مجله مهندسی مکانیک مدرس، خرداد 1395، دوره 16، شماره 3، ص‌ص 232-238

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

مدل غیرنیوتنی جریان خون پالسی در طول رگ الاستیک با گرفتگی متوالی

احمدرضا حقیقی[1*]، ثریا اسدی چلک[2]

1- دانشیار، ریاضی کاربردی، دانشگاه صنعتی ارومیه، ارومیه

2- کارشناسی ارشد، ریاضی کاربردی، دانشگاه صنعتی ارومیه، ارومیه

* ارومیه، صندوق پستی 57155419، ah.haghighi@uut.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 02 آذر 1394

پذیرش: 15 بهمن 1394

ارائه در سایت: 24 اسفند 1394

کلید واژگان:

سیال سیسکو

روش تفاضل محدود

جریان خون پالسی

گرفتگی متوالی

چکیده

در مقاله حاضر یک مدل ریاضی برای جریان خون پالسی و ناپایا در طول رگ گرفته شده مخروطی با گرفتگی متوالی ارائه شده است. جریان خون به صورت غیرخطی، تراکم ناپذیر و کاملا گسترش یافته فرض شده است. برای مدل‌سازی رئولوژی خون، در ساختار معادلات از مدل غیرنیوتنی سیسکو استفاده شده است. به منظور شبیه‌سازی هر چه بیشتر شرایط واقعی، رگ مفروض به صورت الاستیک و هندسه مفروض وابسته به زمان فرض می‌شود. به دلیل تولید گرادیان فشار ضربانی خون توسط قلب، جریان خون به صورت پالسی در نظر گرفته شده است. تبدیل مختصات مناسب بر روی شرایط مرزی، شرایط اولیه و معادلات حاکم بر جریان اعمال شده است، تا رگ کسینوسی شکل به رگ مستطیل شکل تبدیل شود. با استفاده از روش تفاضل محدود، فرم گسسته‌سازی شده شرایط مرزی، شرایط اولیه و معادلات مربوط ارائه شده است. پروفیل سرعت برای جریان خون بدست آمده است. مشخصه‌های دینامیکی جریان خون از جمله دبی حجمی و مقاومت در برابر جریان از روی پروفیل سرعت حاصل شده است و در مورد تأثیر میزان و زاویه گرفتگی بر روی آن‌ها بحث شده است. دبی حجمی کمترین مقدار و مقاومت بیشترین مقدار را در گرفتگی‌های منبسط شونده دارند.

A non-Newtonian model of pulsatile blood flow through elastic artery with overlapping stenosis

Ahmad Reza Haghighi*, Soraya Asadi Chalak

Department of Mathematics, Urmia University of Technology, Urmia, Iran

* P.O.B. 57155419 Urmia , Iran, ah.haghighi@uut.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper

Received 23 November 2015

Accepted 04 February 2016

Available Online 14 March 2016

Keywords:

Sisko fluid

Finite difference scheme

Pulsatile blood flow

Overlapping stenosis

ABSTRACT

In this paper a mathematical model of pulsatile, unsteady and non-Newtonian blood flow through elastic tapered artery with overlapping stenosis is proposed. The blood flow has been assumed to be non-linear, fully developed, laminar, axisymmetric, two-dimensional. The non-Newtonian model chosen is characterized by Sisko model to describe the rheology of blood. The artery has been assumed to be elastic and time-dependent stenosis is considered. Because blood flow depends on the pumping action of the heart, the blood flow has been assumed pulsate. The stenosed artery is changed to a rectangular and rigid artery using a radial coordinate transformation on the continuity and the nonlinear momentum equations, and boundary conditions. The discretization of the continuity and the non-linear momentum equations and boundary conditions is obtained by finite difference scheme. The radial and axial velocity profiles are obtained and the blood flow characteristics such as resistive impedances and volumetric flow rate and the severity of the stenosis are discussed. The volumetric flow rate is minimum in the case of converging tapered arteries and the resistive impedance is maximum in the case of converging tapered arteries by effect of tapering angle.

1- مقدمه

تحقیقات نشان داده است که جریان خون در طول رگ گرفته شده مشکلات جدی فیزیولوژیکی در انسان ایجاد می‌کند، که منجر به نقص در عملکرد سیستم قلبی- عروقی می‌شود. گرفتگی رگ مانع حرکت طبیعی جریان خون می‌شود. تعدادی از تلاش‌های نظری، محاسباتی و تجربی در این زمینه توسط محققان برای درک و آنالیز جریان خون در منطقه گرفتگی صورت گرفته است، اما هنوز یک فرضیه قابل قبول در این زمینه به دست نیامده است [1].

به طور کلی پذیرفته شده است زمانی که آهنگ برشی خون کمتر از $100\frac{1}{s}$ می‌باشد، رفتار رئولوژیکی خون به صورت نیوتنی فرض می‌شود، چنین وضعیتی در رگ‌های بزرگ رخ می‌دهد. اما در رگ‌های کوچک، خون از اصل نیوتنی پیروی نمی‌کند، بنابراین نمی‌تواند به عنوان سیال نیوتنی مدل‌بندی شود. رگ‌های خون در بدن انسان ترکیبی از سلول‌های قرمز خون، سلول‌های سفید خون و پلاکت‌ها است و جریان آن به طور معمول جریان پالسی غیرنیوتنی در مجرای الاستیک است. مشاهده شده است که جریان خون با انقباض رگ، مختل می‌شود که باعث ناهنجاری در گردش خون می‌شود، تجمع مواد چربی در رگ‌های خونی باعث انسداد نسبی می‌شود که به عنوان تنگی شناخته می‌شود. این انسداد باعث سفت و سخت شدن دیواره رگ می‌شود که ممکن است حجم خون عبوری از طریق رگ را کاهش دهد.

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:

A. R. Haghighi, S. Asadi Chalak, A non-Newtonian model of pulsatile blood flow through elastic artery with overlapping stenosis, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 3, pp. 232-238, 2016 (in Persian)

بر اساس یافته‌های [2] پس از تشکیل انسداد، جریان خون به طور قابل توجهی منحرف می‌شود که منجر به پیشرفت بیماری‌های قلبی- عروقی مانند حمله قلبی و سکته مغزی می‌شود. بر اساس آمار ارائه شده در سال 1383 حدود 39 درصد از کل مرگ و میرها در ایران بیماری‌های قلبی- عروقی است [3].

