مجله مهندسی مکانیک مدرس، اردیبهشت 1395، دوره 16، شماره 2، ص‌ص 99-110

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

روش پیش‌شرط توانی ضمنی دوزمانه جهت حل جریان‌های تراکم‌ناپذیر ناپایا

سید معین درازگیسو [1]، پوریا اکبرزاده [2]*

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود

2- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود

* شاهرود، صندوق پستی 3619995161، p.akbarzadeh@shahroodut.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 18 مهر 1394

پذیرش: 11 دی 1394

ارائه در سایت: 17 بهمن 1394

کلید واژگان:

روش پیش‌شرط‌سازی توانی

حل دوزمانه

حجم محدود

جریان ناپایا

سرعت همگرایی

چکیده

مطالعه‌ی آیرودینامیک جریان‌های با اعداد رینولدز پایین به علت کاربردهای خاص نظیر وسایل بدون سرنشین، ربات‌ها و کاوشگرهای زیرسطحی در ابعاد بسیار کوچک مورد توجه می‌باشد. در مطالعه‌ی حاضر، یک روش پیش‌شرط توسعه‌یافته به نام روش پیش‌شرط توانی، جهت تحلیل جریان‌های آرام ناپایای عبوری از هیدروفویل‌ها ارائه شده است. در این روش معادلات دوبعدی ناویر-استوکس با تغییر جمله‌ی مشتق زمانی معادلات حاکم اصلاح می‌گردد. ماتریس پیش‌شرط از یک رابطه‌ی توانی و با استفاده از میدان سرعت تصحیح می‌گردد. معادلات حاکم به کمک روش عددی حجم محدود جیمسون از نوع مرکزیت-سلول انتگرال‌گیری می‌شوند و برای حل جریان‌های ناپایا از یک الگوریتم ضمنی دوزمانه استفاده می‌شود. پایداری حل به کمک جملات اتلافی مصنوعی مرتبه‌ی دوم و چهارم به دست آمده است. روش مورد استفاده برای همگرایی حل به سمت حالت دائم، روش انتگرال‌گیری زمانی رانگ-کوتای صریح چهار مرحله‌ای می‌باشد. محاسبات جریان‌های ناپایای عبوری از هیدروفویل NACA0012 در اعداد رینولدز و زوایای حمله‌ی مختلف ارائه شده است. نتایج ارائه شده در این مطالعه شامل پروفیل‌های سرعت، ضرایب پسا و برا و تأثیر روش پیش‌شرط توانی بر نرخ همگرایی می‌باشد. نتایج حاصله به صورت رضایت‌بخشی با کارهای عددی محققان دیگر تطابق دارد و همچنین نتایج نشان می‌دهد که روش پیش‌شرط توانی نرخ همگرایی را تا حد زیادی افزایش و هزینه‌ی زمانی محاسبات را کاهش می‌دهد.

A dual-time implicit power-law preconditioning method for solving unsteady incompressible flows

Seyed Moein Derazgisoo, Pooria Akbarzadeh*

Department of Mechanical Engineering, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran

* P.O.B. 3619995161 Shahrood, Iran, p.akbarzadeh@shahroodut.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 10 October 2015
Accepted 01 January 2016
Available Online 06 February 2016

Keywords:
Power-law preconditioning method
Dual-time solution
Finite volume
Unsteady flow
Convergence speed

ABSTRACT

Aerodynamic study of flows at low Reynolds for special applications such as micro unmanned underwater vehicles, underwater robots and explorers are investigated. In this paper, an improved progressive preconditioning method named power-law preconditioning method for analyzing unsteady laminar flows around hydrofoils is presented. In this method, the 2D Navier-Stokes equations are modified by altering the time derivative terms of the governing equations. The preconditioning matrix is adapted from the velocity flow-field by a power-law relation. The governing equation is integrated with a numerical resolution derived from the cell-centered Jameson's finite volume algorithm and a dual-time implicit procedure is applied for solution of unsteady flows. The stabilization is achieved via the second- and fourth-order artificial dissipation scheme. Explicit four-step Runge–Kutta time integration is applied to achieve the steady-state condition. The computations are presented for unsteady laminar flows around NACA0012 hydrofoil at various angles of attack and Reynolds number. Results presented in the paper focus on the velocity profiles, lift and drag coefficient and effect of the power-law preconditioning method on convergence speed. The results show satisfactory agreement with numerical works of others and also indicate that using the power-law preconditioner improves the convergence rate and decreases the computational cost, significantly.

1- مقدمه

بسیاری از مسایل مربوط به آیرودینامیک و هیدرودینامیک در مقوله‌ی جریان‌های تراکم‌ناپذیر ناپایا قرار می‌گیرند. امروزه شبیه‌سازی پدیده‌های جریان ناپایا در علوم مختلف مهندسی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. از جمله می‌توان به برهم‌کنش قطعات ثابت و چرخان در توربوماشین‌ها، موتورهای پیستونی، آیرودینامیک هلیکوپتر، شبیه‌سازی گرداب بزرگ[1] یا شبیه‌سازی عددی مستقیم[2] جریان‌های آشفته، انفجارها و غیره اشاره نمود [1]. اثرات ناپایا بودن جریان یا مربوط به حرکت جسم و یا ناشی از ایجاد نواحی جدایش جریان و ریزش گردابه‌ها به میدان حل است که روی

1- Large Eddy Simulations (LES)
2- Direct Numerical Simulations (DNS)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:

S. M. Derazgisoo, P. Akbarzadeh, A dual-time implicit power-law preconditioning method for solving unsteady incompressible flows, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 2, pp. 99-110, 2016 (in Persian)

مشخصات آیرودینامیکی/هیدرودینامیک اجسام تأثیر می‌گذارد، بنابراین تعیین تغییرات این مشخصات نسبت به زمان از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. دو رهیافت اصلی برای حل معادلات ناویر-استوکس تراکم‌ناپذیر، روش تابع چرخش جریان[1] و روش متغیرهای اولیه[2] می‌باشند. حل جریان‌های سه‌بعدی با روش تابع چرخش جریان بسیار پیچیده می‌باشد، زیرا در جریان‌های سه‌بعدی تابع جریان قابل تعریف نیست. در مطالعه‌ی حاضر، معادلات ناویر-استوکس تراکم‌ناپذیر ناپایا براساس روش متغیرهای اولیه ارائه شده است.

برای شبیه‌سازی عددی جریان ناپایا، الگوریتمی موسوم به شیوه‌ی دوزمانی[3] پیشنهاد و بکار گرفته شده که شامل اضافه‌نمودن یک عبارت مشتق زمانی حقیقی، به صورت ضمنی، به سیستم معادلات حاکم می‌باشد. با افزودن این عبارت، در فرایند حل سیستم معادلات حاکم، دو حلقه‌ی تکرار خارجی (مربوط به زمان حقیقی) و داخلی (مربوط به زمان مجازی) موجود می‌باشد. با همگرایی حل در زمان مجازی، حل معادله در زمان حقیقی حاصل می‌شود. برای اولین بار جیمسون [2] در سال 1991 از این روش استفاده نمود. مزیت اصلی این روش در انتخاب گام زمانی است که تنها بر اساس فیزیک و ماهیت جریان تعیین می‌گردد و برخلاف روش‌های معمول دیگر هیچ محدودیتی در انتخاب گام زمانی وجود ندارد. آرنون و همکاران [3] نشان داد هنگامی که گام زمان حقیقی هم‌مرتبه و یا کمتر از گام زمان مجازی باشد روش پیشنهادی، ناپایدار خواهد بود. سپس ملسون و همکاران [4] الگوریتم دو زمانی را به گونه‌ای بهبود داد که با انتخاب هر گام زمانی، پایدار خواهد بود. بعد از ملسون، محققان دیگری مطالعاتی در زمینه بهبود و افزایش سرعت همگرایی این الگوریتم انجام دادند [5]. هسو [6] در سال 2004 در رساله‌ی دکتری خود یک مطالعه‌ی جامع روی روش‌های مختلف حل صریح و ضمنی جریان‌های ناپایا انجام داد وهمچنین شاتالوو [7] در سال 2006 در رساله‌ی دکتری خود به بررسی روش‌هایی همچون تفاضل پادبادسو با دقت مرتبه‌ی سه[4] و روش تکراری فاکتورگیری تقریبی[5] در بهبود سرعت همگرایی پرداخت.

استفاده از روش‌های عددی پیمایشی در زمان، برای حل جریان‌های تراکم‌پذیر با اعداد ماخ در حد صوت و فراصوت به لحاظ قدرت همگرایی و پایداری، همواره مورد توجه پژوهشگران بوده است. اما از آنجا که دستگاه معادلات جریان تراکم‌ناپذیر پایا، یک دستگاه هذلولوی کامل نبوده و فشار نیز در معادله پیوستگی حضور ندارد، روش‌های پیمایشی قابل استفاده نخواهند بود. همچنین در معادلات جریان تراکم‌ناپذیر ناپایا که دستگاه معادلات ماهیت سهموی پیدا می‌کنند (به دلیل حضور جملات وابسته به زمان)، با وجود قابل استفاده بودن روش‌های پیمایشی، از پایداری کمتری برخوردار خواهند بود. برای غلبه بر این مشکل، کورین [8] معادله پیوستگی را با اضافه کردن یک جمله تراکم‌پذیری مصنوعی[6] به شکل مشتق زمانی فشار، اصلاح کرد. در نتیجه، معادلات مذکور به یک دستگاه هذلولوی متقارن تبدیل خواهند شد. برای افزایش سرعت همگرایی، ترکل [9] به هر یک از جملات مومنتوم یک جمله به صورت مشتق زمانی فشار نیز اضافه کرد. به چنین روشی در اصطلاح روش پیش‌شرط[7] می‌گویند.

بعد از کورین و ترکل، محققان دیگری مطالعات تکمیلی در زمینه‌ی پیش‌شرط‌سازی برای جریان‌های تراکم‌پذیر و تراکم‌ناپذیر، لزج و غیرلزج، پایا و ناپایا انجام دادند [10-15]. یک کار جامع در موضوع پیش‌شرط‌سازی به وسیله‌ی ون لیر و همکاران [10] و همکاران صورت گرفت. آن‌ها ماتریس بهینه‌ی پیش‌شرط‌سازی را به‌دست آوردند. لی [11] ماتریس پیش‌شرط‌سازی را به‌دست آورد که مستقل از زاویه‌ی جریان است. روش لی رفتار خوبی در محاسبات جریان نزدیک منطقه سکون دارد. مالان و همکاران [12] در سال 2002 با ارائه یک ماتریس پیش‌شرط محلی و اصلاح ماتریس‌های پیش‌شرط پیشین که در آن‌ها از مقادیر ثابت برای ضریب پیش‌شرط استفاده می‌شد، سرعت همگرایی و دقت را به‌طور همزمان مورد توجه قرار دادند. ذکر این نکته ضروری است که مالان روش خود را در مسائل جریان داخل حفره[8]، جریان پله[9]، جریان شناوری داخل حفره[10] و گردابی ون کارمن[11] اعمال کرد [13]. اصفهانیان و اکبرزاده [14] روش پیش‌شرط‌سازی استاندارد را برای حل جریان تراکم‌ناپذیر غیرلزج و لزج عبوری از سیلندر در جریان آزاد و جریان عبوری از مانع دایروی داخل کانال به کار گرفتند. آن‌ها همچنین در سال 2012 به تحلیل جریان کاویتاسیون با استفاده از روش پیش‌شرط‌سازی توانی[12] پرداختند [15]. در ادامه اکبرزاده و همکاران در سال 2014، تأثیر دمش و مکش بر ضرایب برآ و پسای جریان های کاویتاسیونی و تراکم‌ناپذیر لزج عبوری از هیدروفویل ها را با استفاده از روش پیش شرط توانی مورد بررسی قرار دادند [16،17].

