



بررسی عددی لایه مرزی هیدرودینامیکی و حرارتی فالکنر-اسکن سیالات ویسکوالاستیک

مریم باؤ¹، محمود نوروزی^{2*}، علی جباری مقدم³

1- کارشناس ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه شاهرود، شاهرود

2- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه شاهرود، شاهرود

3- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه شاهرود، شاهرود

* شاهرود، صندوق پستی 316، mnorouzi@shahroodut.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 03 مهر 1394

پذیرش: 28 آبان 1394

ارائه در سایت: 12 بهمن 1394

کلید واژگان:

لایه مرزی

انتقال حرارت

فالکنراسکن

سیال مرتبه دوم

ویسکوالاستیک

چکیده

مطالعه جریان لایه مرزی یکی از مسائل بنیادی در مکانیک سیالات به شمار می‌رود، که از دیرباز مورد توجه پژوهشگران این رشته قرار داشته است. تاکنون تحقیقات بسیار زیادی روی جریان لایه مرزی صورت گرفته است که بیشتر آنها در خصوص سیالات نیوتنی بوده و سهم اندکی از آنها به سیالات غیر نیوتنی پرداخته‌اند. هدف اصلی این پژوهش شناخت بهتر اثرات خواص ویسکوالاستیک، بر مشخصه‌های لایه مرزی می‌باشد. در این تحقیق با رویکرد عددی به انتقال حرارت و لایه مرزی ایجاد شده توسط جریان سیال ویسکوالاستیک باوجود جمله گرادیان فشار پرداخته شده است. در رویکرد عددی، برای شبیه‌سازی این جریان، از دینامیک سیالات محاسباتی به صورت ضمنی با استفاده از نرم‌افزار متلب و از مدل مرتبه دو، به عنوان مدل ساختاری سیال ویسکوالاستیک استفاده شده است. برای اطمینان از پاسخ‌های روش عددی، استقلال نتایج از شبکه محاسباتی بررسی و همچنین پاسخ‌ها در حالت نیوتنی با حل بلازیوس و فالکنراسکن مقایسه شده‌اند. در حل عددی نشان داده شد که با افزایش اختلاف تنش‌های نرمال اول روی دیواره، ضخامت لایه مرزی هیدرودینامیکی، ضخامت مومنتم، ضخامت جابجایی و ضخامت لایه مرزی حرارتی افزایش می‌یابد. تغییرات ضریب درگ در اختلاف تنش‌های نرمال اول گرادیان فشارهای متفاوت گزارش شده است. تأثیر تغییرات عدد پراتل در جریان سیال ویسکوالاستیک بر مشخصه‌های لایه مرزی مورد مطالعه قرار گرفته است. عدد ناسلت متوسط در گرادیان فشارهای متفاوت و ضریب اختلاف تنش نرمال اول مورد ارزیابی قرار گرفته است و در نهایت در یک گرادیان فشار ثابت، با افزایش ضریب اختلاف تنش نرمال اول ناسلت متوسط در طول صفحه، کاهش می‌یابد.

Numerical investigation of hydrodynamic and thermal Falkner–Skan boundary layer of viscoelastic fluids

Maryam Baou, Mahmood Norouzi*, Ali Jabari-Moghadam

Department of Mechanical Engineering, Shahrood University, Shahrood, Iran.

*P.O.B. 316, Shahrood, Iran, mnorouzi@shahroodut.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper

Received 25 September 2015

Accepted 19 November 2015

Available Online 01 February 2016

Keywords:

Boundary layer

Heat transfer

Falkner-Skan

Second order fluid

Viscoelastic

ABSTRACT

The study of the boundary layer flow is considered as one of the fundamental issues in fluid mechanics that attracts the attention of many of the researchers' in this field. Most of the previous researches on boundary layer problem are limited to Newtonian fluids and only a few researches have considered the non-Newtonian fluids. The main objective of this research is to better recognize the viscoelastic properties effect on characteristics of the boundary layer. In this study, the hydrodynamic and thermal boundary layer of viscoelastic Falkner-Skan problem is investigated numerically. Here, the second order model has been used as the viscoelastic constitutive equation and MATLAB software is used for analysis. Both constant temperature and constant heat flux at walls are used as thermal boundary conditions. The effect of Reynolds number, the coefficient of the first normal stress difference, Prandtl number and wedge shape factor on the thickness of dynamic and heat transfer boundary layer, momentum thickness, displacement thickness, drag coefficient and Nusselt number are studied. The effects of both adverse pressure gradient and favorable pressure gradient in heat and hydrodynamics boundary layer characteristics are investigated. The magnitude of the non-Newtonian hydrodynamic and heat boundary layer are found to increase with increasing the coefficient of the first normal stress and finally at constant pressure gradient, average Nusselt number decreases along plate by increasing first normal stress coefficient.

1- مقدمه

قطعات پلاستیکی با استفاده از اکستروژن، کاربرد دارد. از جمله اولین تحقیقات انجام‌شده در این زمینه، پژوهش‌های بنیادی فالکنر و اسکن [1] در سال 1931 می‌باشد. هرتری [2] مسأله لایه مرزی جریان سیال با گرادیان فشار را در زوایای مختلف سطح شیب‌دار (گرادیان فشارهای مختلف) مورد

بررسی جریان لایه مرزی روی سطح شیب‌دار (جریان باگرادیان فشار) ازجمله مسائل بسیار مهم و بنیادی در مکانیک سیالات است که در صنایع مختلفی که با جریان سیال در ارتباطند مانند تولید نوار چسب و یا ساخت انواع

Please cite this article using:

M. Baou, M. Norouzi, A. Jabari-Moghadam, Numerical investigation of hydrodynamic and thermal Falkner–Skan boundary layer of viscoelastic fluids, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 2, pp. 69-78, 2016 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

بررسی قرارداد، لین و لین [3] به حل تشابهی لایه مرزی حرارتی فالکنر-اسکن در دمای ثابت سطح پرداختند. روسیل وراو والنسیا [4] به حل مسأله لایه مرزی فالکنر-اسکن همراه با انتقال حرارت توسط سری فوریه پرداختند؛ در واقع با متحد کردن و پیوستن آنالیز منحنی مجانب در ضرایب سری فوریه به بهبود نتایج پرداختند و به این نتیجه رسیدند که این روش دارای نتایجی با دقت بیشتر و سرعت همگرایی بالاتری نسبت به روش شوتینگ¹ می‌باشند. همچنین برای حل مسائل لایه مرزی فالکنر-اسکن همراه با انتقال حرارت، انتقال جرم و مسائل احتراق این روش را لحاظ نمودند. فنگ و ژانگ [5] با ارائه یک روش تحلیلی به حل تحلیلی لایه مرزی فالکنر-اسکن پرداختند. معادلات پیوستگی و مومنتم با شرط مرزی دیوار متحرک و انتقال جرم در سیال حل گردیده است. تأثیر حرکت دیوار و انتقال جرم بر پارامترهای مختلف لایه مرزی و پروفیل سرعت مورد بررسی و تجزیه و تحلیل قرار گرفته است. در واقع با مقایسه نتایج حاصل از کار خود با نتایج فالکنر-اسکن موجود در کتاب وایت² [6] قدرت و اعتبار حل خود را به نمایش گذاشته است. نگانو و همکاران [7] به بررسی و ارزیابی لایه مرزی هیدرودینامیکی در گرادیان فشار متوسط تا قوی پرداختند. آن‌ها این موضوع را بدین صورت بیان کردند، تا زمانی که گرادیان فشار معکوس در بسیاری از ساختارهای سیالاتی به صورت مختلف به وجود می‌آید، آن را باید به عنوان یک عامل اصلی در بسیاری از تحقیقات تجربی با توجه به تأثیر شگرفی که بر روی خاصیت‌های توربولانسی دارد در نظر گرفت. نتیجه حاصل از مطالعات نگانو و همکاران بدین شرح است که در گرادیان فشار معکوس، به خصوص در حالت قوی، ضخامت زیر لایه لزج بسیار کاهش می‌یابد. باسکاران و همکاران [8] رفتار لایه مرزی مغشوش هیدرودینامیکی را تحت تأثیر خطوط جریان قوسی و خطوط جریان با گرادیان فشار را مورد مطالعه قرار دادند.

مرونی و برداشا [9] میزان رشد لایه مرزی تحت تأثیر گرادیان فشار را یافتند. آن‌ها مشاهده نمودند که رشد لایه مرزی در دیوار محدب نسبت به حالت دیوار صاف کندتر است. همچنین سبسی و اسمیت [10] و وندنبرگ [11] هر کدام به صورت مجزا به تحلیل و پژوهش در زمینه لایه مرزی مغشوش تحت تأثیر گرادیان فشار معکوس پرداختند. کارولین و همکاران [12] جریان های دو بعدی را که تحت تأثیر گرادیان فشار معکوس قرار داشت مورد تجزیه و تحلیل قرار دادند. در جریان مذکور عدد رینولدز بر پایه ضخامت مومنتومی تعریف شده است و هدف اصلی بررسی نحوه گسترش لایه مرزی در جریان‌های مذکور در مقایسه با جریان در روی صفحه مسطح در مقادیر متفاوت از اعداد رینولدز بوده است. آنچه که واضح است در هر دو نوع جریان پروفیل های سرعت ناحیه لگاریتمی را به خوبی نشان می‌دهند، اما در جریان همراه با گرادیان فشار معکوس میزان اغتشاشات بیشتر شده و این ناهنجاری با حرکت در امتداد جریان بیشتر نیز می‌شود. به طوری که در اثر گرادیان فشار معکوس یک نقطه اوج در مورد تنش‌های عددی دیده خواهد شد. با وجود اینکه تحقیقات بسیار زیادی در زمینه لایه مرزی روی صفحه تخت و حالت فالکنر-اسکن انجام شده است؛ اما باید اذعان داشت که این تئوری‌ها برای سیالات نیوتنی کاربرد دارد، درحالی که بسیاری از صنایع با محلول‌ها، مذاب‌های پلیمری، رنگ‌ها و سوخت‌ها سروکار دارند که جزو سیالات غیر نیوتنی می‌باشد؛ بنابراین نیاز به تحقیقات در مورد سیالات غیر نیوتنی همچنان وجود دارد. برد و والتر [13]، لایه مرزی یک سیال مرتبه 2 را مورد بررسی قرار دادند و به این نتیجه غیرمترقبه رسیدند که برای چنین

سیالی، سرعت در داخل لایه مرزی باید بیشتر از خارج لایه مرزی شود. پیش-بینی آن‌ها در این تحقیق هنوز پس از گذشت سال‌ها از طریق آزمایشگاهی تأیید نشده است.

