش نیست. اثر ترم های غیرخطی فون - کارمن در روابط کرنش - جابجایی لحاظ شده و از اصل همیلتون جهت بدست آوردن معادله حاکمه استفاده شده است. پس از تشکیل شکل ضعیف معادلات حاکمه، به منظور گسسته سازی دامنه ی مساله، یک المان مستطیلی چهار گره ای طراحی گردیده است که دارای 6 درجه آزادی در هر گره می باشد. به منظور حل معادلات حاکمه کوپل و غیرخطی از روش نیوتن - رافسون استفاده شده است. فرمول بندی اجزای محدود ارائه شده در قالب یک کد در نرم افزار متلب تدوین شده است که این کد قابلیت تحلیل ورق های نازک و ضخیم ایزوتروپ و ارتوتروپ تحت شرایط تکیه گاهی مختلف را دارد. به منظور بررسی روش پیشنهادی و کد تدوین شده، چند مساله شناخته شده حل شده است و نتایج بدست آمده حاکی از صحت روابط و کارایی کد دارد.

Finite element formulation for non-linear static analysis of orthotropic plates using two-variable refined plate theory

Jafar Rouzegar^{*}, Mohammad Sayedain

Department of Mechanical and Aerospace Engineering, Shiraz University of Technology, Shiraz, Iran

* P.O.B. 7155-313 Shiraz, Iran, rouzegar@sutech.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper

Received 22 September 2015

Accepted 02 November 2015

Available Online 30 November 2015

Keywords:

Finite Element Method

Non-linear bending

Two-Variable Refined Plate Theory

Thick Plate

Newton-Raphson Method

ABSTRACT

A finite element formulation for bending analysis of isotropic and orthotropic plates based on two-variable refined plate theory is developed in this paper. The two-variable refined plate theory which can be used for both thin and thick plates predicts parabolic variation of transverse shear stresses across the plate thickness and therefore, it does not need shear correction factor in the formulation and the zero stress conditions are satisfied on free surfaces. The von-Karman nonlinear terms are considered in strain-displacement equations and governing equations are derived using the Hamilton's principle. After constructing weak form equations, a new 4-node rectangular plate element with six degrees of freedom at each node is used for discretization of the domain. The non-linear coupled governing equations are solved by Newton-Raphson method. The finite element code is written in MATLAB which can be used for analysis of thin and thick, isotropic and orthotropic plates with various boundary conditions. Some benchmark problems are solved by the developed code and the obtained displacements and stresses are compared with the existing results in the literature which show the accuracy and efficiency of presented finite element formulation.

1- مقدمه

مختلفی ارائه شده است. تئوری کلاسیک ساده ترین تئوری ورق است که نتایج خوبی برای ورق های نازک ارائه می دهد [1]، در این تئوری فرض می شود که خط عمود بر صفحه ی میانی بعد از تغییر شکل نیز به صورت خط و عمود بر صفحه میانی باقی بماند، در نتیجه کرنش های برشی خارج صفحه برابر صفر می شوند. به همین دلیل از این تئوری برای ورق های ضخیم که در آن تنش های برشی حائز اهمیت است نمی توان استفاده کرد. در تئوری برشی

ورق ها به دلیل داشتن وزن کم و ظرفیت بالای تحمل نیرو به طور گسترده در تمام زمینه های مهندسی مورد استفاده قرار می گیرند. در سازه های معماری، پل ها، نگهدارنده ها، هواپیماها، کشتی ها، موشک ها، قطعات ماشین و بسیاری موارد دیگر از ورق ها استفاده می شود. بنابراین تحلیل و طراحی ورق ها از اهمیت بالایی برخوردار است که برای این منظور روش ها و تئوری های

Please cite this article using:

J. Rouzegar, M. Sayedain, Finite element formulation for non-linear static analysis of orthotropic plates using two-variable refined plate theory, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 12, pp. 272-278, 2015 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

سرعت آن نیز افزوده شد. در این مقاله برای اولین بار به ارایه یک فرمول‌بندی اجزای محدود برای تحلیل غیرخطی ورق‌های ایزوتروپ و ارتوتروپ با استفاده از تئوری اصلاح شده دو متغیره پرداخته می‌شود. برای گسسته سازی ناحیه مسئله یک المان مستطیلی چهار گرهی جدید با شش درجه آزادی در هر گره معرفی می‌شود. برای حل معادلات کوپل غیرخطی حاصل از روش نیوتن-رافسون استفاده می‌شود. فرمول بندی اجزای محدود بدست آمده در قالب یک کد در نرم افزار متلب تدوین می‌شود که این کد قابلیت تحلیل ورق‌های نازک و ضخیم تحت شرایط تکیه‌گاهی مختلف را خواهد داشت.

2- تئوری دو متغیر ورق

تئوری برشی دو متغیره، یک تئوری برشی مرتبه بالا می‌باشد که تنها شامل دو پارامتر مجهول بوده و تنش‌های برشی خارج از صفحه را در امتداد ضخامت به صورت سهمی پیش بینی می‌کند. این تئوری بر پایه فرضیاتی که در زیر آمده است استوار است:

1- روابط کرنش-جابجایی با در نظر گرفتن ترم‌های غیرخطی به صورت معادلات (1) می‌باشند.

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, & \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, & \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \\ \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2, & \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} \end{cases} \quad (1)$$

در این رابطه γ_{yz} , γ_{xy} , γ_{zx} کرنش‌های برشی و ε_z , ε_y , ε_x کرنش‌های عمودی در جهت x , y و z هستند.

2- جابجایی در راستاهای x , y و z شامل دو مولفه‌ی خمشی و برشی بوده که در رابطه‌های (2) تا (4) با اندیس‌های b و s مشخص شده‌اند.

$$u(x, y, z, t) = -z \frac{\partial w_b}{\partial x} + h \left[\frac{1}{4} \left(\frac{z}{h} \right) - \frac{5}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^3 \right] \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (2)$$

$$v(x, y, z, t) = -z \frac{\partial w_b}{\partial y} + h \left[\frac{1}{4} \left(\frac{z}{h} \right) - \frac{5}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^3 \right] \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad (3)$$

$$w(x, y, t) = w_b(x, y, t) + w_s(x, y, t) \quad (4)$$

h در این رابطه ضخامت ورق می‌باشد.