بیشتر تحقیقات بالا، در اعداد رینولدز بالا انجام شده است ولی به تازگی به آیرودینامیک هیدروفویل‌ها در اعداد رینولدز پایین نیز توجه خاصی شده است. این توجه به خاطر کاربردهای مختلف از جمله هواپیماهای نظامی خاص، وسایل هوایی و زیرسطحی بدون سرنشین[13]، رباتها و کاوشگرهای زیرسطحی است، که به دلیل پیشرفت در دستگاه‌های مکانیکی - الکتریکی بسیار کوچک میسر شده‌اند. وسایل زیرسطحی بدون سرنشین در صنایع مختلف از جمله صنایع نفت و گاز و صنایع نظامی جهت اکتشاف و نقشه‌برداری در اعماق اقیانوس استفاده می‌شود. برای این تجهیزات کوچک که در سرعت‌های کم نیز حرکت می‌کنند عموما عدد رینولدز در بازه 400 الی 6000 است. بنابراین با توجه به کمبود مطالعه‌ای جدی و جامع در چنین شرایطی، در این تحقیق شبیه سازی جریان اطراف هیدروفویل در اعداد رینولدز پایین مدنظر قرار گرفته شده است.

در این مقاله برای نخستین بار از روش پیش‌شرط توانی برای شبیه‌سازی عددی جریان‌های ناپایا استفاده شده است و تأثیر استفاده از این روش بر نرخ همگرایی مورد بررسی قرار گرفته است. در این رویکرد ترکیب ضرایب پیش‌شرط محلی (و اصلاح آن توسط سنسورهای محلی میدان سرعت) با جملات وابسته به زمان در معادلات ممنتوم، در قالب یک الگوریتم ضمنی دوزمانه پیش‌شرط شده برای اولین بار درنظر گرفته شده است. در این مطالعه، شبیه‌سازی عددی جریان لزج تراکم‌ناپذیر ناپایا اطراف هیدروفویل NACA0012 در محدوده اعداد رینولدز پایین مدنظر قرار گرفته است. در ابتدا معادلات پیش‌شرط‌شده حاکم ارائه می‌گردد و سپس روش پیش‌شرط توانی معرفی می‌شود. در این روش ضریب پیش‌شرط به صورت محلی و از میدان سرعت یا فشار و به کمک یک رابطه‌ی توانی محاسبه شده و در هر گام زمانی بر اساس سنسورهای محلی سرعت یا فشار تصحیح می‌گردد. در ادامه

1- Vorticity-Stream Function
2- Primitive Variables
3- Dual-Time Method
4- Third Order Upwind Difference
5- Approximate Factorization (AF) Iterative Method
6- Artificial Compressibility
7- Preconditioning Method
8- Lid Driven Cavity
9- Backward Facing Step
10- Buoyancy-Driven Cavity
11- Von Karman Vortex
12- Power-Law Preconditioning Method
13- Unmanned Underwater Vehicles (UUV)

معادلات ناویر-استوکس به کمک روش حجم‌محدود جیمسون[1] و روش پیش‌شرط‌سازی توانی با اضافه کردن جملات ظاهری اتلافی[2] و لزجت[3] به ترتیب به شکل مشتقات مکانی مرتبه چهارم و دوم حل می‌شود، برای انتگرال‌گیری زمان از روش صریح رانگ-کوتای چهار مرحله‌ای[4] و برای حل جریان‌های ناپایا از یک الگوریتم ضمنی دوزمانه استفاده شده است. حل عددی ارائه شده با نتایج موجود مقایسه و ارزیابی شده است و تأثیر روش پیش‌شرط توانی بر نرخ همگرایی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

2- معادلات حاکم پیش‌شرط‌سازی شده

معادلات جریان بی‌بعد حاکم پیش‌شرط‌سازی در شکل برداری به صورت رابطه (1) نوشته می‌شود [2،12،14،18]:

$$\Gamma\frac{\partial\vec{Q}}{\partial t}+\Pi\frac{\partial\vec{Q}}{\partial\tau}+\frac{\partial\vec{F}}{\partial x}+\frac{\partial\vec{E}}{\partial y}=0 \qquad (1)$$

که در آن، t و τ به‌ترتیب معرف زمان حقیقی و زمان مجازی هستند، ماتریس Γ به‌صورت رابطه (2) تعریف می‌شود:

$$\Gamma=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&\rho&0\\0&0&\rho\end{pmatrix} \qquad (2)$$

Π^{-1} ماتریس پیش‌شرط بوده و به‌صورت رابطه (3- الف) نمایش داده می‌شود:

$$\Pi^{-1}=\begin{pmatrix}\beta^2&0&0\\ \dfrac{-\sigma u}{\rho}&\dfrac{1}{\rho}&0\\ \dfrac{-\sigma v}{\rho}&0&\dfrac{1}{\rho}\end{pmatrix},\ \vec{Q}=\begin{pmatrix}p\\u\\v\end{pmatrix} \qquad (\text{3- الف})$$

$$\vec{F}=\begin{pmatrix}\rho u\\ p+\rho u^2-\xi\tau_{xx}\\ \rho uv-\xi\tau_{yx}\end{pmatrix},\ \vec{E}=\begin{pmatrix}\rho v\\ \rho uv-\xi\tau_{xy}\\ p+\rho v^2-\xi\tau_{yy}\end{pmatrix} \qquad (\text{3- ب})$$

که در آن $u=\bar{u}/U_\infty$ و $v=\bar{v}/U_\infty$ به ترتیب سرعت در جهت x و y، $x=\bar{x}/L$ و $y=\bar{y}/L$ محورهای مختصات کارتزین، $p=\bar{p}/\rho_\infty U_\infty^2$ فشار استاتیکی و $\rho=\bar{\rho}/\rho_\infty$ چگالی نسبی می‌باشد، همچنین $t=\bar{t}U_\infty/L$ زمان، L طول مرجع و U_∞ سرعت مرجع است، $\bar{\varphi}$ کمیت بابعد φ را نشان می‌دهد، همچنین τ_{xx}، τ_{xy}، τ_{yx}، τ_{yy} مؤلفه‌های تانسور تنش هستند. ξ برای جریان غیرلزج برابر صفر و برای جریان لزج برابر یک می‌باشد.

در معادلات بالا، β^2 ضریب تراکم‌پذیری مصنوعی و $1/\beta$ سرعت صوت مجازی[5] می‌باشد، مقدار β تأثیر قابل توجهی روی پایداری و نرخ همگرایی معادلات دارد و این مقدار می‌بایست براساس شرایط جریان، هندسه جسم و تجربیات برنامه‌نویس انتخاب گردد که می‌تواند از 0.1 تا 10 متغیر باشد [12،19].

مهمترین مطلب در تعیین β، هم‌مرتبه بودن سرعت امواج صوتی با امواج جابجایی[6] و یا امواج پخشی[7] است، برای جریان‌هایی با عدد رینولدز کم، به دلیل بالا بودن سرعت پخش موضعی[8]، مقدار ضریب تراکم‌پذیری ذاتا عدد بزرگی است، در این شرایط اندازه ضریب تراکم‌پذیری مصنوعی پخشی از رابطه‌ی (4) به‌دست می‌آید [12]:

$$\beta_{\text{diff}}^2=0.25\left[\left(\frac{4\mu}{\rho\text{Re}L_{\min}}+\sigma V\right)^2-(2-\sigma)^2V^2\right] \qquad (4)$$

1- Jameson's Finite Volume Method
2- Artificial Dissipation
3- Artificial Viscosity
4- Explicit Four-Stage Runge-kutta Scheme
5- Pseudo Acoustic Velocity
6- Convective
7- Diffusion
8- Local Diffusion Velocity

که در آن $V^2=u^2+v^2$ و $L_{\min}$ کمترین طول وجه یک المان محاسباتی می‌باشد، معادله (4) نشان می‌دهد که ضریب تراکم‌پذیری مصنوعی تابعی از سرعت جریان بوده و مقدار آن در سراسر فضای محاسباتی متغیر می‌باشد. با این وجود، محاسبات عددی انجام شده در مراجعی نظیر [14،20] نشان می‌دهد که استفاده از یک مقدار ثابت برای این ضریب (یعنی $\beta=\beta_0$) نتیجه بهتری در سرعت همگرایی خواهد داشت. لذا در این تحقیق برای جریان‌های آرام ($\text{Re}\le 10^4$)، ضریب تراکم‌پذیری مصنوعی از معادله زیر محاسبه می‌شود:

$$\beta^2=\text{Max}\{\beta_{\text{diff}}^2,\beta_p^2\} \qquad (5)$$

$$\beta_p^2=\begin{cases}10^8\text{Re}^2V_{\max}^2, & V\le\dfrac{\text{Re}}{10000}V_{\max}\\ \text{Min}(\beta_0^2,V^2), & V>\dfrac{\text{Re}}{10000}V_{\max}\end{cases} \qquad (6)$$

که در آن $V_{\max}^2=(u^2+v^2)_{\max}$ می‌باشد.

درماتریس پیش‌شرط (3- الف)، σ ضریب پیش‌شرط[9] می‌باشد. در روش پیش‌شرط ترکل، σ عددی ثابت و غیرصفر خواهد بود [9]. روش ترکل را با SPM (روش پیش‌شرط استاندارد[10]) نمایش می‌دهیم. در روش تراکم‌پذیری مصنوعی کورین، σ برابر صفر است [8]. این روش را با SAC (روش تراکم‌پذیری استاندارد[11]) نشان می‌دهیم و در روش پیش‌شرط مالان و همکارانش $\sigma=2(1-A_p)$ می‌باشد. جهت سهولت، روش مالان را با MPM (روش پیش‌شرط مالان[12]) نمایش می‌دهیم که در آن A_p حسگر فشار محلی[13] است [12].

در روش پیشنهادی مالان، ضریب پیش‌شرط به صورت موضعی و با توجه به گرادیان میدان فشار در هر گام زمانی تغییر می‌کند. با این وجود، نتایج به‌دست آمده در مرجع [21] نشان می‌دهد که با اعمال روش پیش‌شرط مالان برای جریان‌های لزج آرام حول هیدروفویل‌های ناکا[14]، همگرایی در مرتبه بسیار پایینی رخ می‌دهد و اعمال آن روی جریان‌های غیرلزج منجر به واگرایی حل عددی می‌شود. از این رو در این تحقیق یک ضریب (یا ماتریس) پیش‌شرط جدید موضعی به نام ماتریس پیش‌شرط توانی برای حل این مشکل پیشنهاد می‌شود. این ضریب نمونه‌ی اصلاح شده‌ی روش ارائه شده توسط مالان و همکارانش می‌باشد. نتایج حاصل از اجرای این روش نشان می‌دهد که علاوه بر اصلاح روش مالان در جریان عبوری از هیدروفویل‌ها، مقدار بسیار زیادی سرعت همگرایی شبیه‌سازی عددی را کاهش می‌دهد، این کاهش در بعضی مسایل به 60 درصد نیز می‌رسد [21]. در این تحقیق برای اولین بار از روش پیش‌شرط توانی در شبیه‌سازی جریان‌های ناپایا استفاده می‌شود.

