مجله مهندسی مکانیک مدرس، فروردین 1395، دوره 16، شماره 1، ص‌ص 257-268

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

تحلیل تنش‌های برون‌صفحه‌ای و پدیده لایه‌مرزی در پوسته‌های نازک کامپوزیتی با لایه‌گذاری متعامد تحت بار حرارتی با شرایط مرزی مختلف

عیسی احمدی[1*]، ندا عطایی[2]

1- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه زنجان،زنجان
2- کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه زنجان، زنجان
* زنجان، صندوق پستی 45371-38791، i_ahmadi@znu.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 16 مهر 1394
پذیرش: 02 آذر 1394
ارائه در سایت: 23 دی 1394

کلید واژگان:
تنش‌های حرارتی
تئوری لایه‌ای جابجایی محور
پوسته کامپوزیتی نازک
لایه گذاری متعامد
تنش‌های برون‌صفحه‌ای
شرایط لبه‌ای

چکیده

تنش‌های حرارتی بویژه تنش‌های برون‌صفحه‌ای در لایه مرزی در پوسته‌های نازک کامپوزیتی با لایه‌گذاری متعامد که تحت بارگذاری حرارتی قرار دارد مورد بررسی قرار گرفته است. برای این منظور پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی با طول محدود تحت بارگذاری حرارتی مدل‌سازی شده است. برای مدل‌سازی رفتار پوسته از تئوری لایه‌ای بر مبنای جابجایی استفاده شده است. با درنظر گرفتن فرم میدان جابجایی متناسب برای مسأله و با استفاده از تئوری لایه‌ای جابجایی محور، معادلات حاکم بر مسأله برای بارگذاری حرارتی پوسته استخراج شده است. از اصل حداقل انرژی پتانسیل کل برای استخراج معادلات حرکت حاکم بر مسأله استفاده شده است. معادلات حاکم بر مسأله در تئوری لایه‌ای شامل تعداد زیادی معادله دیفرانسیل کوپل می‌باشد. معادلات دیفرانسیل حاکم دکوپله شده و حل تحلیلی آن‌ها برای حالت‌های مختلف شرط مرزی در لبه‌ای ارائه شده و میدان جابجایی پوسته بدست آمده است. با توجه به اینکه به علت اختلاف ضرایب انبساط حرارتی لایه‌های کامپوزیت، تغییرات دما منجر به ایجاد تنش‌های لایه مرزی می‌شود تنش‌های حرارتی بویژه تنش‌های لایه مرزی در پوسته استخراج و بررسی شده است. برای اطمینان از صحت و دقت نتایج روش لایه‌ای، از مدل المان محدود برای صحه‌گذاری بر نتایج تئوری لایه‌ای استفاده شده است. نتایج عددی برای استوانه‌ای کامپوزیتی از جنس شیشه-اپوکسی ارائه شده است. تنش‌های حرارتی بخصوص تنش‌های برون صفحه‌ای در جداره پوسته مخصوصا در نواحی نزدیکی لبه‌ها بررسی شده است. تنش‌های برون‌صفحه‌ای عمودی و برشی و همچنین تنش‌های درون صفحه‌ای ناشی از بارگذاری حرارتی برای لایه‌گذاری‌های متفاوت و شرایط مرزی مختلف مورد بررسی و تحلیل قرار گرفته است.

Interlaminar and boundary layer stress analysis in thin cross-ply composite cylinders subjected to thermal loading for various boundary conditions

Isa Ahmadi*, Neda Ataee

Department of Mechanical Engineering, University of Zanjan, Zanjan, Iran
* P.O.B. 45371-38791, Zanjan, Iran, i_ahmadi@znu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 08 October 2015
Accepted 23 Novmeber 2015
Available Online 13 January 2016

Keywords:
Thermal stresses
Displacement based layer-wise theory
Cross-ply thin cylinders
Out of plane stresses
Edge conditions

ABSTRACT

Interlaminar thermal stresses and boundary layer effect in thin laminated composite cylinders which are subjected to temperature change are studied. To this aim a laminated cross-ply composite cylinder with finite length which is subjected to thermal loading is modeled. The displacement based layer-wise theory (LWT) is used for modeling the response of the composite cylinder in the thermal loading conditions. Using an appropriate displacement field and employing the LWT, the governing equations of the cylinder and the appropriate boundary conditions in the edges of the cylinder are derived with the principle of minimum total potential energy. An analytical solution is introduced for the governing equations and the solution is obtained for various boundary conditions. The numerical results are validated by comparison of the results of LWT with the predictions of the finite element method (FEM) and good agreements are seen. It is shown that the presented LWT solution is an efficient and accurate method for analysis of the edge effect and interlaminar stresses in composite cylinders. The interlaminar thermal stresses and in-plane stresses in the Glass/Epoxy composite cylinder which are subjected to thermal loading are investigated for various boundary (edge) conditions. Cylinders with symmetric and asymmetric layer staking and free, simple and clamped boundary conditions are studied in the numerical results..

1- مقدمه

استفاده از مواد و سازه‌های کامپوزیتی در صنایع مختلف از جمله صنایع پیشرفته مانند صنایع هوافضا، صنایع دریایی و صنایع پتروشیمی گسترش یافته است و نیاز به این مواد از نظر تنوع خواص و حجم استفاده روز به روز در حال افزایش است. درخواست استفاده از این مواد مخصوصا مواد

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:

I. Ahmadi, N. Ataee, Interlaminar and boundary layer stress analysis in thin cross-ply composite cylinders subjected to thermal loading for various boundary conditions, *Modares Mechanical Engineering,* Vol. 16, No. 1, pp. 257-268, 2016 (in Persian)

کامپوزیتی تقویت رشته‌ای به علت خواص ویژه آن‌ها می‌باشد که می‌توان به ویژگی‌هایی مانند استحکام ویژه بالا، مدول ویژه بالا، قابلیت شکل پذیری بالا، قابلیت عایق حرارتی و مقاومت به خوردگی و واکنش‌های شیمیایی اشاره کرد. در این میان پوسته‌های استوانه‌ای در کاربردهای متنوعی مانند انواع مخازن تحت فشار، صنایع پتروشیمی، صنایع انتقال آب و فاضلاب و صنایع هوافضا کاربرد فراوان دارند. در کنار ویژگی‌های منحصر به فرد و مزایایی که برای این مواد شمرده می‌شود، این مواد دارای نقاط ضعفی نیز می‌باشند که استفاده از آن‌ها را در مواردی دشوار کرده است. یکی از مهمترین این مشکلات سازه‌های کامپوزیتی از کارافتادگی این سازه‌ها در اثر جدایش لایه‌ها در لبه‌های سازه است. علت این پدیده بوجود آمدن تنش‌های برون‌صفحه‌ای در سازه‌های کامپوزیتی و افزایش شدید این تنش‌ها در نواحی نزدیکی لبه‌های سازه می‌باشد. در مواد کامپوزیتی لایه‌ای به علت ناپیوستگی خواص مادی و عدم تطابق خواص الاستیک لایه‌های مجاور، تنش‌های برون‌صفحه‌ای در نزدیکی سطح لایه‌ها افزایش می‌یابند و دارای اهمیت بالایی هستند. با توجه به اینکه استحکام سازه‌های کامپوزیتی در راستای عمود بر لایه‌گذاری در مقایسه با سایر جهات بسیار کوچک است تنش‌های برون صفحه‌ای ممکن است باعث جدایش لایه‌ها در لبه‌ها شود. از طرف دیگر به علت اختلاف بین ضریب انبساط حرارتی لایه‌های کامپوزیتی در یک سازه چندلایه کامپوزیتی بوجود آمدن حتی تغییرات یکنواخت دما در سازه‌های کامپوزیتی منجر به بوجود آمدن تنش‌های حرارتی نسبتا بزرگ می‌شود. علت بوجود آمدن این تنش‌های حرارتی این است که تمایل به تغییرات طول (انبساط یا انقباض) در لایه‌های مختلف این مواد متفاوت است و به علت اتصال بین لایه‌های یک چند لایه، نیروهایی بین لایه‌های کامپوزیت چند لایه بوجود می‌آید که منجر به بوجود آمدن تنش‌های حرارتی بزرگ در این سازه‌ها می‌شود. تمایل متفاوت لایه‌ها برای انقباض یا انبساط علاوه بر بوجود آوردن تنش‌های درون صفحه‌ای منجر به بوجود آمدن تنش‌های برون‌صفحه‌ای می‌شود که مقدار این تنش‌ها در نزدیکی لبه‌های سازه به شدت افزایش می‌یابد که با توجه به استحکام ضعیف کامپوزیت‌های لایه‌ای در جهت عمود بر صفحه، این تنش‌ها می‌توانند منجر به از کارافتادگی سازه در اثر جدایش لایه‌ها شوند. هرچند که تنش‌های برون‌صفحه‌ای در سرتاسر سازه وجود دارند ولی مقدار این تنش‌ها در سطح مشترک لایه‌های مجاور و در نزدیکی لبه‌ها افزایش می‌یابند و از اهمیت بیشتری برخوردار می‌شوند و به این علت این تنش‌ها به عنوان تنش‌های بین لایه‌ای نیز شناخته می‌شوند و به لایه نسبتا نازکی در نزدیکی مرزها که مقدار تنش‌های بین لایه‌ای در این ناحیه‌ای به شدت افزایش می‌یابد لایه مرزی[1] گفته می‌شود. با توجه به اینکه پدیده جدایش لایه‌ها عمدتا به علت این تنش‌ها می‌باشد، لذا بررسی دقیق میدان تنش سه بعدی و مخصوصا تنش‌های بین لایه‌ای در لایه مرزی دارای اهمیت فراوان می‌باشد. تنش‌ها بین لایه ای حرارتی به همراه تنش‌های مکانیکی که در حین کار سازه به آن وارد می‌شود ممکن است باعث ازکار افتادگی سازه گردد. مقدار و جهت تنش‌های برون‌صفحه‌ای حرارتی در لایه مرزی تحت تأثیر عواملی از جمله خواص مکانیکی لایه‌ها، ترتیب لایه گذاری، زاویه الیاف لایه‌ها و پارامترهای هندسی و بارگذاری قرار دارد که برای طراحی دقیق سازه‌های کامپوزیتی مقدار این تنش‌ها باید مورد بررسی قرار گیرد. از طرف دیگر تئوری‌های ساده ورق‌ها و پوسته‌های کامپوزیتی مانند تئوری کلاسیک و تئوری مرتبه اول برشی هر چند قادر به محاسبه خواص کلی سازه‌های کامپوزیتی می‌باشد ولی قادر به پیش‌بینی وضعیت سه بعدی و پیچیده تنش در نواحی لایه مرزی که یک پدیده موضعی است، نمی‌باشد و باید از تئوری‌های دقیق‌تر و کامل‌تری برای این منظور استفاده کرد. با توجه به اهمیت نقش تنش‌های حرارتی و تنش‌های برون‌صفحه‌ای حرارتی در ایجاد پدیده جدایش لایه‌ها، در این مقاله تنش‌های برون‌صفحه‌ای ناشی از بارگذاری حرارتی در پوسته کامپوزیتی مورد بررسی قرار گرفته است. ابتدا مروری اجمالی بر کارهای پیشین محققان در مورد محاسبه تنش‌های برون‌صفحه‌ای ناشی از شرایط حرارتی و نم‌گرمایی آورده شده است.

در سال 1963 استاوسکی [1] تجزیه و تحلیل حرارتی ورق‌های لایه‌ای را که در معرض توزیع حرارت سه بعدی قرار دارند، با استفاده از تئوری کلاسیک ورق‌ها ارائه نمود. فرانکین و کیچر [2] با استفاده از تئوری برشی پوسته‌ها به تحلیل تنش در پوسته‌های استوانه‌ای پرداختند. پایپ و پاگانو [3] از روش تفاضلات محدود بهره جستند و با حل شکل کاهش یافته معادلات الاستیسیته توانستند نتایج عددی برای تنش‌های برون‌صفحه‌ای در ورق‌های متقارن و متوازن بدست آوردند. پایپ و دانیل [4] نشان دادند که در ورق‌های کامپوزیتی اثر لایه مرزی به ناحیه مرزی که ضخامت آن تقریبا برابر ضخامت ورق می‌باشد محدود می‌شود. ویتنی و اشتون [5] با استفاده از تئوری کلاسیک چندلایه اثرات نم‌گرمایی را در خمش، کمانش و ارتعاشات در صفحات چندلایه بررسی کردند. تانگ و لوی [6] با استفاده از تئوری لایه مرزی، تنش‌های برون‌صفحه‌ای را در ورق‌های کامپوزیتی تحت بارگذاری کششی محاسبه نمودند. وانگ و کروسمان [7] با استفاده از روش المان محدود در نواحی نزدیک به لبه‌های آزاد به بررسی پاسخ پوسته‌های متقارن تحت بارگذاری حرارتی پرداختند. تاچرت و وو [8] تنش‌های حرارتی و تغییر شکل ورق‌های چندلایه را با استفاده از حل سری فوریه برای تئوری کلاسیک ورق‌ها ارائه کردند. ردی و هسو [9] به بررسی پاسخ ترموالاستیک برای ورق‌های لایه‌ای با استفاده از روش المان محدود پرداختند. سی‌جان و همکارانش [10] حل تحلیلی برای تنش‌های برون‌صفحه‌ای در یک پوسته استوانه‌ای دو لایه تقویت شده با الیاف ارائه کردند. چن و چن [11] نیز به بررسی تغییر شکل‌های حرارتی و بررسی تنش برای ورق‌های لایه‌ای با استفاده از روش المان محدود پرداختند. چادهوری [12] یک روش نیمه تحلیلی برای پیش‌بینی توزیع تنش برشی بین‌لایه‌ای در پوسته‌های ضخیم کامپوزیتی ارائه کرد، او در تحلیل خود فرض کرد که در راستای جانبی پوسته انبساط ناپذیر است و تنش برشی در لایه‌های مختلف برابر است. کانت و منون [13] با استفاده از فرمولبندی المان محدود C^0 و روش تفاضلات محدود به محاسبه تنش‌های برون‌صفحه‌ای در پوسته‌های استوانه‌ای تقویت شده با الیاف پرداختند. آن‌ها از المان چهارگوش 9 گره‌ای پوسته استفاده کردند. یان [14] با ارائه‌ی فرمولی تحلیلی به بررسی رفتار حرارتی پوسته کامپوزیتی که در معرض توزیع دمایی متغیر است پرداخت. وی پوسته را تحت تغییرات دمایی یکنواخت قرار داد و مشاهده کرد پیچش حرارتی در پوسته‌های لایه‌ای متقارن دیده می‌شود. جینگ و تزنگ [15] با استفاده از تئوری الاستیسیته به تحلیل پنل کامپوزیتی طویل تحت بارگذاری عرضی یکنواخت (خمش استوانه‌ای) پرداختند و تنش‌های برون‌صفحه‌ای را محاسبه نمودند. والتس و وینسون [16] با استفاده از یک تئوری ساده لایه‌ای[2] برای پوسته‌ها، تنش‌های برون‌صفحه‌ای در پوسته استوانه‌ای تحت بارگذاری متقارن را محاسبه نمودند. بهمرادی و چاندراش کارا [17] با استفاده از مدل برشی