هریس [14]، با استفاده از انتگرال مومنتم استدلال نمود که در لایه مرزی یک سیال ویسکوالاستیک، خواص الاستیک موجب افزایش ضخامت لایه مرزی و نیز ضریب اصطکاک نسبت به حالت نیوتنی می‌شود. آبلو همکاران [15] به بررسی لایه مرزی هیدرودینامیکی و حرارتی بر روی صفحه تخت در جریان سیال ویسکوالاستیک پرداختند. برای حل معادلات غیر خطی حاکم بر جریان از روش تحلیلی استفاده نمودند. برای حل معادله انرژی از دو نوع شرایط مرزی دما ثابت بر روی دیواره و شار ثابت استفاده نمودند. اثر تغییرات پارامترهای گوناگون نظیر خاصیت ویسکوالاستیک، عدد اکرت و عدد پرانتل را بر روی لایه مرزی حرارتی و دینامیکی مورد بررسی قرار دادند. پاستلنیکو و پاپ [16] به حل عددی معادله لایه مرزی فالکنر-اسکن در جریان سیال غیرنیوتنی پاورلو³ پرداختند. در مرجع مذکور، تأثیر گرادیان فشار، زاویه صفحه و خواص مواد بر پروفیل سرعت، ضریب درگ و ضخامت لایه مرزی مورد مطالعه قرار گرفته است. اولانجو [17] به حل تشابهی معادله لایه مرزی فالکنر-اسکن با استفاده از مدل فن⁴ پرداخت. تأثیر اعداد رینولدز بزرگ و گرادیان فشار ($m=1/3$) بر ضریب درگ و اختلاف تنش نرمال اول بررسی شده است. در این تحقیق به طور کلی لایه مرزی و انتقال حرارت در جریان سیال ویسکوالاستیک در مسأله فالکنر-اسکن مورد مطالعه قرار می‌گیرد. شناخت اثرات ویسکوالاستیک بر پارامترهای لایه مرزی و انتقال حرارت از جمله اهداف این پژوهش می‌باشد. بدین منظور از رویکرد عددی با استفاده از نرم افزار متلب⁵ و روش اختلاف محدود استفاده شده است. به طور کلی در شبیه سازی عددی اثر پارامترهایی چون عدد رینولدز، ضریب اختلاف تنش نرمال اول، تغییرات گرادیان فشار، عدد پرانتل و عدد ناسلت محلی و متوسط مورد بررسی و بحث قرار خواهد گرفت.

2- معادلات حاکم

معادلات حاکم برای جریان آرام تراکم ناپذیر، شامل معادله پیوستگی، معادله بقای مومنتم و معادله انرژی است که به ترتیب در روابط (1) تا (3) ارائه شده‌اند.

$$\nabla \cdot u = 0 \quad (1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla(u) \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \tau \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \cdot \nabla(T) = \frac{k}{\rho C_p} (\nabla^2 T) \quad (3)$$

امکان ساده سازی جمله‌های موجود در معادلات فوق با توجه به نظریه لایه مرزی وجود خواهد داشت. معادله لایه مرزی در جریان سیال ویسکوالاستیک، در جهت x به صورت رابطه (4) تعریف می‌گردد.

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) \quad (4)$$

برای τ_{xy} و τ_{xx} در روش مرتبه بزرگی می‌توان مرتبه بزرگی ترم های تنش را به صورت روابط (5) و (6) در نظر گرفت، بنابراین از ترم τ_{xx} صرف نظر شده و معادله لایه مرزی در جریان سیال ویسکوالاستیک بصورت رابطه (7) ساده می شود [18].

3- Power law
4- FENNE
5- MATLAB

1- Shooting method
2- White

6- گسسته سازی معادلات

در یک مدل ضمنی، برای تقریب زدن مشتقات، از جمله‌های بیشتری از گام بعدی استفاده خواهد شد، در نتیجه می‌بایست برای به دست آوردن مقادیر در گام بعدی، یک دستگاه معادلات جبری را حل کرد. مشتقات در این مدل به صورت معادلات (14) تا معادله (19) می‌باشد که با استفاده از این معادلات می‌توان معادلات پیوستگی، مومنتم و انرژی را گسسته نمود [6].

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u(i, j+1) - u(i, j-1)}{2dy} \quad (14)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u(i+1, j) - u(i, j)}{dx} \quad (15)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u(i+1, j+1) - 2u(i+1, j) + u(i+1, j-1)}{dy^2} \quad (16)$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = \frac{1}{dxdy^2} (u(i+1, j+1) - 2u(i+1, j) + u(i+1, j-1) + u(i+1, j-1) - u(i, j+1) + 2u(i, j) - u(i, j-1)) \quad (17)$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = \frac{u(i, j+2) - 2u(i, j+1) + 2u(i, j-1) + u(i, j-2)}{2dy^3} \quad (18)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{u(i+1, j+1) - u(i+1, j) - u(i, j+1) + u(i, j)}{dxdy} \quad (19)$$

7- بی بعد سازی معادله حاکم

تحلیل ابعادی به کمک نوعی فشرده کردن، به رفع پیچیدگی و کاستن از تعداد متغیرهای تجربی مؤثر روی یک پدیده فیزیکی منجر می‌شود. در این بخش به بی‌بعدسازی معادلات حاکم بر جریان به کمک متغیرهای روابط (20) تا (26) پرداخته شده است.

$$v^* = \frac{v}{U_{ref}} \quad (20)$$

$$u^* = \frac{u}{U_{ref}} \quad (21)$$

$$x^* = \frac{x}{L} \quad (22)$$

$$y^* = \frac{y}{L} \quad (23)$$

$$p^* = \frac{p}{\eta \frac{U_{ref}}{L}} \quad (24)$$

$$\tau^* = \frac{\tau}{\eta \frac{U_{ref}}{L}} \quad (25)$$

$$T^* = \frac{T - T_{\infty}}{T_w - T_{\infty}} \quad (26)$$

معادله (1) با استفاده از روابط بالا به صورت رابطه زیر بی‌بعد خواهد شد.

$$\frac{U_{ref}}{L} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{U_{ref}}{L} \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \quad (27)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \quad (28)$$

بنابراین معادله مومنتم بر اساس پارامترهای بی‌بعد تعریف شده به صورت زیر می‌باشد:

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \nabla \cdot \tau \quad (29)$$

$$\rho u^* \frac{U_{ref}}{L} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \rho v^* \frac{U_{ref}}{L} \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = \left(-\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \nabla^* \cdot \tau^*\right) \frac{\eta \frac{U_{ref}}{L}}{L} \quad (30)$$

$$\rho u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \rho v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = \left(-\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \nabla^* \cdot \tau^*\right) \frac{1}{Re} \quad (31)$$

$$\tau_{xy} = 0 \left(\frac{U_{\infty}^2}{\delta L} \right) \quad (5)$$

$$\tau_{xx} = 0 \left(\frac{U_{\infty}^2}{\delta^2} \right) \quad (6)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) \quad (7)$$

3- محاسبه تنش در جریان سیال ویسکوالاستیک

در بخش حل عددی این تحقیق سهم ناشی از خاصیت ویسکوالاستیک با استفاده از حل معادله ساختاری سیال مرتبه دوم یعنی رابطه (8) بیان می‌شود.

$$\tau = \eta \gamma_{(1)} - \frac{1}{2} \Psi_1 \gamma_{(2)} + \Psi_2 (\gamma_{(1)} \cdot \gamma_{(2)}) \quad (8)$$

که جملات تنش در آن بصورت روابط (9) تا (11) می‌باشد.

$$\tau_{xx} = \Psi_1 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \Psi_2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (9)$$

$$\tau_{xy} = \eta \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{2} \Psi_1 u \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} - \frac{1}{2} \Psi_1 v \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} \quad (10)$$

$$\tau_{yy} = \Psi_2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (11)$$

4- هندسه مسأله

هندسه بکار رفته در این تحقیق مطابق شکل 1 می‌باشد. برای جریان‌های گوه (جریان باوجود جمله گرادیان فشار) سرعت طبق رابطه (12) تعریف می‌شود. m فاکتور پروفیل سرعت و β زاویه سطح شیب‌دار در گوه می‌باشد که مقیاسی برای گرادیان فشار dp/dx است. اگر β مثبت باشد، گرادیان فشار منفی و یا موافق است و β منفی به معنای یک گرادیان فشار مثبت و یا مخالف است. به‌طور طبیعی $\beta=0$ صفحه مسطح را نشان می‌دهد.

$$U(x) = U_{\infty} x^m \quad (12)$$

$$m = \frac{\beta}{2 - \beta} \quad (13)$$

5- فرضیات مسأله

به‌منظور حل عددی جریان لایه مرزی، تعدادی فرضیات به‌منظور ساده‌سازی حل ضروری می‌باشد. به‌طور کلی می‌توان فرضیات اصلی در نظر گرفته شده در این پژوهش را به شرح زیر بیان نمود:

- 1- جریان دوبعدی، آرام و پایا می‌باشد.
- 2- سیال ویسکوالاستیک و تراکم ناپذیر است.
- 3- از اثرات شتاب جاذبه و نیروهای حجمی صرف‌نظر شده است.
- 4- دما صفحه (دیواره) در دو حالت دما ثابت و شار ثابت می‌باشد.

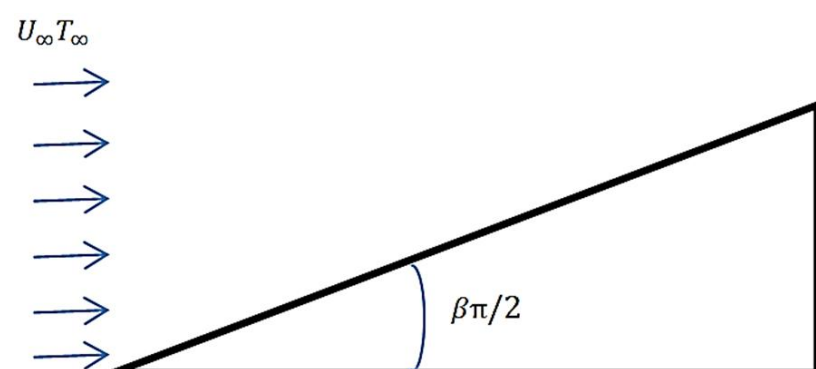


Fig. 1 Schematic of problem

شکل 1 شماتیک هندسه مسأله

معروف $\delta = 4.98 \sqrt{\nu x / U_\infty}$ که از حل بلازیوس به دست می‌آید، رسم شده است. نمودار پاسخ فالکنر-اسکن نیز وقتی $\beta = 0.3$ می‌باشد، به دست آمده است. برای محاسبه ضخامت لایه مرزی گرمایی از رابطه $\delta_T = \delta \text{Pr}^{-0.4}$ استفاده می‌شود.