با جایگزینی حسگر فشاری A_p با حسگر موضعی سرعت A_u، می‌توان نرخ همگرایی حل عددی به ویژه برای جریان حول هیدروفویل را به میزان قابل توجهی اصلاح کرد. در نتیجه برای جریان‌های آرام و لزج، رابطه‌ی (7) را برای ضریب پیش‌شرط معرفی می‌کنیم [21]:

$$\sigma=2(1-A_u) \qquad (7)$$

که در رابطه (7)، A_u از رابطه‌ی (8) محاسبه می‌شود:

$$A_u=\lim_{x\to x_m^+}\frac{|\nabla u(x_m)-\nabla u(x)|}{|\nabla u(x_m)|-|\nabla u(x)|} \qquad (8)$$

9- Preconditioning Factor
10- Standard Preconditioning Method
11- Standard Artificial Compressibility
12- Malan's Preconditioning Method
13- Local Pressure Sensor
14- NACA-Hydrofoils

$\nabla u(x_m)$ گرادیان سرعت در نقطه‌ی $x = x_m$ (نقطه ی m در فضای محاسباتی) می‌باشد و از رابطه‌ی (9) به دست می‌آید:

$$\nabla u(x_m) = \lim_{x \to x_m^-} \frac{u(x) - u(x_m)}{x - x_m} \quad (9)$$

در رابطه (9) $u(x_m)$ سرعت در $x = x_m$ (نقطه‌ی m در فضای محاسباتی) می‌باشد.

ترکل [9،22] نشان داد اگر چه $\sigma = 2$ به لحاظ تئوریک می‌بایست بهترین نرخ همگرایی را داشته باشد، اما توانمندی کمتری نسبت به حالت $\sigma = 0$ خواهد داشت. در نتیجه برای کوچک کردن ضریب معرفی شده در رابطه‌ی (4)، در نهایت یک ضریب پیش‌شرط توانی به صورت (10) تعریف می‌شود:

$$\sigma = 2(1 - A_u)^m \quad (10)$$

براساس نتایج به‌دست آمده [21] مشخص گردید اگر چه به لحاظ تئوریک نشان داده می‌شود که $m = 2$ می‌بایست بهترین نتیجه را در کاهش نرخ همگرایی داشته باشد، اما مقدار بهینه m می‌تواند بزرگتر از 2 نیز باشد ($m \geq 2$ که در آن m یک عدد صحیح است).

3- گسسته‌سازی عددی

به منظور گسسته‌سازی معادلات حاکم از روش حجم محدود جیمسون [23،24] از نوع مرکزیت سلول استفاده شده است. در ابتدا از معادله‌ی پیش‌شرط شده‌ی (1) حول حجم کنترل Ω که با سطح $\partial\Omega$ محصور شده است انتگرال می‌گیریم. با در نظر گرفتن قضیه‌ی دیورژانس[1] خواهیم داشت:

$$\Pi^{-1}\Gamma \frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega} \vec{Q}\, \mathrm{d}A + \frac{\partial}{\partial \tau}\int_{\Omega} \vec{Q}\, \mathrm{d}A + \Pi^{-1}\int_{\partial\Omega}\left(\vec{F}\mathrm{d}x - \vec{E}\mathrm{d}y\right) = 0 \quad (11)$$

در روش حجم محدود، نخست با یکی از روش‌های جبری یا دیفرانسیلی فضای محاسباتی مورد نظر شبکه‌بندی شده و سپس معادلات مربوطه برای هر حجم کنترل بر حسب مختصات نقاط وسط حجم‌ها گسسته‌سازی می‌شوند. بدین ترتیب با تقریب زدن جملات $\partial\vec{Q}/\partial\tau$ و $\partial\vec{Q}/\partial t$ از معادله‌ی (11) با مقدار آن در وسط حجم کنترل و خارج کردن این جملات از داخل انتگرال و همچنین اضافه کردن جملات اتلافی جیمسون، گسسته‌شده‌ی معادله (11) به‌شکل (12) خواهد شد [14،24]:

$$\Pi^{-1}\Gamma A_{i,j}\frac{\partial Q_{i,j,k}}{\partial t} + A_{i,j}\frac{\partial Q_{i,j,k}}{\partial \tau} = -G_{i,j,k} + D_{i,j,k} \quad (12)$$

که (i,j) معرف شماره‌ی المان، $k = 1,2,3$ اندیس مؤلفه‌های بردار و $A_{i,j}$ مساحت المان (i,j)ام می‌باشد. همچنین $G_{i,j,k}$ معرف شار عددی روی وجوه هر المان بوده که از رابطه‌ی (13) محاسبه می‌شود:

$$G_{i,j,1} = \beta^2 \sum_{\mathrm{edges}} (F_1 \mathrm{d}y - E_1 \mathrm{d}x)_{i,j} \quad \text{(13-الف)}$$

$$G_{i,j,2} = -\frac{\sigma u_{i,j} G_{i,j,1}}{\rho\beta^2} + \left(\frac{1}{\rho}\right)\sum_{\mathrm{edges}} (F_2 \mathrm{d}y - E_2 \mathrm{d}x)_{i,j} \quad \text{(13-ب)}$$

$$G_{i,j,3} = -\frac{\sigma v_{i,j} G_{i,j,1}}{\rho\beta^2} + \left(\frac{1}{\rho}\right)\sum_{\mathrm{edges}} (F_3 \mathrm{d}y - E_3 \mathrm{d}x)_{i,j} \quad \text{(13-ج)}$$

با همگرایی معادله (11) در زمان مجازی τ، ($\partial\vec{Q}/\partial\tau \to 0$) حل معادله در زمان حقیقی t، حاصل می‌شود. عبارت زمان حقیقی با استفاده از تفاضل پسروی سه‌نقطه‌ای و به صورت ضمنی گسسته‌سازی می‌شود [2،12،25]:

$$\Pi^{-1}\Gamma A_{i,j}\frac{\partial Q_{i,j,k}}{\partial t} = \Pi^{-1}\Gamma A_{i,j}\frac{3Q^{n+1}_{i,j,k} - 4Q^{n}_{i,j,k} + Q^{n-1}_{i,j,k}}{2\Delta t} \quad (14)$$

که در آن n بیانگر زمان فیزیکی است.

استفاده از الگوریتم تفاضل مرکزی در تخمین شارها موجب ایجاد نوساناتی در میدان حل شده و همین باعث ناپایداری حل عددی می‌گردد. برای جلوگیری از ایجاد این نوسانات، براساس روش پیشنهادی جیمسون، معادلات گسسته‌سازی مذکور، با اضافه کردن جملات اتلافی مرتبه‌ی دوم و چهارم اصلاح می‌شوند:

$$D_{i,j,k} = \left(d_{i+\frac{1}{2},j} - d_{i-\frac{1}{2},j} + d_{i,j+\frac{1}{2}} - d_{i,j-\frac{1}{2}}\right)_k \quad (15)$$

که به‌عنوان مثال برای عبارت $d_{i+1/2,j}$ داریم [21]:

$$d_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{A_{i+\frac{1}{2},j}}{\Delta t}\left(\varepsilon_2^{i+\frac{1}{2},j}\delta_2 - \varepsilon_4^{i+\frac{1}{2},j}\delta_4\right) \quad (16)$$

$$\delta_2 = Q_{i+1,j,k} - Q_{i,j,k} \quad (17)$$

$$\delta_4 = Q_{i+2,j,k} - 3Q_{i+1,j,k} + 3Q_{i,j,k} - Q_{i-1,j,k} \quad (18)$$

$$A_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{1}{2}\left(A_{i+\frac{1}{2},j} + A_{i,j}\right) \quad (19)$$

که در رابطه (16)، ε_2 و ε_4 به‌ترتیب ضرایب لزجت مصنوعی و اتلاف مصنوعی نامیده می‌شود که از روش زیر محاسبه می‌شوند [23،24،26،27]:

$$\varepsilon_2^{i+\frac{1}{2},j} = k_2 \mathrm{Max}\{\nu_{i+1,j}, \nu_{i,j}\} + k_3 \mathrm{Max}\{\gamma_{i+1,j}, \gamma_{i,j}\} \quad (20)$$

$$\varepsilon_4^{i+\frac{1}{2},j} = \mathrm{Max}\left\{0, \left[k_4 - \varepsilon_2^{i+\frac{1}{2},j}\right]\right\} \quad (21)$$

در رابطه‌ی (20)، ν پارامتری است که در نواحی با گرادیان فشار شدید نظیر شوک‌ها فعال می‌شود و γ یک حسگر مکمل برای جریان‌های کاویتاسیونی است که از روابط (22) و (23) به‌دست می‌آیند:

$$\nu_{i,j} = \left|\frac{p_{i+1,j} - 2p_{i,j} + p_{i-1,j}}{p_{i+1,j} + 2p_{i,j} + p_{i-1,j}}\right| \quad (22)$$

$$\gamma_{i,j} = \left|\frac{\rho_{i+1,j} - 2\rho_{i,j} + \rho_{i-1,j}}{\rho_{i+1,j} + 2\rho_{i,j} + \rho_{i-1,j}}\right| \quad (23)$$

در معادلات (20) و (21) k_2، k_3 و k_4 سه ضریب دلخواه و ثابت هستند. از آنجا که در جریان‌های تراکم‌ناپذیر، از پدیده‌ی شوک فشاری یا گرادیان شدید در چگالی سیال خبری نیست، مقادیر ν و γ نزدیک صفر هستند و می‌توان از آن‌ها صرف‌نظر کرد. لذا در این شرایط می‌توان از روابط $\varepsilon_2 = 0$ و $\varepsilon_4 = k_4$ استفاده کرد.

به‌منظور گسسته‌سازی مشتق زمانی از روش رانگ-کوتای اصلاح‌شده‌ی چهار مرحله‌ای استفاده شده است. روش چهار مرحله‌ای رانگ-کوتا برای شکل نیمه‌گسسته معادلات ناپایا به‌صورت (24) بیان می‌گردد [4،12،15]:

$$Q^{(0)}_{i,j,k} = Q^{(N)}_{i,j,k}$$

$$Q^{(\kappa)}_{i,j,k} = Q^{(0)}_{i,j,k} - \alpha_k \frac{\Delta\tau_{i,j}}{A_{i,j}\left(I + \Pi^{-1}\Gamma\frac{3}{2}\frac{\Delta\tau_{i,j}}{\Delta t}\right)} \left[G\left(Q^{(\kappa-1)}_{i,j,k}\right) - D\left(Q^{(0)}_{i,j,k}\right) + A_{i,j}\Pi^{-1}\Gamma\left(\frac{-3Q^{n+1}_{i,j,k} + 4Q^{n}_{i,j,k} - Q^{n-1}_{i,j,k}}{2\Delta t}\right)\right]$$

$$Q^{(N+1)}_{i,j,k} = Q^{(4)}_{i,j,k} \quad (24)$$

که در رابطه‌ی (24) $\kappa = 1,2,3,4$ و ضرایب α_k به‌ترتیب به‌صورت 1/4، 1/3، 1/2 و 1 انتخاب می‌شوند. همچنین n بیانگر زمان فیزیکی و N معرف زمان مجازی است.