یانگ از آغازگران مطالعه جریان خون در میان رگ گرفته شده می‌باشد، پایه تحقیقات او بر این فرض بوده که گرفتگی رگ خفیف باشد، وی جریان خون را به صورت سیال نیوتنی و لایه‌ای در طول لوله استوانه‌ای که دچار تنگی متقارن محور شده در نظر گرفت. معادلات ناویراستوکس بر اساس مدل کراس مدل‌بندی شده و تأثیر رشد گرفتگی بر توزیع فشار، تنش برشی دیواره و پیامدهای زیستی آن‌ها بحث شده است [4]. لی و فانگ با هدف کمک به درک بیماری آتروسکلروز جریان خون در یک استوانه با گرفتگی فرض شده با استفاده از مختصات استوانه‌ای بررسی کردند. در این مطالعه نتایج عددی برای توزیع فشار، سرعت، تنش برشی در اعداد رینولدز بین 0-25 بدست آمده است. آن‌ها به این نتیجه رسیده‌اند که انتخاب نوع هندسه و عدد رینولدز مناسب به طور چشم‌گیری نتایج را تحت تأثیر قرار می‌دهد [5]. مورگان و یانگ جریان سیال نیوتنی در طول رگ گرفته شده را به صورت متقارن محور در نظر گرفتند. در حل مسأله هم شدت گرفتگی خفیف و هم شدت گرفتگی شدید برای اعداد رینولدز پایین بررسی شده‌است. نتایج برای توزیع سرعت، افت فشار و تنش برشی دیواره به دست آمده است، و دلیل این تغییرات به خاطر گرفتگی ذکر شده است. نتایج به دست آمده با نتایج تحقیقات قبلی توافق خوبی داشته است [6]. آزوما و فوکوشیما جریان خون را به صورت نیوتنی و پایا در طول رگ گرفته شده را بررسی کردند. هندسه مفروض را هم به صورت متقارن محور و هم به صورت غیرمتقارن و جریان خون را در مدل‌های مختلف رگ‌های خونی تنگ شده مورد مطالعه قرار دادند. در این کار در هر دو مدل مورد بررسی بحث بیشتر روی تأثیر اعداد رینولدز و شدت تنگی در شکل گیری و آغاز بیماری آتروسکلروز می‌باشد [7]. یانق و همکارانش، مطالعات آزوما و فوکوشیما را گسترش دادند و مدل خاصی را برای کل تنگی ایجاد شده مورد بحث قرار داده و تأثیر یک داروی گشاد کننده رگ را بررسی کردند [8]. لیو و همکاران جریان سیال نیوتنی تراکم ناپذیر لایه‌ای را در طول رگ گرفته شده مورد بررسی قرار دادند. هندسه مفروض آن‌ها مستقل از زمان و رگ مفروض به صورت مخروطی شکل، غیرالاستیک و متقارن محور بود. معادلات حاکم بر جریان خون در این مقاله، به صورت عددی و با استفاده از روش تفاضل متناهی حل شده است. آن‌ها خاطرنشان کردند که تنش برشی بالا در دیواره ممکن است به جداره عروق آسیب برساند و باعث تجمع پلاکت و در نهایت موجب تشکیل لخته خون می‌شود، بنابراین با توجه به اهمیت تنش برشی در بیماری آتروسکلروز، به بررسی آن در حالات مختلف پرداختند [9]. لایک ومخوپادهیای جریان خون دو بعدی را به صورت سیال نیوتنی تراکم ناپذیر در نظر گرفتند. هندسه به صورت مستقل از زمان و جریان به صورت لایه‌ای و کاملا گسترش یافته فرض شده بود. معادلات حاکم بر این مقاله به صورت عددی حل شده‌اند و در حل عددی از روش تفاضل متناهی استفاده شده است. همچنین به مطالعه مشخصات فیزیولوژیکی جریان خون از جمله تنش برشی دیواره و پروفیل سرعت پرداختند [10].

در تمام مطالعات بالا رئولوژی خون به صورت سیال نیوتنی توصیف شده است. در طول این دوره از زمان، محققان طبق مشاهدات تجربی دریافتند که خون خاصیت غیر نیوتنی مانند تیکسوتروپی، ویسکوالاستیک و تنش تسلیم دارد [11،12]. چو و کنسی به این موضوع اشاره کردند که در رگ‌های بزرگ دامنه آهنگ برشی سریع و آنی در یک چرخه قلبی تقریبا از 0 تا $100\ \frac{1}{s}$ است. بنابراین مدت زمان برای یک دوره قلبی به این صورت است که اگر $\delta < 10^{-2}\frac{1}{s}$ آهنگ برشی پایین و اگر $10^{-2} < \delta < 10^{-3}$ آهنگ برش معمولی و اگر $\delta > 10^{-3}\frac{1}{s}$ آهنگ برشی بالا است [13-15]. جریان خون در رگ‌های بزرگ در ارتباط با ویژگی‌های رئولوژی خون و شرایط فیزیولوژیکی توسط یلماز و همکارانش در [16] ارائه شده است. مندل جریان سیال را به صورت ناپایدار، لایه‌ای و کاملا گسترش یافته و رگ گرفته شده را به صورت مخروطی و هندسه را وابسته به زمان در نظر گرفت. معادلات حاکم با استفاده از مدل پاورلاو تعمیم یافته مدل‌سازی شده و با استفاده از روش عددی تفاضل متناهی حل شد، و مشخصه‌های اصلی جریان از جمله پروفیل سرعت، دبی حجمی و تنش برشی دیواره را به دست آوردند [17].

حقیقی و شهبازی‌اصل [18] شبیه‌سازی یک مدل دولایه‌ای از جریان خون غیردائم در طول سرخرگ گرفته شده با استفاده از روش تفاضل محدود انجام دادند که در آن نوع گرفتگی هندسه نسبت به جهت محوری غیر متقارن و نسبت به جهت شعاعی متقارن در نظر گرفتند. حقیقی و شهبازی‌اصل در مطالعات بعدی خود [19] جریان خون پالسی دو بعدی با استفاده از سیال میکروپلار در میان سرخرگ گرفته شده را بررسی کردند. برای تبدیل دیواره سرخرگ مفروض به صورت غیرالاستیک و ثابت از تبدیل مختصات مناسب استفاده کردند. هم‌چنین مشخصه های دینامیکی جریان خون از جمله پروفیل سرعت، دبی حجمی و مقاومت در برابر جریان را به‌دست آوردند.

معمولا گرفتگی‌های متوالی در رگ‌های فمورال و ریوی اتفاق می‌افتد بنابراین مطالعه خواص دینامیکی جریان خون در گرفتگی‌های متوالی نسبت به تک گرفتگی‌ها مشکل‌تر و حادتر است [20]. شکی نیست که رگ‌های پستانداران در حالت طبیعی به صورت مخروطی می‌باشد [21]. در این تحقیق هندسه به صورت وابسته به زمان با گرفتگی مخروطی شکل و متوالی در نظر گرفته شده است. به دلیل تولید گرادیان فشار ضربانی خون توسط قلب، جریان خون در این تحقیق به صورت پالسی فرض شده است.

مدل سیال سیسکو برای توصیف مناطقی با آهنگ برشی بالا و میانی مناسب می‌باشد، این مدل می‌تواند بسیاری از ویژگی‌های معمولی از جریان نیوتنی یا غیرنیوتنی با انتخاب‌های مختلف خواص مواد نشان دهد. بررسی‌های انجام شده در این زمینه نشان می‌دهد که در تعداد محدودی از مطالعات، جریان خون در میان رگ گرفته شده توسط سیال سیسکو نشان داده شده است [22]. در مطالعه حاضر نیز از مدل سیال سیسکو استفاده شده است.