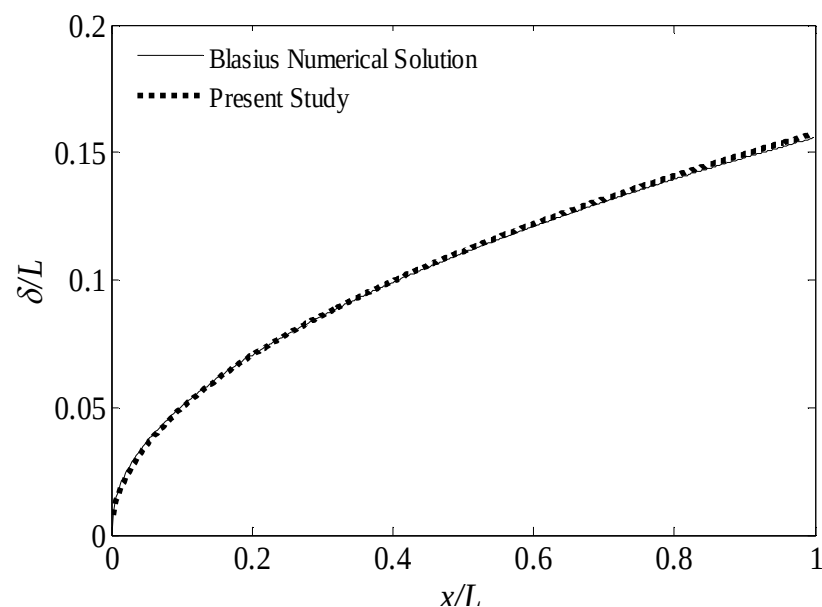


Fig. 2 Current study and Blasius analytical results comparison in hydrodynamic boundary layer [6]

شکل 2 مقایسه نتایج مطالعه حاضر و نتایج حل تحلیلی بلازیوس برای لایه مرزی هیدرودینامیکی [6]

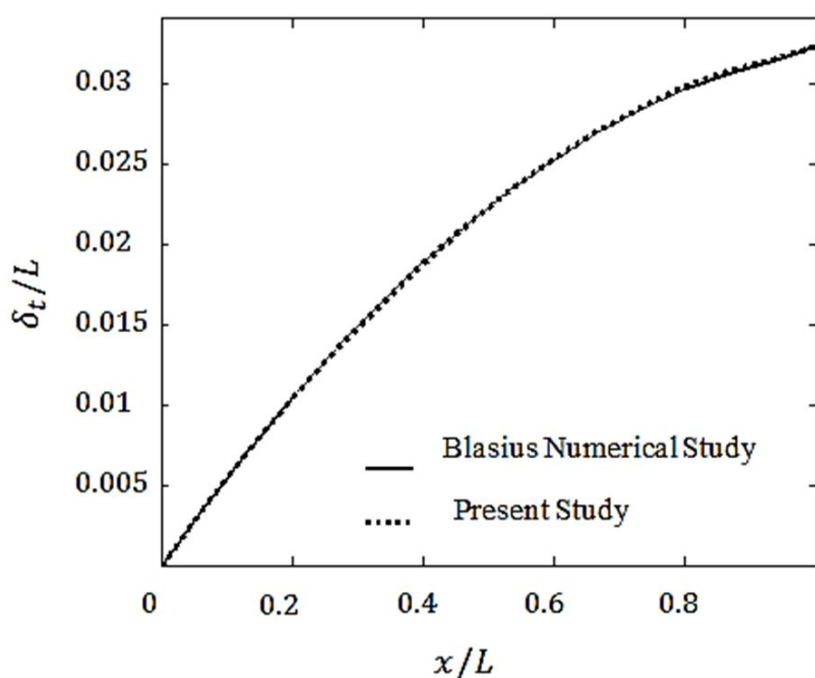


Fig. 3 Current study and Blasius analytical results comparison in thermal boundary layer [6]

شکل 3 مقایسه نتایج مطالعه حاضر و نتایج حل تحلیلی بلازیوس برای لایه مرزی گرمایی [6]

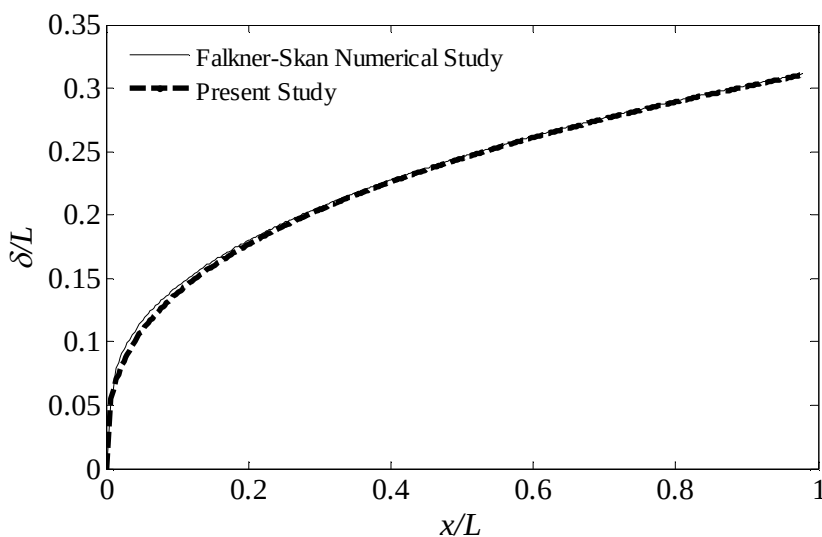


Fig. 4 Current study and Falkner-Skan analytical results comparison in hydrodynamic boundary layer [6]

شکل 4 مقایسه نتایج مطالعه حاضر و نتایج حل تحلیلی فالکنر-اسکن برای لایه مرزی هیدرودینامیکی [6]

$$\mathbf{v}^* \cdot \nabla^* \mathbf{v}^* = \frac{1}{\text{Re}} (-\nabla^* p^* + \nabla^* \cdot \boldsymbol{\tau}^*) \quad (32)$$

تنش در سیال مرتبه دوم، با توجه به ساده سازی‌های فرض لایه مرزی، بصورت رابطه (33) تعریف می‌شود. بنابراین معادله مومنتم و انرژی به ترتیب بصورت رابطه‌های (38) و (39) بی بعد می‌شود.

$$\tau_{xy} = \eta \gamma - \frac{1}{2} \Psi_1 \gamma_{(2)} \quad (33)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_{xy} = \eta \nabla^2 v - \frac{1}{2} \Psi_1 \nabla \cdot \gamma_{(2)} \quad (34)$$

$$\eta \frac{U_{\text{ref}}}{L^2} \nabla^* \cdot \boldsymbol{\tau}^*_{xy} = \frac{U_{\text{ref}}}{L^2} \nabla^{*2} v^* - \frac{1}{2} \Psi_1 \frac{U_{\text{ref}}^2}{L^3} \nabla^* \cdot \gamma^*_{(2)} \quad (35)$$

$$\nabla^* \cdot \boldsymbol{\tau}^*_{xy} = \nabla^{*2} v^* - \frac{1}{2} \Psi_1 \nabla^* \cdot \gamma^*_{(2)} \quad (36)$$

$$\Psi^*_1 = \frac{\Psi_1 U_{\text{ref}}}{L} \quad (37)$$

$$\mathbf{v}^* \cdot \nabla^* \mathbf{v}^* = \frac{1}{\text{Re}} (-\nabla^* p^* + \nabla^* \cdot \boldsymbol{\tau}^* - \frac{1}{2} \Psi^*_1 \nabla^* \gamma^*_{(2)}) \quad (38)$$

$$u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \frac{1}{\text{PrRe}} \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} \quad (39)$$

8- اعتبار سنجی و استقلال از شبکه محاسباتی

استقلال و عدم وابستگی حل به شبکه محاسباتی جهت مطالعه جریان لایه مرزی سیال ویسکوالاستیک، در این قسمت مورد بررسی قرار می‌گیرد. به منظور تعیین میزان حساسیت و همچنین دستیابی به شبکه‌ای مطلوب برای حل، پنج شبکه محاسباتی به کار گرفته شده و نتایج حاصل از حل هر یک از آن‌ها با یکدیگر مقایسه شده است. برای مدل‌سازی جریان سیال نیوتنی روی صفحه تخت، کافی است که در کد CFD تهیه شده، مقادیر Ψ^* برابر صفر لحاظ شوند. نتایج به دست آمده برای ضریب درگ، به همراه مشخصات شبکه محاسباتی، مقایسه آن‌ها و بررسی صحت نتایج حاصل از حل عددی و خطای محاسباتی در جدول 1 آورده شده است. ضریب درگ از رابطه $C_D = F_D / 0.5 \rho U^2 A$ قابل دستیابی است. معمولاً با افزایش تعداد سلول‌ها در شبکه محاسباتی، میزان دقت در پاسخ‌های روش عددی بیشتر شده و مقدار خطای آن‌ها نسبت به حل تحلیلی کاهش می‌یابد؛ اما باید به این نکته نیز توجه داشت که افزایش تعداد سلول‌ها در شبکه محاسباتی، منجر به بالا رفتن شدید زمان و حجم محاسبات خواهد شد. در این تحقیق با توجه به قابل قبول بودن دقت پاسخ در هر پنج شبکه محاسباتی، شبکه M4، مبنای محاسبات آتی قرار گرفته است. برای اطمینان بیشتر از صحت نتایج، بعضی از نتایج به دست آمده از حل عددی با نتایج تحلیلی بلازیوس و فالکنر-اسکن در جریان سیال نیوتنی در شکل‌های 2 تا شکل 4 مقایسه می‌شوند. پارامتری که جهت اطمینان از صحت نتایج، استفاده خواهد شد، ضخامت لایه مرزی هیدرودینامیک¹ و حرارتی می‌باشد. نمودار پاسخ بلازیوس از طریق رابطه

جدول 1 مقایسه ضریب درگ در شبکه‌های محاسباتی

Table 1. Comparison drag coefficient in different meshes

نام شبکه محاسباتی	تعداد شبکه‌های محاسباتی	افزایش تعداد سلول نسبت به حالت قبل	ضریب درگ	تغییرات ضریب درگ (خطا %)
M1	4×10^4	0	0.0779	0
M2	1.6×10^5	1.2×10^4	0.0792	1.6%
M3	6.4×10^5	4.8×10^4	0.0797	0.63%
M4	1×10^6	3.6×10^4	0.07986	0.12%
M5	1.44×10^6	4.4×10^4	0.07993	0.08%

1- hydrodynamic

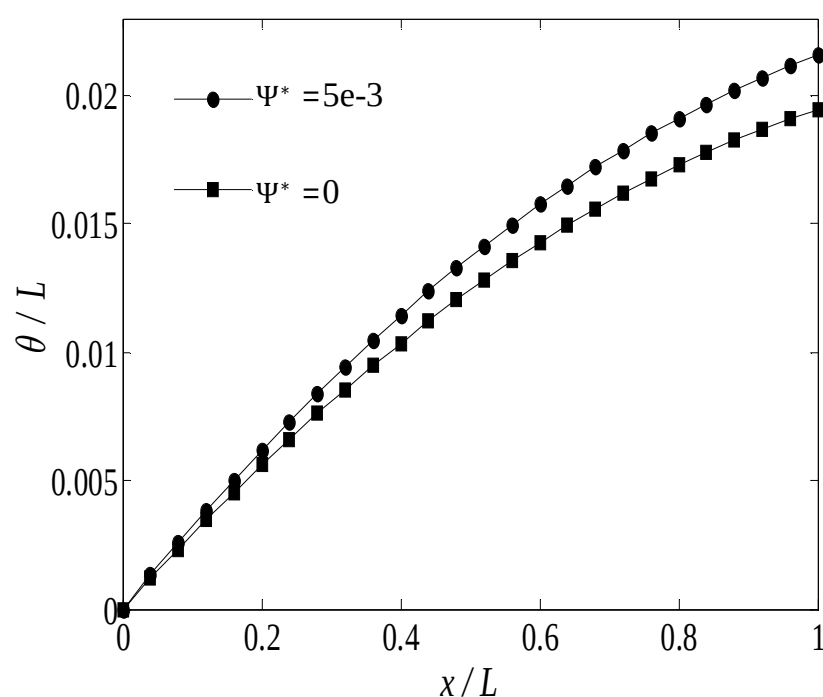


Fig. 7 Comparison of the momentum thickness between Newtonian and viscoelastic fluid