باتوجه به ماهیت ضمنی گسسته‌سازی جمله زمان حقیقی، محدودیتی از نظر اندازه گام زمان فیزیکی وجود نداشته و تنها قید موجود در انتخاب گام

1- Divergence Theorem

زمان حقیقی، دقت مورد نیاز در مسأله است. همچنین در این تحقیق از گام‌های زمانی محلی برای تسریع در همگرایی حل استفاده شده است:

$$\Delta\tau_{i,j} = \mathrm{CFL} \times \frac{\Delta L_{i,j}^{\min}}{\lambda_{i,j}^{\max}} \tag{25}$$

که $\Delta L_{i,j}^{\min}$ کوچکترین طول وجه المان (i,j)ام و CFL عدد کورانت-فردریچ-لوی[1] می‌باشد. همچنین $\lambda_{i,j}^{\max}$ مقدار ویژه بیشینه برای هر المان خواهد بود. برای ارزیابی نرخ همگرایی از نرم خطای فشار موضعی به‌صورت (26) استفاده می‌شود [15]:

$$\mathrm{Res} = \log\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\frac{\left(\frac{\Delta p_{i,j}}{p_{i,j}}\right)^2}{N}} \tag{26}$$

که N معرف تعداد المان‌های موجود در فضای محاسباتی می‌باشد.

به منظور تعیین مقدار σ در روابط (13)، لازم است که حسگر سرعت در مراکز هر المان محاسبه شود. برای گسسته‌سازی حسگر سرعت که در معادله‌ی (8) معرفی شده‌اند از رابطه‌ی (27) استفاده می‌شود [12]:

$$A_u^{i,j} = \frac{|4u_{i,j} - u_{i+1,j} - u_{i-1,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1}|}{|u_{i,j} - u_{i+1,j}| + |u_{i,j} - u_{i-1,j}| + |u_{i,j} - u_{i,j+1}| + |u_{i,j} - u_{i,j-1}|} \tag{27}$$

همچنین برای مرزها (به‌عنوان مثال چنانچه وجه $(i,j-1/2)$ مرز دیواره باشد)، حسگر سرعت از معادله‌ی (28) محاسبه می‌شود:

$$\left(A_u^{i,j}\right)_{bc} = \frac{|5u_{i,j} - 2u_{i+1,j} - 2u_{i-1,j} - u_{i,j+1}|}{2|u_{i,j} - u_{i+1,j}| + 2|u_{i,j} - u_{i-1,j}| + |u_{i,j} - u_{i,j+1}|} \tag{28}$$

4- شرایط مرزی

برای جریان‌های غیرلزج محاسبات شرط مرزی براساس روش سلول‌های مجازی[2] انجام شده است. برای جریان‌های لزج شرط عدم لغزش یعنی $u = 0$ و $v = 0$ روی بدنه‌ی هیدروفویل اعمال شده است. شرط مرزی فشار روی بدنه براساس رابطه‌ی $\mathrm{d}p/\mathrm{d}n = 0$ که n بردار عمود بر سطح هیدروفویل می‌باشد، انجام شده است. در مرز ورودی، اندازه‌ی مؤلفه‌های سرعت ثابت و برابر مقدار آن‌ها در جریان آزاد قرار داده می‌شوند و فشار از داخل میدان جریان برون‌یابی می‌شود. در مرز خروجی، فشار برابر با فشار جریان آزاد و مؤلفه‌های سرعت با استفاده از برون‌یابی از داخل میدان تعیین می‌گردند.

5- نتایج عددی

در این مقاله برای شبیه‌سازی‌های انجام شده برنامه‌ای با زبان برنامه‌نویسی C++ نوشته شده است که روندنمای آن به طور خلاصه در شکل 1 نمایش داده شده است. همانطور که در بخش 4 نیز به تفصیل اعلام گردید، در این برنامه عددی که الگوریتم آن بر اساس روش حجم محدود از نوع مرکزیت سلول پایه‌ریزی گشته، با استفاده از روش پیش‌شرط توانی بسط داده شده و به منظور بررسی جریان‌های ناپایا از شیوه‌ی حل دوزمانی استفاده شده است. در ابتدا به منظور اعتبارسنجی مطالعه‌ی انجام شده، نتایج شبیه‌سازی عددی جریان آرام ناپایا پیرامون NACA0012 با نتایج عددی موجود مقایسه شده است. پس از بررسی صحت نتایج، تأثیر روش‌های مختلف پیش‌شرط بر روی نرخ همگرایی در زوایای حمله و اعداد رینولدز متفاوت مورد بررسی قرار می‌گیرد.

برای مقایسه الگوریتم جریان آرام ناپایای تراکم‌ناپذیر از نتایج عددی حافظ و همکاران [28] و همچنین شاتالوو [7] استفاده شده است. شبکه محاسباتی مورد استفاده در شکل 2 نشان داده شده است. شبکه‌ی به کار رفته، شبکه‌ای با سازمان از نوع O بوده که دارای 250 گره در راستای هیدروفویل و 130 گره در جهت عمود بر آن می‌باشد. همچنین فاصله اولین گره محاسباتی تا دیواره هیدروفویل $0.0004 - 0.0003$ برابر طول وتر هیدروفویل انتخاب شده است. مرز خارجی به صورت دایره‌ای با شعاع 20 برابر وتر هیدروفویل در نظر گرفته شده است. گام زمان حقیقی برابر با $\Delta t = 0.01$ در نظر گرفته شده و در هر گام زمانی حقیقی میدان حل تا 10^{-5} در زمان مجازی همگرا می‌شود.

جهت مطالعه استقلال حل از شبکه محاسباتی، چهار شبکه با ابعاد مختلف 90×150، 110×200، 130×250 و 150×300 درنظر گرفته شده است. نتایج مربوط به تغییرات سرعت عمودی v در موقعیت $x = 1.1$,$y = 0.0$ پشت هیدروفویل NACA0012 بر حسب زمان تحت شرایط $\alpha = 20^\circ$ و $\mathrm{Re} = 800$ در شکل 3 نمایش داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، نتایج مرتبط با شبکه با ابعاد 130×250 و 150×300 همپوشانی و انطباق نسبتا خوبی در مقایسه با دو شبکه درشت‌تر دیگر دارند که با عنایت به اعتبارسنجی صورت گرفته در شکل‌های بعدی (که جزئیات آن در ادامه ارائه خواهد شد) دارای دقت کافی برای حل جریان‌های ناپایای عبوری از هیدروفویل هستند. لذا با توجه به نیاز به کاهش زمان محاسباتی، در این مطالعه و شبیه‌سازی‌های بعدی از شبکه‌بندی 130×250 استفاده شده است.

به منظور بررسی صحت الگوریتم ناپایا، جریان آرام حول هیدروفویل NACA0012 در عدد رینولدز $\mathrm{Re} = 800$ و در زاویه‌ی حمله $\alpha = 20^\circ$ شبیه‌سازی شده است. در این شرایط، جریان وضعیتی ناپایا دارد و با ریزش متناوب گردابه‌هایی به داخل جریان همراه می‌باشد. شکل‌های 4 و 5، تغییرات سرعت عمودی v را نسبت به زمان، به ترتیب در موقعیت پشت هیدروفویل $x = 1.1,\ y = 0.0$ و $x = 3.0,\ y = 0.0$ در مقایسه با نتایج گزارش شده در مرجع [28] نشان می‌دهند. همچنین در شکل 6 تغییرات سرعت عمودی v نسبت به زمان، در موقعیت $x = 2.0,\ y = 0.0$ در مقایسه با نتایج شاتالوو [7] نشان داده شده است. مقدارهای به دست آمده برای سرعت عمودی در هر گام زمانی حقیقی و دوره‌های نوسان نسبت به زمان، همخوانی بسیار خوبی با نتایج مراجع یاد شده دارد.

در شکل 7، مقایسه خطوط هم‌تراز سرعت عمودی v و در شکل 8، مقایسه خطوط هم‌تراز سرعت افقی u با نتایج حافظ و همکاران [28] در زمان حقیقی $t = 5$، در عدد رینولدز $\mathrm{Re} = 800$ و در زاویه‌ی حمله $\alpha = 20^\circ$ نشان داده شده است. نتایج به دست آمده همخوانی خوبی را با نتایج عددی موجود نشان می‌دهد.

در شکل 9 نمودار توزیع ضریب برا (C_L) برحسب زمان نشان داده شده است. نتایج مطالعه‌ی حاضر در شکل 9 در مقایسه با نتایج شاتالوو [7] بیان شده است. همچنین شکل 10 نمودار ضریب پسا (C_D) نسبت به زمان را نشان می‌دهد. همان‌طور که در نمودارها نیز مشهود است پس از گذشت مدتی از شروع محاسبات، جریان شکل واقعی و نوسانی خود را پیدا می‌کند. با توجه به این مطلب، در شکل 9 پس از گذشت زمان 7 ثانیه نتایج انطباق خوبی با نتایج مرجع یاد شده دارد.