2- فرمول‌بندی مسأله

2-1- هندسه گرفتگی

رگ گرفته شده به صورت لوله استوانه‌ای با سطح مقطع مدور در نظر گرفته می‌شود که جریان خون گذرنده از آن به صورت سیال غیرنیوتنی است. سیستم مختصات استوانه‌ای (r, θ, z) را که به ترتیب بیانگر شعاع، زاویه و مختصات طولی نقطه در راستای محور رگ را نشان می‌دهد. هندسه وابسته به زمان رگ گرفته شده به صورت رابطه (1) بیان می‌شود (شکل1) [20،23،24] .

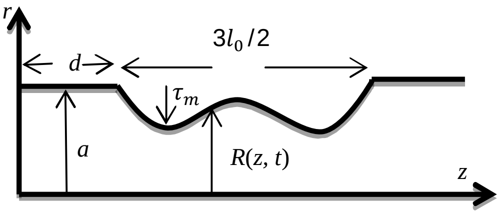

Fig. 1 Geometry of the stenosed artery

شکل 1 هندسه رگ گرفته شده

$$R(z,t) = \begin{cases} [(mz+1) - \frac{\tau_m \cos(\theta)(z-d)}{l_0}\{11 - \frac{94(z-d)}{3l_0} + \frac{32(z-d)^2}{l_0^2} - \frac{32(z-d)^3}{3l_0^3}\}]a_1(t) & , d \le z \le d + \frac{3}{2}l_0 \\ (mz+1)a_1(t), & o.w \end{cases} \quad (1)$$

که در آن $R(z,t)$ شعاع رگ گرفته شده، φ زاویه مخروطی، $d, \frac{3l_0}{2}, L$ به ترتیب طول رگ مورد نظر، طول گرفتگی و طول ناحیه بالادست، $m = \tan\varphi$ شیب رگ گرفته شده و τ_m حداکثر گرفتگی می‌باشد. پارامتر وابسته به زمان با $a_1(t) = 1 + k_r\cos(\omega t - \varphi)$ [27-24،25] به دست می‌آید که در آن φ, k_r به ترتیب بیانگر پارامتر نوسان و زاویه فاز می‌باشد.

در مدل ارائه شده $\varphi < 0$ نشانگر رگ مخروطی منقبض شونده، $\varphi = 0$ نشانگر رگ غیرمخروطی و $\varphi > 0$ نشانگر رگ مخروطی منبسط شونده می‌باشد.

2-2-معادلات حاکم بر جریان خون

جریان خون را به صورت پالسی، غیرخطی، لایه‌ای، ناپایا، تراکم‌ناپذیر و کاملا گسترش یافته فرض شده است. معادلات حاکم بر سیال سیسکو به صورت (2) است [28].

$$\nabla \cdot u = 0 \quad (2)$$

$$\rho \frac{\mathrm{D}u}{\mathrm{D}t} = \nabla \cdot T \quad (3)$$

که در آن u سرعت سیال، ρ چگالی، T تنش کوشی، $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}$ مشتق اساسی ماده است که به صورت رابطه (4) تعریف می‌شود:

$$\frac{\mathrm{D}(\cdot)}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} + (u \cdot \nabla) \quad (4)$$

تانسور تنش کوشی از مدل سیسکو به صورت (5) داده شده است [29].

$$T = -pI + S \quad (5)$$

که p فشار، I تانسور همانی، S تانسور فشار اضافی که به صورت (6) داریم:

$$S = [\bar{a} + \bar{b}(|\sqrt{\pi}|)^{n-1}]A_1 \quad (6)$$

در فرمول بالا $\bar{a}$ ارزش مجانبی ویسکوزیته در آهنگ برشی بسیار بالا و $\bar{b}$ درجه غلظت ثابت پارامتر می‌باشد، که با فرض $n = 1$ یا $\bar{b} = 0$ مدل سیال تبدیل به مدل نیوتنی و اگر $\bar{a} = 0$، مدل سیال تبدیل به مدل پاورلاو می‌شود. علاوه بر این A_1 تانسور فرست ریون اریکسون است که عبارت A_1 به صورت (7) داده می‌شود.

$$A_1 = L + L^{\mathrm{T}} \quad (7)$$

که

$$L = \nabla u \quad (8)$$

و

$$\pi = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(A_1^2) \quad (9)$$

از آنجایی که معادلات برای حالت متقارن محور می‌باشد، مؤلفه‌های سرعت در راستای θ برابر صفر می‌شوند، معادله پیوستگی و معادله ممنتوم حاکم بر جریان غیرنیوتنی مفروض را در سیستم مختصات استوانه‌ای به صورت روابط (10) تا (12) داریم [28]:

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (10)$$

$$\rho(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial r} + w\frac{\partial u}{\partial z}) = -\frac{\partial p}{\partial r} - (\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rS_{rr}) + \frac{\partial}{\partial z}(S_{rz})) \quad (11)$$

$$\rho(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial r} + w\frac{\partial w}{\partial z}) = -\frac{\partial p}{\partial z} - (\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rS_{rz}) + \frac{\partial}{\partial z}(S_{zz})) \quad (12)$$

که در آن:

$$S_{rr} = -2[\bar{a} + \bar{b}\{|[(\frac{\partial u}{\partial r})^2 + (\frac{u}{r})^2 + (\frac{\partial w}{\partial z})^2 + (\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r})^2]^{\frac{1}{2}}|^{n-1}\}](\frac{\partial u}{\partial r}) \quad (13)$$

$$S_{zz} = -2[\bar{a} + \bar{b}\{|[(\frac{\partial u}{\partial r})^2 + (\frac{u}{r})^2 + (\frac{\partial w}{\partial z})^2 + (\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r})^2]^{\frac{1}{2}}|^{n-1}\}](\frac{\partial w}{\partial z}) \quad (14)$$

$$S_{rz} = -[\bar{a} + \bar{b}\{|[(\frac{\partial u}{\partial r})^2 + (\frac{u}{r})^2 + (\frac{\partial w}{\partial z})^2 + (\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r})^2]^{\frac{1}{2}}|^{n-1}\}](\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}) \quad (15)$$

گرادیان فشار $\frac{\partial p}{\partial z}$ در معادلات بالا برای بدن انسان به صورت $-\frac{\partial p}{\partial z} = A_0 + A_1\cos\omega t$ فرض می‌شود که در آن $\omega = 2pf_p$، f_p فرکانس پالسی، A_0 دامنه ثابت گرادیان فشار و A_1 دامنه پالسی هست که در فشار سیستول و دیاستول ظاهر می‌شود [28،27،17و30] .

شرایط مرزی و شرایط اولیه را به صورت زیر داریم [28،29].