3- تنش عمودی σ_z در مقایسه با دیگر مولفه‌های تنش قابل صرف نظر است؛ بنابراین رابطه تنش-کرنش برای یک ماده ارتوتروپیک به صورت رابطه (5) تعریف می‌شود:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

که:

$$\begin{cases} Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \mu_{12}\mu_{21}}, & Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \mu_{12}\mu_{21}}, \\ Q_{12} = \frac{\mu_{12}E_2}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} = \frac{\mu_{21}E_1}{1 - \mu_{12}\mu_{21}}, \\ Q_{55} = G_{31}, & Q_{44} = G_{23}, & Q_{66} = G_{12} \end{cases} \quad (6)$$

که E_1 و E_2 مدول‌های الاستیسیته، G_{12} , G_{23} و G_{31} مدول‌های برشی، μ_{12} و μ_{21} ضرایب پواسون در جهات اصلی می‌باشد.

3- معادلات حاکمه

برای بدست آوردن معادله حاکمه از اصل همپلتون استفاده شده است:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - U) dt = 0 \quad (7)$$

مرتبه اول همه‌ی فرضیات تئوری کلاسیک به جز فرض عمود ماندن خط عمود بر صفحه‌ی میانی بعد از تغییر شکل برقرار است، که این باعث می‌شود تنش برشی خارج صفحه دارای مقدار باشد [2]. در این تئوری مقدار تنش برشی خارج صفحه در امتداد ضخامت ثابت به دست می‌آید، بنابراین شرط سطوح بدون تنش ارضا نمی‌شود. همچنین در این تئوری برای اصلاح مقدار انرژی کرنشی برشی و نزدیک کردن آن به مقدار واقعی نیاز به استفاده از ضریب اصلاح برش می‌باشد. به منظور گریز از مشکلات تئوری برشی مرتبه اول، تئوری‌های برشی مرتبه‌ی بالا به وجود آمده‌اند. در این تئوری‌ها سطوح بدون تنش ارضا می‌شوند ولی تعداد پارامترهای مجهول بیشتری نسبت به تئوری‌های دیگر وجود دارد. تئوری‌های مرتبه بالای متعددی توسط محققان ارایه شده است. نلسون و لورچ [3] تئوری اصلاح شده‌ی مرتبه بالایی با نه متغیر به منظور تحلیل ورق‌های ارتوتروپ چند لایه معرفی کردند. ردی [4] در سال 1984 تئوری مرتبه سوم را با پنج متغیر برای بررسی رفتار ورق‌ها پیشنهاد کرد. سولداتوس [5] تئوری مرتبه بالایی با سه متغیر را برای خمش ورق‌ها پیشنهاد نمود. اخیرا نیز یک سری تئوری مرتبه بالای جدید که از پیچیدگی کمتری برخوردارند از جمله قبیل تئوری برشی مثلثاتی [6]، تئوری برشی هذلولوی [7] و تئوری برشی دو متغیره [8] مورد توجه قرار گرفته است. تئوری برشی اصلاح شده‌ی دو متغیره، تئوری جدیدی است که با داشتن تنها دو پارامتر مجهول قابل اعمال به ورق‌های نازک و ضخیم می‌باشد. در این تئوری تنش‌های برشی خارج صفحه به صورت سهمی پیش‌بینی می‌شوند؛ لذا شرایط بدون تنش سطوح آزاد ارضا می‌شود. این تئوری برای اولین بار توسط شیمپی [8] برای ورق‌های ایزوتروپیک ارائه گردید و سپس برای ورق‌های ارتوتروپیک توسعه داده شد [9]. سای و کیم [10] با استفاده از این تئوری تحلیل خمش و ارتعاشات آزاد ورق‌های ارتوتروپیک تحت شرایط مرزی مختلف را مورد مطالعه قرار داد. روزگار و آباد ارتعاشات آزاد ورق‌های چندلایه هوشمند همراه با لایه‌های پیزوالکتریک را مورد بررسی قرار دادند [11]. همچنین روزگار و عبدلی [12] به ارائه فرمول بندی اجزای محدود برای حل استاتیکی خطی ورق‌های ضخیم با استفاده از این تئوری پرداختند.

عوامل مختلفی موجب رفتار غیرخطی در سازه‌ها می‌گردد؛ از جمله رفتار غیرخطی مادی که عملاً ناشی از رابطه غیرخطی تنش-کرنش می‌باشد. از دیگر عوامل می‌توان به رفتار غیرخطی هندسی اشاره کرد که می‌تواند ناشی از جابجایی‌های بزرگ سازه باشد که در اینصورت رابطه کرنش-تغییر مکان غیرخطی می‌گردد. همچنین می‌توان به عوامل ناشی از شرایط مرزی و نیروی اعمالی اشاره کرد که می‌توانند موجب بروز رفتار غیرخطی سازه گردند. تحقیقات متعددی در زمینه تحلیل غیرخطی ورق‌ها صورت پذیرفته است. شیخ و مخاپادها [13] به بررسی ارتعاشات اجباری خطی و غیرخطی ورق‌ها با روش اجزای محدود پرداختند. گلمکانی و کدخدایان [14] با استفاده از تئوری برشی مرتبه اول، جابجایی بزرگ ورق‌های تقویت شده توخالی را مورد تحلیل قرار دادند. گلمکانی [15] رفتار ترمو الاستیک غیرخطی دیسک‌های دوار با ضخامت متغیر را با تئوری برشی مرتبه اول مورد بررسی قرار داد. روزگار و غلامی [16] با استفاده از روش رهایی پویا و تئوری برشی چهار متغیره به تحلیل خمش غیرخطی ورق‌های مستطیلی پرداختند.

بسیاری از مسائل مهندسی به دلیل پیچیدگی‌های ناشی از هندسه، بارگذاری و یا جنس ماده قابل بررسی با روش‌های تحلیلی مرسوم نیستند. روش اجزای محدود به عنوان یک ابزار عددی قدرتمند برای حل مسائل پیچیده‌ی مهندسی معرفی گردید که با پیشرفت علوم کامپیوتر به دقت و

که در این رابطه ضرایب صلبیت خمشی و برشی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{cases} D_{11} = \frac{Q_{11}h^3}{12}, & D_{22} = \frac{Q_{22}h^3}{12}, & D_{12} = \frac{Q_{12}h^3}{12}, \\ D_{66} = \frac{Q_{66}h^3}{12}, & A_{44} = \frac{5Q_{44}h}{6}, & A_{55} = \frac{5Q_{55}h}{6} \end{cases} \quad (12)$$

4- فرمول بندی اجزای محدود

در این مقاله برای بدست آوردن شکل ضعیف معادلات حاکمه و نهایتاً فرمول‌بندی اجزای محدود از اصل همیلتون استفاده شده است. اگر انرژی کرنشی و جنبشی ورق را در اصل همیلتون قرار دهیم با استفاده از روش تغییرات، فرم ضعیف معادلات حاکمه مطابق رابطه‌ی (13) بدست می‌آید.

