



طراحی بهینه سازه‌های مخروطی و استوانه‌ای ساندویچی فیرینگ ماهواره‌بر با استفاده از الگوریتم ترکیبی

علی مظفری^{1*}، فوزیه مروت²، جعفر روشنیان³، هادی زارع⁴

- 1- استادیار، مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران
 - 2- دانشجوی دکتری، مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران
 - 3- استاد، مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران
 - 4- دانشجوی دکتری، مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی شریف، تهران
- *mozaffari@kntu.ac.ir, 338116765, تهران

چکیده

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 07 آذر 1394
پذیرش: 14 بهمن 1394
ارائه در سایت: 07 فروردین 1395
کلیدواژگان:

سازه ساندویچی کامپوزیتی
فیرینگ
ماهواره‌بر
بهینه‌سازی
الگوریتم ترکیبی

طراحی بهینه سازه‌های ساندویچی کامپوزیتی مورد استفاده در فیرینگ ماهواره‌بر با استفاده از الگوریتم ترکیبی بررسی و ارائه می‌شود. از آنجا که مدرنترین فیرینگ‌ها از لایه‌های ساندویچی کامپوزیتی ساخته می‌شوند، در این پژوهش ساختار سازه فیرینگ بر اساس پوسته ساندویچی کامپوزیتی با هسته انعطاف‌پذیر تحلیل شده است. از طرفی ساختار فیرینگ از نظر هندسی از دو بخش مخروطی و استوانه‌ای تشکیل می‌شود. برای این منظور، در فاز اول، تحلیل کماتش سازه مخروطی ساندویچی کامپوزیتی با استفاده از تئوری‌های مرتبه بالا انجام گرفت و معادلات بدست آمده برای بخش استوانه‌ای، با صفر کردن نیم‌زاویه رأس مخروط بدست می‌آید. در فاز دوم، سازه استخراج شده با استفاده از الگوریتم ترکیبی مورد بهینه‌سازی قرار گرفت. به واسطه تعدد و پیچیدگی متغیرهای طراحی در سازه‌های ساندویچی کامپوزیتی، فرایند طراحی مهندسی به مشکلات و سختی‌هایی در مسائل بهینه‌سازی طراحی منجر می‌شود. از آنجایی که مهمترین دیسپلین انتخابی برای بهبود مشخصه‌های جرم ماهواره‌بر، دیسپلین سازه است، لذا با تکیه بر بهینه‌سازی سازه، پس از انجام فرایند بهینه‌سازی در نهایت کاهش جرم قابل ملاحظه‌ای ناشی از تغییر جنس و بهینه‌سازی بطور همزمان، حدود 40 درصد نسبت به فیرینگ مورد استفاده (فیرینگ سفیر) در این پژوهش بدست آمد.

Design Optimization of Fairing Sandwich Cylindrical and Conical Structures for Launch Vehicles, Using Hybrid Algorithm

Ali Mozaffari^{1*}, Foozieh Morovat¹, Jafar Roshanian¹, Hadi Zare²

- 1- Department of Aerospace Engineering, K.N.T University of Technology, Tehran, Iran.
 - 2- Department of Aerospace Engineering, Sharif University of Technology, Tehran, Iran.
- *P.O.B. 338116765, Tehran, Iran, mozaffari@kntu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 28 November 2015
Accepted 03 February 2016
Available Online 26 March 2016

Keywords:
Composite sandwich structure
Fairing
Launch vehicle
Optimization
Hybrid algorithm

ABSTRACT

In this study, optimum design of composite sandwich structures will be surveyed and presented using hybrid algorithm. Since, most modern payload fairings are constructed of a composite sandwich laminate, in this research the architecture of the fairing structure has been analyzed on the basis of the composite sandwich shell with a flexible core. However, from the geometrical point of view, fairing composed of two conical and cylindrical parts. Therefore, in the first phase, buckling analysis of conical composite sandwich shell has been done by using high-order theories and the obtained equations reduce to the governing equations of cylindrical sandwich shell when the semi-cone angle is set equal to zero. In the second phase, the obtained structure was optimized using hybrid algorithm. Due to the variety and complexity of design variables in composite sandwich structures, engineering design process leads to difficulties and obstacles in design optimization problems. Since, the most important selected discipline for improvement the mass specifications of launch vehicle is structure, therefore, relying on structural optimization, after optimization process, finally considerable mass reduction i.e. 40 percent comparing to the utilized fairing in this study (Fairing of Safir), will be concluded due to simultaneous changing of material and optimization.