مرکز رگ $\quad u(r,z,t) = 0, \ \frac{\partial w(r,z,t)}{\partial r} = 0, S_{rz} = 0$

دیواره رگ $\quad u(r,z,t) = \frac{\partial R}{\partial t}, \ \ w(r,z,t) = 0$

$$u(r,z,0) = w(r,z,0) = 0$$

به منظور بی‌حرکت و ثابت کردن دیواره رگ الاستیک، نگاشت $\xi = \frac{r}{R(z,t)}$ را روی معادلات حاکم بر جریان خون و شرایط مرزی و اولیه اعمال می‌کنیم [19،11-30،17و31] . در نتیجه رگ کسینوسی شکل و الاستیک به رگ غیرالاستیک مستطیل شکل تبدیل می‌شود. نتیجه اعمال این نگاشت روی معادلات حاکم و شرایط مرزی و اولیه به صورت روابط (16) تا (19) خواهد بود.

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \left\{\frac{\xi}{R}\frac{\partial R}{\partial t} - \frac{u}{R} + \frac{\xi}{R}\frac{\partial R}{\partial z}w\right\}\frac{\partial w}{\partial \xi} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - w\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{\rho}\left\{\frac{1}{\xi R}T_{\xi z} + \frac{1}{R}\frac{\partial T_{\xi z}}{\partial \xi} - \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} + \frac{\xi}{R}\frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial T_{zz}}{\partial \xi}\right\} \quad (16)$$

$$\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{u}{R\xi} + \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\xi}{R}\frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial \xi} = 0 \quad (17)$$

$$S_{\xi z} = -[\bar{a} + \bar{b}\{|[\left(\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{u}{\xi R}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\xi}{R}\frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\xi}{R}\frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)]^{1/2}|^{n-1}\}] \times \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\xi}{R}\frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial \xi}\right) \quad (18)$$

$$S_{zz} = -2[\bar{a} + \bar{b}\{|[\left(\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{u}{\xi R}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\xi}{R}\frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\xi}{R}\frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)]^{1/2}|^{n-1}\}] \times \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\xi}{R}\frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial \xi}\right) \quad (19)$$

$$u(r,z,t) = 0,\quad \frac{\partial w(r,z,t)}{\partial r} = 0, S_{rz} = 0$$

$$u(r,z,t) = \frac{\partial R}{\partial t},\quad w(r,z,t) = 0$$

$$u(r,z,0) = w(r,z,0) = 0$$

3-حل عددی معادلات حاکم بر جریان خون

3-1- انتگرال‌گیری از معادله پیوستگی

هدف این بخش به دست آوردن سرعت شعاعی سیال می‌باشد. به منظور به دست آوردن سرعت شعاعی، معادله پیوستگی (17) را در ξR ضرب کرده، نسبت به ξ در بازه 0 تا ξ انتگرال گرفته می‌شود. با استفاده از تکنیک انتگرال‌گیری جزء به جزء رابطه (20) بدست می‌آید [28].

$$u(\xi,z,t) = \xi\frac{\partial R}{\partial z}w - \frac{R}{\xi}\int_0^{\xi}\xi\frac{\partial w}{\partial z}\mathrm{d}\xi - \frac{2}{\xi}\frac{\partial R}{\partial z}\int_0^{\xi}\xi w\mathrm{d}\xi \quad (20)$$

با اعمال شرط مرزی دیواره رگ رابطه (20) به شکل (21) در می‌آید.

$$-\int_0^1\xi\frac{\partial w}{\partial \xi}d\xi = \int_0^1\xi\left[\frac{2}{R}\frac{\partial R}{\partial z}w + \frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial t}f(\xi)\right]\mathrm{d}\xi \quad (21)$$

تابع $f(\xi)$ را تابع دلخواهی در نظر می‌گیریم به طوری که در شرط $\int_0^{\xi}\xi f(\xi)\mathrm{d}\xi = 1$ صدق کند. با توجه به دلخواه بودن $f(\xi)$ آن را به صورت $f(\xi) = -4(\xi^2 - 1)$ تعریف می‌کنیم، و در رابطه (21) جایگذاری می‌کنیم. بنابراین با توجه به برابری و هم ارزی انتگرال در دو طرف معادله داریم:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{2}{R}\frac{\partial R}{\partial z}w + \frac{4}{R}(\xi^2 - 1)\frac{\partial R}{\partial t} \quad (22)$$

در نهایت با جایگذاری (21) در (22) رابطه به دست آمده برای سرعت شعاعی به صورت (23) خواهد بود.

$$u(\xi,z,t) = \xi\left[\frac{\partial R}{\partial z}w + \frac{\partial R}{\partial t}(2 - \xi^2)\right] \quad (23)$$

3-2- روش تفاضل محدود

برای محاسبه پروفیل سرعت محوری از روش تفاضل محدود استفاده می‌شود. به منظور رسیدن به دقت بهتر کلیه مشتق‌های مکانی با استفاده از فرمول تقریب تفاضل مرکزی و به منظور رسیدن به یک روش صریح پیشرو در زمان کلیه مشتق‌های زمانی با استفاده از فرمول تقریب پیشرو تقریب زده می‌شود. فرمول تقریب تفاضل مکانی، به همراه فرمول تقریب تفاضل پیشرو زمانی مربوط به $w(\xi,z,t)$ به صورت زیر است.

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} = \frac{w_{i,j+1}^k - w_{i,j-1}^k}{2\Delta\xi} + \mathrm{o}(h^2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{w_{i+1,j}^k - w_{i-1,j}^k}{2\Delta z} + \mathrm{o}(h^2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{w_{i,j}^{k+1} - w_{i,j}^k}{\Delta t} + \mathrm{o}(h)$$

$\Delta\xi$ طول گام محوری، Δz طول گام شعاعی، Δt طول گام زمانی می‌باشد:

$$\xi_j = (j-1)\Delta\xi \qquad j = 1,2,\dots N+1, \qquad \xi_{(N+1)} = 1$$
$$z_i = (i-1)\Delta z \qquad i = 1,2,\dots M+1$$
$$t_k = (k-1)\Delta t \qquad k = 1,2,\dots$$

با استفاده از روش تفاضل متناهی ارایه شده، فرم گسسته سازی معادلات (16) تا (19) را به صورت روابط (24) تا (26) داریم:

$$w_{i,j}^{k+1} = w_{i,j}^k + \Delta t[-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)^{k+1} + \{\frac{\xi_j}{R_i^k}\left(\frac{\partial R}{\partial t}\right)_i^k - \frac{u_{i,j}^k}{R_i^k} + \frac{\xi_j}{R_i^k}\left(\frac{\partial R}{\partial z}\right)_i^k w_{i,j}^k\} \times \left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)_{i,j}^k - w_{i,j}^k\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_{i,j}^k - \frac{1}{\rho}\{\frac{1}{\xi_j R_i^k}\left(T_{\xi z}\right)_{i,j}^k + \frac{1}{R_i^k}\left[\left(T_{\xi z}\right)_{f\xi}\right]_{i,j}^k - \left[\left(T_{zz}\right)_{fz}\right]_{i,j}^k + \frac{\xi_j}{R_i^k}\left(\frac{\partial R}{\partial t}\right)_i^k[(T_{zz})_{f\xi}{}_{i,j}^k\}] \quad (24)$$