1- Courant-Friedrichs-Lewy
2- Dummy Cells

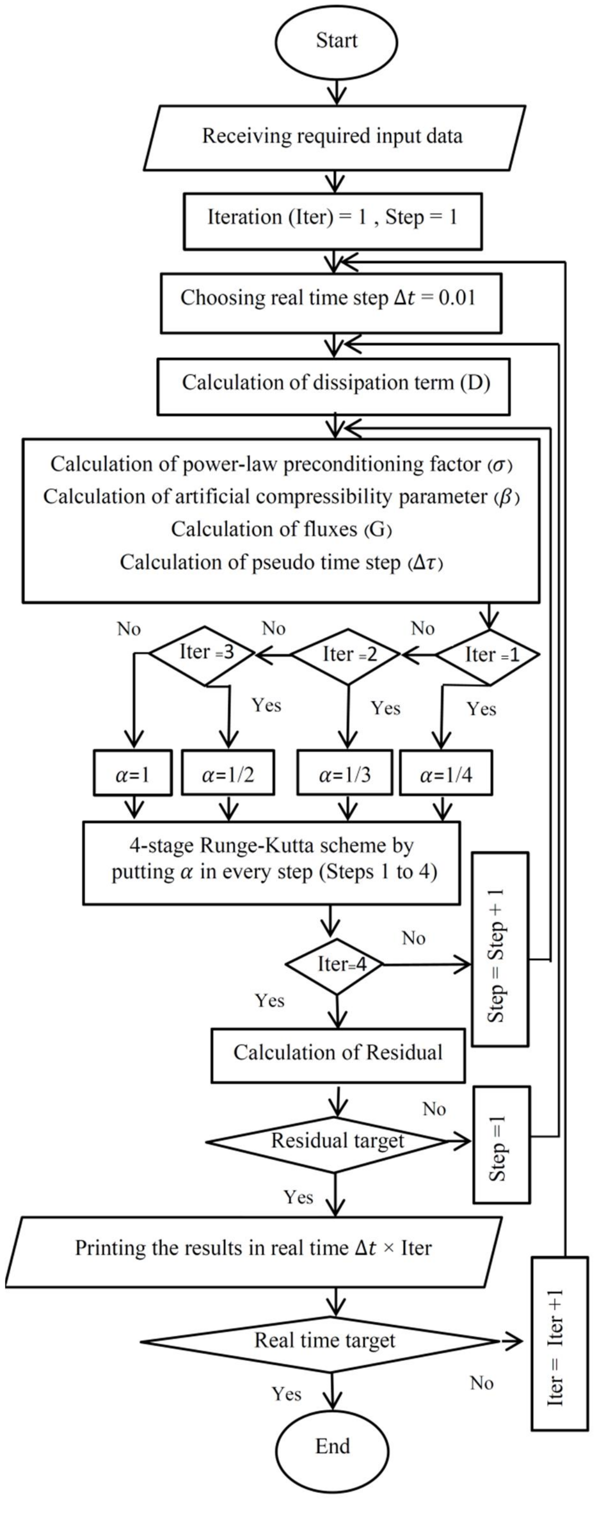


Fig. 1 The flowchart of the computational algorithm

شکل 1 روندنمای الگوریتم محاسباتی

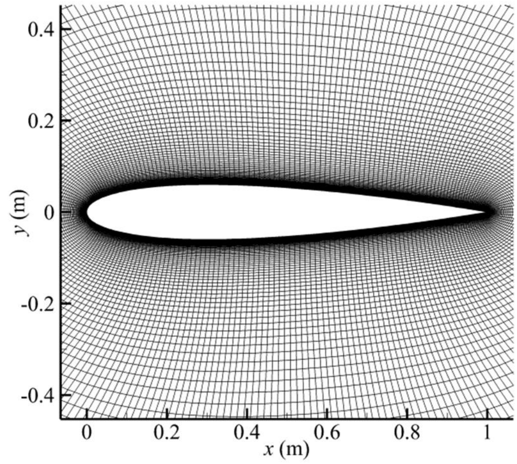


Fig. 2 A close-up view of computational grid around NACA0012 hydrofoil

شکل 2 نمای نزدیک از شبکه‌ی محاسباتی اطراف هیدروفویل NACA0012

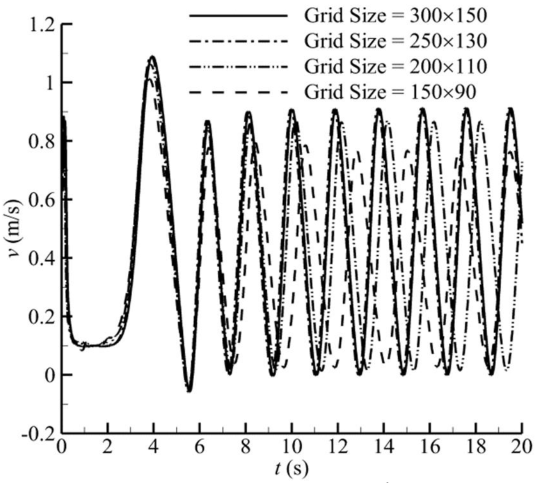


Fig. 3 Grid study around the hydrofoil, $\alpha = 20^{\circ}$, Re = 800

شکل 3 مطالعه استقلال حل از شبکه پیرامون هیدروفویل، $\alpha = 20^{\circ}$ و Re = 800

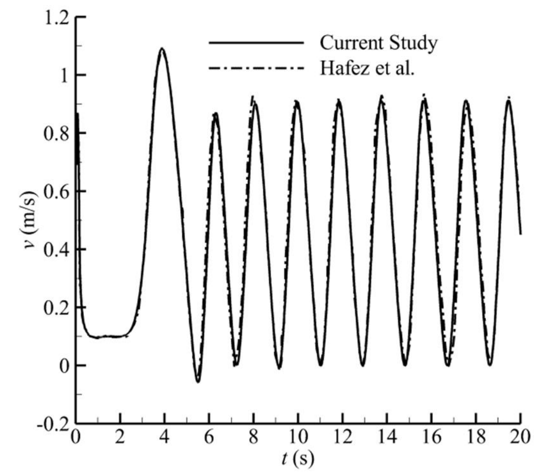


Fig. 4 Comparison of time variation of the v-velocity at $x = 1.1$, $y = 0.0$ behind the NACA0012, $\alpha = 20^{\circ}$ and Re = 800 [28]

شکل 4 مقایسه تغییرات سرعت عمودی v در موقعیت $y = 0.0$, $x = 1.1$ پشت هیدروفویل NACA0012 بر حسب زمان، $\alpha = 20^{\circ}$ و Re = 800 [28]

یکی از مسائل مورد توجه در حل جریان‌های ناپایا، نحوه تغییر شکل گردابه‌های تشکیل شده و تغییرات الگوی خطوط جریان در گذر زمان می‌باشد. بدین ترتیب در شکل 11 الگوی خطوط جریان و نحوه تغییرات شکل گردابه تشکیل‌شده، در یک دوره نوسانی در زمان‌های حقیقی $t = 6.0$، $t = 6.65$ و $t = 7.25$ تحت شرایط $\alpha = 20^{\circ}$ و Re = 800 نمایش داده

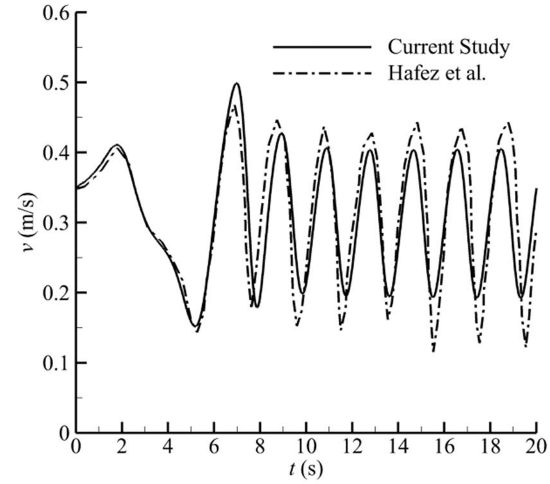


Fig. 5 Comparison of time variation of the v-velocity at $x = 3.0,\ y = 0.0$ behind the NACA0012, $\alpha = 20^{\circ}$ and $\mathrm{Re} = 800$ [28]

شکل 5 مقایسه تغییرات سرعت عمودی v در موقعیت $x = 3.0$, $y = 0.0$ پشت هیدروفویل NACA0012 بر حسب زمان، $\alpha = 20^{\circ}$ و $\mathrm{Re} = 800$ [28]

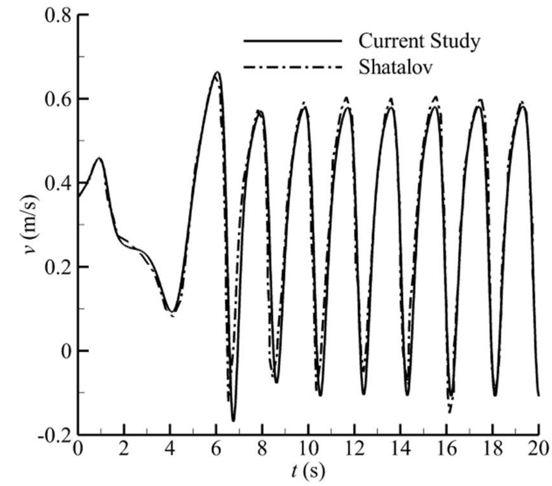


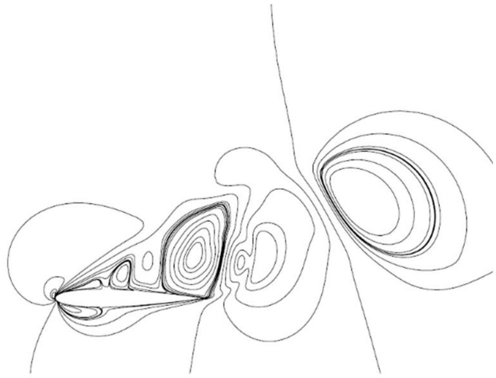
Fig. 6 Comparison of time variation of the v-velocity at $x = 2.0,\ y = 0.0$ behind the NACA0012, $\alpha = 20^{\circ}$ and $\mathrm{Re} = 800$ [7]

شکل 6 مقایسه تغییرات سرعت عمودی v در موقعیت $x = 2.0$, $y = 0.0$ پشت هیدروفویل NACA0012 بر حسب زمان، $\alpha = 20^{\circ}$ و $\mathrm{Re} = 800$ [7]

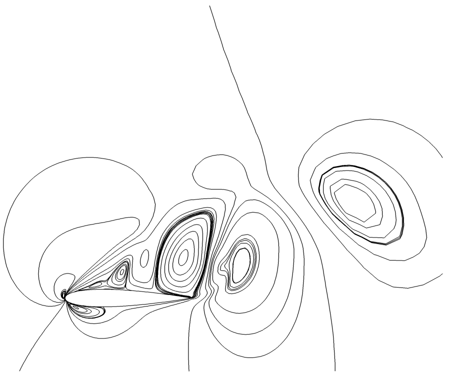
شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود دو گردابه تشکیل شده روی سطح فوقانی هیدروفویل با گذر زمان رشد کرده و ابعاد آن‌ها افزایش می‌یابد و سپس در زمانی مشخص (که بستگی به زاویه حمله و عدد رینولدز دارد) تجزیه شده، ابعاد آن کاهش می‌یابد و به بالادست منتشر می‌گردد (پدیده انتشار گردابه[1]) و این اتفاق به‌صورت نوسانی ادامه خواهد داشت. در حقیقت عامل اصلی نوسانی بودن ضرایب برآ و پسا، همین نوسانی بودن الگوی جریان و رفتار گردابه‌ها می‌باشد.

همان‌طور که قبلا نیز بیان شد با توجه به فرایند حل دستگاه معادلات حاکم و استفاده از الگوریتم دوزمانه، دو حلقه‌ی تکرار خارجی (مربوط به زمان حقیقی) و داخلی (مربوط به زمان مجازی) موجود می‌باشد که با همگرایی حل در زمان مجازی، حل معادله در زمان حقیقی حاصل می‌شود. در شکل‌های 12 و 13 به ترتیب، زمان محاسباتی پردازنده مرکزی[2] برای اجرای

1- Vortex Shedding
2- CPU



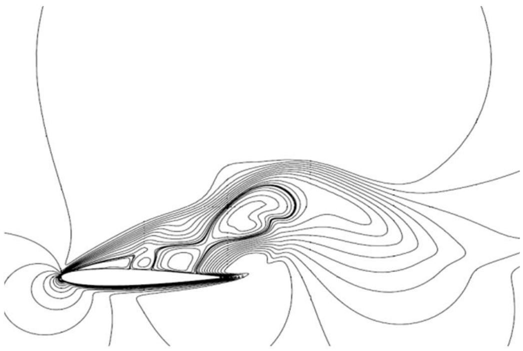
(a)



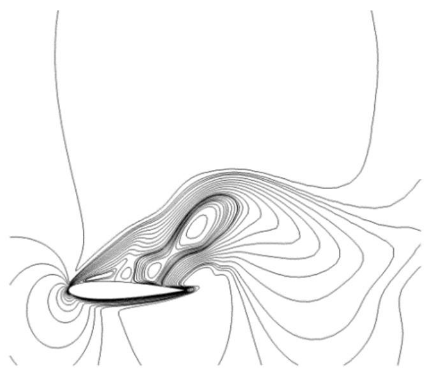
(b)