1-مقدمه

می‌شود، محموله متشکل از ماهواره، آداپتور و فیرینگ است. مهمترین بخش سازه ماهواره‌بر، فیرینگ است. از نظر هندسی فیرینگ از دو قسمت تشکیل می‌شود؛ بخش پایینی استوانه‌ای شکل است با طول و قطر مشخص و بخش بالایی یک المان نوک تیز یا پرتابه‌ای شکل یا یک مخروط ناقص همراه با یک کلاهک کروی شکل است (شکل 1). از آنجایی که فیرینگ در جلوی حامل

فیرینگ ماهواره‌بر، پوشش محافظی است که بر روی مرحله دوم نصب شده و ماهواره را در بر می‌گیرد و از آن در برابر شرایط نامساعد محیطی محافظت می‌نماید. این پوشش به محض خروج از جو باز و جدا شده، سپس به زمین برگشته و در جو می‌سوزد. بخش محموله بر روی مرحله دوم ماهواره‌بر نصب

Please cite this article using:

A. Mozaffari, F. Morovat, J. Roshanian, H. Zare, Design Optimization of Fairing Sandwich Cylindrical and Conical Structures for Launch Vehicles, Using Hybrid Algorithm, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 3, pp. 331-341, 2016 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

کامپوزیتی با استفاده از تئوری‌های مرتبه بالا انجام می‌گیرد که نتایج بدست آمده برای بخش استوانه‌ای با صفرکردن نیم‌زاویه رأس مخروط استخراج می‌شود. ابعاد هندسی استفاده شده در این پژوهش برای بخش‌های مخروطی و استوانه‌ای، ابعاد فیرینگ ماهواره‌بر سفیر می‌باشد که از مرجع [1] استخراج شده است.

2- مروری بر فعالیت‌های اخیر بهینه سازی سازه‌های ساندویچی مخروطی شکل

در سال‌های اخیر، برای پیشبرد طراحی و تحلیل سازه‌های ساندویچی کامپوزیتی؛ فعالیت‌های مهمی انجام گرفته است.

آقایان تانگ و وانگ [2]، برای تحلیل کمناش پوسته‌های مخروطی ورقه‌ای تحت بار فشاری محوری و فشار خارجی با استفاده از تئوری پوسته دانه‌ل¹ حل بر مبنای سری‌های توانی را پیشنهاد کردند. پس از آن آقای سوفیه [3]، یک فرمول تحلیلی برای کمناش پوسته مخروطی ارتروپیک با ضخامت متغیر در معرض فشار خارجی وابسته به زمان پیدا کرد. او در کار خود، برای بدست آوردن حل از تئوری پوسته دانه‌ل و روش گالرکین استفاده کرد. در همین راستا ژانگ و همکارش [4] با استفاده از یک تئوری مرتبه بالا، تحلیل کمناش پوسته‌های مخروطی و استوانه‌ای ساندویچی با هسته انعطاف‌پذیر را انجام دادند و از مقایسه نتایج خود با محاسبات المان محدود و کارهای مشابه به نتایج خوبی دست یافتند.

لواسانی [5] با استفاده از تئوری پوسته دانه‌ل، یک روش ساده و دقیق برای تحلیل کمناش خطی پوسته‌های مخروطی فانکشنال تحت بارهای فشاری و فشار خارجی ارائه نمود.

سپس شادمهری [6]، یک روش نیمه تحلیلی برای بدست آوردن جواب کمناش خطی پوسته‌های مخروطی کامپوزیتی تحت بار فشاری محوری پیشنهاد کرد. پس از آن سوفیه [7] با استفاده از تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول، ارتعاش و کمناش پوسته‌های استوانه‌ای ساندویچی را با انواع مختلف پوشش‌ها و تحت فشار هیدروستاتیک یکنواخت بررسی کرد. در خصوص تئوری‌های مرتبه بالای سازه‌های ساندویچی، رحمانی [8] ارتعاش پوسته استوانه‌ای ساندویچی کامپوزیتی با هسته انعطاف‌پذیر را با استفاده از تئوری مرتبه بالای پنل ساندویچی مورد مطالعه قرار داد. تئوری مرتبه بالای بهبود یافته صفحه ساندویچی، با به کار بردن تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول در رویه‌ها توسط ملک زاده [9] معرفی شد. پس از آن ملک‌زاده و همکارش [10] با استفاده از همین تئوری، تحلیل کمناش یک پنل مخروط ناقص ساندویچی کامپوزیتی با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده و دوسرگیردار را انجام دادند و نتایج خود را با روش المان محدود بدست آمده با نرم‌افزار آباکوس² و تحقیقات گذشته مورد مقایسه و ارزیابی قرار دادند. در همین راستا آقای بیگلری [11] تئوری پنل ساندویچی مرتبه بالای تصحیح شده را برای بررسی پنل‌های ساندویچی خمیده با هسته انعطاف‌پذیر پیشنهاد داد. سپس سیدی و همکارانش [12] برای تحلیل کمناش وابسته به دمای یک پوسته مخروطی ساندویچی با رویه‌هایی از جنس مواد هدفمند تابعی³ و هسته انعطاف‌پذیر، یک تئوری مرتبه بالای بهبود یافته ارائه نمودند که پس از مقایسه با روش المان محدود و کارهای انجام شده به نتایج خوبی دست یافتند.