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{\rho h^3}{12} \int \left[\left(\frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial t^2} \frac{\partial \delta w_b}{\partial x} + \frac{\partial^3 w_b}{\partial y \partial t^2} \frac{\partial \delta w_b}{\partial y} \right) \right] dx dy \\ & + \frac{\rho h^3}{1008} \int \left[\left(\frac{\partial^3 w_s}{\partial x \partial t^2} \frac{\partial \delta w_s}{\partial x} + \frac{\partial^3 w_s}{\partial y \partial t^2} \frac{\partial \delta w_s}{\partial y} \right) \right] dx dy \\ & + \int \left[\left(D_{11} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + D_{21} \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial x^2} \right. \\ & \quad + \left(D_{12} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial y^2} \\ & \quad + \left[\frac{6}{h^2} D_{11} \left(\frac{\partial w_b}{\partial x} + \frac{\partial w_s}{\partial x} \right)^3 \right. \\ & \quad + \left(\frac{6}{h^2} D_{12} + \frac{12}{h^2} D_{66} \right) \left(\frac{\partial w_b}{\partial x} + \frac{\partial w_s}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w_b}{\partial y} + \frac{\partial w_s}{\partial y} \right)^2 \left. \frac{\partial \delta w_b}{\partial x} \right] \\ & \quad + \left[\frac{6}{h^2} D_{22} \left(\frac{\partial w_b}{\partial y} + \frac{\partial w_s}{\partial y} \right)^3 \right. \\ & \quad + \left(\frac{6}{h^2} D_{12} + \frac{12}{h^2} D_{66} \right) \left(\frac{\partial w_b}{\partial y} + \frac{\partial w_s}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial w_b}{\partial x} + \frac{\partial w_s}{\partial x} \right)^2 \left. \frac{\partial \delta w_b}{\partial y} \right] \\ & \quad + 4D_{66} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial x \partial y} - q \delta w_b \Big] dA \\ & + \int \left[\left(\frac{1}{84} \left[\left(D_{11} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + D_{21} \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial x^2} \right. \right. \right. \\ & \quad + \left(D_{12} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial y^2} \left. \right. \\ & \quad + 4D_{66} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial x \partial y} \\ & \quad + \left[\frac{504}{h^2} D_{11} \left(\frac{\partial w_b}{\partial x} + \frac{\partial w_s}{\partial x} \right)^3 \right. \\ & \quad + \left(\frac{504}{h^2} D_{12} + \frac{1008}{h^2} D_{66} \right) \left(\frac{\partial w_b}{\partial x} + \frac{\partial w_s}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w_b}{\partial y} + \frac{\partial w_s}{\partial y} \right)^2 \left. \frac{\partial \delta w_s}{\partial x} \right] \\ & \quad + \left[\frac{504}{h^2} D_{22} \left(\frac{\partial w_b}{\partial y} + \frac{\partial w_s}{\partial y} \right)^3 \right. \\ & \quad + \left(\frac{504}{h^2} D_{12} + \frac{1008}{h^2} D_{66} \right) \left(\frac{\partial w_b}{\partial y} + \frac{\partial w_s}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial w_b}{\partial x} + \frac{\partial w_s}{\partial x} \right)^2 \left. \frac{\partial \delta w_s}{\partial y} \right] \\ & \quad + \left[A_{44} \frac{\partial w_s}{\partial x} \frac{\partial \delta w_s}{\partial x} + A_{55} \frac{\partial w_s}{\partial y} \frac{\partial \delta w_s}{\partial y} \right] \\ & \quad \left. - q \delta w_s \right] dA \\ & + \rho h \int \left[\frac{\partial}{\partial t} (\delta w_b + \delta w_s) \left(\frac{\partial w_b}{\partial t} + \frac{\partial w_s}{\partial t} \right) \right] dx dy \\ & + \oint \left[-M_{nn} \frac{\partial \delta (w_b + w_s)}{\partial n} + V_n \delta (w_b + w_s) \right] ds \end{aligned} \quad (13)$$

انرژی پتانسیل (U) و انرژی جنبشی (T) برای ورق مستطیلی به طول a و عرض b و ضخامت h تحت بارگذاری گسترده (q) به ترتیب مطابق روابط (8) و (9) بدست می‌آید:

$$U = \int_{z=-\frac{h}{2}}^{z=\frac{h}{2}} \int_{y=0}^{y=b} \int_{x=0}^{x=a} \frac{1}{2} \{ \sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx} \} dx dy dz + \int_0^a \int_0^b q w dx dy \quad (8)$$

$$T = \int_{z=-\frac{h}{2}}^{z=\frac{h}{2}} \int_{y=0}^{y=b} \int_{x=0}^{x=a} \frac{1}{2} \rho \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy dz \quad (9)$$

معادله حاکمه با وریشن گیری از انرژی کرنشی و جنبشی و قرار دادن در اصل همیلتون طبق روابط (10) و (11) بدست می‌آید.

$$\begin{aligned} D_{11} \left(\frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} \right) - \frac{36}{2h^2} D_{11} \left(\frac{\partial w_b}{\partial x} + \frac{\partial w_s}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \right) \\ + D_{22} \left(\frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} \right) - \frac{36}{2h^2} D_{22} \left(\frac{\partial w_b}{\partial y} + \frac{\partial w_s}{\partial y} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \right) \\ + 2(D_{12} + 2D_{66}) \left(\frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} \right) - \frac{6}{h^2} (D_{12} + 2D_{66}) \left[\left(\frac{\partial w_b}{\partial y} + \frac{\partial w_s}{\partial y} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \right) \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial w_b}{\partial x} + \frac{\partial w_s}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \right) + 4 \left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \right) \left(\frac{\partial w_b}{\partial x} + \frac{\partial w_s}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w_b}{\partial y} + \frac{\partial w_s}{\partial y} \right) \right] \\ - \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\nabla^2 w_b) + \rho h \left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial t^2} \right) = q \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{84} D_{11} \left(\frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} \right) - \frac{36}{2h^2} D_{11} \left(\frac{\partial w_b}{\partial x} + \frac{\partial w_s}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \right) \\ + \frac{1}{84} D_{22} \left(\frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} \right) - \frac{36}{2h^2} D_{22} \left(\frac{\partial w_b}{\partial y} + \frac{\partial w_s}{\partial y} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \right) \\ + \frac{1}{42} (D_{12} + 2D_{66}) \left(\frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} \right) - \frac{6}{h^2} (D_{12} + 2D_{66}) \left[\left(\frac{\partial w_b}{\partial y} + \frac{\partial w_s}{\partial y} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \right) \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial w_b}{\partial x} + \frac{\partial w_s}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \right) + 4 \left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \right) \left(\frac{\partial w_b}{\partial x} + \frac{\partial w_s}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w_b}{\partial y} + \frac{\partial w_s}{\partial y} \right) \right] \\ - \left[A_{55} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + A_{44} \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \right] - \frac{\rho h^3}{1008} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\nabla^2 w_s) \\ + \rho h \left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial t^2} \right) = q \end{aligned} \quad (11)$$