1- Boundary Layer

2- Discrete-layer

انعطاف‌پذیر المان محدود به تجزیه و تحلیل تنش‌های حرارتی در پوسته‌هایی با انحنای دو طرفه پرداختند. معادلات پایه تئوری چندلایه مورد استفاده از تئوری سندر که شامل تغییر شکل برشی و کرنش‌های حرارتی است، استخراج شده‌است. آن‌ها طیف گسترده‌ای از مسائل پوسته‌های چندلایه را در زمینه‌های دمایی مختلف مورد بررسی قرار داده و تأثیر خواص مواد وابسته به دما، اندازه پانل‌ها و شرایط مرزی را در تغییر شکل حرارتی نشان دادند. بویتنوت و همکارانش [18] با استفاده از تئوری مرتبه اول برشی به تخمین تنش‌های برون‌صفحه‌ای و بررسی شکست در پانل‌های استوانه‌ای با شرایط مرزی گیردار که تحت فشار داخلی قرار گرفته‌اند پرداختند. آن‌ها از تغییرات در راستای طول صرف‌نظر کرده و مسأله را بصورت یک بعدی حل نمودند. شو [19] برای محاسبه تنش‌های برون‌صفحه‌ای در پوسته‌های کامپوزیتی از یک تئوری مرتبه سوم برشی استفاده کرد. چو و کیم [20] با ارائه یک روش تکرارپذیر تنش‌های برون‌صفحه‌ای را در ورق‌های کامپوزیتی تحت بار کششی، خمشی، پیچشی و بارگذاری حرارتی مورد بررسی قرار دادند، آن‌ها از اصل کار مجازی مکمل و روش کانترویچ توسعه یافته استفاده نمودند. پاتل و همکارانش [21] پاسخ استاتیک و دینامیک صفحات لایه‌ای کامپوزیتی را تحت شرایط نم‌گرمایی بر اساس تئوری مرتبه بالا ارائه کردند. طهانی و نثیر [22] با استفاده از تئوری لایه‌ای[1] به محاسبه اثر لایه مرزی در ورق‌های متعامد عمومی تحت بار حرارتی و مکانیکی پرداختند. اقدم و کمالی‌خواه [23] با استفاده از مدل میکرومکانیکی تنش‌های حرارتی را در کامپوزیت لایه‌ای زمینه فلزی بررسی کردند. وانگ و دانگ [24] با استفاده از روش انرژی، اثرات شرایط نم‌گرمایی را در کمانش موضعی پوسته‌های استوانه‌ای چندلایه با حالت‌های مختلف تغییر شکل ارائه کردند. بنکدا و همکارانش [25] روشی تحلیلی برای محاسبه تنش تحت شرایط نمگرمایی در صفحات کامپوزیتی چندلایه ارائه کردند و به توزیع گذرای تنش در ضخامت لایه‌ها پرداختند. عسگری و اخلاقی [26] توزیع تنش‌های حرارتی در استوانه با طول محدود را با روش المان محدود بدست آوردند. نگیوان و کارون [27] با استفاده از فرمولبندی C^0 هشت‌گره‌ای المان محدود، تنش‌ها در لبه‌های آزاد پوسته تحت بارگذاری حرارتی و مکانیکی را بررسی نمودند. وانجی و همکارانش [28] رفتار صفحات لایه‌ای در معرض شرایط نم‌گرمایی را با استفاده از المان 4 گره‌ای بر اساس تئوری مرتبه بالای محلی- جهانی ارائه نمودند، این تئوری شرایط پیوستگی تنش برشی در لایه میانی را ارضا کرده و تعداد مجهولات مستقل از تعداد لایه‌هاست. همچنین سروستانی و سروستانی [29] از تئوری لایه‌ای برای محاسبه تنش‌های برون‌صفحه‌ای در ورق‌های کامپوزیتی با لایه‌گذاری دلخواه استفاده نمودند. افشین و همکارانش [30] تنش‌های برون‌صفحه‌ای در پانل ساندویچی تحت بار گسترده را با روش لایه‌ای مطالعه کردند. میری و نثیر [31] تنش‌های بین لایه‌ای در پوسته‌های استوانه‌ای تحت بار مکانیکی کششی را محاسبه نمودند. یزدانی [32] با استفاده از روش پرتابی به بررسی تنش‌های لبه آزاد در ورق‌های کامپوزیتی متعامد پرداخت. رضوانی و قاسمی قلعه‌بهمن [33] با استفاده از تئوری لایه‌ای تنش‌های بین لایه‌ای در ورق‌های متعامد متقارن را محاسبه نمودند. طهانی و میرزابابایی [34] به بررسی تحلیلی اثر کوپلینگ الکترومکانیکی بر روی تنش‌های برون صفحه‌ای در لبه‌های آزاد چند لایه‌های پیزوالکتریک پرداختند. احمدی [35] با استفاده از تئوری لایه‌ای تنش‌های بین لایه‌ای در پوسته‌های کامپوزیتی تحت بار فشاری را مطالعه کرد.

با مطالعه و جستجو در مقالات موجود در منابع علمی، که به تعدادی از آن‌ها اشاره شده است ملاحظه شد هر چند در زمینه محاسبه پدیده لایه مرزی در ورق‌های کامپوزیتی مقالات نسبتا زیادی وجود دارد، ولی مقالات موجود در زمینه محاسبه تنش‌های بین‌لایه‌ای و لایه مرزی در پنل‌ها و مخصوصا استوانه‌های کامل کامپوزیتی بسیار اندک است. در زمینه استوانه‌های کامپوزیتی نیز مقالات موجود بطور عمده به پدیده لایه مرزی در استوانه‌های با شرط مرزی ساده پرداخته است و در منابع در دسترس مقاله‌ای که تنش‌های بین لایه‌ای و پدیده لایه مرزی حرارتی در لبه‌های آزاد استوانه‌های کامپوزیتی تحت بارگذاری حرارتی را بررسی کند، یافت نشد. از طرف دیگر مقالات موجود با روش المان محدود یا روش جداسازی متغیرها به حل مسأله پرداخته است. تئوری لایه‌ای برای بدست آوردن تنش‌های بین لایه‌ای در ورق‌ها و پنل‌های کامپوزیتی تحت بار ترمومکانیکی بکار رفته است ولی برای محاسبه تنش‌های بین‌لایه‌ای و پدیده لایه مرزی در استوانه‌های کامپوزیتی تحت بار ترمومکانیکی به کار گرفته نشده است. لذا هدف این مقاله محاسبه تنش‌های برون‌صفحه‌ای (بین‌لایه‌ای) و پدیده لایه مرزی در پوسته‌های استوانه‌ای ساخته شده از مواد کامپوزیتی لایه‌ای در اثر بار حرارتی با استفاده از تئوری لایه‌ای می‌باشد که توسط محققان بطور موفق برای ورق‌های کامپوزیتی استفاده شده است. لذا استوانه کامپوزیتی با طول محدود با لایه‌گذاری متعامد که تحت بارحرارتی قرار گرفته است با استفاده از تئوری لایه‌ای ردی مدلسازی شده و حل شده است. معادلات تعادل و شرایط مرزی متناسب پوسته استوانه‌ای در تئوری لایه‌ای با استفاده از اصل حداقل انرژی پتانسیل کل استخراج شده است. معادله‌های تعادل بر حسب مؤلفه‌های جابجایی استخراج گردیده و با استفاده از تعریف متغیرهای جدید، معادلات حاکم دکوپله شده و حل تحلیلی برای آن‌ها ارائه گردیده است. در نهایت با اعمال شرایط لبه‌ای، حل معادلات برای شرایط مرزی آزاد، ساده و گیردار کامل گردیده است. سپس میدان تنش مخصوصا تنش‌های بین لایه‌ای در پوسته مورد بررسی قرار گرفته است. برای بالابردن دقت پیش‌بینی تنش‌های بین لایه‌ای، این تنش‌ها با استفاده از انتگرال‌گیری از معادلات تعادل پوسته در تئوری الاستیسیته بدست آمده است.

2- مدل‌سازی

در تئوری لایه‌ای فرض می‌شود که لمینیت از تعداد زیادی لایه‌ی فرضی تشکیل شده است که کاملا به هم متصل می‌باشند و هر لایه تنها از یک ماده (جنس) تشکیل شده است و بنابراین دارای خواص مکانیکی و حرارتی یکسان می‌باشد. در اصطلاح به هر کدام از این لایه‌ها، یک لایه عددی[2] یا لایه ریاضی[3] اطلاق می‌شود. سطح تماس دو لایه عددی مجاور را سطح عددی می‌نامند. در تئوری لایه‌ای بر مبنای جابجایی، میدان جابجایی هر سطح عددی بصورت تابعی مجهول در نظر گرفته می‌شود و سپس با فرمولبندی مسأله این توابع مجهول بدست می‌آید. تئوری لایه‌ای نسبت به تئوری‌های تک لایه معادل بطور کلی تعداد مجهولات (درجه آزادی مسأله) را افزایش می‌دهد و دقت این روش برای پیش‌بینی پاسخ لمینیت مخصوصا برای پیش‌بینی پاسخ‌های موضعی و همچنین تنش‌های برون‌صفحه‌ای بسیار بالاتر از دقت روش‌های تک لایه معادل است. برای مدلسازی و حل مسأله فرض می‌شود که یک پوسته استوانه‌ای کامل با طول محدود از جنس مواد کامپوزیتی لایه‌ای (لمینیت) موجود است و تحت افزایش دما به اندازه ΔT

1- Layer-wise Theory

2- Numerical layer

3- Mathematical layer

قرار گرفته است. لایه‌های فیزیکی در استوانه کامپوزیتی کاملا به همدیگر متصل هستند. ضخامت کل دیواره پوسته برابر با h، ضخامت هر لایه فیزیکی در لمینیت برابر با h_k و شعاع متوسط آن برابر با R است. محور مختصات استوانه‌ای $r\theta x$ بر روی محور استوانه در وسط طول استوانه طوری منطبق شده است که محور x در راستای طول استوانه، محور r در راستای شعاع است و θ راستای محیطی را نشان می‌دهد. همچنین محور مختصه ضخامت، z، بر سطح میانی[1] دیواره پوسته استوانه‌ای در راستای ضخامت به سمت خارجی پوسته در نظر گرفته شده است. واضح است رابطه بین مختصه z و مختصه شعاعی r از رابطه $r=R+z$ بدست می‌آید که در آن R شعاع متوسط استوانه است. طول استوانه برابر با $2L$ در نظر گرفته می‌شود بطوری که لبه‌های استوانه در نقاط $x=\pm L$ قرار دارند.