$$[(S_{zz})_{fz}]_{i,j}^k = -2[\bar{a} + \bar{b}\{|[\left(\frac{1}{R_i^k}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)_{i,j}^k\right)^2 + \left(\frac{u_{i,j}^k}{\xi_j R_i^k}\right)^2 + \left(\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_{i,j}^k - \frac{\xi_j}{R_i^k}\left(\frac{\partial R}{\partial z}\right)_i^k\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)_{i,j}^k\right)^2 + (\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{i,j}^k - \frac{\xi_j}{R_i^k}\left(\frac{\partial R}{\partial z}\right)_i^k\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)_{i,j}^k + \frac{1}{R_i^k}\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)_{i,j}^k)^2]^{\frac{1}{2}}|^{n-1}\}] \times [\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_{i,j}^k - \frac{\xi_j}{R_i^k}\left(\frac{\partial R}{\partial z}\right)_i^k\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)_{i,j}^k] \quad (25)$$

$$[\left(S_{\xi z}\right)_{fz}]_{i,j}^k = -[\bar{a} + \bar{b}\{|[\left(\frac{1}{R_i^k}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)_{i,j}^k\right)^2 + \left(\frac{u_{i,j}^k}{\xi_j R_i^k}\right)^2 + \left(\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_{i,j}^k - \frac{\xi_j}{R_i^k}\left(\frac{\partial R}{\partial z}\right)_i^k\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)_{i,j}^k\right)^2 + (\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{i,j}^k - \frac{\xi_j}{R_i^k}\left(\frac{\partial R}{\partial z}\right)_i^k\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)_{i,j}^k + \frac{1}{R_i^k}\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)_{i,j}^k)^2]^{\frac{1}{2}}|^{n-1}\}] \times [\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{i,j}^k - \frac{\xi_j}{R_i^k}\left(\frac{\partial R}{\partial z}\right)_i^k\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)_{i,j}^k + \frac{1}{R_i^k}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)_{i,j}^k] \quad (26)$$

نتیجه اعمال تقریب تفاضلات متناهی روی شرایط اولیه و مرزی به صورت روابط زیر خواهد بود.

$$u_{i,j}^k = 0,\quad w_{i,1}^k = w_{i,2}^k,\quad (S_{\xi z})_{i,1}^k = 0$$
$$w_{i,N+1}^k = 0,\quad , u_{i,1}^k = (\frac{\partial R}{\partial t})_i^k$$
$$u_{i,j}^1 = w_{i,j}^1 = 0$$
$$u_{i,j}^1 = u_{i,j}^2,\ u_{i,j}^{z_{i+1}} = u_{i,j}^{z_i}$$
$$w_{i,j}^1 = w_{i,j}^2,\ w_{i,j}^{z_{i+1}} = w_{i,j}^{z_i}$$

بعد از محاسبه پروفیل سرعت، مقادیر مربوط به دبی حجمی Q و مقاومت در برابر جریان Λ به صورت روابط (27) و (28) به دست می‌آیند [28،32].

$$Q_i^k = 2\pi(R_i^k)^2\int_0^1\xi_j(w)_{i,j}^k\mathrm{d}\xi_j \quad (27)$$

$$\Lambda_i^k = \frac{|L(\frac{\partial p}{\partial z})^k|}{Q_i^k} \quad (28)$$

4-بحث ها و نتایج عددی

به منظور شبیه‌سازی عددی و ارائه نتایج گرافیکی از پارامترهای زیر استفاده شده است [18،28].

$$a = 0.8\mathrm{mm}, n = 0.639,\ \rho = 1.06\times10^3\mathrm{kgm}^{-3},\ f_p = 1.2\mathrm{Hz}$$
$$A_0 = 100\mathrm{kgm}^{-2}\mathrm{s}^{-2},\ A_1 = 0.2A_0,\ \Delta\xi = 0.025,\ \Delta z = 0.1$$
$$\Delta t = 0.0001, \tau_m = 0.4a$$

در واقع پارامترهای انتخاب شده در این بخش به جریان خون در رگ‌های گرفته شده مربوط است. دامنه محاسباتی در طول رگی متناهی با طول L = 30mm محدود شده است. برای این دامنه، جواب‌ها از طریق ایجاد شبکه با اندازه 40×300 محاسبه می‌شوند. محاسبات نشان می‌دهد که اگر ما اندازه گام زمانی را کاهش دهیم، فقط شبیه‌سازی زمان بیشتری را می‌گیرد. قبل از بررسی تأثیر پارامترهای مختلف روی مشخصه‌های جریان، به مقایسه نمودار

سرعت محوری ارئه شده در نقطه بحرانی گرفتگی اول و میزان گرفتگی $\tau_m = 0.4a$ با نتایج موجود می‌پردازیم، تا از این طریق کارایی مدل ارائه شده را به اثبات برسانیم. همان‌طور که در بخش (2-2) اشاره شده سیال پاورلاو حالت خاصی از سیال سیسکو می‌باشد. در واقع مدل سیال سیسکو استفاده شده در این مطالعه مدل پاورلاو تعمیم یافته می‌باشد و این مدل مناسب ترین انتخاب برای توصیف خواص خون در آهنگ برشی بالا در مقایسه با سایر سیالات غیر نیوتنی است [32]. بنابراین بهترین مقایسه را می‌توان با کار مندل [17] و اسمعیل و همکارانش [30] انجام داد. نتایج در شکل 2 نشان داده شده است. واضح است که نتایج تحقیقات در زمان $t = 0.45s$ توافق خوبی با هم دارند.

در شکل 3 سرعت شعاعی جریان خون در رگ گرفته شده برای مقادیر مختلف از زوایای مخروطی در نقطه بحرانی بین دو گرفتگی، $z = 14mm$ و زمان $t = 0.45s$ مورد مقایسه قرار گرفته است. با توجه به شکل 3 سرعت شعاعی برای رگ مخروطی منبسط شونده در مقایسه با سرعت رگ مخروطی منقبض شونده مقدار کمتری دارد و منحنی رگ غیرمخروطی در بین آن‌ها قرار دارد. همچنین شکل دربردارنده سرعت شعاعی برای رگ غیرالاستیک می‌باشد. سرعت شعاعی در محور و دیواره رگ غیرالاستیک با توجه به شرط عدم لغزش برابر صفر می‌باشد و مقدار کمتری نسبت به مقدار سرعت شعاعی در رگ الاستیک دارد.