Fig. 7 v-velocity contours on the NACA0012, $\alpha = 20^{\circ}$, $\mathrm{Re} = 800$ and $t = 5$ (a): Hafez et al [28] (b): Current study

شکل 7 خطوط همتراز سرعت عمودی v هیدروفویل NACA0012، $\alpha = 20^{\circ}$، $\mathrm{Re} = 800$ و زمان $t = 5$. (a): حافظ [28] (b): مطالعه‌ی حاضر



(a)



(b)

Fig. 8 u-velocity contours on the NACA0012, $\alpha = 20^{\circ}$, $\mathrm{Re} = 800$ and $\mathrm{time} = 5$ (a): Hafez et al [28] (b): Current study

شکل 8 خطوط همتراز سرعت افقی u هیدروفویل NACA0012، $\alpha = 20^{\circ}$، $\mathrm{Re} = 800$ و زمان $t = 5$. (a): حافظ [28] (b): مطالعه‌ی حاضر

یک حلقه داخلی و تعداد تکرار برای اجرای همان حلقه داخلی (محور عمودی شکل‌ها) در زمان‌های مختلف حقیقی (محور افقی شکل‌ها) برای جریان عبوری از هیدروفویل تحت شرایط $\mathrm{Re}=800$ و $\alpha=20^{\circ}$ نمایش داده شده است. شکل 12 نشان می‌دهد که انجام یک فرایند کامل حل جریان ناپایا (یعنی 20 ثانیه که معادل 2000 اجرای حلقه خارجی با گام زمانی حقیقی $\Delta t=0.01$ می‌باشد)، به چه مقدار زمان نیاز دارد و شکل 13 تعداد تکرارهای لازم برای همگرایی در هر گام زمان مجازی را مشخص می‌کند (این دو شکل برای خطای محاسباتی 10^{-4} رسم گردیده است). لازم به‌توضیح است که شبیه‌سازی عددی با کامپیوتری با مشخصات 16 GB Ram و پردازنده مرکزی با قدرت 3.4 GH CPU انجام گرفته است. با توجه به شکل‌های 12 و 13، تعداد کل تکرار در 2000 اجرای حلقه خارجی برابر با 1،276،140 تکرار و زمان محاسباتی کل پردازنده مرکزی، 345،124 ثانیه (برابر با 3.99 روز) می‌باشد.

با توجه به نتایج به دست آمده، الگوریتم عددی حاضر قابلیت و دقت

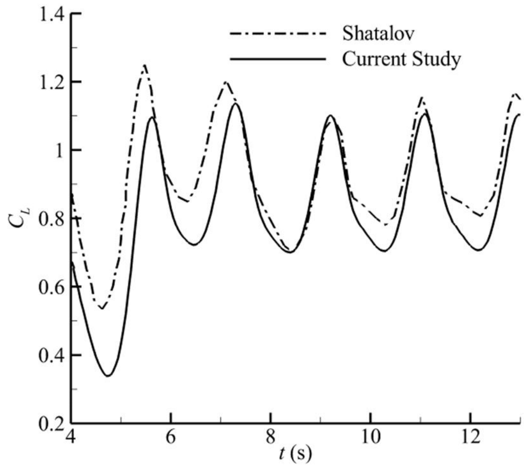


Fig. 9 Lift coefficient of the NACA0012 hydrofoil as a function of time, $\alpha=20^{\circ}$ and $\mathrm{Re}=800$ [7]

شکل 9 توزیع ضریب برا روی هیدروفویل NACA0012 بر حسب زمان، $\alpha=20^{\circ}$ و $\mathrm{Re}=800$ [7]

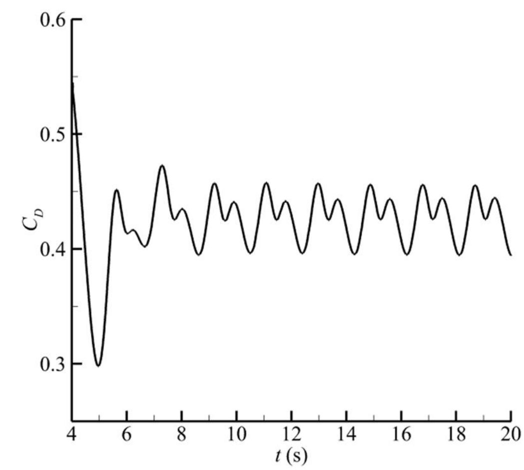


Fig. 10 Drag coefficient of the NACA0012 hydrofoil as a function of time, $\alpha=20^{\circ}$ and $\mathrm{Re}=800$

شکل 10 توزیع ضریب پسا روی هیدروفویل NACA0012 بر حسب زمان، $\alpha=20^{\circ}$ و $\mathrm{Re}=800$

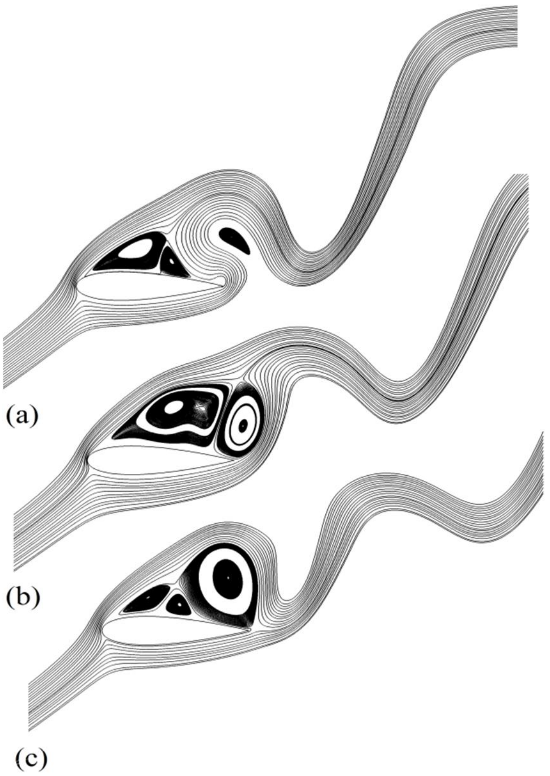


Fig. 11 Stream lines on the hydrofoil, $\alpha=20^{\circ}$, $\mathrm{Re}=800$ at times (a): $t=6.0$ (b) $t=6.65$ (c): $t=7.25$

شکل 11 خطوط جریان روی هیدروفویل، $\alpha=20^{\circ}$، $\mathrm{Re}=800$ در زمان‌های (a): $t=6.0$:(b) $t=6.65$:(c) $t=7.25$

لازم برای حل جریان‌های ناپایا را در هندسه‌های مختلف داراست. حال پس از اعتبارسنجی و بررسی صحت نتایج شبیه‌سازی عددی، تأثیر روش پیش‌شرط توانی بر نرخ همگرایی در جریان‌های ناپایای عبوری از هیدروفویل NACA0012 در اعداد رینولدز و زوایای حمله‌ی مختلف مورد بررسی قرار می‌گیرد.

در این مطالعه، از شرط جریان یکنواخت به عنوان شرط اولیه استفاده شده است ($P_\infty=1.0, U_\infty=1.0, \rho_\infty=1.0$). برای بررسی تأثیر روش پیش‌شرط توانی بر نرخ همگرایی از اولین گام زمانی استفاده شده است که دلایل آن عبارت است از: 1. استفاده از شرط جریان یکنواخت به عنوان شرط اولیه، 2. توجه به این نکته که در اولین گام زمانی حقیقی، بیشترین تکرار برای رسیدن به همگرایی اتفاق می‌افتد و پس از گذشت چند گام زمانی حقیقی اولیه، تعداد تکرارها در هر گام به صورت کاملا محسوسی کاهش می‌یابد، 3. زمانبر بودن حل عددی در یک دوره زمانی در خطای با دقت بالا.

شکل 14 تأثیر روش پیش‌شرط توانی بر نرخ همگرایی در عدد رینولدز $\mathrm{Re}=800$ و در زاویه‌ی حمله $\alpha=20^{\circ}$ را نشان می‌دهد. محاسبات عددی برای توان‌های مختلف $m=2-7$ انجام گرفته و به جهت نمایش مطلوب‌تر و جلوگیری از سردرگمی در شکل، بهینه‌ترین توان‌ها نمایش داده شده است. باتوجه به شکل 14، روش پیش‌شرط توانی باعث کاهش چشمگیری در تعداد تکرارها نسبت به روش SAC و همچنین روش SPM شده است.

شکل‌های 15 و 17 روش پیش‌شرط توانی در مقایسه با روش‌های SAC و SPM به ترتیب در اعداد رینولدز $\mathrm{Re}=1100$ و $\mathrm{Re}=500$ و در زاویه‌ی حمله $\alpha=20^{\circ}$ و همچنین شکل 16 توزیع ضریب پسا را نشان می‌دهد. باتوجه به شکل‌های 15 و 17، روش پیش‌شرط توانی باعث کاهش در تعداد

تکرارها نسبت به روش SAC و همچنین روش SPM شده است.

در شکل 18 تأثیر روش پیش‌شرط توانی بر نرخ همگرایی در عدد رینولدز Re = 1100 و در زاویه‌ی حمله $\alpha = 15^{\circ}$ و در شکل 19 توزیع

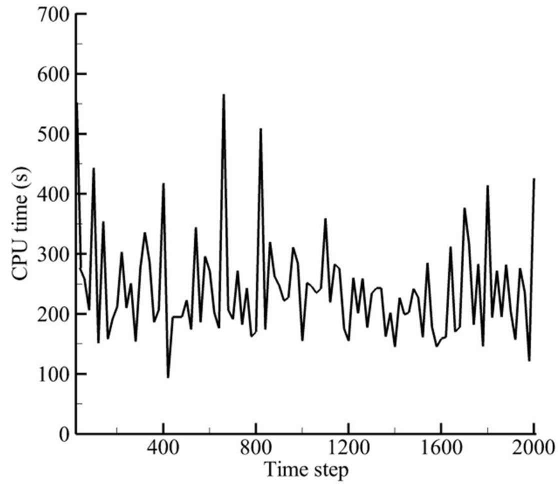


Fig. 12 CPU time per time step, $\alpha = 20^{\circ}$ and Re = 800

شکل 12 زمان CPU در هر گام زمانی، $\alpha = 20^{\circ}$ و Re = 800

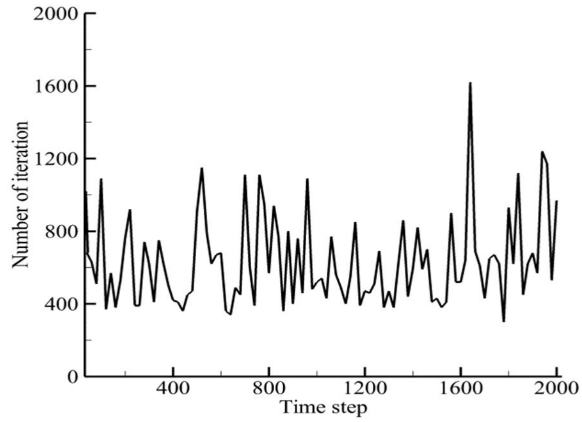


Fig. 13 Number of iteration per time step, $\alpha = 20^{\circ}$ and Re = 800

شکل 13 تعداد تکرارها در هر گام زمانی، $\alpha = 20^{\circ}$ و Re = 800

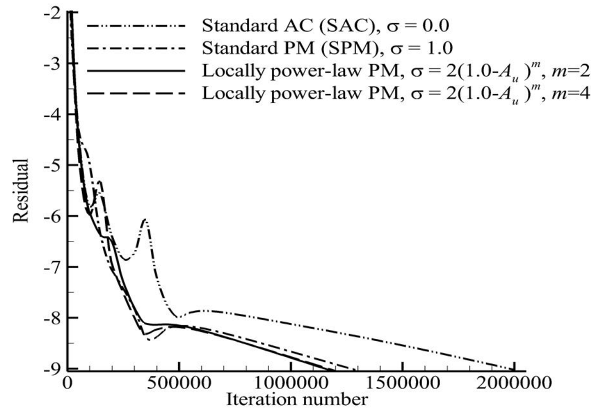


Fig. 14 Effect of the locally power-law PM on convergence rate around the NACA0012 hydrofoil at Re = 800, $\alpha = 20^{\circ}$