وقتی که پوسته تحت بار حرارتی یکنواخت و متقارن محوری ΔT قرار می‌گیرد به علت انبساط حرارتی لایه‌ها، پوسته دچار انبساط شده و میدان جابجایی در آن بوجود می‌آید. مؤلفه‌های جابجایی در راستای محور x، θ و z برای یک نقطه مادی که در مختصات تغییر شکل نیافته در نقطه (x, θ, z) قرار دارد بترتیب با توابع u، v و w نشان داده می‌شود. برای استوانه ساخته شده از مواد ایزوتروپ و یا ساخته شده از لمینیت با لایه‌گذاری متعامد که الیاف در راستای طول و یا محیط استوانه قرار دارند، تقارن محوری خواص مکانیکی و حرارتی برای پوسته برقرار است چرا که در این صورت محور تقارن خواص الاستیک لایه‌های پوسته با محورهای مختصات مسأله منطبق است. لذا تقارن محوری خواص مادی در مسأله وجود خواهد داشت. اگر شرایط مرزی در لبه‌های استوانه نیز دارای تقارن محوری باشد، پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی دارای تقارن محوری در خواص مکانیکی و هندسه خواهد بود. در این صورت واضح است که در اثر افزایش متقارن محوری دما، میدان جابجایی وابسته به مختصه محیطی θ نخواهد بود و بدون هیچگونه تقریب می‌توان میدان جابجایی را مستقل از مختصه محیطی θ در نظر گرفت. همچنین به علت تقارن محوری مسأله، می‌توان استنباط کرد که در اثر افزایش دما ذرات مادی در پوسته در راستای محیطی جابجا نخواهند شد $(v(x,\theta, z)=0)$. لذا می‌توان مؤلفه محیطی جابجایی را برابر با صفر در نظر گرفت. لذا بدون ایجاد هیچگونه تقریب یا خطا می‌توان میدان جابجایی استوانه را بصورت (1) در نظر گرفت.

$$u(x,\theta,z) = u(x,z),\quad w(x,\theta,z) = w(x,z) \tag{1}$$

حتی اگر تغییر دما وابسته به محور طول x باشد ولی در راستای محیطی تغییر نکند، میدان جابجایی (1) صادق خواهد بود. میدان جابجایی رابطه (1) مبنای فرمولبندی مسأله با استفاده از تئوری لایه‌ای قرار می‌گیرد.

2-1- تئوری لایه‌ای

همانگونه که گفته شد در تئوری لایه‌ای لمینیت کامپوزیتی در راستای ضخامت به تعداد نسبتا زیادی لایه عددی تقسیم می‌شود. اگر تعداد لایه‌های عددی در یک لمینیت برابر با N باشد با در نظر گرفتن سطوح بالایی و پایینی لمینیت تعداد $N+1$ سطح در لمینیت وجود خواهد داشت که بترتیب از شماره 1 تا $N+1$ شماره‌گذاری می‌شود. میدان جابجایی هر کدام از این سطوح عددی بصورت تابع مجهول در نظر گرفته می‌شود. با توجه به اینکه کمیت z در هر سطح عددی تغییر نمی‌کند و ثابت است لذا میدان جابجایی هر کدام از این سطوح فقط تابعی از مختصات درون صفحه‌ای است. برای مسأله مذکور واضح است که این توابع وابسته به مختصه θ نخواهند بود. میدان جابجایی سطح عددی k ام در راستای x و z با توجه به توضیحات فوق بترتیب با $U_k(x)$ و $W_k(x)$ نشان داده می‌شود. $U_k(x)$ جابجایی سطح k ام در راستای x و $W_k(x)$ جابجایی سطح k ام در راستای z است. حال میدان جابجایی در لمینیت با توجه به میدان جابجایی سطوح عددی از طریق درونیابی با توابع درون‌یاب بصورت رابطه (2) قابل بیان خواهد بود.

$$u(x,\theta,z) = U_k(x)\Phi_k(z),\quad w(x,\theta,z) = W_k(x)\Phi_k(z) \qquad k = 1,\dots,N+1 \tag{2}$$

که N تعداد لایه‌های ریاضی است و $F_k(z)$ تابع درونیاب لاگرانژی است که مقدار جابجایی در نقاط داخلی لایه‌ها را بر اساس مقدار جابجایی سطوح فوقانی و تحتانی آن لایه بیان می‌کند. $F_k(z)$ در لایه عددی k-1 ام و لایه عددی k ام دارای مقدار غیر صفر است و در بقیه لایه‌ها دارای مقدار صفر است و بصورت رابطه (3) بدست می‌آید.

$$\Phi_k = \begin{cases} 0 & z \le z_{k-1}, \\ \Psi^2_{k-1}(z) & z_{k-1} \le z \le z_k, \\ \Psi^1_k(z) & z_k \le z \le z_{k+1}, \\ 0 & z \ge z_{k+1} \end{cases} \tag{3}$$

در رابطه (3) z_k مختصه z سطح k ام می‌باشد و $y^j{}_k(z)$ تابع درونیاب لاگرانژی محلی خطی در لایه‌ی k ام نامیده می‌شود و j=1,2 بالانویس می‌باشد. تابع درون یاب خطی محلی لایه k ام از رابطه (4) قابل استخراج است.

$$\psi^1_k(z) = \frac{1}{t_k}(z_{k+1} - z)\ ,\ \psi^2_k(z) = \frac{1}{t_k}(z - z_k) \tag{4}$$

که در رابطه فوق t_k ضخامت لایه عددی k ام می‌باشد.

2-2- فرمولبندی پوسته استوانه‌ای نازک

برای پوسته نازک نسبت ضخامت به شعاع h/R در مقایسه با 1 قابل صرف‌نظر است، لذا در فرمولبندی می‌توان از نسبت z/R در مقایسه با 1 صرفنظر کرد و از رابطه $r=R(1+z/R)\sim R$ در معادلات استفاده کرد. حال برای پوسته نازک با استفاده از روابط کرنش-جابجایی در مختصات استوانه‌ای و استفاده از میدان جابجایی در تئوری لایه‌ای که در رابطه (2) بیان شد، میدان کرنش در تئوری لایه‌ای از رابطه (5) بدست می‌آید.

$$\varepsilon_x = \Phi_k U'_k\ ,\varepsilon_\theta = \frac{1}{R}\Phi_k W_k\ ,\quad \varepsilon_r = \Phi'_k W_k\ ,\quad \gamma_{xr} = \Phi_k W'_k + \Phi'_k U_k\ ,\quad \gamma_{x\theta} = \gamma_{\theta r} = 0 \tag{5}$$

در رابطه فوق علامت پرایم روی تابع درونیاب $F_k(z)$ نشان دهنده مشتق آن نسبت به z و علامت پرایم روی توابع جابجایی $U_k(x)$ و $W_k(x)$ نشان دهنده مشتق این توابع نسبت به متغییر x می‌باشد. واضح است که هدف از حل مسأله در مرحله اول بدست آوردن میدان جابجای سطوح عددی شامل $2N+2$ تابع برای $U_k(x)$ و $W_k(x)$ است. برای بدست آوردن معادلات حرکت حاکم بر مسأله از اصل حداقل انرژی پتانسیل کل استفاده می‌شود. اصل حداقل انرژی پتانسیل کل بصورت رابطه (6) بیان می شود [36].

$$\Pi\delta = \delta U + \delta W \tag{6}$$

که در آن U انرژی کرنشی و W قرینه کار نیروهای خارجی می‌باشد. انرژی کرنشی از رابطه (7) بدست می‌آید.

$$\delta U = \int_{-\theta_0}^{\theta_0}\int_{-L}^{L}\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}R(1+z/R)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}\theta\mathrm{d}x = 2\pi\int_{-L}^{L}\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}R\mathrm{d}z\mathrm{d}x \tag{7}$$

1- Mid surface

که برای پوسته نازک $1+z/R\sim1$ در نظر گرفته شده است. حال کرنش‌ها از رابطه (5) در رابطه فوق قرار داده می‌شوند و با انجام انتگرال‌های جز به جز و استفاده از قضیه اساسی حساب تغییرات[1] معادلات حاکم بر استوانه بصورت (8) بدست می‌آیند.

$$\begin{aligned}&\frac{dM_x^k}{dx}-Q_x^k=0,\\&\frac{dR_x^k}{dx}-N_z^k-\frac{1}{R}M_\theta^k=0,\qquad k=1,2,\dots,N+1\end{aligned}\tag{8}$$

واضح است که رابطه (8) شامل $2N+2$ معادله دیفرانسیل است که N تعداد لایه‌های ریاضی می‌باشد. همچنین در روابط فوق کمیت‌های جدید برای منتجه نیروها و ممان‌ها در تئوری لایه‌ای بصورت روابط (9) تا (11) تعریف شده است.

$$\left(M_x^k,M_\theta^k\right)=\int_{-h/2}^{h/2}(\sigma_x,\sigma_\theta)\Phi_k\mathrm{d}z\tag{9}$$

$$\left(R_x^k\right)=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{xz}\,\Phi_k\mathrm{d}z\tag{10}$$

$$\left(Q_x^k,N_z^k\right)=\int_{-h/2}^{h/2}(\sigma_{xz},\sigma_z)\Phi'_k\mathrm{d}z\tag{11}$$

همچنین شرایط مرزی حاکم بر مساله در $x=\pm L$ از اصل حداقل انرژی پتانسیل کل بصورت رابطه (12) بدست می‌آید.

$$\begin{aligned}&M_x^k=0\ \text{ or }\ \delta U_k=0,\\&R_x^k=0\ \text{ or }\ \delta W_k=0,\qquad k=1,2,\dots,N+1\end{aligned}\tag{12}$$

به علت بارگذاری حرارتی علاوه بر کرنش‌های الاستیک، کرنش‌های حرارتی نیز در لایه‌ها بوجود می‌آید. برای مواد ایزوتروپ و با لایه‌های کامپوزیتی که الیاف آن‌ها در راستای طولی x و یا در راستای محیطی θ می‌باشد، کرنش‌های حرارتی $\{\varepsilon_T\}$ از رابطه (13) بدست می‌آید.

$$\{\varepsilon_T\}^T=\{\alpha_x,\alpha_\theta,\alpha_z,0,0,0\}^T\Delta T\tag{13}$$

که در رابطه (13) a_x، a_q و a_z بترتیب ضرایب انبساط حرارتی در راستای x، θ و z می‌باشد و بالانویس T به معنی ترانهاده ماتریس می‌باشد و ΔT تغییرات دمای پوسته را نسبت به حالت اولیه نشان می‌دهد. از طرف دیگر برای هر لایه‌های ریاضی که دارای جنس یکسان در سرتاسر لایه می‌باشد قانون هوک بین تنش و کرنش‌ها قابل نوشتن است. بطور کلی رابطه تنش و کرنش برای لایه عددی k ام بصورت (14) قابل نوشتن است [37].

$$\{\sigma\}^{(k)}=[C]^{(k)}(\{\varepsilon\}^{(k)}-\{\varepsilon_T\}^{(k)})\tag{14}$$

که در آن $\{\sigma\}^{(k)}$ ماتریس تنش و $\{\varepsilon\}^{(k)}$ ماتریس کرنش کل لایه k ام بوده و بصورت (15) و (16) تعریف شده است.

$$\{\sigma\}=\{\sigma_x,\sigma_\theta,\sigma_z,\sigma_{\theta z},\sigma_{xz},\sigma_{x\theta}\}^T\tag{15}$$

$$\{\varepsilon\}=\{\varepsilon_x,\varepsilon_\theta,\varepsilon_z,\gamma_{\theta z},\gamma_{xz},\gamma_{x\theta}\}^T\tag{16}$$

ماتریس $[C]^{(k)}$ سفتی الاستیک لایه kام است و بطور کلی بصورت (17) تعریف می‌شود [37] .

$$[C]^{(k)}=\begin{bmatrix}\bar{C}_{11}&\bar{C}_{12}&\bar{C}_{13}&0&0&0\\\bar{C}_{12}&\bar{C}_{22}&\bar{C}_{23}&0&0&0\\\bar{C}_{13}&\bar{C}_{23}&\bar{C}_{33}&0&0&0\\0&0&0&\bar{C}_{44}&0&0\\0&0&0&0&\bar{C}_{55}&0\\0&0&0&0&0&\bar{C}_{66}\end{bmatrix}^{(k)}\tag{17}$$

برای حل مسأله، معادلات تعادل بر حسب توابع جابجایی نوشته می‌شود. منتجه‌های نیرو و ممان با جایگذاری از روابط کرنش- جابجایی (5) در رابطه تنش-کرنش (14) و سپس قرار دادن نتیجه حاصل در رابطه (9)، بصورت (18) بدست می‌آید.

$$\begin{aligned}\left(M_x^k,M_\theta^k,N_z^k\right)=&\left(D_{11}^{kj},D_{12}^{kj},B_{13}^{jk}\right)U_j'+\left(D_{16}^{kj},D_{26}^{kj},B_{36}^{jk}\right)V_j'+\\&+\left(\frac{D_{12}^{kj}}{R}+B_{13}^{kj},\frac{D_{22}^{kj}}{R}+B_{23}^{kj},\frac{B_{23}^{jk}}{R}+A_{33}^{kj}\right)W_j\\&-\left(B_{1T}^k,B_{2T}^k,A_{3T}^k\right)\Delta T\end{aligned}\tag{18}$$

که در رابطه (18) ماتریس‌های صلبیت لمینیت در تئوری لایه‌ای طبق رابطه (19) تعریف می‌شود.

$$\left(A_{pq}^{kj},B_{pq}^{kj},D_{pq}^{kj}\right)=\sum_{i=1}^{N}\int_{z_i}^{z_{i+1}}\bar{C}_{pq}^{(i)}\left(\Phi'_k\Phi'_j,\Phi_k\Phi'_j,\Phi_k\Phi_j\right)\mathrm{d}z\tag{19}$$

همچنین ماتریس‌های ستونی صلبیت حرارتی لمینیت در تئوری لایه‌ای طبق روابط (20) تعریف می‌شود.