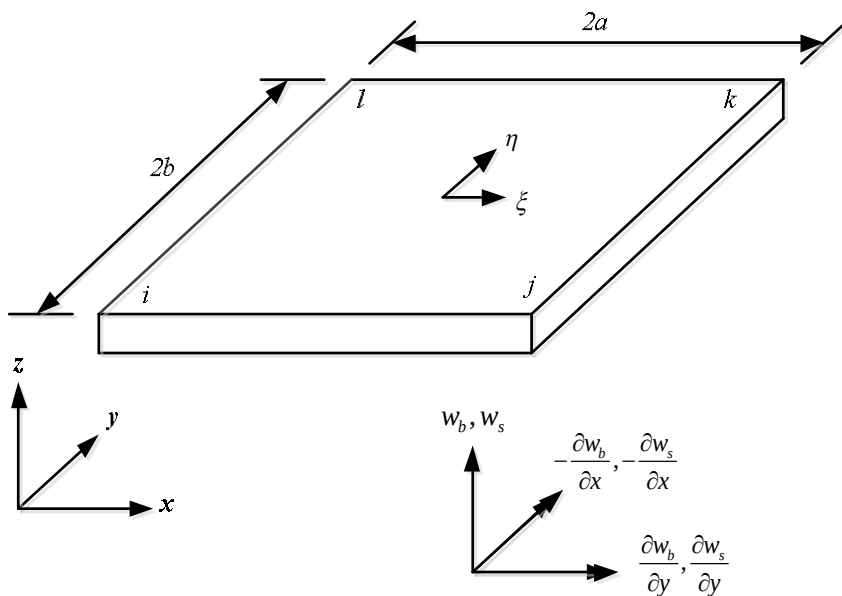


Fig. 1 Rectangular plate element

شکل 1 المان مستطیلی ورق

که درایه‌های ماتریس سفتی، جرم و نیرو به صورت رابطه (19) بیان می‌شود.

$$\begin{aligned} K^{11} &= \int (B_2^T D B_2) dx dy \\ K^{22} &= \int \left(\frac{1}{84} B_2^T D B_2 + B_1^T A B_1 \right) dx dy \\ K^{33} &= \int (I_3 B_1^T D_4 B_1^3 + I_3 B_1^T B_3^T D_5) dx dy \\ F &= \int N q dx dy - \oint \left(\frac{\partial N}{\partial n} M_{nn} + \frac{\partial N}{\partial s} M_{ns} + N Q_n \right) ds \\ M^{11} &= \int (I_0 N N^T + I_2 B_1^T B_1) dx dy \\ M^{22} &= \int \left(I_0 N N^T + \frac{I_2}{84} B_1^T B_1 \right) dx dy \\ M^{12} &= \int (I_0 N N^T) dx dy \end{aligned} \quad (19)$$

که:

$$B_1 = D_1 N^T \quad B_2 = D_2 N^T \quad B_3 = D_3 N^T \quad (20)$$

برای حل معادلات کوپل و غیرخطی حاصل از روش نیوتن-رافسون استفاده شده است. روش نیوتن-رافسون روشی تکراری و از مرتبه دو می‌باشد که در تحلیل مسائل غیرخطی مورد استفاده قرار می‌گیرد. این روش براساس شیب منحنی تابع عمل می‌کند بطوریکه با یک تقریب اولیه و با استفاده از معادله خط مماس بر منحنی ریشه تابع را پیش بینی می‌کند. معیار در نظر گرفته شده در این تحقیق برای توقف حلقه تکرار نیوتن-رافسون، همگرایی تغییرمکان‌های به دست آمده می‌باشد؛ بدین صورت که زمانی که اختلاف تغییرمکان‌های به دست آمده در دو تکرار متوالی از مقدار 10^{-5} کمتر باشد تکرار متوقف و نتایج گزارش می‌شود.

5- نتایج عددی و بحث

با استفاده از روش پیشنهادی و روابط ارائه شده در بخش‌های پیشین یک کد در محیط متلب نوشته شده است. به منظور ارزیابی روش، به حل چند مسئله غیرخطی شناخته شده پرداخته شده و نتایج به دست آمده با نتایج موجود در تحقیقات پیشین برای ورق‌های ایزوتروپ و ارتوتروپ مقایسه می‌شود. پس از اطمینان از صحت و دقت روش، به بررسی پارامترهای مختلف و تاثیر آن‌ها بر روی نتایج پرداخته می‌شود.

5-1- تحلیل ورق ایزوتروپ

یک ورق مربعی با تکیه‌گاه ساده تحت بار گسترده یکنواخت در نظر گرفته شده و با استفاده از روش ارائه شده به بررسی خیز و تنش‌های بدست آمده

در رابطه فوق M_{nn} و V_n به ترتیب گشتاور خمشی و نیروی برشی مؤثر هستند. شکل برداری معادله ضعیف شده به صورت رابطه (14) می‌باشد.

$$\begin{aligned} 0 &= \int \left\{ [I_0 (\delta w_b)^T \ddot{w}_b + I_2 (D_1 \delta w_b)^T (D_1 \ddot{w}_b)] \right. \\ &\quad + \left[I_0 (\delta w_s)^T \ddot{w}_s \right. \\ &\quad \left. + \frac{I_2}{84} (D_1 \delta w_s)^T (D_1 \ddot{w}_s) \right] \Big\} dx dy \\ &+ \int [I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) \delta (w_b + w_s)] dx dy \\ &+ \int \left[(D_2 \delta w_b)^T D (D_2 w_b) + \frac{1}{84} (D_2 \delta w_s)^T D (D_2 w_s) \right. \\ &\quad \left. + (D_1 \delta w_s)^T A (D_1 w_s) \right] dx dy \\ &+ \int [I_3 (D_1 (\delta w_b + \delta w_s))^T [D_4 (D_1 (w_b + w_s))^3 \\ &\quad + (D_3 (D_1 (w_b + w_s))^2 (D_1 (w_b + w_s)^T D_5)] dx dy \\ &- \oint \left[\left[\frac{\delta (\partial (w_b + w_s))}{\partial n} \right]^T M_{nn} + (\delta (w_b + w_s))^T V_n \right] ds \end{aligned} \quad (14)$$

که:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} A_{44} & 0 \\ 0 & A_{55} \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \\ D_1 &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad D_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \\ D_3 &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad D_4 = \begin{bmatrix} D_{11} & 0 \\ 0 & D_{22} \end{bmatrix} \\ D_5 &= \begin{bmatrix} D_6 \\ D_6 \end{bmatrix} \quad D_6 = D_{12} + 2D_{66} \\ I_0 &= \rho h \quad I_2 = \frac{\rho h^3}{12} \quad I_3 = \frac{6}{h^2} \end{aligned} \quad (15)$$

در این مقاله یک نوع المان مستطیلی 4 گرهی طراحی شده است که همانطور که در شکل 1 دیده می‌شود هر گره 6 درجه آزادی (شامل 3 درجه آزادی مربوط به خمش و 3 درجه آزادی مربوط به برش) دارد. فرم گسسته توابع w_b و w_s به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} w_s(x, y) &= \sum_{j=1}^n \Delta_j^s \varphi_j(x, y) = N^T \Delta_s \\ w_b(x, y) &= \sum_{j=1}^n \Delta_j^b \varphi_j(x, y) = N^T \Delta_b \end{aligned} \quad (16)$$

N^T توابع شکل بوده که از روابط معرفی شده توسط ملوش [17] برای المان مستطیلی استفاده شده است و بردارهای Δ_b و Δ_s شامل مقادیر گره‌ای w_b و w_s و مشتقات اول آنها می‌باشند که به صورت زیر در نظر گرفته شده‌اند:

$$\begin{aligned} (\Delta_b)^T &= \left[w_{b1} \quad \left(\frac{\partial w_b}{\partial x} \right)_1 \quad \left(\frac{\partial w_b}{\partial y} \right)_1 \quad \dots \quad \left(\frac{\partial w_b}{\partial y} \right)_4 \right] \\ (\Delta_s)^T &= \left[w_{s1} \quad \left(\frac{\partial w_s}{\partial x} \right)_1 \quad \left(\frac{\partial w_s}{\partial y} \right)_1 \quad \dots \quad \left(\frac{\partial w_s}{\partial y} \right)_4 \right] \end{aligned} \quad (17)$$

فرم گسسته اجزای محدود ورق مستطیلی بر مبنای تئوری برشی دو متغیره به صورت رابطه (18) می‌باشد.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} M^{11} & M^{12} \\ M^{12} & M^{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\Delta}_b \\ \ddot{\Delta}_s \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K^{11} & 0 \\ 0 & K^{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_b \\ \Delta_s \end{Bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} K^{33} & K^{33} \\ K^{33} & K^{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_b^3 \\ \Delta_s^3 \end{Bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} K^{33} & K^{33} \\ K^{33} & K^{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_b^2 \Delta_s \\ \Delta_s^2 \Delta_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ F \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (18)$$

پرداخته می‌شود. پارامترهای بی‌بعد زیر به منظور برای بررسی نتایج مربوط به ورق ایزوتروپ در نظر گرفته شده است:

$$\begin{aligned} w^* &= \frac{Eh^3}{q_0 a^4} w \\ \sigma_x^* &= \frac{\sigma_x h^2}{q_0 a^2} \\ \tau_{xz}^* &= \frac{\tau_{xz} h}{q_0 a} \end{aligned} \quad (21)$$

به منظور ارزیابی استقلال از شبکه، با در نظر گرفتن تعداد المان مختلف در شبکه بندی ورق، به بررسی خیز و تنش بدون بعد پرداخته می‌شود. همانطور که در جدول 1 دیده می‌شود با افزایش تعداد المان، نتایج همگرا شده و مقدار همگرا شده با حل دقیق همخوانی دارد. در جدول 2 نتایج بدست آمده از روش حاضر با نتایج تحلیلی موجود و حل دقیق برای نسبت‌های مختلف ضخامت به طول ورق ارائه شده است. در این مثال تعداد 10 المان در هر طرف ورق لحاظ شده است. همچنین خیز و تنش‌های ارائه شده در این جدول مربوط به مرکز ورق می‌باشند. همانطور که مشاهده می‌شود نتایج فرمول‌بندی حاضر برای ورق‌های نازک و ضخیم تطابق خوبی با تئوری‌های برشی مرتبه اول و مرتبه بالا و همچنین حل دقیق دارد.

5-2- تحلیل ورق ارتوتروپ

در این بخش به بررسی نتایج مربوط به ورق ارتوتروپ پرداخته می‌شود. دو نوع ماده ارتوتروپ در تحلیل‌ها در نظر گرفته شده است که خواص هریک در جدول 3 نشان داده شده است.

پارامترهای بی‌بعد در نظر گرفته شده برای ورق ارتوتروپ به شرح زیر می‌باشند:

$$\begin{aligned} \bar{w} &= \frac{w}{h} \\ \bar{q} &= \frac{q a^4}{E_2 h^4} \\ \bar{\sigma}_x &= \frac{\sigma_x a^2}{E_2 h^2} \\ \bar{\tau}_{xz} &= \frac{\tau_{xz} a^2}{E_2 h^2} \end{aligned} \quad (22)$$

در جدول 4 نتایج خیز و تنش بی‌بعد ورق ارتوتروپیک با تکیه‌گاه‌های ساده با در نظر گرفتن شبکه‌بندی‌های مختلف ارائه شده است. جنس ورق مورد نظر از ماده 2 بوده و ورق تحت بار گسترده یکنواخت قرار دارد. همانطور که مشاهده می‌شود با افزایش تعداد المان، تغییرات در نتایج خیز و تنش‌ها کمتر می‌شود و نتایج همگرا می‌گردد. در تمامی مثال‌های حل شده این بخش تعداد 10×10 المان در اضلاع ورق در نظر گرفته شده است. در جدول 5 خیز و تنش‌های بدون بعد همگرا شده برای ورق‌های مستطیلی با نسبت‌های عرض به طول و ضخامت به عرض متفاوت ارائه شده است. نتایج بدست آمده با حل دقیق و روش رهایی پویا مقایسه شده‌اند که همانطور که مشاهده می‌شود همخوانی خوبی بین نتایج وجود دارد.