شکل 4 به منظور بررسی رفتار سرعت شعاعی در یک دوره قلبی، ارائه شده است. یک دوره کامل قلبی شامل دوره سیستول (از 0.1 ثانیه تا 0.3 ثانیه) و دوره دیاستول (از 0.5 تا 0.8 ثانیه) می‌باشد. این شکل نمودار سرعت شعاعی برای سیال سیسکو با شدت گرفتگی $\tau_m = 0.4a$ در

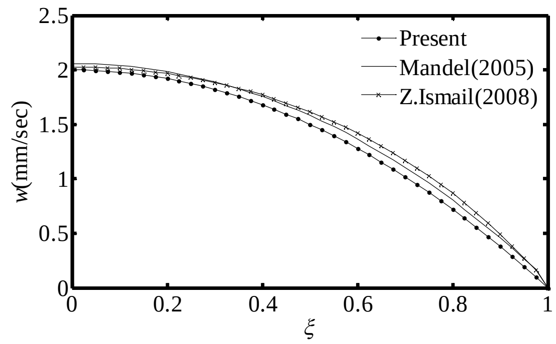

Fig. 2 Comparison of the axial velocity profile for non taperd artery with [16], [29]

شکل 2 مقایسه سرعت محوری برای روش عددی ارائه شده با نتایج [29]، [16]

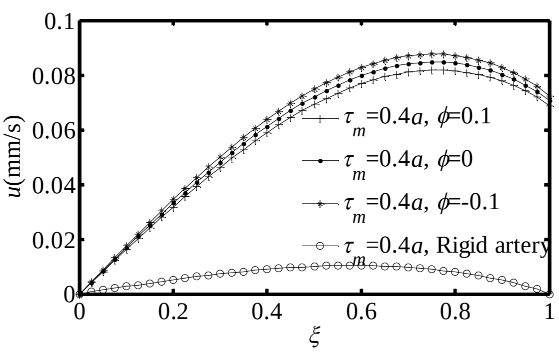

Fig. 3 Radial velocity profiles for different tapering angle

شکل 3 سرعت شعاعی جریان خون برای زوایای مختلف مخروطی

زمان‌های 0.1 ، 0.3، 0.6 و 0.7 برای نقطه بحرانی بین دو گرفتگی، $z = 14mm$ را نشان می‌دهد. مقدار تمامی نمودارها در محور مرکزی رگ، با توجه به شرط مرزی اعمال شده، برابر صفر می‌باشد. در دوره سیستول (از 0.1 ثانیه تا 0.3 ثانیه) با توجه به گرادیان فشار وارده ناشی از پمپاژ طبیعی قلب، تمامی نمودارهای سرعت شعاعی در ناحیه مثبت محور مختصات قرار دارد. در دوره دیاستول (از0.6 تا 0.7 ثانیه) تمامی نمودارهای سرعت شعاعی به ناحیه منفی محور مختصات انتقال می‌یابد. از زمان 0.1 ثانیه تا 0.3 ثانیه سرعت در حال کاهش می‌باشد. با شروع دوره دیاستول از زمان 0.6 ثانیه تا 0.7 ثانیه سرعت شعاعی افزایش می‌یابد.

نمودار سرعت شعاعی در نقطه بحرانی گرفتگی اول، $z = 10mm$ و نقطه بحرانی گرفتگی دوم، $z = 19mm$ و در زمان $t = 0.45s$ برای میزان گرفتگی‌های متفاوت در شکل 5 ارائه شده است. با توجه به شکل 5 با افزایش گرفتگی، سرعت شعاعی کاهش می‌یابد. همه منحنی‌های سرعت از صفر شروع شده و به یک مقدار ثابت در دیواره می‌رسد که این امر به خاطر محرک بودن دیواره است.

درشکل 6 رفتار دبی حجمی در رگ گرفته شده برای مقادیر مختلف از زوایای مخروطی مورد مقایسه قرار گرفته است. نمودار مربوط به دبی حجمی برای گرفتگی $\tau_m = 0.4a$ و در زمان $t = 45s$ رسم شده است. با توجه به شکل دبی حجمی برای رگ مخروطی منبسط شونده در مقایسه با دبی حجمی رگ مخروطی منقبض شونده مقدار بالاتری دارد. همچنین شکل 6 نشان می‌دهد که دبی حجمی رفتاری متناظر با هندسه گرفتگی دارد.

شکل 7 دربردارنده دبی حجمی جریان خون در رگ غیرالاستیک و رگ گرفته شده مخروطی منقبض شونده برای میزان گرفتگی‌های مختلف در

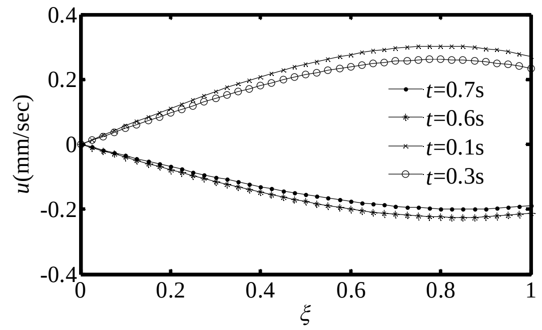

Fig. 4 Radial velocity profiles for different time

شکل 4 سرعت شعاعی جریان خون در زمان‌های مختلف

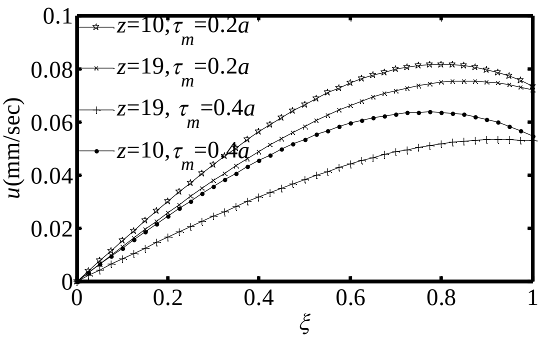

Fig. 5 Radial velocity profiles at different stenosis size

شکل 5 سرعت شعاعی جریان خون در میزان گرفتگی‌های مختلف

زمان t = 45s می‌باشد. در واقع با افزایش میزان گرفتگی دبی حجمی کاهش پیدا کرده است. با توجه به شکل دبی حجمی برای رگ غیر الاستیک در مقایسه با رگ الاستیک با همان میزان تنگی، مقدار بالاتری دارد.

شکل 8 دربردارنده مقاومت در برابر جریان خون در رگ گرفته شده برای زوایای مختلف مخروطی در نقطه بحرانی بین دو گرفتگی، z = 14mm و در زمان t = 3s می‌باشد. روشن است که رفتار غیردائم جریان، مقاومت در برابر جریان را به طور چشمگیری تحت تأثیر قرار می‌دهد. این مسأله اهمیت فرض غیردائم بودن جریان خون را نشان می‌دهد. همچنین رفتار پالسی جریان خون در دوره‌های قلبی در این شکل قابل مشاهده است.