$$\begin{aligned}\left(A_{pT}^k\right)=\sum_{i=1}^{N}\int_{z_i}^{z_{i+1}}&(\overline{C}_{p1}^{(i)}\alpha_x^{(i)}+\overline{C}_{p2}^{(i)}\alpha_\theta^{(i)}\\&+\overline{C}_{p3}^{(i)}\alpha_z^{(i)})\Phi'_k\,\mathrm{d}z\end{aligned}\tag{20}$$

$$\left(B_{pT}^k\right)=\sum_{i=1}^{N}\int_{z_i}^{z_{i+1}}(\overline{C}_{p1}^{(i)}\alpha_x^{(i)}+\overline{C}_{p2}^{(i)}\alpha_\theta^{(i)}+\overline{C}_{p3}^{(i)}\alpha_z^{(i)})\,\Phi_k\mathrm{d}z\tag{21}$$

ماتریس‌های صلبیت با قرار دادن توابع درونیاب در روابط فوق محاسبه شده است و نتیجه در پیوست آمده است. همچنین منتجه‌های نیرویی $R^k{}_x$ و $Q^k{}_x$ از رابطه‌های (22) بدست می‌آید.

$$\left(R_x^k,Q_x^k\right)=\left(B_{55}^{kj},A_{55}^{kj}\right)U_j+\left(D_{55}^{kj},B_{55}^{kj}\right)W_j'\tag{22}$$

اگر از روابط (22) در روابط تعادل (8) جایگذاری شود معادلات تعادل بر حسب توابع جابجایی بدست خواهند آمد. معادلات تعادل بر حسب توابع جابجایی با جایگذاری از (18) و (22) در (8) بصورت (23) بدست می‌آیند.

$$\begin{aligned}&D_{11}^{kj}U_j''+D_{16}^{kj}V_j''+\\&\left(\frac{1}{R}D_{12}^{kj}+B_{13}^k-B_{55}^{jk}\right)W_j'-A_{55}^{kj}U_j=0\end{aligned}\tag{23}$$

همچنین رابطه تعادل در راستای z بصورت رابطه (24) خواهد بود.

$$\begin{aligned}&D_{55}^{kj}W_j''+\left(B_{55}^{kj}-B_{13}^{kj}-\tfrac{1}{R}D_{12}^{kj}\right)U_j'+\left(-A_{33}^{kj}-\right.\\&\left.\tfrac{1}{R}(B_{23}^{jk}+B_{23}^{kj})-\tfrac{1}{R^2}D_{22}^{kj}\right)W_j+\left(A_{3T}^k+\tfrac{1}{R}B_{2T}^k\right)\Delta T=0\end{aligned}\tag{24}$$

هر کدام از معادلات (23) و (24) شامل $N+1$ معادله است که در مجموع تعداد معادلات فوق برابر با $2(N+1)$ معادله است. برای سهولت حل، معادلات (23) و (24) بصورت ماتریسی نوشته می‌شود. برای این منظور ماتریس‌های $\{x\}$ و $\{h\}$ بصورت (25) تعریف می‌شوند.

$$\{\xi\}=\{\{U\}'\,\{W\}\}^T,\qquad\{\eta\}=\{\{U\}\,\{W\}'\}^T\tag{25}$$

که در روابط (25) بطور مثال بردار $\{U\}$ و $\{U\}'$ بصورت (26) تعریف می‌شود.

$$\begin{aligned}&\{U\}=\{U_1,U_2,\dots,U_{N+1}\}^T,\\&\{U\}'=\{U_1',U_2',\dots,U_{N+1}'\}^T\end{aligned}\tag{26}$$

با استفاده از رابطه (25) و روابط (23) تا (24)، معادلات حرکت حاکم بر مسأله بصورت (27) قابل بیان است.

$$\begin{aligned}&\{\xi\}'=[A]\,\{\eta\},\\&\{\eta\}'=[B]\,\{\xi\}+\{F_T\}\end{aligned}\tag{27}$$

که ماتریس‌های $[A]$، $[B]$، $\{F_T\}$ در پیوست آمده است. برای حل این معادلات با ترکیب دو رابطه فوق، معادله (28) بدست می‌آید.

$$\{\xi\}''=[C]\,\{\xi\}+[A]\{F_T\}\tag{28}$$

که در آن $[C]=[A][B]$ می‌باشد. برای حل معادله (29) به روش

1- Calculus of variations

تحلیلی، این معادله دکوپله می‌شود. برای این منظور مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس $[C]$ بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$[C][U] = [U][\Lambda^2] \quad (29)$$

که $[\Lambda^2]$ ماتریس قطری است که عناصر روی قطر اصلی آن مقادیر ویژه ماتریس $[C]$ می‌باشد. حال با استفاده از بردارهای ویژه و مقادیر ویژه ماتریس $[C]$، می‌توان معادله (28) را دکوپله نمود و پاسخ آن را بدست آورد. برای این منظور متغیر جدید $\{S\}$ بصورت (30) تعریف می‌شود.

$$\{x\}=[U]\{S\} \quad (30)$$

با جایگذاری از (30) در (29)، این معادل بر حسب $\{S\}$ دکوپله و حل می‌شود و در نهایت پاسخ معادلات (28) بصورت (31) بدست می‌آید.

$$\{\xi\} = [U][\cosh(\Lambda x)]\{K_1\} + [U][\sinh(\Lambda x)]\{K_2\} - [B]^{-1}\{F_T\} \quad (31)$$

$$\{\eta\} = [B][U][\Lambda]^{-1}[\cosh(\Lambda x)]\{K_1\} + [B][U][\Lambda]^{-1}[\sinh(\Lambda x)]\{K_2\} \quad (32)$$

که در روابط فوق $\{K_1\}$ و $\{K_2\}$ ماتریس‌های ستونی می‌باشند که هر کدام دارای $2(N+1)$ ثابت انتگرال‌گیری هستند. برای بدست آوردن آن‌ها شرایط مرزی در لبه‌های استوانه باید به این معادلات اعمال شود که در ذیل به آن اشاره شده است.

2-3- اعمال شرایط مرزی

برای تکمیل حل مسأله شرایط مرزی مسأله در لبه‌های آن در $x=\pm L$ باید به پاسخ بدست آمده در (31) و (32) اعمال شود تا ثابت‌های مجهول انتگرال‌گیری $\{K_1\}$ و $\{K_2\}$ در این روابط بدست آید. تعداد $4(N+1)$ ثابت مجهول با اعمال همین تعداد شرط مرزی در لبه‌های پوسته بدست می‌آید. برای لبه آزاد شرایط مرزی حاکم بر لبه‌ها بصورت (33) می باشد.

$$M_x^k = 0, \quad R_x^k = 0, \qquad k = 1,2,\dots,N+1 \quad (33)$$

برای بدست آوردن ثوابت $\{K_1\}$ و $\{K_2\}$، معادلات فوق با توجه به روابط (18) بر حسب توابع جابجایی نوشته می‌شود و سپس مقادیر جابجایی U و W در دو سطح $x=\pm L$ با توجه به حل بدست آمده در (31) و (32) در این معادلات قرار داده می‌شود. معادلات حاصل شامل $4(N+1)$ معادله جبری خطی است که مجهولات این معادلات به همین تعداد ثابت انتگرال‌گیری است که با حل این معادلات جبری ثوابت انتگرال‌گیری بدست می‌آید. با توجه به اینکه اعمال شرط مرزی از لحاظ ریاضی ساده ولی نوشتن جزییات آن مفصل است لذا از نوشتن جزییات آن صرفنظر می‌شود. بعد از بدست آوردن این ثوابت انتگرال‌گیری، حل مسأله برای میدان جابجایی کامل می‌شود و تنش‌ها با توجه به میدان جابجایی بدست می‌آید که در بخش 2-4 آمده است، بدست می‌آید. برای اعمال شرایط مرزی ساده و گیردار، معادلات مربوطه باید در مرزهای $x=\pm L$ مشابه روش فوق اعمال شود و ثوابت جدید انتگرال‌گیری بدست آید. شرایط مرزی ساده و شرایط مرزی گیردار برای مسأله بترتیب در روابط (34) و (35) آمده است.

$$M_x^k = 0, \quad W_k = 0, \qquad k = 1,2,\dots,N+1 \quad (34)$$

$$U_k = 0, \quad W_k = 0, \qquad k = 1,2,\dots,N+1 \quad (35)$$

اعمال این شرایط مرزی مشابه اعمال شرایط مرزی آزاد است. با اعمال این شرایط به معادلات (31) و (32) ثوابت انتگرال‌گیری بطور مشابه برای این شرایط مرزی بدست می‌آید.

2-4- استخراج تنش‌های برون‌صفحه‌ای

با حل معادلات حرکت حاکم بر مسأله و استخراج معادلات جابجایی و مشتقات آن‌ها از روابط (31) و (32)، تنش‌ها از رابطه تنش-کرنش (14) قابل استخراج هستند. تنش‌های برون صفحه‌ای که با معادلات تنش-کرنش بدست می‌آیند در سطح مشترک بین لایه‌های ریاضی دارای پیوستگی نیستند. لذا برای بالابردن دقت در محاسبه تنش‌های برون‌صفحه‌ای می‌توان از معادلات تعادل الاستیسیته انتگرال گرفت. برای این منظور با قرار دادن تنش‌های درون صفحه‌ای از رابطه تنش-کرنش و انتگرال‌گیری نسبت به z از معادلات تعادل، تنش‌های برون‌صفحه‌ای بدست می‌آید. معادلات تعادل الاستیسیته برای پوسته مورد نظر در راستای x و z بصورت (36) و (37) می‌باشد.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial z}(r\sigma_{xz}) = 0 \quad (36)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial z}(r\sigma_z) - \frac{\sigma_\theta}{r} = 0 \quad (37)$$

تنش‌های درون‌صفحه‌ای از رابطه تنش-کرنش و کرنش- جابجایی در رابطه (36) قرار داده می‌شود. انتگرال‌گیری از این معادله و با فرض نازک بودن پوسته، مقدار تنش σ_{xz} بصورت رابطه (38) بدست می‌آمد.

$$\sigma_{xz} = -\int_{z_1}^{z_n} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\,dz = -\int_{z_1}^{z_n} (\overline{C}_{11}\Phi_k U_k^{"})\,dz - \int_{z_1}^{z_n} (\overline{C}_{12}\left(\frac{1}{R}\Phi_k + \Phi_k'\right)W_k')\,dz \quad (38)$$

که می‌توان آن را بصورت (39) نوشت.

$$\sigma_{xz} = -B_{11}^k U_k^{"} - \left(\frac{1}{R}B_{12}^k + A_{13}^k\right)W_k' \quad (39)$$

تنش‌های برون‌صفحه‌ای σ_z نیز بطور مشابه از انتگرال‌گیری از روابط (37) و بدست می‌آید. با بدست آوردن تنش‌های برون‌صفحه‌ای با استفاده از روش انتگرال‌گیری از معادلات تعادل که نمونه آن در معادله (39) آورده شده است دقت محاسبه تنش‌های برون‌صفحه‌ای افزایش می‌یابد.

3- نتایج عددی

استوانه کامپوزیتی از جنس شیشه- اپوکسی با توجه به کاربردهای گسترده‌ای که در صنایع مختلف دارد مورد بررسی قرار گرفته است. این سازه‌ها به علت‌های مختلف ممکن است تحت افزایش دما قرار گیرد. همانگونه که قبلا گفته شد به علت اختلاف در ضریب انبساط حرارتی لایه‌ها در راستاهای مختلف، در اثر افزایش دما تنش‌های حرارتی در جداره پوسته بوجود می‌آید. لذا در این مقاله استوانه کامپوزیتی شیشه- اپوکسی که تحت بار حرارتی قرار دارد مورد بررسی قرار گرفته است. خواص ترمومکانیکی لایه‌های شیشه-اپوکسی در جدول 1 آمده است.

فرض شده است که خواص مکانیکی لایه‌های کامپوزیتی در محدوده تغییر وابسته به دما نمی‌باشد. برای سادگی و عمومیت جواب‌ها فرض شده است که افزایش یکنواخت دما به اندازه $\Delta T=1^oC$ به جداره اعمال شود و نتایج برای این مقدار افزایش دما بررسی شده است. واضح است که رابطه بین تنش‌ها و تغییرات دما برای حالتی که تغییرات دما یکنواخت است خطی می‌باشد. مرحله اول بررسی و صحه گذاری بر نتایج عددی حاصل از فرمولبندی ارائه شده در این مقاله می‌باشد. به این منظور ابتدا پوسته استوانه‌ای که دارای 4 لایه با لایه‌گذاری متقارن $[90/0]_s$ است با روش المان محدود و روش لایه‌ای مورد بررسی قرار گرفته است طبق استاندار، لایه‌های 0 راستای محوری استوانه و لایه 90 راستای محیطی استوانه را نشان می‌دهد. برای پوسته نازک فرض شده است که نسبت شعاع به ضخامت استوانه $R/h=50$ می‌باشد.