در جدول 6 به بررسی تاثیرات میزان بار بی‌بعد اعمالی و نوع تکیه‌گاه‌های ورق بر خیز و تنش‌های بی‌بعد ورق ساخته شده از ماده 1 پرداخته شده است. همانطور که دیده می‌شود تطابق خوبی بین جواب‌های به دست آمده و نتایج روش رهایی پویا وجود دارد. در نتایج ارائه شده مطابق انتظار با افزایش بار بی‌بعد، خیز و تنش‌های بی‌بعد افزایش می‌یابند. همچنین میزان تنش و خیز بی‌بعد برای تکیه گاه ساده بالاتر از تکیه‌گاه گیردار به دست آمده است.

جدول 1 بررسی همگرایی خیز و تنش نرمال بی‌بعد برای ورق مربعی ایزوتروپیک تحت بار گسترده یکنواخت با تکیه‌گاه‌های ساده ($h/a = 0.1$)

Table 1 Convergence study for normalized deflections and in-plane normal stress for simply supported isotropic square plate subjected to uniformly distributed loading ($h/a = 0.1$)

اندازه شبکه	w^*	σ_x^*
4×4	0.0455	0.2703
6×6	0.0461	0.2822
8×8	0.0463	0.2864
10×10	0.0464	0.2884
12×12	0.0465	0.2894
14×14	0.0465	0.2898
حل دقیق [18]	0.0466	-

جدول 2 مقایسه خیز و تنش‌های بدون بعد ورق مربعی ایزوتروپیک تحت بار گسترده یکنواخت با در نظر گرفتن نسبت ضخامت مختلف

Table 2 Comparison of normalized deflections and stresses of isotropic square plate subjected to uniformly distributed load considering different thickness ratio

h/a	منابع	w^*	σ_x^*	τ_{xz}^*
0.2	پژوهش حاضر	0.0535	0.2939	0.4695
	تئوری کلاسیک [18]	0.0444	0.2873	-
	تئوری برشی مرتبه اول [19]	0.0536	0.2873	0.3928
	تئوری برشی مرتبه بالا [19]	0.0535	0.2944	0.4840
0.1	پژوهش حاضر	0.0464	0.2883	0.4718
	تئوری کلاسیک [18]	0.0444	0.2873	-
	تئوری برشی مرتبه اول [19]	0.0467	0.2873	0.3928
	تئوری برشی مرتبه بالا [19]	0.0467	0.2890	0.4890
0.05	پژوهش حاضر	0.0449	0.2869	0.4715
	تئوری کلاسیک [18]	0.0444	0.2873	-
	تئوری برشی مرتبه اول [19]	0.0449	-	-
	تئوری برشی مرتبه بالا [19]	0.0464	-	-
0.01	پژوهش حاضر	0.0443	0.2865	0.4702
	تئوری کلاسیک [18]	0.0444	0.2873	-
	تئوری برشی مرتبه اول [19]	0.0444	0.2873	0.3928
	تئوری برشی مرتبه بالا [19]	0.0444	0.2873	0.4909

جدول 3 خواص مواد ارتوتروپ

Table 3 Material properties of orthotropic plate

ماده	μ_{12}	G_{23}/E_2	G_{13}/E_2	G_{12}/E_2	E_1/E_2
1	0.25	0.2	0.5	0.5	25
2	0.44	0.566	0.339	0.558	1.904

جدول 4 بررسی همگرایی خیز و تنش‌های بی‌بعد برای ورق مربعی ارتوتروپیک تحت بار گسترده یکنواخت با تکیه‌گاه‌های ساده ($h/a = 0.1, \bar{q} = 1$)

Table 4 Convergence study for normalized deflections and stresses for simply supported orthotropic square plate subjected to uniformly distributed loading ($h/a = 0.1, \bar{q} = 1$)

اندازه شبکه	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\sigma}_y$	$\bar{\tau}_{xz}$
4×4	0.03131	0.32433	0.19953	0.38462
6×6	0.03176	0.32899	0.20363	0.40418
8×8	0.03192	0.34414	0.20648	0.41094
10×10	0.03200	0.34653	0.20780	0.41412
12×12	0.03205	0.34783	0.20852	0.41586
14×14	0.03207	0.34861	0.20895	0.41691
16×16	0.03209	0.34912	0.20923	0.41760

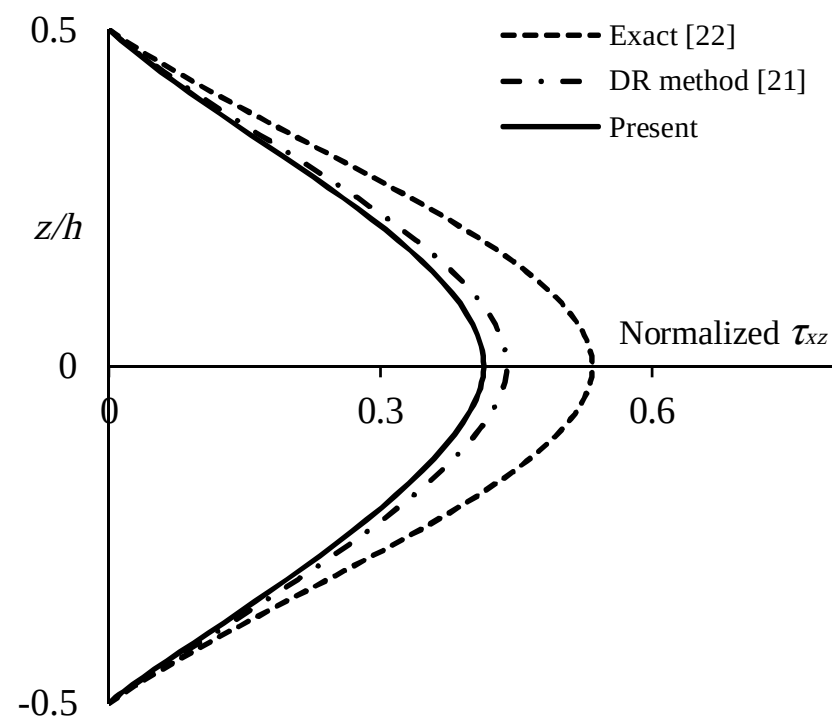


Fig. 2 The variation of $\bar{\tau}_{xz}$ across thickness for a simply supported of orthotropic square plate ($\bar{q} = 1, h/a = 0.1$)

شکل 2 مقایسه نمودار تنش برشی در راستای ضخامت برای ورق ارتوتروپیک مربعی با تکیه‌گاه‌های ساده ($\bar{q} = 1, h/a = 0.1$)

برشی بی‌بعد مورد بررسی قرار گرفته شده است. برای بررسی این اثر از خواص ماده ارتوتروپ 2 استفاده شده است. در این تحلیل با ثابت فرض کردن $E_2 = 10^9$ (Pa)، نسبت E_1/E_2 از 10 تا 50 تغییر می‌کند و در نتیجه با افزایش اثر ارتوتروپی سفتی ورق افزایش می‌یابد که کاهش خیز میانی ورق را در پی خواهد داشت. روند تغییرات تنش‌های مختلف نیز با توجه به نحوه تغییرات نسبت ارتوتروپی قابل انتظار می‌باشد.