شکل 7 مقایسه ضخامت مومنتم بین سیال نیوتنی و ویسکوالاستیک

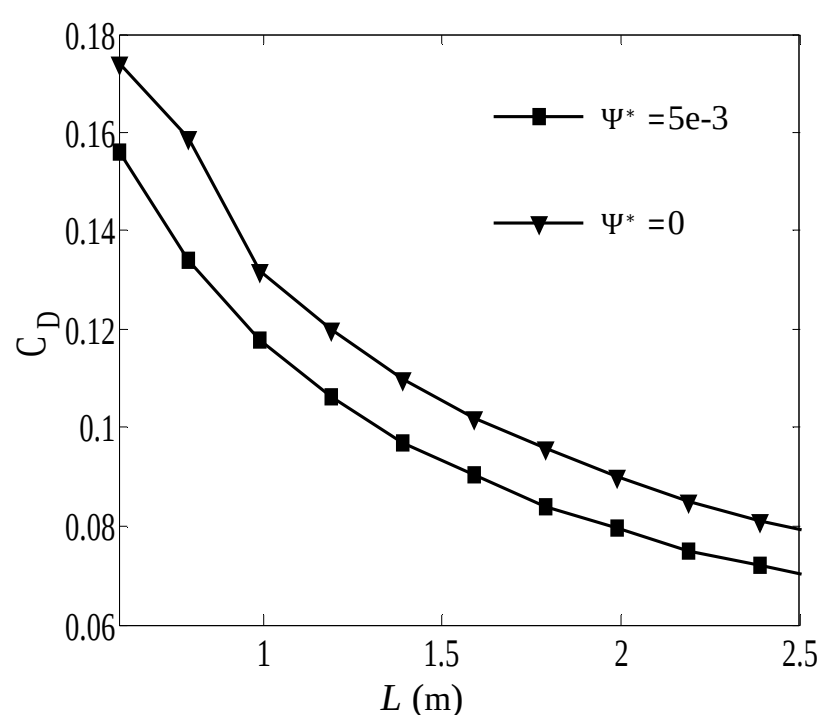


Fig. 8 The local drag coefficient along plate between Newtonian and viscoelastic fluid at Re=1000

شکل 8 مقدار ضریب درگ محلی در طول صفحه در دو حالت نیوتنی و ویسکوالاستیک در Re=1000

10- بررسی اثر تغییرات عدد رینولدز بر مشخصه‌های لایه مرزی در جریان سیال ویسکوالاستیک

در ابتدا، در شکل 9 به بررسی تأثیرگذاری تغییر عدد رینولدز بر روی پروفیل سرعت در یک مقطع از صفحه ($x/L=0.5$) و سپس به چگونگی تغییرات ضخامت لایه مرزی در شکل 10 پرداخته می‌شود. در شکل‌های 11 و 12 به ترتیب تغییرات ضخامت جابجایی و ضخامت مومنتم بر اثر تغییرات عدد رینولدز نمایش داده شده‌اند. در نمودارهای مربوط به سرعت، محور افقی برای سرعت بی‌بعد شده می‌باشد که در ابتدا مقدار آن به دلیل شرط عدم لغزش در دیواره، صفر می‌باشد. U_{ref} طبق رابطه (42) قابل محاسبه می‌باشد. با حرکت در راستای عمود بر جریان سرعت جریان سیال افزایش می‌یابد تا در نهایت به مقداری ثابت که همان سرعت جریان آزاد می‌باشد، برسد. هرچه عدد Re بزرگ‌تر باشد سرعت جریان بیشتر، $\partial u / \partial y$ بیشتر و در نتیجه ضخامت لایه مرزی کمتر خواهد بود. در یک عدد رینولدز یکسان در جریان سیال بر روی صفحه، ضخامت لایه مرزی تابعی از x می‌باشد، اما اگر چند

9- مقایسه لایه مرزی در سیال نیوتنی و ویسکوالاستیک

در این بخش، پارامترهای گوناگون لایه مرزی بین سیال نیوتنی و ویسکوالاستیک با یکدیگر مقایسه خواهند شد. تفاوت دو سیال در ضریب اختلاف تنش نرمال اول آن‌ها می‌باشد. در سیال نیوتنی Ψ^* برابر با صفر در نظر گرفته شده است و در سیال ویسکوالاستیک 5×10^{-3} لحاظ شده است. در شکل 5 ضخامت لایه مرزی در دو حالت جریان سیال نیوتنی و ویسکوالاستیک و در شکل‌های 6 و 7 به ترتیب ضخامت جابجایی و ضخامت مومنتم مورد بررسی قرار گرفته است. مشهود است که افزایش اختلاف تنش نرمال اول در سیال موجب شده سیال ویسکوالاستیک نسبت به سیال نیوتنی، دیرتر به مقدار بیشینه سرعت خود که همان سرعت جریان آزاد است، برسد. در نتیجه ضخامت لایه مرزی، ضخامت جابجایی و ضخامت مومنتم در سیال ویسکوالاستیک بیشتر از حالت نیوتنی می‌باشد. لازم به ذکر است که ضخامت جابجایی فاصله‌ای است که باید مرز جامد در یک جریان بدون اصطکاک را تغییر داد تا همان کاهش دبی جرمی را در حالتی که مرز جامد در لایه مرزی بود، بدهد و همچنین ضخامت مومنتم به عنوان ضخامت از لایه سیال تعریف می‌شود که به ازای آن شار مومنتم برابر با شار مومنتم در لایه-مرزی می‌باشد و به ترتیب طبق روابط (40) و (41) محاسبه می‌شود [6]. در سیال ویسکوالاستیک وجود ترم اختلاف تنش نرمال اول موجب ایجاد نیروی عمود بر جریان می‌گردد. بنابراین برخاستگی در جریان سیال ویسکوالاستیک در راستای عمود بر جریان رخ خواهد داد. این پدیده موجب افزایش ضخامت δ و θ می‌شود. در شکل 8 میزان ضریب درگ محلی در طول صفحه نشان داده شده است. همان‌طور که قابل پیش‌بینی است در این شکل میزان ضریب درگ در اوایل صفحه که گرادیان سرعت در لایه مرزی بالاتر است، مقدار بیشتری دارد. ضریب درگ در حالت نیوتنی نسبت به حالت ویسکوالاستیک بیشتر می‌باشد. دلیل این موضوع را می‌توان در تغییر ایجاد شده در پروفیل سرعت، به دلیل وجود اختلاف تنش نرمال اول دانست. در واقع تنش نرمال اول موجب می‌شود سرعت دیرتر به سرعت جریان آزاد برسد. در نتیجه گرادیان سرعت ($\partial u / \partial y$) کمتر بوده، بنابراین تنش برشی و ضریب درگ نیز مقدار کمتری نسبت به حالت نیوتنی خواهد داشت.

$$\delta^* = \int_{y=0}^{\infty} \left(1 - \frac{u}{U_{\infty}}\right) dy \quad (40)$$

$$\theta = \int_{y=0}^{\infty} \frac{u}{U_{\infty}} \left(1 - \frac{u}{U_{\infty}}\right) dy \quad (41)$$

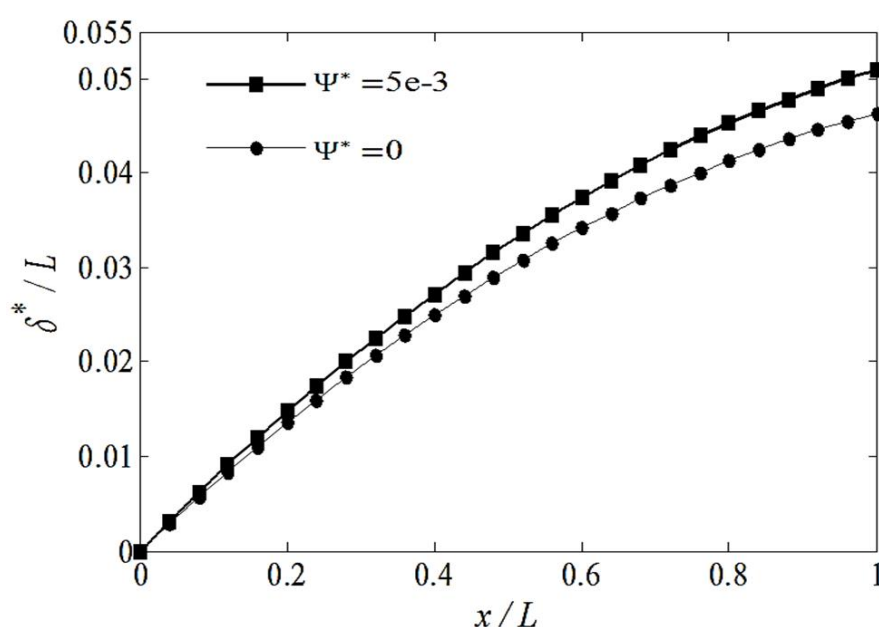


Fig. 6 Comparison of the displacement boundary layer thickness between Newtonian and viscoelastic fluid

شکل 6 مقایسه ضخامت جابجایی بین سیال نیوتنی و ویسکوالاستیک

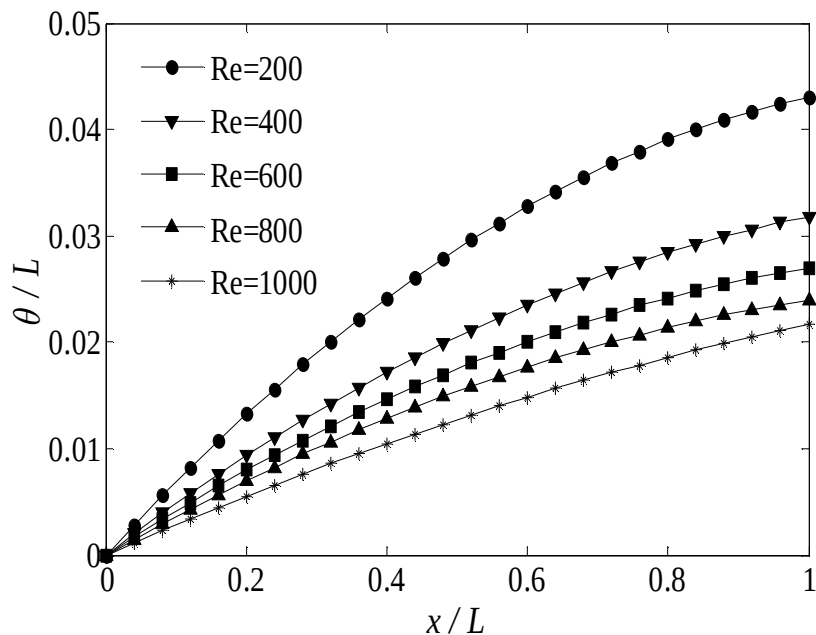


Fig. 12 Comparison of the momentum thickness at different Reynolds numbers

شکل 12 مقایسه ضخامت مومنتم در رینولدزهای مختلف

11- بررسی تأثیر تغییرات گرادیان فشار بر مشخصه‌های لایه مرزی

در شکل 13 تغییرات سرعت در راستای عمود بر جریان، در مقطعی خاص از صفحه که در اینجا $x/L=0.5$ در نظر گرفته شده است، نشان داده شده است. از مقایسه پروفیل‌های به دست آمده برای حالت‌های مختلف می‌توان گفت که در اثر گرادیان فشار معکوس ($\beta < 0$) ضخامت لایه مرزی افزایش بیشتری نسبت به موقعیت مشابه بر روی صفحه مسطح دارد. از طرفی هر چه میزان گرادیان فشار معکوس شدیدتر باشد ضخامت لایه مرزی افزایش چشمگیری خواهد داشت. همانند صفحه مسطح مقدار $\partial u / \partial y$ دچار سیر نزولی شده و حداکثر مقدار آن بر روی دیواره تشکیل می‌شود همچنین $\partial u / \partial y$ در مقایسه با سطوح صاف میزان کمتری در موقعیت مشابه دارد. در گرادیان فشار معکوس مقدار $\partial u / \partial y$ مثبت و مقدار $\partial u / \partial x$ منفی است و در عین حال از لحاظ قدر مطلق نیز از مقدار آن در شرایط مشابه با سطح مسطح بیشتر است یعنی منفی‌تر است. مقادیر δ^* ، δ و θ در حالت گرادیان فشار معکوس دارای سرعت رشد بیشتری هستند هر چه میزان β بیشتر شود در این حالت این مقادیر هم بزرگ‌تر خواهند بود و هم دارای سرعت رشد بیشتری نسبت به حالت‌های دیگر خواهد بود. این مهم در شکل‌های 14 تا 16 بخوبی دیده می‌شود.