شکل 14 تأثیر روش موضعی پیش‌شرط توانی بر نرخ همگرایی روی هیدروفویل NACA0012، $\alpha = 20^{\circ}$ و Re = 800

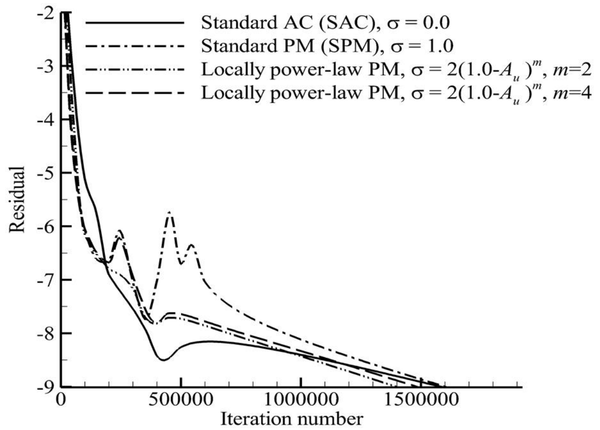


Fig. 15 Effect of the locally power-law PM on convergence rate around the NACA0012 hydrofoil at Re = 1100, $\alpha = 20^{\circ}$

شکل 15 تأثیر روش موضعی پیش‌شرط توانی بر نرخ همگرایی روی هیدروفویل NACA0012، $\alpha = 20^{\circ}$ و Re = 1100

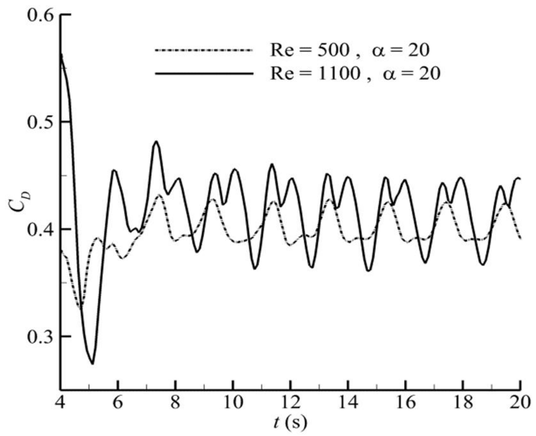


Fig. 16 Drag coefficient of the NACA0012 hydrofoil as a function of time $\alpha = 20^{\circ}$ Re = 1100 and $\alpha = 20^{\circ}$ Re = 500

شکل 16 توزیع ضریب پسا روی هیدروفویل NACA0012 بر حسب زمان، $\alpha = 20^{\circ}$ Re = 1100 و $\alpha = 20^{\circ}$ Re = 500

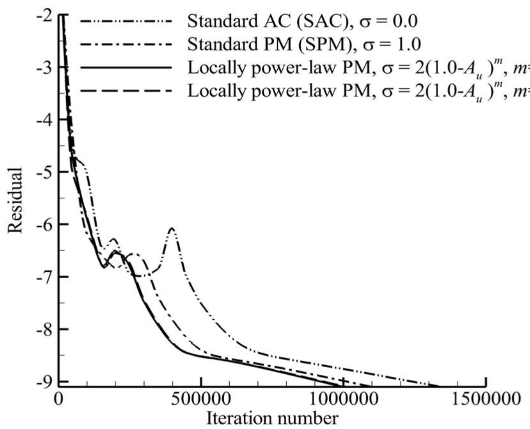


Fig. 17 Effect of the locally power-law PM on convergence rate around the NACA0012 hydrofoil at Re = 500, $\alpha = 20^{\circ}$

شکل 17 تأثیر روش موضعی پیش‌شرط توانی بر نرخ همگرایی روی هیدروفویل NACA0012، $\alpha = 20^{\circ}$ و Re = 500

ضریب پسا برحسب زمان نشان داده شده است. باتوجه به شکل 18، در روش SAC نرخ همگرایی بسیار کند صورت می‌پذیرد یا در واقع می‌توان به عدم همگرایی این روش در خطای با دقت بالا اشاره کرد. در این مورد نیز، روش پیش‌شرط توانی با افزایش سرعت همگرایی نسبت به دو روش دیگر همراه است.

در نهایت نیز در شکل‌های 20 تا 22، تأثیر روش پیش‌شرط توانی بر نرخ همگرایی در اعداد رینولدز $\mathrm{Re}=500$ و $\mathrm{Re}=800$ و در زوایای حمله‌ی $\alpha=10^{\circ}$ و $\alpha=15^{\circ}$ نشان داده شده است. باتوجه به شکل‌های 20 تا 22، استفاده از روش پیش‌شرط توانی باعث کاهش قابل ملاحظه‌ای در تعداد تکرارها شده است. شکل 19، توزیع ضریب پسا برحسب زمان را نشان می‌دهد.

در جدول 1، مقدار درصد کاهش تعداد تکرارها نسبت به روش SAC و همچنین روش SPM به صورت تقریبی محاسبه و گردآوری شده است. جدول 1 دربردارنده‌ی تمامی هفت حالت در نظر گرفته شده (شکل‌های 14 تا 22) در اعداد رینولدز و زوایای حمله متفاوت می‌باشد. در هر حالت تعداد کل تکرارها با استفاده از هر سه روش محاسبه شده و درصد کاهش آن با استفاده از توان بهینه روش پیش‌شرط توانی محاسبه گردیده است. با توجه به نتایج خلاصه شده در جدول 1، روش پیش‌شرط توانی در مقایسه با سایر روش‌های پیش‌شرط، 10 تا 75 درصد نرخ همگرایی را افزایش و هزینه‌ی زمانی محاسبات را کاهش می‌دهد.

6- نتیجه‌گیری

در این مطالعه، حل عددی معادلات اویلر و ناویر-استوکس تراکم‌ناپذیر با بکارگیری روش حجم محدود المان-مرکزی و اعمال یک پیش‌شرط حسگر سرعت انجام شده است. در این روش معادلات تراکم‌ناپذیر لزج که با اضافه کردن یک جمله‌ی تراکم‌پذیری مصنوعی به معادله پیوستگی و جملات پیش‌شرط به هر دو معادله مومنتوم تصحیح شده است، به کمک روش عددی جیمسون حل شده است. برای حل جریان‌های ناپایا از یک الگوریتم ضمنی دوزمانه استفاده شده است. ضمنا قابل ذکر است که در این مطالعه برای نخستین بار از روش پیش‌شرط توانی در شبیه‌سازی عددی جریان‌های ناپایا

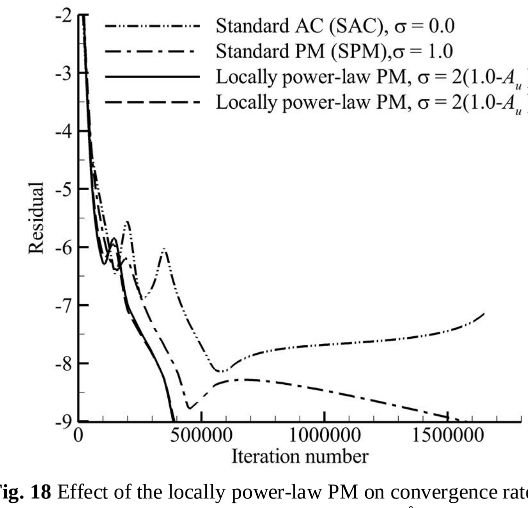


Fig. 18 Effect of the locally power-law PM on convergence rate around the NACA0012 hydrofoil at $\mathrm{Re}=1100$, $\alpha=15^{\circ}$

شکل 18 تأثیر روش موضعی پیش‌شرط توانی بر نرخ همگرایی روی هیدروفویل NACA0012، $\alpha=15^{\circ}$ و $\mathrm{Re}=1100$

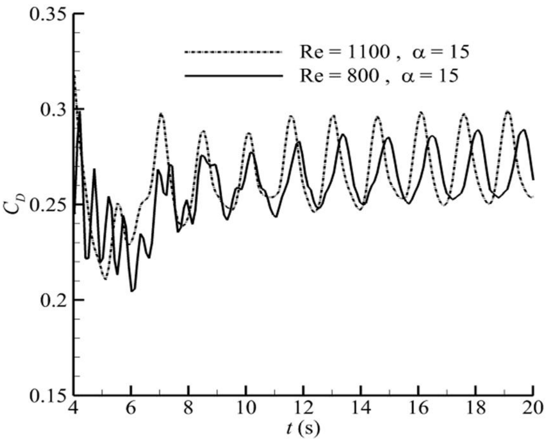


Fig. 19 Drag coefficient of the NACA0012 hydrofoil as a function of time $\alpha=15^{\circ}$ $\mathrm{Re}=1100$ and $\alpha=15^{\circ}$ $\mathrm{Re}=800$

شکل 19 توزیع ضریب پسا روی هیدروفویل NACA0012 بر حسب زمان، $\alpha=15^{\circ}$ $\mathrm{Re}=1100$ و $\alpha=15^{\circ}$ $\mathrm{Re}=800$

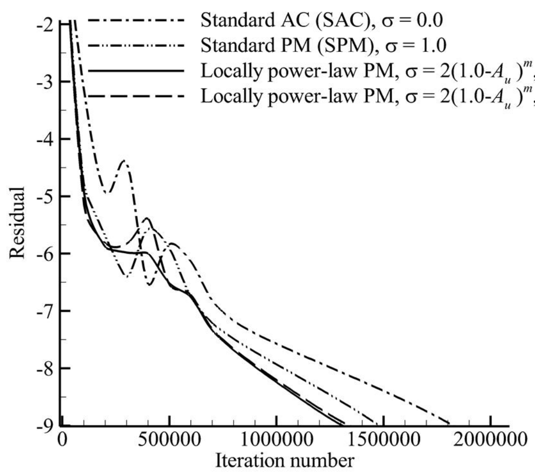


Fig. 20 Effect of the locally power-law PM on convergence rate around the NACA0012 hydrofoil at $\mathrm{Re}=500$, $\alpha=15^{\circ}$

شکل 20 تأثیر روش موضعی پیش‌شرط توانی بر نرخ همگرایی روی هیدروفویل NACA0012، $\alpha=15^{\circ}$ و $\mathrm{Re}=500$