در شکل 3 به بررسی تاثیر بار عرضی بر خیز میانی بی‌بعد در یک ورق اوتوتروپ ساخته شده از ماده نوع 1 پرداخته شده است. همانطور که انتظار می‌رود با افزایش بار عرضی اعمال شده، خیز میانی ورق افزایش پیدا می‌کند. در تغییر مکان‌های کوچک مطابق انتظار ترمهای غیرخطی اثر نامحسوسی داشته و رابطه نیرو- تغییر مکان خطی است. اما با افزایش نیرو و در نتیجه افزایش خیز میانی ورق، ترمهای غیرخطی تاثیر گذاشته و رابطه نیرو- جابجایی نیز غیرخطی می‌گردد.

6- نتیجه گیری

در این تحقیق به ارائه فرمول‌بندی اجزای محدود بر مبنای تئوری برشی دومتغیره به منظور تحلیل خمش غیرخطی ورق‌های ایزوتروپ و ارتوتروپ پرداخته شد. تئوری برشی دو متغیره تنها شامل دو پارامتر مجهول است و تنش برشی خارج از صفحه را در امتداد ضخامت به صورت سهمی پیش بینی

جدول 7 تاثیر افزایش ارتوتروپی بر روی خیز و تنش‌های بی‌بعد برای ورق با تکیه‌گاه ساده ($\bar{q} = 10, h/a = 0.1$)

Table 7 Effects of orthotropic for normalized transverse deflections and stresses for simply supported square plates ($\bar{q} = 10, h/a = 0.1$)

$\bar{\tau}_{xz}$	$\bar{\sigma}_y$	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{w}$	E_1/E_2
1.802	0.7644	6.8441	0.0326	10
1.0406	0.3839	7.3245	0.02698	20
0.7243	0.2337	7.5935	0.02462	30
0.5521	0.1559	7.6920	0.02334	40
0.4417	0.1099	7.7215	0.02254	50

جدول 5 مقایسه خیز و تنش‌های بدون بعد ورق ارتوتروپیک با تکیه‌گاه‌های ساده تحت بار گسترده یکنواخت با در نظر گرفتن نسبت ضخامت و ابعاد مختلف ($\bar{q} = 1$)

Table 5 Comparison of deflections and stresses of simply supported orthotropic plate subjected to uniformly distributed load considering different thickness and aspect ratio ($\bar{q} = 1$)

$\bar{\tau}_{xz}$	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{w}$	منابع	h/a	b/a
0.4141	0.3462	0.03056	پژوهش حاضر	0.05	1
0.4410	0.3562	0.0306	آنالیز DR [21]		
0.5437	0.3608	0.0308	حل دقیق [22]		
0.4140	0.3460	0.0320	پژوهش حاضر	0.1	
0.4395	0.3534	0.0323	آنالیز DR [21]		
0.5341	0.3602	0.0325	حل دقیق [22]		
0.4137	0.3452	0.0338	پژوهش حاضر	0.14	
0.4374	0.3498	0.0344	آنالیز DR [21]		
0.5223	0.3596	0.0346	حل دقیق [22]		
0.5630	0.6325	0.0634	پژوهش حاضر	0.05	2
0.5637	0.6568	0.0629	آنالیز DR [21]		
0.7024	0.6567	0.0635	حل دقیق [22]		
0.5629	0.6325	0.0661	پژوهش حاضر	0.1	
0.5628	0.6566	0.0657	آنالیز DR [21]		
0.6927	0.6598	0.0664	حل دقیق [22]		
0.5617	0.6326	0.0695	پژوهش حاضر	0.14	
0.5615	0.6564	0.0692	آنالیز DR [21]		
0.6829	0.6637	0.0701	حل دقیق [22]		

در شکل 2 نمودار تنش برشی در راستای ضخامت برای ورق مربعی با تکیه‌گاه‌های ساده ترسیم شده است. همانگونه که مشخص است تنش برشی در راستای ضخامت به صورت سهمی تغییر می‌کند.

علت اختلاف اندک مقدار تنش برشی به دست آمده در روشهای مختلف در این شکل به فرضیات انجام شده در تئوری برمی‌گردد و معمولاً این اختلاف‌ها در تخمین مقدار تنش برشی در تئوری‌های مختلف مشاهده می‌شود.

در جدول 7 اثر افزایش ارتوتروپی بر روی خیز و تنش‌های عمودی و

جدول 6 مقایسه خیز و تنش نرمال بی‌بعد ورق مربعی ارتوتروپیک با در نظر گرفتن بار عرضی و شرایط مرزی مختلف ($h/a = 0.02$)

Table 6 Comparison of normalized deflections and normal stress of orthotropic square plate considering different applied load and boundary conditions ($h/a = 0.02$)

$\bar{\sigma}_x$	$\bar{w}$	نوع تکیه‌گاه	منابع	$\bar{q}$
7.6119	0.0660	ساده - ساده	پژوهش حاضر	10
7.6661	0.0660		آنالیز DR [21]	
2.5698	0.0142	گیردار - گیردار	پژوهش حاضر	
2.4474	0.0143		آنالیز DR [21]	
15.224	0.1320	ساده - ساده	پژوهش حاضر	20
15.323	0.1318		آنالیز DR [21]	
5.1396	0.0284	گیردار - گیردار	پژوهش حاضر	
4.9193	0.0287		آنالیز DR [21]	
22.834	0.1981	ساده - ساده	پژوهش حاضر	30
22.494	0.1973		آنالیز DR [21]	
7.7094	0.0426	گیردار - گیردار	پژوهش حاضر	
7.4152	0.0430		آنالیز DR [21]	