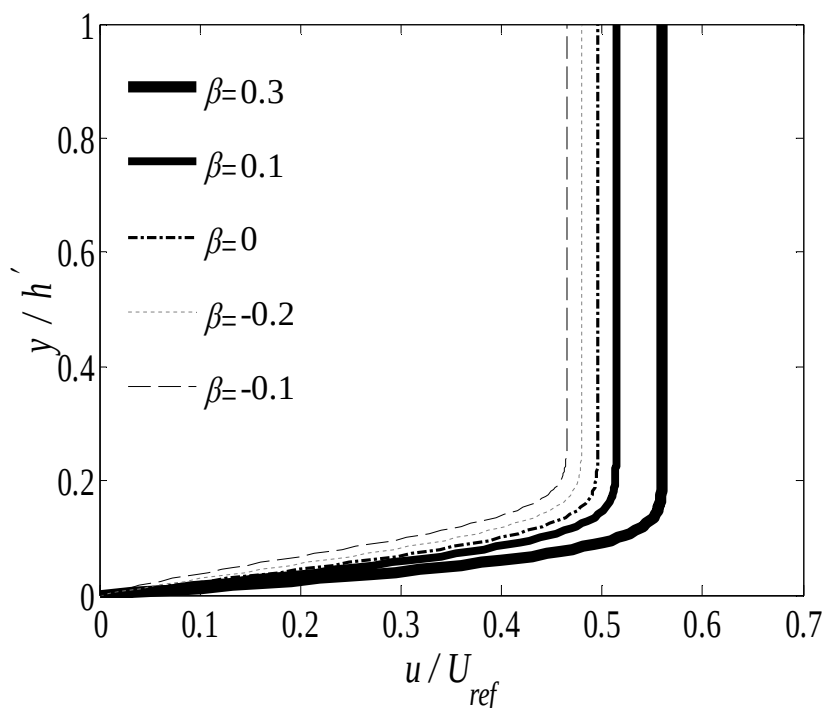


Fig. 13 Velocity profile at different pressure gradient

شکل 13 پروفیل سرعت در گرادیان فشارهای مختلف

جریان وجود داشته باشد که سرعت آزاد آن‌ها متفاوت باشد آن جریانی که سرعت بیشتری دارد ضخامت لایه مرزی کمتری خواهد داشت. در واقع هرچه عدد رینولدز جریانی بیشتر باشد ضخامت لایه مرزی تشکیل شده بر روی سطح، در آن حالت کمتر خواهد بود. همین شرایط برای ضخامت مومنتم و ضخامت جابجایی نیز برقرار است.

$$U_{ref} = \frac{1}{L} \int_0^L U(x) dx \quad (42)$$

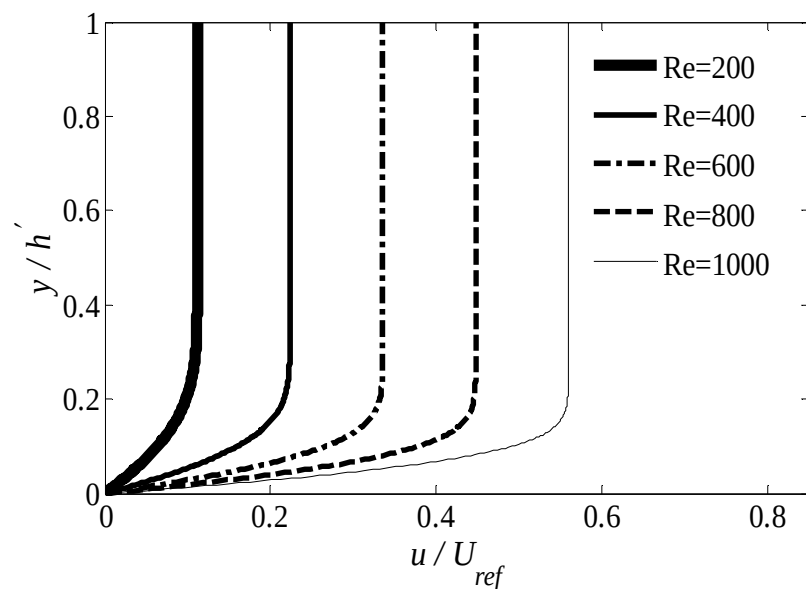


Fig. 9 Velocity profile at different Reynolds numbers

شکل 9 پروفیل سرعت در اعداد رینولدز مختلف

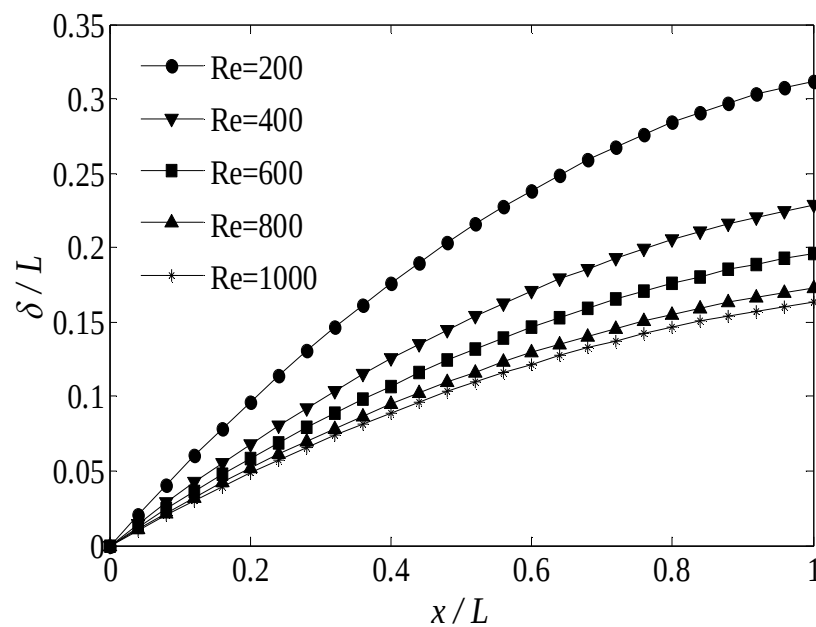


Fig. 10 Comparison of the boundary layer thickness at different Reynolds numbers

شکل 10 مقایسه ضخامت لایه مرزی در رینولدزهای مختلف

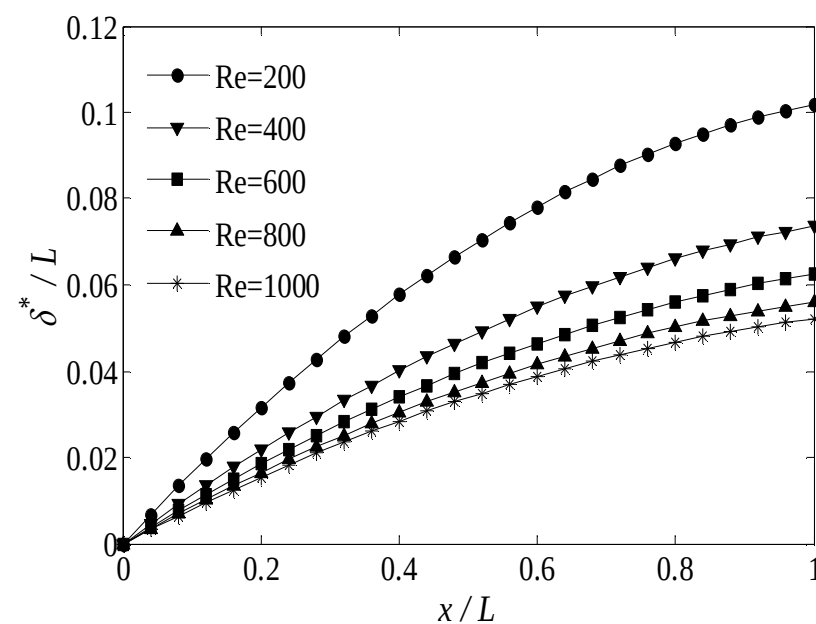


Fig. 11 Comparison of the displacement thickness at different Reynolds numbers

شکل 11 مقایسه ضخامت جابجایی در رینولدزهای مختلف

12- بررسی تأثیر تغییرات اختلاف تنش نرمال اول بر مشخصه‌های لایه مرزی

همان‌طور که در شکل 17 مشاهده می‌شود با افزایش اختلاف تنش نرمال اول، نیروی عمود بر جریان افزایش می‌یابد بنابراین بر خاستگی در جریان سیال رخ می‌دهد که به معنای افزایش ضخامت لایه مرزی می‌باشد. در شکل 18 به مقایسه تغییرات ضریب درگ بر حسب عدد رینولدز در اختلاف تنش نرمال اول متفاوت پرداخته شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش عدد رینولدز ضریب درگ کاهش می‌یابد. مقدار C_D در جریان سیال بر روی صفحه با توجه به کاهش تنش برشی ناشی از لزجت در روی دیواره کاهش خواهد یافت.

13- بررسی تأثیر تغییرات عدد پراتل بر مشخصه‌های لایه مرزی گرمایی

به منظور بررسی تأثیر تغییرات عدد پراتل بر مشخصه‌های لایه مرزی گرمایی،

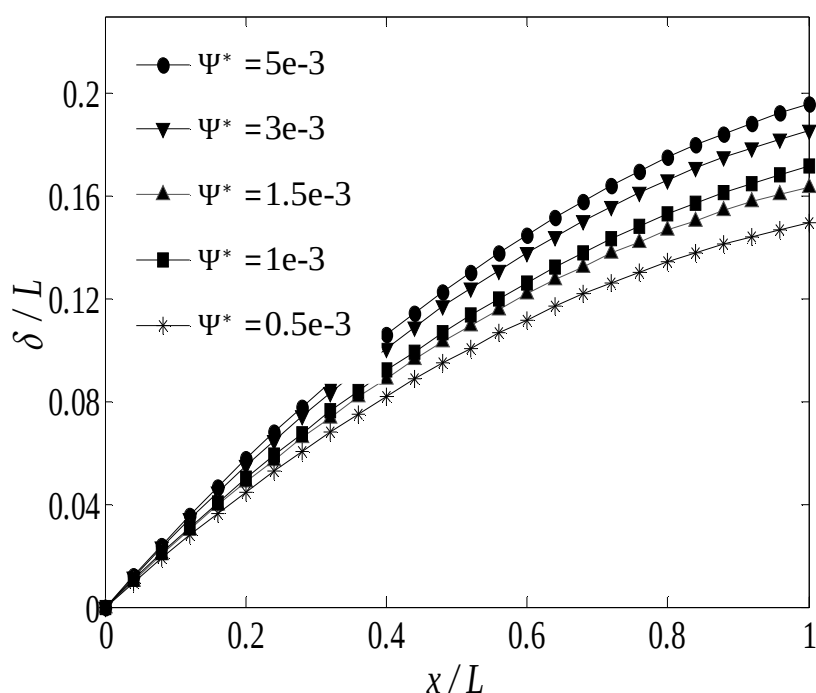


Fig. 17 Comparison of the boundary layer thickness at different first normal stress