در شکل 9 رفتار مقاومت در برابر جریان در رگ گرفته شده برای مقادیر مختلف از زوایای مخروطی مورد مقایسه قرار گرفته است. نمودار مربوط به مقاومت در برابر جریان برای گرفتگی $\tau_m = 0.4a$ و در زمان

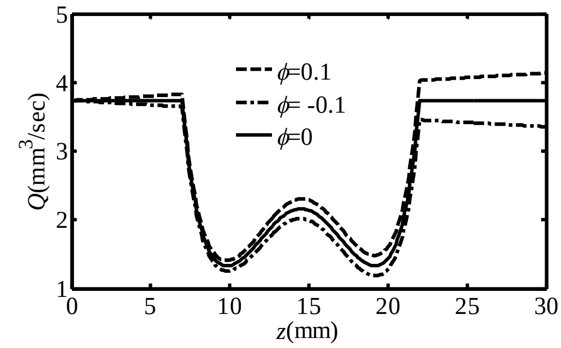

Fig. 6 The volumetric flow for different tapering angle

شکل 6 دبی حجمی جریان خون برای زوایای مختلف مخروطی

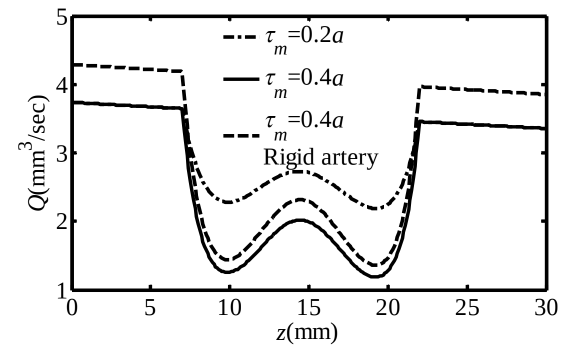

Fig. 7 The volumetric flow for different stenosis size

شکل 7 دبی حجمی جریان خون برای میزان گرفتگی‌های مختلف

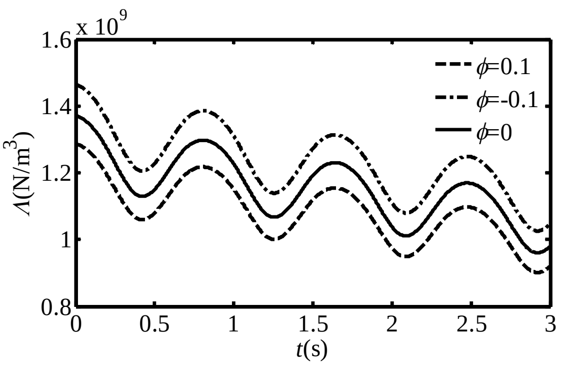

Fig. 8 The resistive impedances rate for different tapering angle

شکل 8 مقاومت در برابر جریان خون برای زوایای مختلف مخروطی

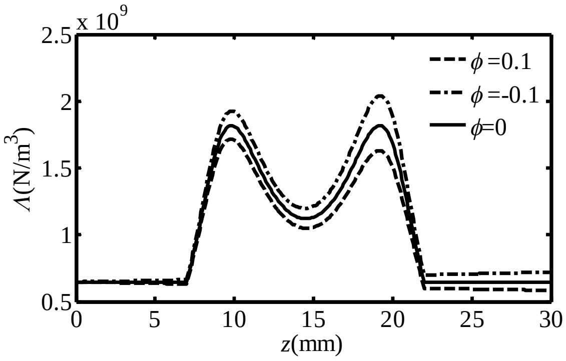

Fig. 9 The resistive impedances for different tapering angle

شکل 9 مقاومت در برابر جریان خون برای زوایای مختلف مخروطی

$t = 0.45$s رسم شده است. با توجه به شکل 10 مقاومت در برابر جریان برای رگ مخروطی منبسط شونده در مقایسه با مقاومت در برابر جریان رگ مخروطی منقبض شونده مقدار پایین‌تری دارد و نمودار مقاومت در برابر جریان رگ غیرمخروطی در بین آن‌ها قرار دارد.

5- نتیجه گیری

در این مقاله جریان سیال غیرنیوتنی در طول رگ گرفته شده مورد بررسی قرار گرفت. جریان خون به صورت دو بعدی، پالسی، ناپایا، متقارن‌محور و کاملا گسترش یافته در نظر گرفته شده است، همچنین رگ مفروض به صورت الاستیک و هندسه به کار رفته به صورت وابسته به زمان، مخروطی شکل و با گرفتگی متوالی فرض شده است. معادلات حاکم بر جریان در حضور گرادیان فشار ضربانی ناشی از پمپاژ قلب، به صورت عددی و با استفاده از روش تفاضل محدود حل شده‌اند. نتایج به دست آمده برای مشخصه‌های اصلی جریان خون مانند سرعت محوری، سرعت شعاعی، دبی حجمی، مقاومت در برابر جریان و تنش برشی به صورت گرافیکی در شکل‌های مختلف ارائه شده‌اند و در مورد تأثیر پارامترهای مختلف مانند میزان گرفتگی، زاویه گرفتگی بر روی این مشخصه‌ها بحث شده است. از جمله نتایج به دست آمده از قرار زیر است. فرض ناپایا بودن جریان خون برای مطالعه خواص جریان خون در طول رگ گرفته شده، یک فرض اساسی می‌باشد و نباید از آن چشم‌پوشی کرد. با افزایش میزان گرفتگی مقدار پارامترهای سرعت شعاعی، مقاومت در برابر جریان افزایش می‌یابد، ولی مقدار دبی‌حجمی کاهش می‌یابد.

6- فهرست علائم

A_0 دامنه ثابت گرادیان $(m^{-2}\,s^{-2})$

A_1 دامنه پالسی $(m^{-2}\,s^{-2})$

$\bar{a}$ ارزش مجانبی ویسکوزیته در آهنگ برشی بالا (kg/m.s)

$\bar{b}$ درجه غلظت ثابت پارامتر $(Pa\,s^n)$

d طول ناحیه بالا دست (mm)

f_p فرکانس پالسی (Hz)

k_r پارامتر نوسان

L طول رگ مورد نظر (mm)

l_0 طول گرفتگی (mm)

p فشار $(kgm^{-1}s^{-2})$

Q دبی حجمی (mm^3 /sec)
r فاصله شعاعی (mm)
R شعاع رگ گرفته شده (mm)
t زمان (sec)
S تانسور فشار
u سرعت شعاعی (mm/sec)
w سرعت محوری (mm/sec)
z فاصله محوری (mm)

علائم یونانی

Δt طول گام زمانی (sec)
Δz طول گام محوری (mm)
$\Delta \xi$ طول گام شعاعی (mm)
Λ مقاومت در برابر جریان (N/m^3)
ρ چگالی (kgm^{-3})
τ_m حداکثر گرفتگی (mm)
θ زاویه فاز (D)

اندیس‌ها

i گام شعاعی
j گام محوری
k گام زمانی

7-مراجع

[1] AR. Haghighi, Mathematical model of the impact of pressure drop on human body, *Selcuk Journal of Applied Mathematics* Vol. 13, No. 1, pp. 35–40 2012.

[2] A. Zaman, N. Ali, M. Sajid, Effects of unsteadiness and non-Newtonian rheology on blood flow through a tapered time-variant stenotic artery, *American Institute of Physics Advances,* Vol. 5, No. 3, pp. 037129, 2015.