جدول 1 خواص مکانیکی لایه‌های کامپوزیت شیشه- اپوکسی [37]

Table 1 Mechanical properties of Glass/Epoxy Composite [37]

E_1 (GPa)	$E_2=E_3$ (GPa)	$G_{12}=G_{13}$ (GPa)	G_{23} (GPa)	$n_{12}=n_{13}$	n_{23}	α_1 (10^{-6}/°C)	$\alpha_2=\alpha_3$ (10^{-6}/°C)
50	15.2	4.7	3.28	0.25	0.42	6.7	25

3-1- صحه‌گذاری بر نتایج مدل لایه‌ای

برای صحه گذاری بر نتایج تئوری لایه‌ای، یک مدل مشابه در نرم افزار المان محدود انسیس ساخته شده است و نتایج حاصل از دو روش در پیش‌بینی تنش‌های بین لایه‌ای با هم مقایسه شده است. پوسته کامپوزیتی با لایه‌گذاری $[90/0]_s$ با نسبت شعاع به ضخامت R/h=50 و طول $4h$ با روش المان محدود و روش لایه‌ای حل شده و نتایج با یکدیگر مقایسه شده است. افزایش دمای یکنواخت به میزان ΔT=1 ^oC به استوانه کامپوزیتی اعمال شده است. در حل المان محدود طول استوانه به 100 المان و ضخامت پوسته به 50 المان و محیط آن به 100 المان تقسیم شده است. ضخامت لایه‌های فیزیکی در لمینیت با هم برابر فرض شده است. لذا برای لمینیت این استوانه مقدار ضخامت هر لایه فیزیکی برابر $h_k=h/4$ در نظر گرفته شده است. لذا $z=-h_k$ سطح مشترک لایه اول با لایه دوم و $z=h_k$ سطح مشترک لایه سوم و چهارم را نشان می‌دهد. همچنین z=0 سطح میانی لمینیت را نشان می‌دهد که سطح مشترک دو لایه محیطی (0 درجه) می‌باشد. همچنین $z=2h_k$ سطح خارجی آزاد پوسته را نشان می‌دهد.

در شکل 1 پیش‌بینی روش لایه‌ای با پیش‌بینی روش المان محدود برای تنش برشی برون صفحه‌ای σ_{xz} در سطح مشترک بین لایه سوم و چهارم، $z=h_k$ با یکدیگر مقایسه شده است. همچنین مقایسه تنش برون‌صفحه‌ای عمودی σ_z در سطح میانی پوسته، z=0 و همچنین در سطح مشترک بین لایه سوم و چهارم در $z=h_k$ در نمودار (2) آمده است. با مقایسه نتایج ارائه شده در شکل‌های 1 و 2 ملاحظه می‌شود که انطباق بسیار خوبی بین پیش‌بینی روش لایه‌ای ارائه شده در این مقاله و روش المان محدود مشاهده می‌شود.

شایان ذکر است که در روش لایه‌ای پوسته در کل به 48 لایه عددی تقسیم شده است (هر لایه فیزیکی به 12 لایه عددی) ولی در مدل المان محدود برای رسیدن به دقت مطلوب مدل استوانه در کل شامل حدود 500000 گره می‌باشد که از لحاظ محاسباتی نسبت به روش لایه‌ای بسیار حجیم است. لذا می‌توان نتیجه گرفت که روش ارائه شده در این مقاله از دقت و کارایی بالایی برای پیش‌بینی تنش‌های برون‌صفحه‌ای در استوانه‌های کامپوزیتی برخوردار است.

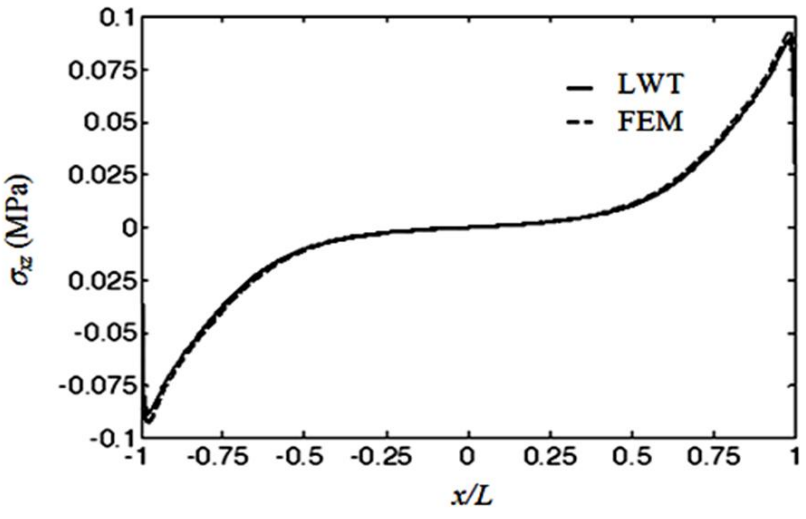

Fig. 1 Comparison of the prediction of LWT and FEM for interlaminar shear stress σ_{xz} in the interface of third and fourth layer, $z=h_k$ ($[90/0]_s$)

شکل 1 مقایسه پیش‌بینی تئوری لایه‌ای و تئوری المان محدود برای تنش برون‌صفحه‌ای برشی در سطح مشترک لایه سوم و چهارم، $z=h_k$ (استوانه $[90/0]_s$)

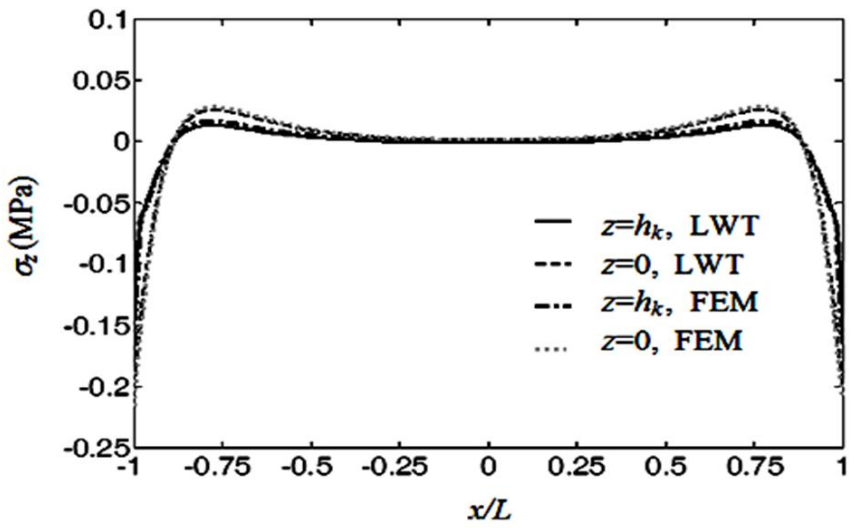

Fig. 2 Comparison of the predictions of LWT and FEM for interlaminar normal stress at $z=0$ and $z=h_k$ ($[90/0]_s$)

شکل 2 مقایسه پیش بینی تئوری لایه‌ای و تئوری المان محدود برای تنش برون‌صفحه‌ای عمودی در سطح $z=0$ و $z=h_k$ (لایه‌گذاری $[90/0]_s$)

در ادامه به بررسی تنش‌های برون‌صفحه‌ای و درون صفحه‌ای در استوانه‌های کامپوزیتی با لایه‌گذاری و شرایط مرزی مختلف پرداخته شده است. قابل ذکر است که به علت تقارن محوری تنش‌های $\sigma_{\theta z}$ و $\sigma_{x\theta}$ برای این مسأله برابر با صفر می‌باشد.

3-2- استوانه با لایه‌گذاری متقارن $[0/90]_s$

3-2-1- شرایط مرزی آزاد

آزاد در این قسمت برای بررسی‌های بیشتر تنش‌های برون‌صفحه‌ای و درون‌صفحه‌ای، استوانه کامپوزیتی با لایه‌گذاری $[0/90]_s$ با لبه‌های آزاد مورد بررسی قرار گرفته است. نسبت شعاع به ضخامت برابر با R/h=50 و طول استوانه برابر با 5h در نظر گرفته شده است و افزایش دما به اندازه ΔT=1 ^oC به استوانه اعمال شده است. ضخامت لایه‌های فیزیکی در لمینیت با هم برابر است. توزیع تنش بین‌لایه‌ای برشی σ_{xz} در سطح مشترک بین لایه‌ها در استوانه $[0/90]_s$ با R/h=50 در شکل 3 آمده است. ملاحظه می‌شود که مقدار تنش برشی σ_{xz} در ناحیه‌ای نزدیک لبه به شدت افزایش یافته است و در نواحی داخلی‌تر استوانه مقدار این تنش بسیار کوچک است. همانگونه که قبلا گفته شد این ناحیه را لایه مرزی می‌نامند. برای افزایش درک فیزیکی از علت بوجود آمدن تنش برون‌صفحه‌ای σ_{xz} و جهت (علامت) آن، ماهیت تغییرات طول (انبساط) لایه‌ها در اثر افزایش دما به طور اجمال مورد بررسی قرار می‌گیرد. همانگونه که در جدول 1 ملاحظه شد ضریب انبساط حرارتی لایه‌های شیشه-اپوکسی در راستای الیاف کوچکتر از راستای عمود بر الیاف است. لذا در اثر افزایش دما انبساط لایه‌ها در راستای الیاف کمتر از انبساط لایه‌ها در راستای عمود بر الیاف است. در لایه‌گذاری [0/90/90/0] که الیاف در لایه‌های داخلی و خارجی در راستای طول استوانه هستند و در دو لایه میانی در راستای محیطی می‌باشد، در اثر افزایش دما تمایل لایه‌های میانی (محیطی) برای انبساط در راستای محور لوله بیشتر از تمایل لایه‌های داخلی و خارجی استوانه است. لذا در اثر افزایش دما لایه‌های میانی تمایل دارند لایه‌های داخلی و خارجی را در راستای طولی با خود به سمت بیرون بکشند و لایه‌های داخلی و خارجی نیز تمایل کشیدن لایه‌های میانی را به سمت معکوس (به سمت داخل) دارند. لذا یک نیروی برشی در سطح مشترک لایه‌ها مخصوصا در نزدیکی‌های لبه‌ها بوجود می‌آید. در سطح مشترک بر روی لایه‌های محیطی 90 که تمایل به انبساط بیشتری در راستای محوری استوانه دارند این نیرو از سمت لبه به سمت درون است و در روی لایه‌های محوری، 0 این نیرو از سمت درون استوانه به سمت لبه‌ها است. واضح است که به علت

تقارن نسبت به وسط پوسته، این نیرو در مقطع $x=0$ برابر با صفر خواهد بود، لذا با توجه به محورهای مختصات، برای نیمه استوانه که در آن $x>0$ است همانگونه که در شکل 3 مشاهده می‌شود مقدار تنش برشی σ_{xz} روی سطح مشترک لایه اول و دوم، $z=-h_k$، دارای مقدار مثبت است. البته تنش برشی نسبت به سطح $x=0$ پادمتقارن خواهد بود. از طرف دیگر در سطح مشترک فوقانی $(z=h_k)$ نیرو روی سطح لایه محیطی 90 از سمت لبه به سمت مرکز است و لذا تنش برشی در این سطح در سمتی که $x>0$ است منفی خواهد بود. به علت تقارن لایه گذاری انتظار می‌رود برای پوسته‌های نازک مقدار تنش برشی σ_{xz} در $z=0$ به صفر نزدیک باشد که در نمودار 3 این موضوع به وضوح مشاهده می‌شود. همانگونه که در شکل 3 ملاحظه می‌شود مقادیر پیش‌بینی شده برای تنش برشی σ_{xz} با تفاسیر فیزیکی که برگرفته از مفهوم جابجایی‌ها و برهم‌کنش بین لایه‌ها در سطح مشترک بین آن‌هاست، تطابق دارد. مقدار تنش برشی در نزدیکی لبه‌ها افزایش یافته است ولی همانگونه که انتظار می‌رود، مقدار تنش برشی σ_{xz} در لبه آزاد به شدت کاهش یافته است. در سطح $z=0$ که سطح میانی است تنش برشی تقریبا برابر صفر است. در سطح $z=2h_k$ که سطح آزاد خارجی پوسته را نشان می‌دهد همانگونه که انتظار می‌رود تنش برشی σ_{xz} و تنش عمود بر سطح σ_z، باید برابر با صفر باشد که این موضوع به درستی در شکل‌های 3 و 4 ملاحظه می‌شود. مقدار تنش برشی σ_{xz} در نزدیکی‌های لبه در سطح $x=0.94L$ به حداکثر مقدار خود رسیده است که مقدار این تنش برای بار حرارتی $\Delta T=1\ ^oC$ برابر با حدود 0.08 MPa می‌باشد. توزیع تنش برون‌صفحه‌ای عمودی σ_z در جداره لایه‌ها در شکل 4 آمده است. دور از لبه‌ها مقدار تنش عمودی در حد صفر است ولی با نزدیک شدن به لبه‌ها مقدار تنش با سرعت افزایش یافته است. در لبه‌های آزاد $(x=\pm L)$ مقدار تنش عمودی در سطح مشترک لایه‌های میانی $(z=0)$ بسیار بزرگتر از سایر مناطق است. کششی بودن این تنش احتمال ایجاد لایه‌لایه شدگی را افزایش می‌دهد.

همانگونه که انتظار می‌رود در سطح آزاد خارجی استوانه $(z=2h_k)$ مقدار تنش پیش‌بینی شده عمودی برابر صفر است که نشان دهنده دقت این تئوری در محاسبه تنش‌های برون‌صفحه‌ای است.