شکل 17 مقایسه لایه مرزی در اختلاف تنش نرمال اول مختلف

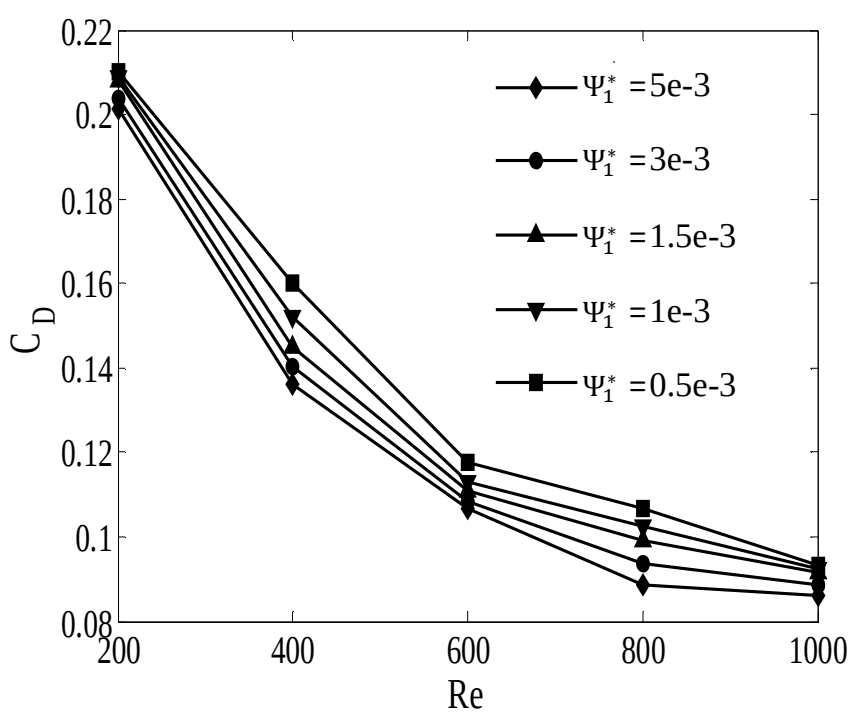


Fig. 18 Variation of drag coefficient to Reynolds numbers at different first normal stress

شکل 18 تغییرات ضریب درگ بر حسب عدد رینولدز در اختلاف تنش نرمال اول متفاوت

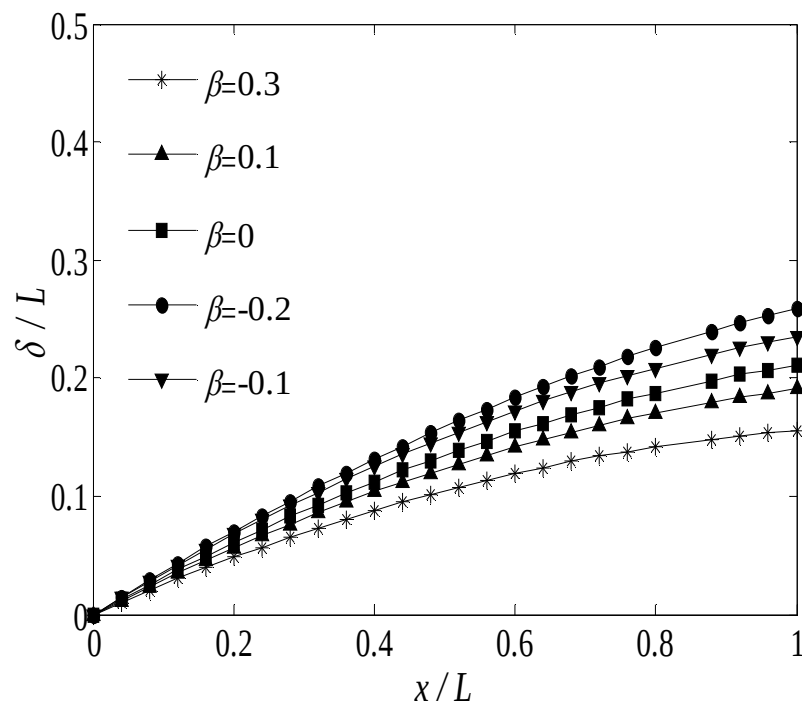


Fig. 14 Comparison of the boundary layer thickness at different pressure gradient

شکل 14 مقایسه ضخامت لایه مرزی در گرادیان فشارهای مختلف

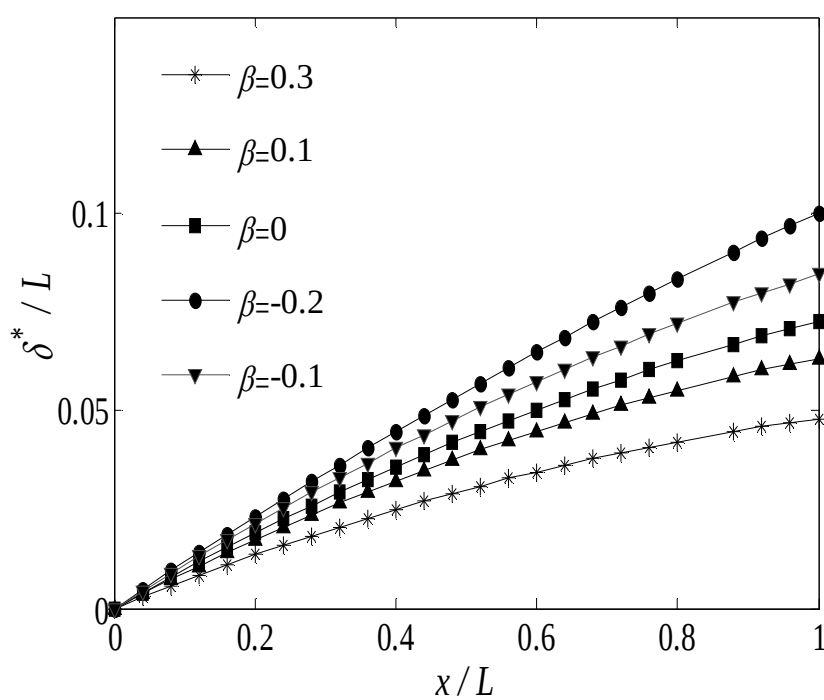


Fig. 15 Comparison of the displacement thickness at different pressure gradient

شکل 15 مقایسه ضخامت جابجایی در گرادیان فشارهای مختلف

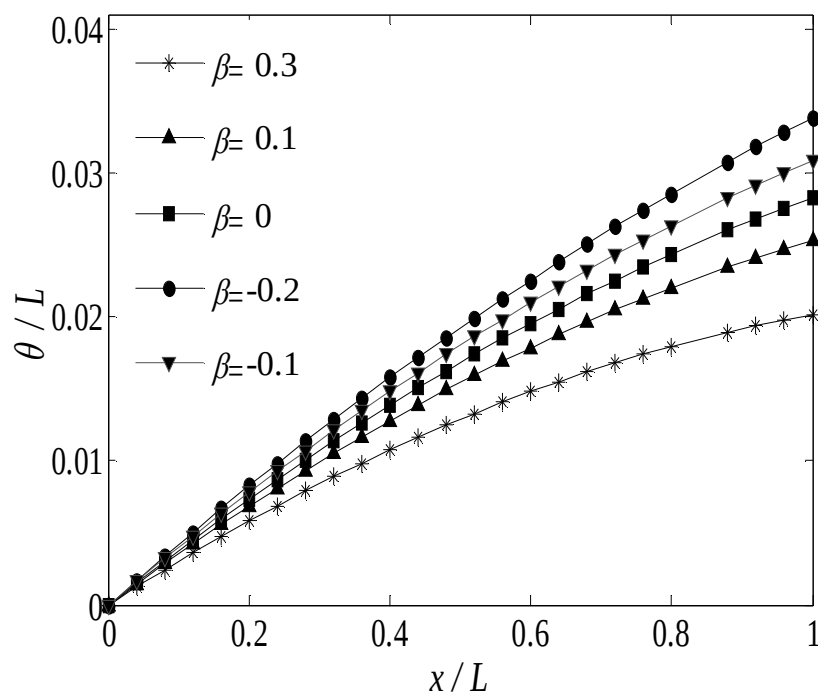


Fig. 16 Comparison of the momentum thickness at different pressure gradient

شکل 16 مقایسه ضخامت مومنتم در گرادیان فشارهای مختلف

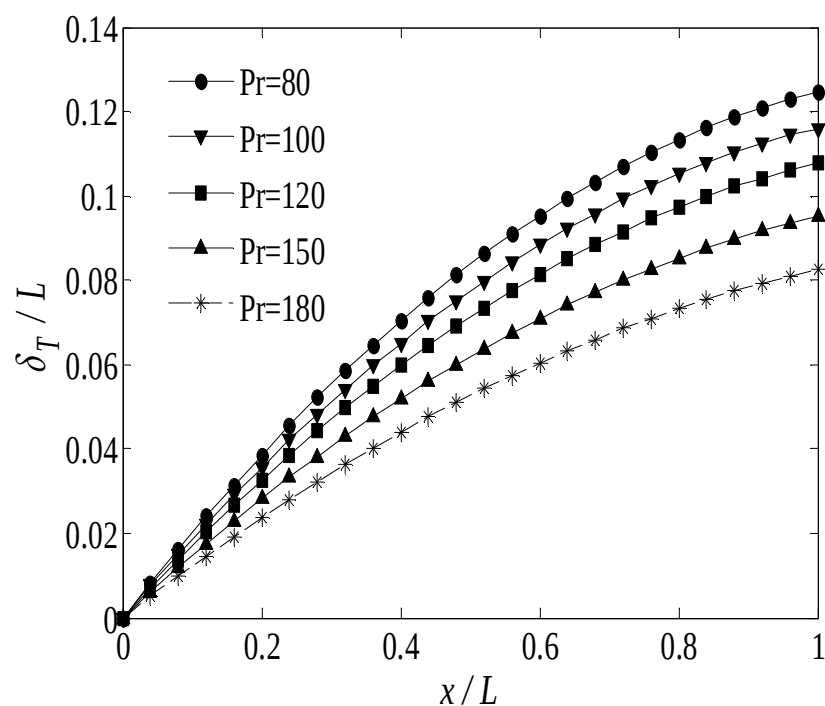


Fig. 20 Comparison of thermal boundary layer at different prandtl numbers at constant heat flux