[3] A. Deyranlou, H. Niazmand, Y. Mesri, Blood pulsatile effect on LDL mass transport in a multilayered carotid artery with atherosclerotic plaques, Modares Mechanical Engineering , Vol. 14, No. 7, pp. 17-26, 2014. (in Persian فارسی)

[4] D. F. Young, dependent stenosis on flow through a -Effect of a time tube, *Journal of Engineering for Industry,* Vol. 90, No. 2, pp. 248-54, 1968.

[5] J. Lee, Y. Fung, Flow in locally constricred tube at low Reynolds number, *Journal of Applied Mechanica,* Vol. 37, No. 1, pp. 379-16, 1970.

[6] B. E. Morgan, D. F. Young, An integral method for the analysis of flow in arterial stenoses, *Bulletin of Mathematical Biology,* Vol. 36, No. 1, pp. 39-53, 1974.

[7] T. Azuma, T. Fukushima, Flow patterns in stenotic blood vessel models, *Biorheology,* Vol. 13, No. 6, pp. 337-55, 1976.

[8] D. F. Young, N. R. Cholvin, R. L. Kirkeeide, A. C. Roth, Hemodynamics of arterial stenoses at elevated flow rates, *Circulation Research,* Vol. 41, No. 1, pp. 99-107, 1977.

[9] G. T. Liu, X. J. Wang, B. Q. Ai, L. G. Liu, Numerical study of pulsating flow through a tapered artery with stenosis, *Chinese Journal of Physics,* Vol. 42, No. 4, pp. 401-409, 2004.

[10] S. Mukhopadhyay, G. C. Layek, Numerical modeling of a stenosed artery using mathematical model of variable shape, *Applications and Applied Mathematics: An International Journal,* Vol. 3, No. 2, pp. 308-328, 2008.

[11] N. Yamaguchi, Existence of global strong solution to the micropolar fluid system in a bounded domain, *Mathematical Methods in the Applied Sciences,* Vol. 28, No. 13, pp. 1507-1526, 2005.

[12] YI. Cho, KR. Kensey, Effects of the non-Newtonian viscosity of blood on hemodynamics of diiseased arterial flows: *Prat* 1, *Biorheolgy,* Vol. 28, No. 3-4, pp. 241-62, 1991.

[13] D. S. Long, ML. Smith, AR. Pries, K. Ley, ER. Damiano, Microviscometry reveals reduced blood viscosity and altered shear rate and shear stress profiles in microvessels, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America,* Vol. 101, No. 27, pp. 10060-10065, 2004.

[14] WY. Chan, Y. Ding, JY. Tu, Modeling of non-Newtonian blood flow through a stenosed artery incorporating fluid strucrure interaction, *Anziam Journal,* Vol. 47, No. 1, pp. 507-523, 2007.

[15] TA. Crowley, V. Pizziconi, JY.Tu, Isolation of plasma from whole Blood using planar microfilters for lab-on-a-chip applications, *Lab on a Chip,* Vol. 5, No. 9, pp. 922-9, 2005.

[16] F. Yilmaz, MY. Gundogdu, A critical review on blood flow in large arteries: relevance to blood rheology viscosity models and physiologic conditions, *Korea-Australia Rheology Journal,* Vol. 20, No. 4, pp. 197-211, 2008.

[17] PK. Mandel, An unsteady analysis of non-Newtonian blood flow Through tapered arteries with a stenosis, *International Journal of Non-Linear Mechanics,* Vol.40, No. 1, pp.151-64, 2005.

[18] AR. Haghighi, M. Shahbaziasl, Numerical simulation of unsteady blood flow through an elastic artery with a non-symmetric stenosis, *Modares Mechanical Engineering,* Vol. 14, No. 10, pp. 26-34, 2014. (in Persian فارسی)

[19] AR. Haghighi, M. Shahbaziasl, Mathematical modelling of micropolar fluid flow through an overlapping arteries stenosis, *International Journal of Biomathematics,* Vol. 8, No. 04, pp. 1550056, 2015.

[20] PK. Mandel, S. Chakravaty, A nonlinear two-dimensional model of blood flow in an overlapping arterial stenosis subjected to body acceleration, *Mathematical and computer modelling,* Vol. 24, No. 1, pp. 43-58, 1996.

[21] G. Liu, X. Ali B, L. Liu, Numerrical study of pulsating flow through a tapered artery with stenosis, *Chinese Journal of Physics,* Vol. 42, No. 4, pp. 401-409, 2004.

[22] Kh. S. Mekheimer, M. A. El Kot, Mathematical modelling of unsteady flow of a Sisko fluid through an anisotropically tapered elastic arteries with time-variant overlapping stenosis, *Applied Mathematical Modelling,* Vol. 36, No. 11, pp. 5393-5407, 2012.

[23] PK. Mandel, S. Chakravaty, Mathematical modelling of blood flow through an overlapping arterial stenosis, *Mathematical and computer modelling,* Vol. 19, No. 1, pp. 59-70, 1994

[24] K. Mekheimer, M. Elkot, Mathematical modelling of unsteady flow of a Sisko fluid through an anisotropically tapered elastic arteries with time-variant overlapping stenosis, *Applied Mathematical Modelling,* Vol. 36, No. 10, pp. 5393-5407, 2012.

[25] M. Ikbal, S. Chakravaty, K.Wong, J. Mazumdar, P. Mandel, Unsteady response of Non-Newtonian blood flow through a stenosed artery in magnetic field, *Journal of Computational and Applied Mathematics,* Vol. 230, No. 1, pp. 243-259, 2009.

[26] N. Mustapha, N. Amin, S. Chakravarty, P.Mandal, Unsteady magnetohydrodynamic blood flow through irregular multi-stenosed arteries, *Computers in Biology and Medicine,* Vol. 39, No. 10, pp. 43-58, 2009.

[27] D.Sankar, U.Lee, FDM analysis for MHD flow of a non-Newtonian fluid for blood flow in stenosed arteries, *Journal of mechanical science and technology,* Vol. 25, No. 10, pp. 2573-2581, 2001.

[28] N. Ali, A. Zaman, M. Sajid, Unsteady blood flow through a tapered stenotic artery using Sisko model, *Computers & Fluids,* Vol. 101, pp. 42-49, 2014.

[29] Y.Wang, T.Hayat, N.Ali, M.Oberlack, Magnetohydrodynamic peristaltic motion of a Sisko fluid in a symmetric or asymetric channel, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications,* Vol. 387, No. 2-3, pp. 347-62, 2008.

[30] Z. Ismail, I. Abdullah, N. Mustapha, N. Amin, A power-low model of blood flow through a tapered overlapping steenosed artery, *Applied Mathematics and Computation,* Vol. 195, No. 2, pp. 669-680, 2008.

[31] AR. Haghighi, M. Shabaziasl, M. Kiyasatfar, Mathematical modeling of unsteady blood flow through elastic tapered artery with overlapping stenosis, *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering,* Vol. 37, No. 2, pp. 571-578, 2015.

[32] A. zaman, N. Ali, O. Anwarbeg, Numerical study of unsteady blood flow through a vessel using Sisko model, *Engineering Science and Technology, an International Journal,* 2015.