برای بررسی بیشتر نحوه توزیع تنش‌های برون‌صفحه‌ای عمودی و برشی در جداره استوانه، توزیع تنش برون‌صفحه‌ای برشی σ_{xz} و عمودی σ_z نسبت به ضخامت جداره پوسته در فواصل مختلف از لبه، به ترتیب در شکل‌های 5 و6

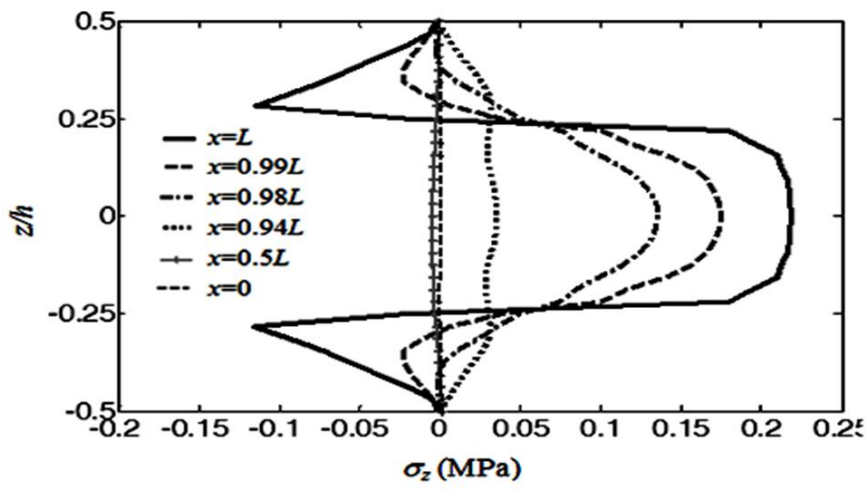

Fig. 3 Shear stress σ_{xz} distribution in interface of layer and Outer plane of cylinder in $[0/90]_s$ cylinder with free edges

شکل 3 توزیع تنش برشی σ_{xz} در سطح مشترک لایه‌های مجاور و سطح خارجی استوانه $[0/90]_s$ با لبه‌های آزاد

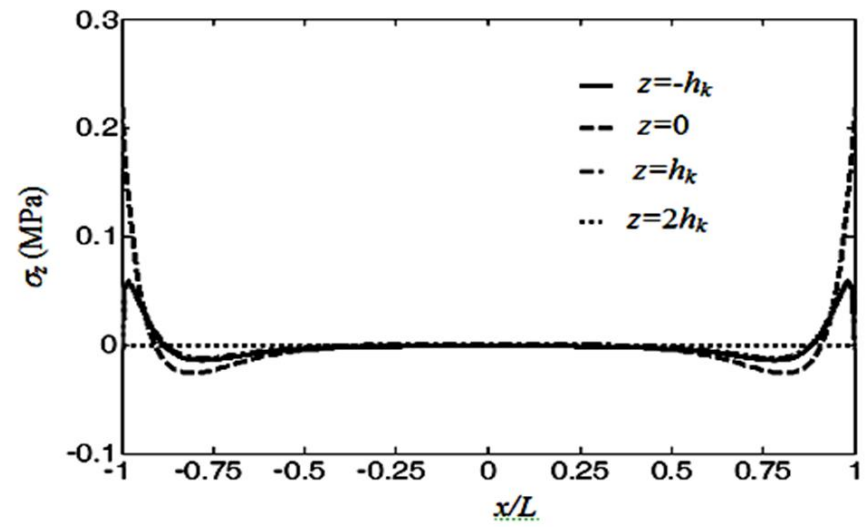

Fig. 4 Distribution of normal stress σ_z at interface of layer and at outer surface of $[0/90]_s$ cylinder with free edges

شکل 4 توزیع تنش عمودی σ_z در سطح مشترک لایه‌های مجاور استوانه و سطح خارجی استوانه $[0/90]_s$ با لبه‌های آزاد

آمده است. در شکل 5 ملاحظه می‌شود که تنش برشی در نزدیکی سطح اتصال لایه‌ها نسبت به سایر مناطق بیشتر است و لذا این تنش را تنش برشی بین لایه‌ای نیز می‌نامند. در شکل 6 ملاحظه می‌شود که تنش عمودی در لایه‌های میانی کششی است و در سطح مشترک لایه‌های محیطی و محوری با سرعت زیادی از کششی به فشاری تغییر یافته است.

3-2-2 شرایط مرزی ساده (لولا)

در این قسمت توزیع تنش‌ها در استوانه کامپوزیتی با شرایط مرزی ساده مورد

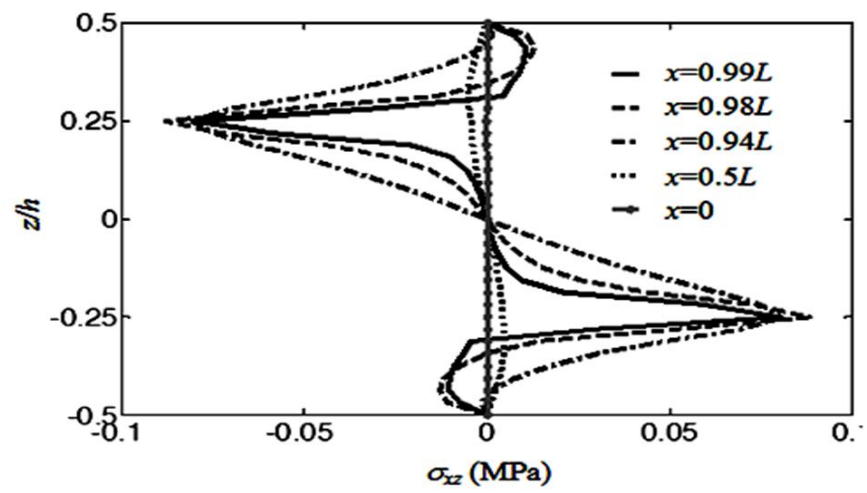

Fig. 5 Distribution of shear stress σ_{xz} through the wall thickness in $[0/90]_s$ cylinder with free edges

شکل 5 توزیع تنش برشی σ_{xz} نسبت به ضخامت دیواره در استوانه $[0/90]_s$ با لبه‌های آزاد

Fig. 6 Distribution of normal stress σ_z through the wall thickness in $[0/90]_s$ cylinder with free edges

شکل 6 توزیع تنش عمودی σ_z نسبت به ضخامت دیواره در استوانه $[0/90]_s$ با لبه‌های آزاد

بررسی قرار گرفته است. برای بررسی اثر شرایط تکیه‌گاهی بر روی توزیع تنش‌های برون‌صفحه‌ای، توزیع تنش‌ها برای استوانه با لایه‌گذاری $[0/90]_s$ با R/h=50 و طول استوانه برابر با $5h$ که دارای شرایط مرزی ساده در هر دو لبه است در شکل‌های 7 و 8 آورده شده است.

توزیع تنش برشی σ_{xz} و عمودی σ_z برای این پوسته تحت شرایط مرزی ساده-ساده به ترتیب در شکل‌های 7 و 8 آورده شده است. با مقایسه این نمودارها ملاحظه می‌شود که تنش برشی برون‌صفحه‌ای σ_{xz} در لبه‌های استوانه برای شرایط مرزی ساده دقیقا در لبه به حداکثر رسیده است. با مقایسه شکل 3 با شکل 7 ملاحظه می‌شود مقدار تنش برشی برون‌صفحه‌ای برای لبه‌های ساده بزرگتر از مقدار این تنش در لبه‌های آزاد می‌باشد. همچنین با مقایسه شکل 4 با شکل 8 ملاحظه می‌شود که در شکل 4 که برای لبه‌های آزاد می‌باشد توزیع تنش σ_z در قسمتی از طول پوسته مثبت و در قسمت دیگری منفی است ولی برای شرایط مرزی ساده همانگونه که در شکل 8 ملاحظه می‌شود توزیع تنش عمودی در لبه‌ها منفی است و انتگرال آن برابر صفر نمی‌باشد و این موضوع به این علت است که در پوسته با شرایط مرزی آزاد هیچ گونه نیروی خارجی از بیرون به پوسته وارد نمی‌شود ولی در پوسته با لبه‌های ساده در اثر افزایش دما نیروی خارجی از بیرون به پوسته وارد می‌شود. برای استوانه با لبه‌های آزاد هیچ نیرویی از لبه‌ها به استوانه وارد نمی‌شود لذا اگر استوانه تنها تحت افزایش دما قرار گرفته باشد هیچ نیروی مکانیکی خارجی از بیرون و لبه‌ها به استوانه وارد نشود، لذا هر مقطعی از استوانه باید در حال تعادل استاتیکی نیروهای داخلی باشد.

برای بررسی توزیع تنش‌های حرارتی درون صفحه‌ای در استوانه، توزیع تنش محیطی σ_θ و تنش محوری σ_x در ضخامت جداره در فواصل مختلف از لبه استوانه برای شرایط مرزی ساده-ساده به ترتیب در شکل‌های 9 و 10 آورده شده است. در شکل 10 ملاحظه شد که توزیع تنش به نحوی است که مقدار نیروی محوری برابر با صفر است.

3-3- لایه‌گذاری نامتقارن [90/0/90/0]

توزیع تنش بین‌لایه‌ای در استوانه با لایه‌گذاری نامتقارن [90/0/90/0] با نسبت شعاع به ضخامت R/h=50 و طول برابر با $5h$ برای دو شرط مرزی آزاد-آزاد و گیردار-گیردار بررسی شده و نتایج در شکل‌های 11 تا 14 نشان داده شده است. توزیع تنش برون‌صفحه‌ای عمودی σ_z و برشی σ_{xz} برای شرایط مرزی آزاد به ترتیب در شکل‌های 11 و 12 آمده است. ملاحظه می‌شود که در استوانه با لایه‌گذاری نامتقارن تنش برشی در z=0 برابر با صفر نمی‌باشد.

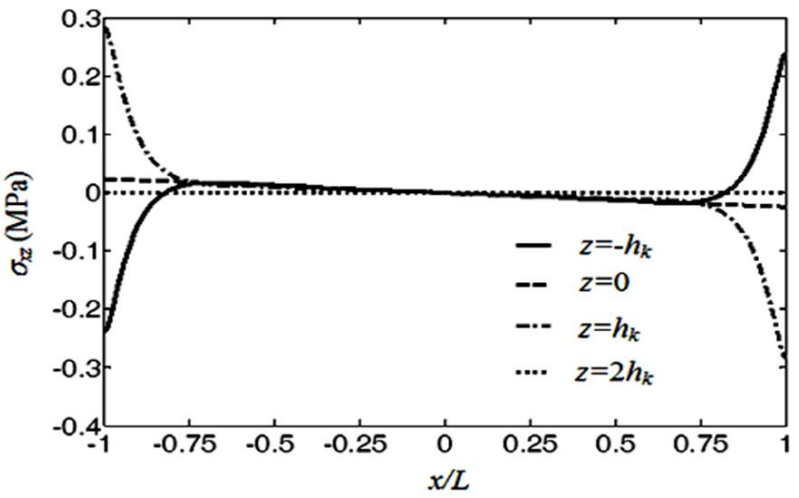

Fig. 7 Distribution of shear stress σ_{xz} at the interface of layer and outer surface of in $[0/90]_s$ cylinder with simple edges

شکل 7 توزیع تنش برشی σ_{xz} در سطح مشترک لایه‌های مجاور و سطح خارجی استوانه $[0/90]_s$ با شرایط مرزی لبه‌های ساده

توزیع تنش بین لایه‌ای برشی و عمودی در این استوانه برای شرایط مرزی گیردار-گیردار بترتیب در شکل‌های 13 و 14 آمده است. با مقایسه نمودار 11 و 13 اثر شرایط لبه‌ای بر توزیع تنش عمودی σ_z بوضوح قابل ملاحظه است. مقدار تنش σ_z در لبه برای شرایط مرزی گیردار بسیار بزرگتر از شرایط مرزی آزاد می‌باشد که علت آن وارد شدن نیروها به استوانه از طرف لبه‌های گیردار و عدم امکان انبساط لبه در جهت ضخامت می‌باشد که باعث بوجود

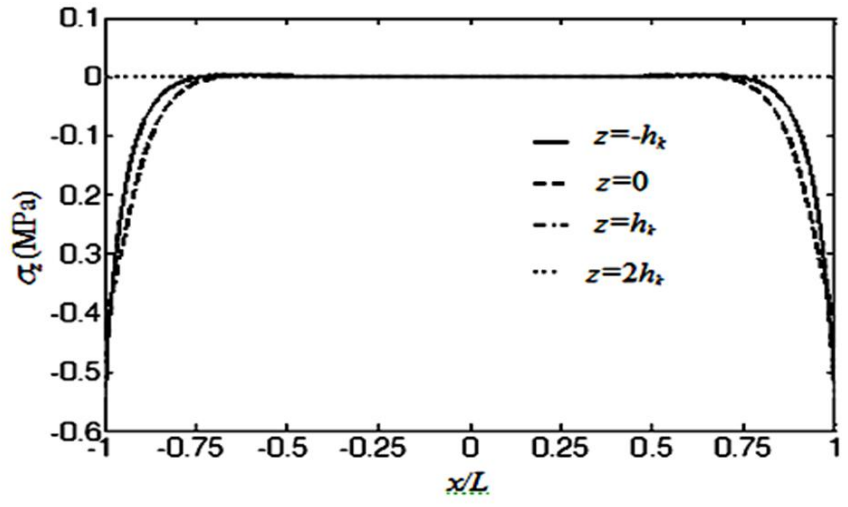

Fig. 8 Distribution of normal stress σ_z at interface of layer and outer surface of $[0/90]_s$ cylinder with simple edges