شکل 20 مقایسه لایه مرزی گرمایی در پرانتل‌های مختلف در حالت شار ثابت

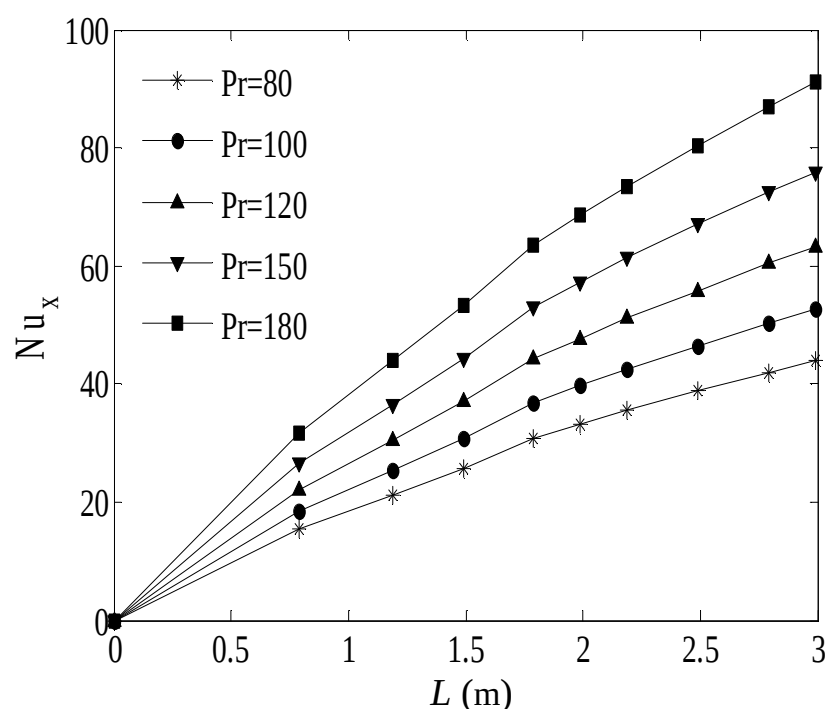


Fig. 21 Variation of local nusselt number of the plate length at different prandtl number in heating case

شکل 21 تغییرات عدد ناسلت محلی در راستای صفحه به ازای تغییرات پرانتل در حالت دما ثابت

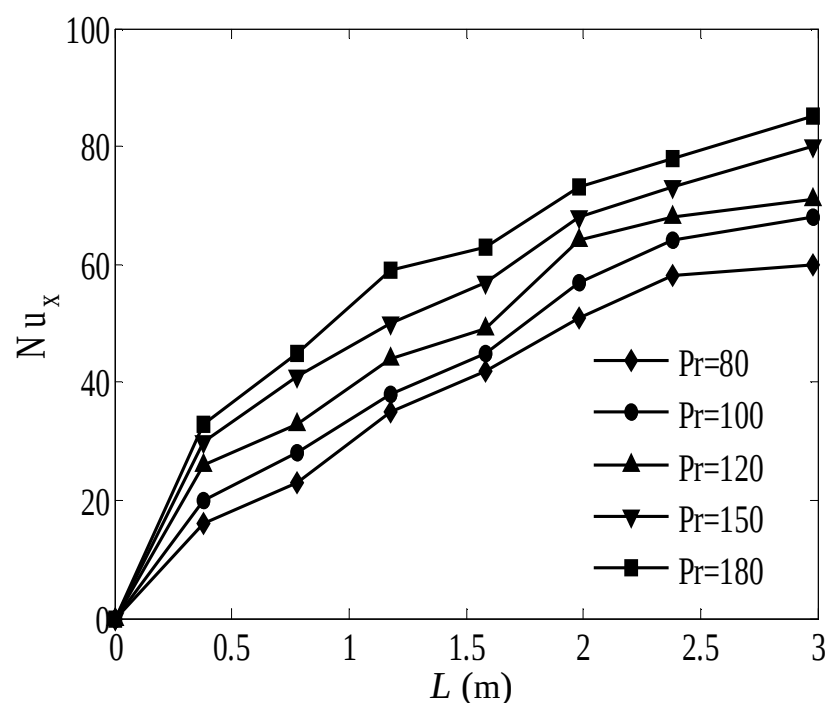


Fig. 22 Variation of local nusselt number of the plate length at different prandtl number in constant heat flux

شکل 22 تغییرات عدد ناسلت محلی در راستای صفحه به ازای تغییرات پرانتل در حالت شار ثابت

در این بخش در اختلاف تنش 0.0015 و گرادیان فشار 0.3، به مطالعه نمودارهای دما، لایه مرزی گرمایی و ناسلت محلی پرداخته شده است. محدوده پرانتل‌های بررسی شده در این تحقیق نسبت به سیال نیوتنی بسیار بزرگ‌تر می‌باشد، علت این است که اکثر سیالات غیر نیوتنی نظیر مواد پلیمری، دارای ضریب نفوذ حرارتی $(\alpha = k / \rho C_p)$ بسیار کوچکی هستند [19]، به‌طوری‌که بسیاری از آن‌ها جز عایق‌های حرارتی محسوب می‌شوند؛ بنابراین این‌گونه سیالات ضریب انتقال حرارت (k) بسیار کوچکی دارند، بنابراین بزرگ بودن عدد پرانتل منطقی به نظر می‌رسد. نتایج حاصل از حل عددی در دو بخش دما دیواره ثابت و شار ثابت گزارش شده است. تغییرات عدد پرانتل بر ضخامت لایه مرزی گرمایی مطابق شکل‌های 19 و 20 تأثیرگذار می‌باشد. همانطور که در نمودارها مشهود است با افزایش عدد پرانتل ضخامت لایه مرزی گرمایی کاهش می‌یابد، علت این است که با افزایش عدد پرانتل پخش هیدرودینامیکی به پخش حرارتی بیشتر شده بنابراین نفوذ گرمایی در جریان سیال کمتر می‌شود. در شکل‌های 21 و 22 دیده می‌شود که با حرکت در طول صفحه ناسلت محلی افزایش می‌یابد زیرا انتقال حرارت جابجایی آزاد با حرکت سیال در طول صفحه بیشتر می‌شود. در واقع در ابتدا صفحه که سیال حرکت ندارد، میزان انتقال حرارت هم کم است، با حرکت در راستای صفحه، رینولدز محلی افزایش می‌یابد بنابراین سرعت نیز افزایش دارد که خود موجب افزایش چشمگیر عدد ناسلت می‌شود. عدد پرانتل نسبت ضخامت لایه مرزی سرعت به لایه مرزی گرمایی می‌باشد بنابراین هرچه پرانتل جریانی بزرگ‌تر باشد، ضخامت لایه مرزی آن بزرگ‌تر است. در شکل‌های 23 و 24 به بررسی تغییرات عدد متوسط در گرادیان فشارهای مختلف و ضریب اختلاف تنش نرمال متفاوت پرداخته می‌شود. با دقت در شکل‌ها دیده می‌شود که با افزایش β ، ناسلت متوسط افزایش می‌یابد. علت این است که با افزایش β سرعت حرکت سیال افزایش می‌یابد، بنابراین سیال زوتر به دما جریان آزاد می‌رسد و dT/dy بزرگ‌تری را دارد، بنابراین $\bar{h}_x$ جریان افزایش می‌یابد و به دنبال آن افزایش ناسلت متوسط را خواهیم داشت. با افزایش ضریب اختلاف تنش نرمال اول، افزایش ضخامت لایه مرزی گرمایی را به دنبال دارد، پس dT/dy در یک مقطع خاص از صفحه $(x/L=0.5)$ مقدار کمتری خواهد داشت؛ بنابراین ناسلت کلی نیز کاهش خواهد یافت.

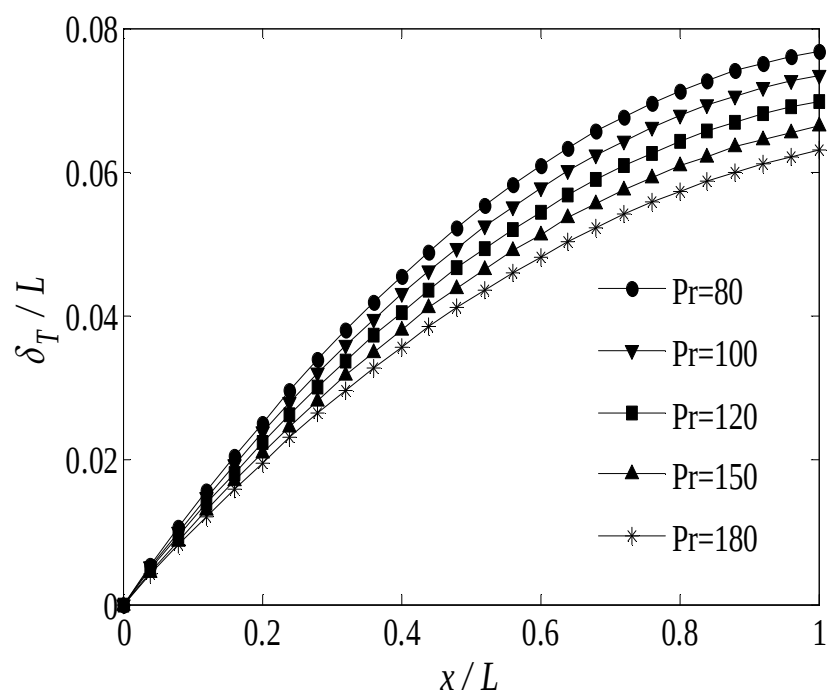


Fig. 19 Comparison of thermal boundary layer at different prandtl numbers at heating

شکل 19 مقایسه لایه مرزی گرمایی در پرانتل‌های مختلف در حالت دما ثابت

مورد این گونه جریان‌ها خودنمایی می‌کند افزایش ضخامت لایه مرزی در گرادیان فشار معکوس ($\beta < 0$) است. در این تحقیق، افزایش چشمگیر این پارامتر (δ) به ازای مقادیر مختلف β نسبت به صفحه تخت دیده می‌شود. از طرفی این افزایش در ضخامت لایه مرزی سبب می‌شود که شاهد افزایش پارامترهای دیگری از جمله ضخامت جابجایی و ضخامت مومنتم باشیم. تأثیر گرادیان فشار بر ضخامت لایه مرزی گرمایی نیز دارای روندی مشابه لایه مرزی هیدرودینامیکی می‌باشد. در Ψ^* ثابت، با افزایش گرادیان فشار مساعد، از آنجایی که ضخامت لایه مرزی گرمایی کاهش می‌یابد، ناسلت متوسط نیز افزایش می‌یابد. در رواقع کاهش ضخامت لایه مرزی افزایش انتقال حرارت جابجایی و افزایش ناسلت متوسط را به دنبال دارد. به بیان دیگر با افزایش β ، ضخامت لایه مرزی گرمایی کاهش می‌یابد در نتیجه dT/dy و $\bar{h}_x$ جریان افزایش می‌یابد و به دنبال آن افزایش ناسلت متوسط را در پی خواهد داشت.

در جریان سیال ویسکوالاستیک، در اختلاف تنش نرمال اول ثابت، با گذر از گرادیان فشار نامساعد به مساعد، ضخامت لایه مرزی کاهش می‌یابد، بنابراین تنش برشی بر روی سطح افزایش یافته و ضریب درگ مقدار بیشتری خواهد داشت. در جریان سیال ویسکوالاستیک در یک β ثابت، با افزایش اختلاف تنش نرمال اول تنش برشی روی صفحه کاهش می‌یابد بنابراین ضریب درگ کاهش می‌یابد. در یک گرادیان فشار ثابت، با افزایش ضریب اختلاف تنش نرمال اول ناسلت متوسط در طول صفحه، کاهش می‌یابد. از آنجایی که با افزایش Ψ^* ضخامت لایه مرزی گرمایی افزایش می‌یابد و لایه مرزی همانند عایق گرمایی برای انتقال حرارت جابجایی عمل می‌کند، بنابراین کاهش ناسلت متوسط منطقی به نظر می‌رسد. بطور کلی می‌توان گفت با استفاده از مدل ویسکوالاستیک مرتبه 2 این امکان فراهم می‌شود که بتوان بطور خالص تأثیر خواص الاستیک سیال را بر خصوصیات لایه مرزی سرعت و گرمایی که از جمله اصلی ترین اهداف این پژوهش می‌باشد بررسی نمود و از این نظر مدل مناسبی بشمار میرود. همچنین گرادیان فشار تأثیر بسیار واضح و مهمی را بر روی تمامی خصوصیات لایه مرزی سیال ویسکوالاستیک خواهد گذاشت که نکته قابل توجه آن افزایش چشمگیر ضخامت لایه مرزی در گرادیان فشار معکوس است.