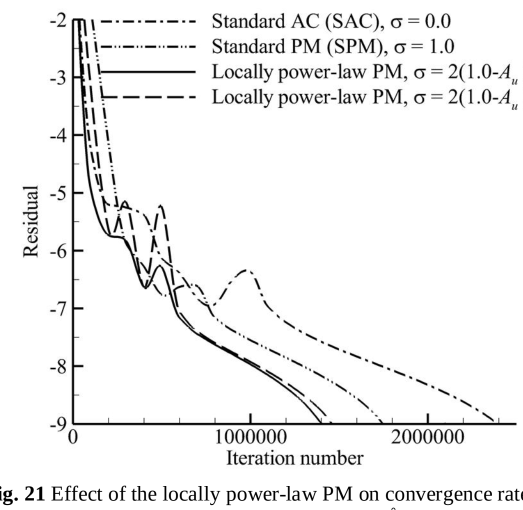


Fig. 21 Effect of the locally power-law PM on convergence rate around the NACA0012 hydrofoil at $\mathrm{Re}=800$, $\alpha=10^{\circ}$

شکل 21 تأثیر روش موضعی پیش‌شرط توانی بر نرخ همگرایی روی هیدروفویل NACA0012، $\alpha=10^{\circ}$ و $\mathrm{Re}=800$

جدول 1 تأثیر روش موضعی پیش‌شرط توانی بر نرخ همگرایی روی هیدروفویل NACA0012

Table 1 Effect of the locally power-law PM on convergence rate around NACA0012 hydrofoils

زاویه‌ی حمله (°)	عدد رینولدز	کاهش تعداد تکرار نسبت به روش تراکم‌پذیری استاندارد (%)	کاهش تعداد تکرار نسبت به روش پیش‌شرط استاندارد (%)	توان بهینه
20	1100	~ 10	~ 13	2
20	800	~ 43	~ 10	2
20	500	~ 27	~ 10	2
15	1100	---	~ 75	3
15	800	~ 75	~ 24	3
15	500	~ 29	~ 12	2
10	800	~ 41	~ 20	2

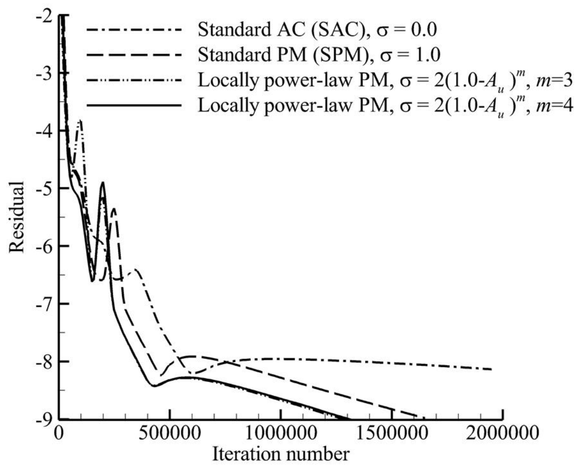


Fig. 22 Effect of the locally power-law PM on convergence rate around the NACA0012 hydrofoil at Re $= 800$, $\alpha = 15^{\circ}$

شکل 22 تأثیر روش موضعی پیش‌شرط توانی بر نرخ همگرایی روی هیدروفویل NACA0012، $\alpha = 15^{\circ}$ و Re $= 800$

استفاده می‌شود.

مقایسه نتایج به دست آمده از حل حاضر با داده‌های عددی موجود نشان می‌دهند که الگوریتم عددی حاضر با استفاده از استراتژی پیش‌شرطی در حل جریان‌های تراکم‌ناپذیر، قابلیت حل جریان‌های ناپایا را با دقت خوبی داراست، نتایج به دست آمده همخوانی بسیار خوبی با نتایج عددی محققان دیگر دارد. ضمنا مطالعه‌ی حاضر روی هیدروفویل NACA0012 در زوایای حمله و اعداد رینولدز مختلف، بهبود قابل ملاحظه‌ای در سرعت همگرایی از خود نشان می‌دهد. همچنین قابل ملاحظه است که روش پیش‌شرط توانی، 10 تا 75 درصد در مقایسه با سایر روش‌های پیش‌شرط تعداد گام‌های تکرار حل مسأله را کاهش می‌دهد. در نهایت باید یادآور شد که مقدار بهینه‌ی m ثابت نبوده و در محدوده‌ی $2 \le m \le 4$ تغییر می‌کند.

7- فهرست علائم

A مساحت (m^2)
C_L ضریب برا
C_D ضریب پسا
CFL عدد کورانت-فردریچ-لوی
L طول (m)
p فشار ($kgm^{-1}s^{-2}$)
p_∞ فشار جریان آزاد ($kgm^{-1}s^{-2}$)
Re عدد رینولدز
t زمان (s)
U سرعت جریان آزاد (ms^{-1})
u سرعت در راستای محور x (ms^{-1})
u_∞ سرعت جریان آزاد در راستای محور x (ms^{-1})
v سرعت در راستای محور y (ms^{-1})
v_∞ سرعت جریان آزاد در راستای محور y (ms^{-1})

علائم یونانی

μ لزجت دینامیکی ($kgm^{-1}s^{-1}$)
ρ چگالی (kgm^{-3})
τ تنش ($kgs^{-2}m^{-1}$)
λ مقدار ویژه
β ضریب تراکم‌ناپذیری مصنوعی
Σ ضریب پیش‌شرط

زیرنویس‌ها

diff پخش
bc سلول مرزی

8- مراجع

[1] J. Blazek, *Chapter 6 - Temporal Discretization*, *Computational Fluid Dynamics: Principles and Applications*, Third Edition, pp. 167-211, Oxford: Butterworth-Heinemann, 2015.

[2] A. Jameson, Time dependent calculations using multigrid, with applications to unsteady flows past airfoils and wings, *10th Computational Fluid Dynamics Conference*, Honolulu, U.S.A, AIAA, 1991.

[3] A. Arnone, MS. Liou, L. Povinelli, Multigrid time-accurate integration of Navier-Stokes equations, *11th Computational Fluid Dynamics Conference*, Orlando, U.S.A., AIAA, 1993.

[4] N. D. Melson, M. D. Sanetrik, H. L. Atkins, Time-Accurate Navier-Stokes calculations with multigrid acceleration, *Proceeding of The 6th Copper Mountain Conference on Multigrid Methods*, Colorado, U.S.A, NASA Conference Publication, pp. 423-439, 1993.

[5] V. Venkatakrishnan, D. J. Mavriplis, Implicit method for the computation of unsteady flows on unstructured grids, *Journal of Computational Physics*, Vol. 127, No. 2, pp. 380-397, 1996.

[6] J. M.J. Hsu, *An implicit-explicit flow solver for complex unsteady flows*, PhD Thesis, Stanford University, California, 2004.

[7] A. V. Shatalov, *Numerical simulations of incompressible laminar flows using viscous-inviscid interaction procedures*, PhD Thesis, The University of California Davis, California, 2006.

[8] A. J. Chorin, A numerical method for solving incompressible viscous flow problems, *Journal of computational physics*, Vol. 2, No. 1, pp. 12-26, 1967.

[9] E. Turkel, Preconditioned methods for solving the incompressible and low speed compressible equations, *Journal of computational physics*, Vol. 72, No. 2, pp. 277-298, 1987.

[10] B. Van-Leer, W. T. Lee, P. Roe, Characteristic time-stepping or local preconditioning of the Euler equations, *10th Computational Fluid Dynamics Conference*, Honolulu, U.S.A., AIAA, 1991.

[11] D. Lee, *Local preconditioning of the Euler and Navier-Stokes equations*, PhD Thesis, University Of Michigan, Michigan, 1996.

[12] A. Malan, R. Lewis, P. Nithiarasu, An improved unsteady, unstructured, artificial compressibility, finite volume scheme for viscous incompressible flows: part I. theory and implementation, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 54, No. 5, pp. 695-714, 2002.

[13] A. G. Malan, R. W. Lewis, P. Nithiarasu, An improved unsteady, unstructured, artificial compressibility, finite volume scheme for viscous incompressible flows: part II. application, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 54, No. 5, pp. 715-729, 2002.

[14] V. Esfahanian, P. Akbarzadeh, The Jameson's numerical method for solving the incompressible viscous and inviscid flows by means of artificial compressibility and preconditioning method, *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 206, No. 2, pp. 651-661, 2008.

[15] V. Esfahanian, P. Akbarzadeh, K. Hejranfar, An improved progressive preconditioning method for steady non-cavitating and sheet-cavitating flows, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 68, No. 2, pp. 210-232, 2012.

[16] P. Akbarzadeh, I. Mirzaee, M.H. Kayhani, E. Akbarzadeh, Blowing and suction effect on drag and lift coefficients for viscous incompressible flows over hydrofoils by power-law preconditioning method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 4, pp. 129-140, 2014. (in Persian فارسی)

[17] P. Akbarzadeh, E. Akbarzadeh, Numerical investigation of blowing effect on hydrodynamic behavior of cavitating flows over hydrofoils using power law preconditioning method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 8, pp. 59-67, 2014. (in Persian فارسی)

[18] SH. Lee, Cancellation problem of preconditioning method at low Mach numbers, *Journal of Computational Physics*, Vol. 225, No. 2, pp. 1199-1210, 2007.

[19] P. Tamamidis, G. Zhang, D. N. Assanis, Comparison of pressure-based and artificial compressibility methods for solving 3D steady incompressible viscous flows, *Journal of Computational Physics*, Vol. 124, No. 1, pp. 1-13, 1996.

[20] E. Turkel, A. Filterman, B. Van Leer, *Preconditioning and the limit to the incompressible flow equations*, ICASE, Virginia, pp. 43-92, 1993.

[21] P. Akbarzadeh, *Preconditioning method in numerical simulation of cavitating flows*, PhD Thesis, Department of Mechanical Engineering, University of Tehran, Tehran, 2010.(in Persian فارسی)

[22] E. Turkel, Review of preconditioning methods for fluid dynamics, *Applied Numerical Mathematics*, Vol. 12, No. 1, pp. 257-284, 1993.

[23] A. Jameson, Steady state solution of the Euler equations for transonic flow, *Proceeding of Transonic, Shock and Multidimensional Flows*, New York, U.S., Academic Press, pp. 37-69, 1982.

[24] A. Jameson, W. Schmidt, E. Turkel, Numerical solutions of the Euler equations by finite volume methods using Runge-Kutta time-stepping schemes, *14th Fluid and Plasma Dynamic Conference*, Palo Alto, California, U.S.A., AIAA, 1981.

[25] A. Belov, L. Martinelli, A. Jameson, A new implicit algorithm with multigrid for unsteady incompressible flow calculations, *AIAA paper*, Vol. 95,No. 1, pp. 49-68, 1995.

[26] O. Coutier-Delgosha, J. Reboud, Y. Delannoy, Numerical simulation of the unsteady behaviour of cavitating flows, *International journal for numerical methods in fluids*, Vol. 42, No. 5, pp. 527-548, 2003.

[27] O. Coutier-Delgosha, R. Fortes-Patella, J.-L. Reboud, N. Hakimi, C. Hirsch, Numerical simulation of cavitating flow in 2D and 3D inducer geometries, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 48, No. 2, pp. 135-167, 2005.

[28] M. Hafez, A. Shatalov, M. Nakajima, Improved numerical simulations of incompressible flows based on viscous/inviscid interaction procedures, *Computers and Fluids*, Vol. 36, No. 10, pp. 1588-1591, 2007.