شکل 8 توزیع تنش عمودی σ_z در سطح مشترک لایه‌های مجاور و سطح خارجی استوانه $[0/90]_s$ با شرایط مرزی لبه‌های ساده

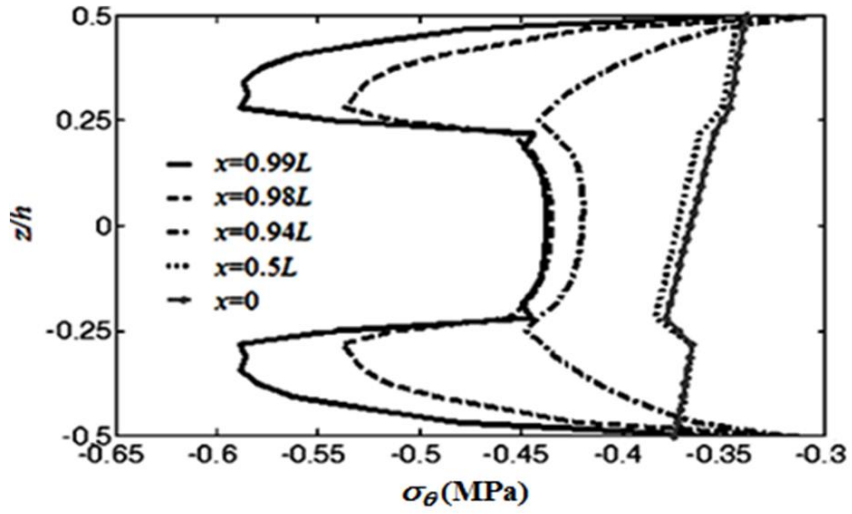

Fig. 9 Distribution of hoop stress σ_θ through the wall thickness in $[0/90]_s$ cylinder with simple edges

شکل 9 توزیع تنش محیطی σ_θ نسبت به ضخامت دیواره در استوانه $[0/90]_s$ با لبه‌های ساده

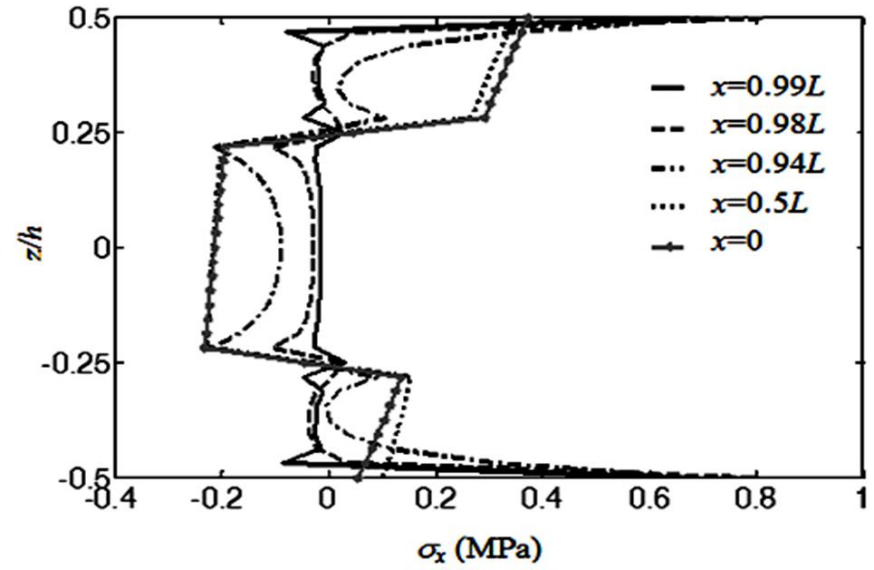

Fig. 10 Distribution of axial stress σ_x through the wall thickness in $[0/90]_s$ cylinder with simple edges

شکل 10 توزیع تنش محوری σ_x نسبت به ضخامت دیواره در استوانه $[0/90]_s$ با لبه‌های ساده

آمدن تنش‌های عمودی بزرگتری در لبه شده است. همچنین تنش برشی بین لایه‌ای σ_{xz} برای حالت لبه آزاد و لبه گیردار در شکل‌های 12 و 14 قابل مقایسه است که دوباره نتیجه می‌شود که مقدار تنش برشی برون صفحه‌ای برای شرایط مرزی گیردار بزرگتر از شرایط مرزی ساده است که علت آن نیز عدم امکان انبساط جداره پوسته در راستای ضخامت در لبه‌ها برای لبه گیردار می‌باشد. در شکل 13 مشاهده می‌شود که در نواحی دورتر از لبه مقدار تنش عمودی برای شرایط تکیه گاهی گیردار نیز برابر با صفر است. به علت وارد شدن نیروهای فشاری از تکیه گاه به لبه، در شرایط مرزی گیردار تنش عمودی در لبه‌ها فشاری می‌باشد. برای استوانه با لبه‌های آزاد هیچ نیرویی از لبه‌ها به استوانه وارد نمی‌شود و تنش‌های ایجاد شده تنها به علت اختلاف بین ضریب انبساط حرارتی بین لایه‌ها می‌باشد. در شکل 11 مشاهده می‌شود که در نواحی دور از لبه‌ها مقدار تنش عمودی σ_z قابل صرف‌نظر است و در نواحی نزدیک لبه در یک ناحیه فشاری و در ناحیه دیگر کششی است. برای شرایط مرزی ساده و گیردار، وارد شدن نیروی از لبه به استوانه باعث افزایش مقدار تنش‌های برون صفحه‌ای نسبت به شرایط مرزی آزاد شده است. برای لبه گیردار در شکل 14 مشاهده می‌شود تنش برشی σ_{xz} در لبه برابر صفر نمی‌باشد.

4- نتیجه گیری

توزیع تنش‌های برون‌صفحه‌ای در پوسته کامپوزیتی لایه‌ای که تحت بار

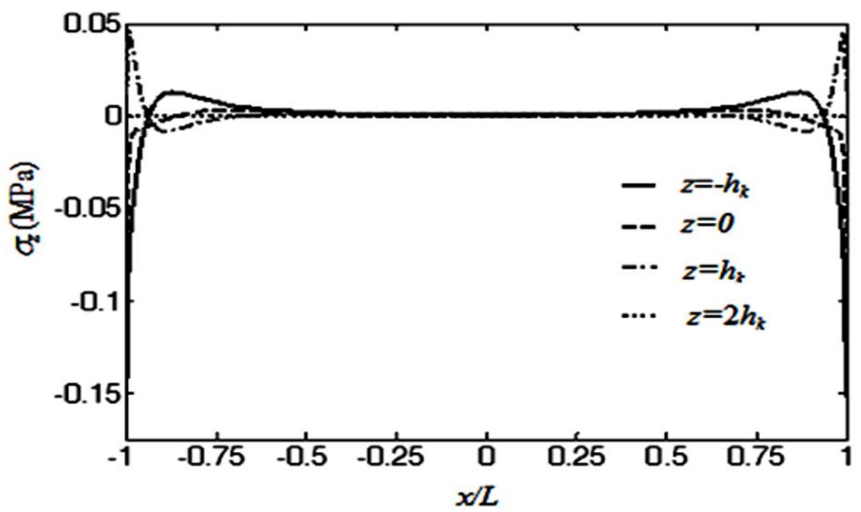

Fig. 11 Distribution of normal stress σ_z at the interface of layers and outer surface of [90/0/90/0] cylinder with free edges

شکل 11 توزیع تنش عمودی σ_z در سطح مشترک لایه‌های مجاور و سطح خارجی استوانه [90/0/90/0] با لبه‌های آزاد

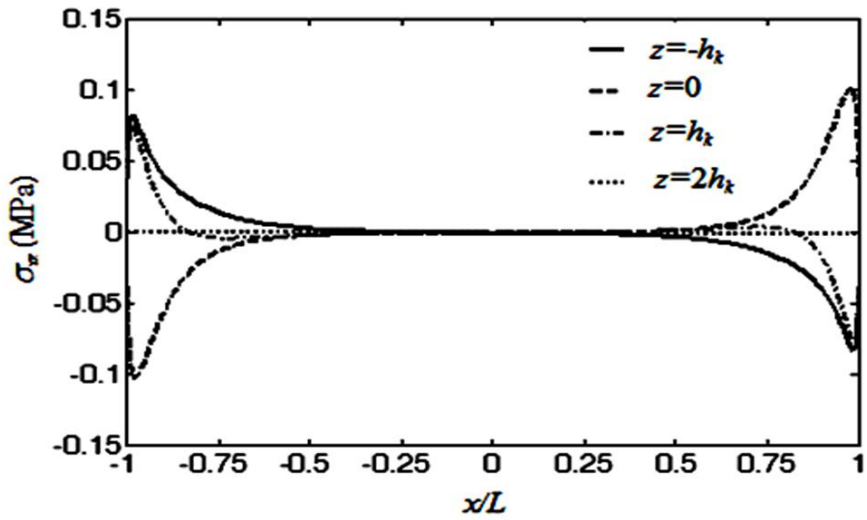

Fig. 12 Distribution of shear stress σ_{xz} at the interface of layers and outer surface of [90/0/90/0] cylinder with free edges

شکل 12 توزیع تنش برشی σ_{xz} در سطح مشترک لایه‌های مجاور و سطح خارجی استوانه [90/0/90/0] با لبه‌های آزاد

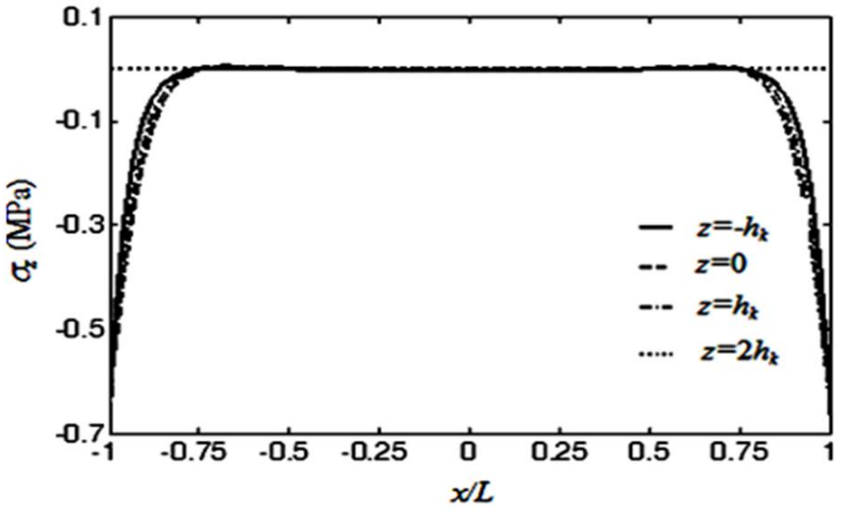

Fig. 13 Distribution of σ_z at the interface of layers and outer surface of [90/0/90/0] cylinder with clamped edges

شکل 13 توزیع تنش عمودی σ_z در سطح مشترک لایه‌های مجاور و سطح خارجی استوانه [90/0/90/0] با لبه‌های گیردار

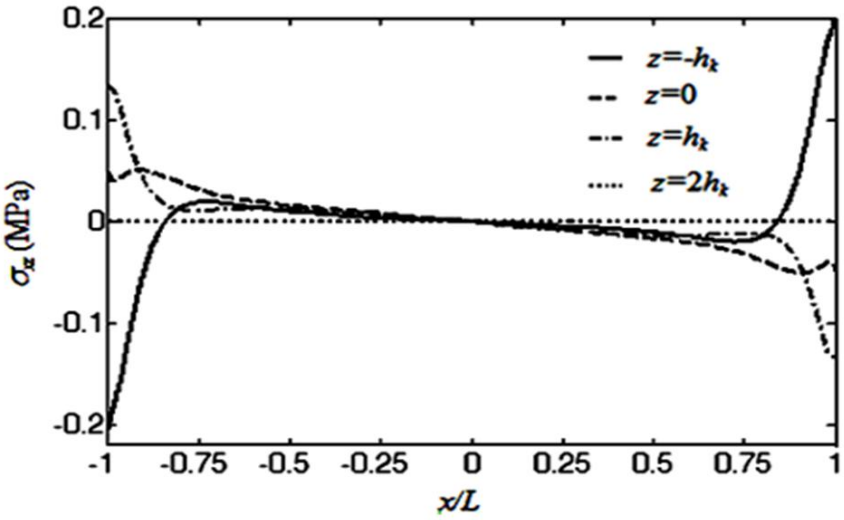

Fig. 14 Distribution of shear stress σ_{xz} at the interface of layers and outer surface of [90/0/90/0] cylinder with clamped edges

شکل 14 توزیع تنش برشی σ_{xz} در سطح مشترک لایه‌های مجاور و سطح خارجی استوانه [90/0/90/0] با لبه‌های گیردار

حرارتی قرار گرفته است استخراج شده و پدیده لایه مرزی در نزدیکی‌های لبه‌های استوانه مورد مطالعه قرار گرفته است. برای مدلسازی مسأله از تئوری لایه‌ای بر مبنای جابجایی ردی استفاده شده است. معادلات تعادل حاکم بر مسأله از اصل حداقل انرژی پتانسیل کل استخراج شده است و برای حل آن‌ها یک روش تحلیلی استفاده شده است. مسأله برای شرایط مرزی لبه‌های آزاد، لبه‌های ساده (لولا) و لبه‌های گیردار حل شده است. برای بدست آوردن تنش‌های بین لایه‌ای بجای استفاده از قانون هوک، از معادلات تعادل الاستیسیته انتگرال‌گیری شده است تا دقت نتایج عددی بالاتر باشد. برای صحه‌گذاری بر روش ارائه شده از نتایج حاصل از مدل‌سازی در نرم‌افزار انسیس استفاده شده است و با مقایسه نتایج کارایی و دقت فرمولبندی ارایه ارائه شده نشان داده شده است. نتایج عددی از توزیع تنش‌های برون‌صفحه‌ای و درون صفحه‌ای در پوسته‌های با لایه‌گذاری متعامد متقارن و غیرمتقارن ارائه شده است و اثر شرایط مرزی و لایه‌گذاری بر توزیع تنش‌های حرارتی مورد بررسی قرار گرفته است. موارد ذیل از بررسی نتایج عددی نتیجه شده است.