15- فهرست علائم

C_D	ضریب درگ
C_p	ظرفیت گرمایی ویژه در فشار ثابت ($\text{KJ Kg}^{-1} \text{K}^{-1}$)
F_D	نیروی درگ (N)
h	ضریب انتقال حرارت جابجایی ($\text{Wm}^{-2} \text{K}^{-1}$)
h'	ارتفاع در راستای y [m]
i	بردار یکه در راستای محور x
j	بردار یکه در راستای محور y
k	ضریب انتقال حرارت هدایت ($\text{Wm}^{-1} \text{K}^{-1}$)
L	طول صفحه (m)
m	فاکتور سرعت
Nu_x	عدد ناسلت محلی
$< Nu >$	عدد ناسلت متوسط
Pr	عدد پرانتل
Re	عدد رینولدز
T	دما سیال (K)

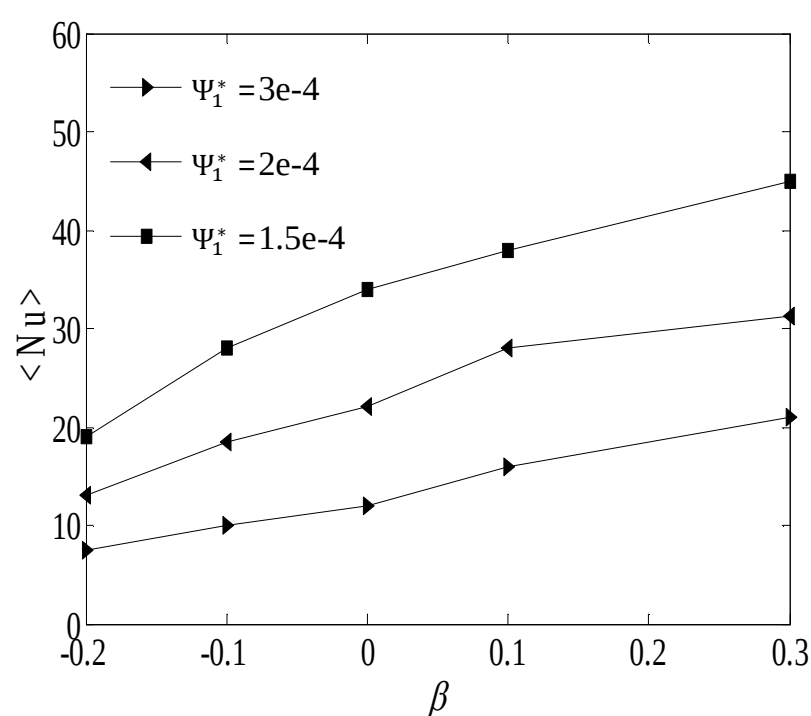


Fig. 23 Variation of average nusselt number to β at different first normal stress

شکل 23 تغییرات عدد ناسلت متوسط بر حسب β در اختلاف تنش نرمال اول متفاوت در حالت دما ثابت

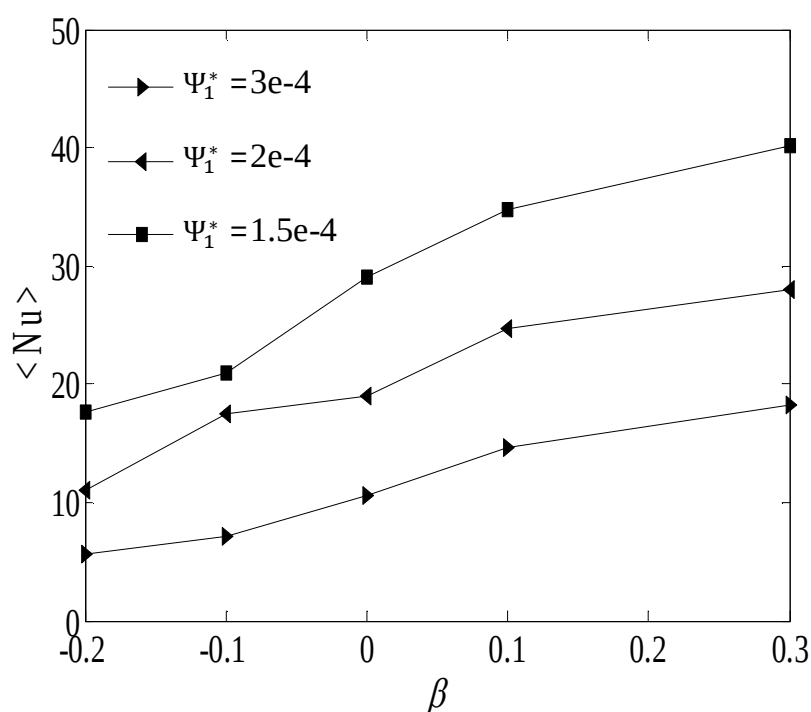


Fig. 24 Variation of average nusselt number to β at different first normal stress in constant heat flux

شکل 24 تغییرات عدد ناسلت متوسط بر حسب β در اختلاف تنش نرمال اول متفاوت در حالت شار ثابت

14- نتیجه گیری

در این بخش به مرور کلی نتایج حاصل از تحقیق حاضر برای جریان لایه مرزی سیال ویسکوالاستیک باوجود جمله گرادیان فشار پرداخته می‌شود: افزایش اختلاف تنش نرمال اول موجب افزایش ضخامت لایه مرزی هیدرودینامیکی خواهد شد. در سیال ویسکوالاستیک وجود ترم اختلاف تنش نرمال اول موجب ایجاد نیروی عمود بر جریان می‌شود، بنابراین بر خاستگی در جریان سیال ویسکوالاستیک در راستای عمود بر جریان رخ خواهد داد. افزایش اختلاف تنش نرمال اول در سیال موجب شده سیال ویسکوالاستیک نسبت به سیال نیوتنی، دیرتر به مقدار بیشینه سرعت خود که همان سرعت جریان آزاد است، برسد، در نتیجه ضخامت لایه مرزی، ضخامت جابجایی و ضخامت مومنتم در سیال ویسکوالاستیک بیشتر از حالت نیوتنی می‌باشد. گرادیان فشار تأثیر بسیار واضح و مهمی را بر روی تمامی خصوصیات لایه مرزی سیال ویسکوالاستیک خواهد گذاشت آنچه که بیشتر از همه در

- [5] T. Fang, J. Zhang, An exact analytical solution of the Falkner-Skan equation with mass transfer and wall stretching, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 43, No. 9, pp. 1000-1006, 2008.
- [6] White, M. Frank and Isla Corfield, *Viscous fluid flow*, Vol. 3, New York: MCGraw-Hill, 2006.
- [7] Y. Nagano, M. Tagawa and T. Tsuji, *Efect of adverse Pressure gradients on mean flow and turbulence statistics in a boundary layer*, *Turbulent shear flows*, pp. 110-112, 1993.
- [8] V. Baskaran, A.J. Smits and p.n. Joubert, A turbulent flow over a curved, hill, Part 1. Growth of an internal boundary layer, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 182, pp. 47-83, 1987.
- [9] R. N. Meroney, P. Bradshaw, Turbulent boundary layer growth over a longitudinally curved surface, *Journal* Vol. 11, No. 13, pp. 1448-1453, 1975.
- [10] T. Cebeciand, A.M.O. Smith, *Analysis of turbulent boundary layers*, Academic Press, pp. 48-55, New York, 1974.
- [11] B. Van den Berg, Boundary layer measurements on a two-dimensional wing with flap, *NRL TR79009 U*, 1979.
- [12] C.D. Aubertine, J. K. Eaton, Reynolds number scaling in a non-equilibrium turbulent boundary layer with mild adverse pressure gradient, *International Journal of Heat and Fluid Flow*, Vol. 4, No. 4, pp. 575-566, 2006.
- [13] B.D. Beardand K. Walters K, Elastico-viscous boundary-layer flows I. Two-dimensional flow near a stagnation point, *In Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, Vol. 60, No. 03, pp. 667-674, 1964.
- [14] Harris, *Rheology and non-newotonian flow*, pp. 199-204, Logman, 1977.
- [15] M. S. Abel, P. Siddheshwar, M. MNandeppanavar, Heattransfer in a viscoelastic boundary layer flow over a stretching sheet with viscous dissipation and non-uniform heat source, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 50, No. 5, pp. 960-966, 2007.
- [16] A. Postelnicu, I. Pop, Falkner-Skan boundary layer flow of a power-law fluid past a stretching wedge, *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 217, No. 9, pp. 4359-4368, 2011.
- [17] D. O. Olagunju, Local similarity solutions for boundary layer flow of a FENE-P fluid, *Applied Mathematics and Computations*, Vol. 1, No. 173, pp. 593-602, 2006.
- [18] D. O. Olagunju, The Falkner-Skan flow of a viscoelastic fluid, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 41, No. 6, pp. 825-829, 2006.
- [19] Mark, J.E., *Physical properties of polymers handbook*, pp. 105-111, Springer, 2007.

T^*	دما بی بعد برای حالت دمل ثابت
T_h^*	دما بی بعد برای حالت شار ثابت
T_c	دما سیال ورودی K
u	سرعت در جهت x (ms^{-1})
U_∞	سرعت جریان آزاد (ms^{-1})
v	سرعت در جهت y (ms^{-1})

علائم یونانی

β	فاکتور گرادیان فشار
$\dot{\gamma}$	نرخ برش 1/s
δ	ضخامت لایه مرزی هیدرودینامیکی (m)
δ_T	ضخامت لایه مرزی گرمایی (m)
δ^*	ضخامت جابجایی (m)
η	لزجت دینامیکی (kg m s^{-1})
θ	ضخامت مومنتم (m)
ν	لزجت سینماتیکی (m^2S^{-1})
ρ	چگالی (kg m^{-3})
τ	تنش برشی (Pa)
Ψ_1	ضریب اختلاف تنش نرمال اول (Pa s^2)
Ψ_2	ضریب اختلاف تنش نرمال دوم (Pa s^2)

16- مراجع

- [1] V. Falkneb, S. W. Skan, Solutions of the boundary-layer equations, *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, Vol. 8, No. 12, pp. 865-896, 1931.
- [2] D. Hartree, *On an equation occurring in Falkner and Skan's approximate treatment of the equations of the boundary layer*, pp. 80-88, Cambridge Univ Press, 1937.
- [3] H. T. Lin, L. K. Lin, Similarity solutions for laminar forced convection heat transfer from wedges to fluids of any Prandtl number, *International journal of heat and mass transfer*, Vol. 30, No. 6, pp. 1111-1118, 1987.
- [4] M. Rosales-Vera, A. Valencia, Solutions of Falkner-Skan equation with heat transfer by Fourier series, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Vol. 37, No. 7, pp. 761-765, 2010.