- Journal of Applied Mechanics*, Vol. 41, No. 1, pp. 177–183, 1974.
- [4] J. N. Reddy, A simple higher-order theory for laminated composite plates, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 51, No. 4, pp. 745–752, 1984.
- [5] K. P. Soldatos, On certain refined theories for plate bending, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 55, No. 4, pp. 994–995, 1988.
- [6] Y. M. Ghugal, A. S. Sayyad, A Static Flexure of Thick Isotropic Plates Using Trigonometric Shear Deformation Theory, *Journal of Solid Mechanics*, Vol. 2, No. 1, pp. 79–90, 2010.
- [7] N. El Meiche, A. Tounsi, N. Ziane, I. Mechab, and E. A. Adda Bedia, A new hyperbolic shear deformation theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 53, No. 4, pp. 237–247, 2011.
- [8] R. P. Shimpi, Refined plate theory and its variants, *The American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, Vol. 40, No. 1, pp. 137–146, 2002.
- [9] R. P. Shimpi, H. G. Patel, A two variable refined plate theory for orthotropic plate analysis, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 43, No. 22, pp. 6783–6799, 2006.
- [10] H. T. Thai, S. E. Kim, Levy-type solution for free vibration analysis of orthotropic plates based on two variable refined plate theory, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 36, No. 8, pp. 3870–3882, 2012.
- [11] J. Rouzegar, F. Abad, Free vibration analysis of FG plate with piezoelectric layers using four-variable refined plate theory, *Thin Walled Structures*, Vol. 89, pp. 76–83, 2015.
- [12] J. Rouzegar, R. Abdoli Sharifpoor, A Finite Element Formulation for bending analysis of isotropic and orthotropic plates based on Two-Variable Refined Plate Theory, *Scientia Iranica- Transaction B: Mechanical Engineering*, vol. 22, No. 1, pp. 196–207, 2015.
- [13] A. H. Sheikh, M. Mukhopadhyay, Linear and nonlinear transient vibration analysis of stiffened plate structures, *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 38, No. 6, pp. 477–502, 2002.
- [14] M. E. Golmakani, M. Kadhodayan, large deflection thermoelastic analysis of functionally graded stiffened annular sector plates, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 69, No. 1, pp. 94–106, 2013.
- [15] M. E. Golmakani, large deflection thermoelastic analysis of shear deformable functionally graded variable thickness rotating disk, *Composites Engineering*, Vol. 45, No. 1, pp. 1143–55, 2013.
- [16] J. Rouzegar, M. Gholami, Non linear bending analysis of thick rectangular plates by four-variable Refined plate theory and Dynamic Relaxation method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 2, pp. 221–230, 2015. (in Persian)
- [17] R. Melosh, Structural analysis of solids, *Journal of the Structural Division*, Vol. 89, No. 4, pp. 205–223, 1963.
- [18] G. Z. Voyiadjis, R. W. Pecquet, Isotropic plate elements with shear and normal strain deformations, *International journal for numerical methods in engineering*, Vol. 24, No. 9, pp. 1671–1695, 1987.
- [19] J. N. Reddy, A refined nonlinear theory of plates with transverse shear deformations, *Journal of Solid Mechanics*, Vol. 20, No. 8, pp. 881–896, 1984.
- [20] S. Srinivas, A. K. Rao, C.J. Joga Rao, Flexure of simply supported thick homogeneous and laminated rectangular plates, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 49, No. 8, pp. 449–458, 1969.
- [21] G. J. Turvey, M. Y. Osman, DR large deflection analysis of orthotropic Mindlin plates with simply-supported and clamped- edge conditions, *Composites Engineering*, Vol. 1, No. 4, pp. 235–48, 1991.
- [22] K. S. Sivakumaran, C. Y. Chia, Large-amplitude oscillations of unsymmetrically laminated anisotropic rectangular plates including shear, rotatory inertia and transverse normal stress, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 52, No. 3, pp. 536–542, 1985.

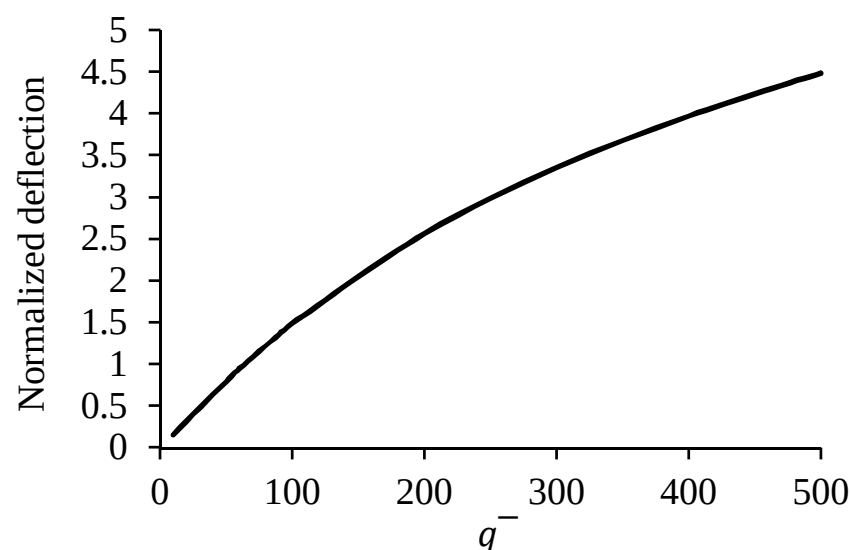


Fig. 3 normalized central deflection obtained for different plate normalized load for a simply supported of orthotropic square plate ($h/a = 0.2$)

شکل 3 نمودار خیز بی‌بعد به ازای بارهای عرضی بی‌بعد مختلف برای ورق ارتوتروپیک مربعی با تکیه‌گاه‌های ساده ($h/a = 0.2$)

می‌کند. معادلات حاکم با استفاده از اصل همیلتون و با در نظر گرفتن ترم‌های غیرخطی فون-کارمن به دست آمد. پس از تشکیل شکل ضعیف معادلات حاکمه، فرمول‌بندی اجزای محدود مربوطه ارایه گردید و برای گسسته سازی ناحیه مسئله یک المان مستطیلی چهار گرهی با شش درجه آزادی در هر گره معرفی شد. برای حل معادلات غیرخطی حاصل، از روش نیوتن-رافسون استفاده شده است. نتایج به دست آمده با نتایج تحقیقات پیشین و دیگر تئوری‌ها مقایسه گردیده و تطابق نتایج بدست آمده با نتایج دیگر مراجع، حاکی از صحت فرمول بندی ارائه شده و کارآیی کد تدوین شده است. همچنین اثرات نسبت ضخامت به طول ورق، شرایط مرزی مختلف، نسبت ابعاد ورق و میزان بارگذاری بر روی میزان خیز و تنش‌های ورق مورد بررسی قرار گرفت.

7- مراجع

- [1] J. Kirchhoff, Über das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen scheibe, *J. Für die Reine und Angewandte Mathematik*, Vol. 40, No. 10, pp. 51–88, 1850.
- [2] E. Reissner, The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 12, No. 1, pp. 69–77, 1945.
- [3] R. B. Nelson, D.R. Lorch, A refined theory for laminated orthotropic plates,