- انطباق بسیار خوبی بین نتایج روش لایه‌ای و نتایج روش المان محدود در پیش بینی تنش‌های بین لایه‌ای دیده می‌شود که نشان دهنده دقت روش لایه‌ای است.
- از لحاظ حجم محاسباتی، روش لایه‌ای دارای حجم محاسباتی بسیار کمتری نسبت به روش المان محدود برای محاسبه تنش های بین لایه‌ای با دقت مشابه است.

- مقدار تنش بین لایه‌ای در لبه، برای لبه‌های آزاد از مقدار این تنش در لبه‌های لولا کوچک‌تر است.
- مقدار تنش بین لایه‌ای در لبه‌های ساده از مقدار این تنش در لبه‌های گیردار کوچکتر است.
- تنش عمودی بین لایه‌ای در لایه مرزی برای لبه گیردار و لبه ساده فشاری است ولی این تنش در لبه‌های ازاد در لایه مرزی در سطوح مختلف دارای مقدار مثبت یا منفی است و در لایه مرزی تغییر علامت می‌دهد.
- تنش برشی برون‌صفحه‌ای σ_{xz} در لبه‌های استوانه برای شرایط مرزی ساده و شرایط مرزی گیردار دقیقا در لبه به حداکثر مقدار خود رسیده است.

5- پیوست

ماتریس‌های صلبیت تئوری لایه‌ای در رابطه (19) برای پوسته در بصورت روابط (40) تا (42) بدست می‌آید که t_k ضخامت لایه عددی k ام است.

$$A_{pq}^{kj} = \begin{cases} \dfrac{\bar{C}_{pq}^{(k-1)}}{h_{k-1}} & if\ \ j = k-1, \\ \dfrac{\bar{C}_{pq}^{(k-1)}}{h_{k-1}} + \dfrac{\bar{C}_{pq}^{(k-1)}}{h_k} & if\ \ j = k, \\ \dfrac{\bar{C}_{pq}^{(k)}}{h_k} & if\ \ j = k+1, \\ 0 & if\ \ j < k-1\ \ or\ \ j > k+1 \end{cases} \tag{40}$$

$$B_{pq}^{kj} = \begin{cases} \dfrac{\bar{C}_{pq}^{(k-1)}}{2} & if\ \ j = k-1, \\ \dfrac{\bar{C}_{pq}^{(k-1)}}{2} + \dfrac{\bar{C}_{pq}^{(k)}}{2} & if\ \ j = k, \\ \dfrac{\bar{C}_{pq}^{(k)}}{2} & if\ \ j = k+1, \\ 0 & if\ \ j < k-1\ \ or\ \ j > k+1 \end{cases} \tag{41}$$

$$D_{pq}^{kj} = \begin{cases} t_{k-1}\dfrac{\bar{C}_{pq}^{(k-1)}}{6} & if\ \ j = k-1, \\ \dfrac{t_{k-1}\bar{C}_{pq}^{(k-1)}}{3} + \dfrac{t_k\bar{C}_{pq}^{(k-1)}}{3} & if\ \ j = k, \\ \dfrac{t_{k-1}\bar{C}_{pq}^{(k)}}{6} & if\ \ j = k+1 \\ 0 & if\ \ j < k-1\ or\ j > k+1 \end{cases} \tag{42}$$

ماتریس $[A]$ در رابطه (28) از رابطه (43) بدست می‌آید.

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \tag{43}$$

که در آن

$$a_{11} = D_{11}^{-1}A_{55},\ \ a_{12} = D_{11}^{-1}\left(B_{55} - B_{13} - \frac{1}{R}D_{12}\right), \\ a_{21} = [0],\ \ a_{22} = [I] \tag{44}$$

همچنین ماتریس $[B]$ در رابطه (27) از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$[B] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \tag{45}$$

در رابطه (45)

$$b_{11} = [I], b_{12} = [0]\ , \\ b_{21} = D_{55}^{-1}\left(B_{13} - B_{55} - \frac{1}{R}D_{12}\right), \\ b_{22} = D_{55}^{-1}\left(A_{33} + \frac{1}{R}(B_{23} + B_{23}^T) + \frac{1}{R^2}D_{22}\right) \tag{46}$$

همچنین ماتریس ستونی $\{F_T\}$ در رابطه (27) بصورت زیر بدست می‌آید.

$$\{F_T\} = \left\{\{0\}^T, -RD_{55}^{-1}(\{A_{3T}\} + \frac{1}{R}\{B_{2T}\})\right\}^T \Delta T \tag{47}$$

اگر ماتریس $[C]$ دارای مقادیر ویژه صفر تکراری باشد حل مسأله دچار اشکال می‌شود که برای اجتناب از این موضوع ماتریسی با ضرابی کوچکی به اسم ماتریس $[a]$ که ضریبی از ماتریس $[D]$ است ولی عناصر آن بسیار کوچکتر است به بعضی مولفه‌های ماتریس $[A]$ و $[B]$ اضافه می‌شود که جزییات بیشتر در این مورد در مراجع [22]، [30] و [34] آمده است.

6- مراجع

[1] Y. Stavsky, Thermoelasticity of heterogeneous aeolotropic plates, *Journal of the Engineering Mechanics Division*, Vol. 89, No. 2, pp. 89-106, 1963.

[2] H. G. Franklin, T. P. Kicher, Stresses in laminated composite cylinders, *AIAA Journal*, Vol. 6, No. 11, pp. 2208-2209, 1968.

[3] R. B. Pipes, N. J. Pagano, Interlaminar stresses in composite laminates under uniform axial extension, *Journal of Composite Materials*, Vol. 4, No. 4, pp. 538-548, 1970.

[4] R. B. Pipes, I. M. Daniel, Moire analysis of the interlaminar shear edge effect in laminated composites, *Journal of Composite Materials*, Vol. 5, No. 2, pp. 255-259, 1971.

[5] J.M. Whitney, J. E. Ashton, Effect of environment on the elastic response of layered composite plates, *AIAA Journal*, Vol. 9, No. 9, pp. 1708-1713 , 1971.

[6] S. Tang, A. Levy, A boundary layer theory-part II: extension of laminated finite strip, *Journal of Composite Materials*, Vol. 9, No. 1, pp. 42-52, 1975.

[7] A. S. D. Wang, F. W. Crossman, Edge effects on thermally induced stresses in composite laminates, *Journal of Composite Materials*, Vol. 11, No. 3, pp. 300-312, 1977.

[8] C. H. Wu, T. R. Taucgert, Thermoelastic analysis of laminated plats, *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 3, No. 2, pp. 247-259, 1980.

[9] J. N. Reddy, Y. S. Hsu, Effects of shear deformation and anisotropy on thermal bending of layered composite plates, *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 3, No. 4, pp. 475-493, 1980.

[10] L. Sijian, W. Renjie, L. Zudao, H. Xiaoxi, An analytic solution for interlaminar stresses in a fiber reinforced double-layer cylindrical shell, *Acta Mechanica Sinica*, Vol. 1, No. 2, pp. 159-170, 1985.

[11] L. W. Chen, L. Y. Chen, Thermal deformation and stress analysis of composite laminated plates by finite element method, *Computers & Structures*, Vol. 35, No. 1, pp. 41–49, 1990.

[12] R. A. Chaudhuri, On the prediction of interlaminar stresses in a thick laminated general shell, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 26, No. 5-6, pp. 499-510, 1990.

[13] T. Kant, M. P. Menon, Estimation of interlaminar stresses in fiber reinforced composite cylindrical shells, *Composite Structures*, Vol. 38, No. 2, pp. 131-147, 1991.

[14] F. G. Yuan, Thermal stresses in thick laminated composite shells, *Composite Structures*, Vol. 26, No. 1-2, pp. 63-75, 1993.

[15] H. Jing, K. Tzeng, Refined shear deformation theory of laminated shell, *AIAA Journal*, Vol. 31, No. 4, pp. 764-773, 1993.

[16] T. L. Waltz, J. R. Vinson, Interlaminar stresses in laminated cylindrical shells of composite material, *AIAA Journal*, Vol. 14, No. 3, pp. 1213-1218, 1993.

[17] K. Chandrashekhara, A. Bhimaraddi, Thermal stress analysis of laminated doubly curve shells using a shear flexible finite elements, *Composite & Structures*, Vol. 52, No. 5, pp. 1023-1030, 1994.

[18] R. L. Boitnot, J. H. Jr. Starnes, E.R. Johnson, Nonlinear response and failure of pressurized composite curved panels, *Journal of Aerospace Engineering*, Vol. 8, No. 3, pp. 129-138, 1995.

[19] X. P. Shu, A refined theory of laminated shells with higher-order transverse shear deformation, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 34, No. 6, pp. 673-383, 1997.

[20] M. Cho, H. S. Kim, Iterative free-edge stress analysis of composite laminates under extension, bending, twisting and thermal loadings, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 37, No. 3, pp. 435-459, 2000.

[21] B. P. Patel, M. Ganapathi, D. P. Makhecha, Hygrothermal effects on the structural behavior of thick composite laminate using higher- order theory, *Composite Structures*, Vol. 56, No. 1, pp. 25-34, 2002.

[22] M. Tahani, A. Nosier, Free edge stress analysis of a general cross-ply composite laminates under extension and thermal loading, *Composite Structures*, Vol. 60, No. 1, pp. 91-103, 2003.

[23] M. M. Aghdam, A. Kamalikhah, Micromechanical analysis of layered systems of MMCs subjected to bending-effects of thermal residual stresses, *Composite Structures*, Vol. 66, No. 1, pp. 563-569, 2004

[24] X. Wang, K. Dong, Local buckling for triangular and lemniscate delaminations near the surface of laminated cylindrical shells under hygrothermal effects, *Composite Structures*, Vol. 79, No. 1, pp. 67-75, 2007.

[25] A. Benkhedda, A. Tounsi, E. A. Adda Bedia, Effect temperature and humidity on transient hygrothermal stresses during moisture desorption in laminated composite plates, *Composite Structures*, Vol. 82, No. 4, pp. 623-635, 2008.

[26] M. Asgari, M. Akhlaghi, Transient thermal stresses in two-dimensional functionally graded thick hollow cylinder with finite length, *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 80, No. 4, pp. 353–376, 2010.

[27] V. T. Nguyen, J. F. Caron, Finite element analysis of free-edge stresses in composite laminates under mechanical an thermal loading, *Composites Science and Technology*, Vol. 69, No. 1, pp. 40–49, 2009.

[28] S.H. Lo, Wu Zhen, Y.K. Cheung, Chen Wanji, Hygrothermal effects on multilayered composite plates using a refined higher order theory, *Composite Structures*, Vol. 92, No. 3, pp. 633-646, 2010.

[29] H. Yazdani Sarvestani, M. Yazdani Sarvestani, Interlaminar stress analysis of general composite laminates, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 53, No. 11, pp. 958-967, 2011.

[30] M. Afshin, M. Sadighi, M. Shakeri, Free edge effects in a cylindrical sandwich panel with a flexible core and laminated composite face sheets, *Mechanics of Composite Materials*, Vol. 46, No. 5, pp. 787-808, 2010.

[31] AK. Miri, A. Nosier, Interlaminar stresses in antisymmetric angle-ply cylindrical shell panels, *Composite Structures*, Vol. 93, No. 2, pp. 419-429, 2011.

[32] M. Yazdani, Analysis of Free Edge Stresses in a Cross-ply Composite Plate by Applying Shooting Method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 13, No. 9, pp. 1-11, 2013. (in Persian فارسی)

[33] M. Rezvani; A. Ghasemi Ghalebahman, Interlaminar stresses in symmetric cross-ply composite laminates using Layerwise theory, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 1, pp. 59-66, 2014. (in Persian فارسی)

[34] M. Tahani, M. Mirzababaee, Analytical solution of electromechanical coupling effect on interlaminar stresses at free-edges of angle-ply piezoelectric laminates under mechanical loading, *Journal of applied and Computational Sciences in Mechanics*, Vol. 21, No. 2, pp. 89-108, 2010. (in Persian فارسی)

[35] I. Ahmadi, Analysis of interlaminar stresses in cross-ply composite cylinders subjected to radial loads", *Journal of Science and Technology of Composites*, Vol. 2, No. 3, pp. 43-54, 2015. (in Persian فارسی)

[36] J. N. Reddy, *Energy principles and variational methods in applied mechanics*, Second Edittion, pp. 133-170, New York John Wiley & Sons, 2002.

[37] C. T. Herakovich, *Mechanics of fibrous composite*, First Edittion, pp. 164-189 ,New York: John Wiley & Sons, 1998.