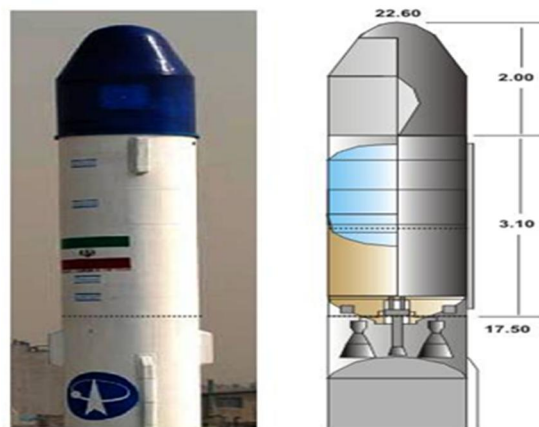


Fig. 1 Fairing of the SAFIR's launch vehicle [1]

شکل 1 فیرینگ ماهواره‌بر سفیر [1]

مستقر شده، لذا ساختار آن بایستی از سفتی بالایی برخوردار باشد تا بتواند در برابر نیروهای آیرودینامیکی مقاومت کرده و از خمش بیش از اندازه آن جلوگیری نماید. بر طبق آخرین تحقیقات انجام شده، مدرنترین فیرینگ‌ها از لایه‌های ساندویچی کامپوزیتی (معمولا رویه‌های کربن اپوکسی بر روی یک هسته فوم یا لانه زنبوری) ساخته می‌شوند. زیرا سازه‌های ساندویچی کامپوزیتی الزامات مقاومت، کمناش، فلاتر و آکوستیک را برآورده می‌سازد. در دهه گذشته، کاربرد پوسته‌های ساندویچی در صنایع هوافضا از جمله وسایل پرنده فراصوت و فضاپیماها بسیار گسترش یافته و کماکان رویه افزایش است. هرچند که بزرگترین چالش در طراحی سازه‌های ساندویچی، مدیریت نمودن تعداد زیادی از متغیرهای طراحی است، اما می‌توان انتخاب‌های طراحی مناسبی را سریعتر و با قابلیت اطمینان بالاتری بدست آورد. سازه‌های ساندویچی مدرن معمولا از دو رویه کامپوزیتی و یک هسته از جنس فوم یا لانه زنبوری با مقاومت کم تشکیل می‌شوند. انعطاف‌پذیری بالای هسته در این سازه‌ها منجر به اختلاف در میزان جابجایی در رویه‌های بیرونی و درونی شده و در اثر تغییر در ارتفاع هسته، جابجایی در سطح مقطع از الگویی غیرخطی تبعیت می‌نماید.

امروزه استفاده از سازه‌های ساندویچی با توجه به مزایای متعددی همچون نسبت استحکام به وزن و سفتی به وزن بالا در مصارف مهندسی بسیار رایج و متداول شده است. از جمله کاربردهای این نوع سازه‌ها می‌توان در بدنه اجسام پرنده مانند هواپیما، موشک‌ها و فضاپیماها، بدنه کشتی‌ها و قطارها، خودروها و سازه‌های ساختمانی مشاهده کرد. در هر سازه‌ای بارهای متنوعی به اجزاء مختلف سازه اعمال می‌شود. در این میان بارهای فشاری به دلیل ایجاد ناپایداری هندسی در سازه، حتی قبل از رسیدن به تسلیم یا شکست سازه از اهمیت بسیار بالایی برخوردارند. برای سازه‌های تحت بارگذاری فشاری، موقعیتی وجود دارد که اگر مقدار بار به اندازه بسیار کوچک افزایش یابد، باعث ایجاد تغییرشکل بزرگی در سازه می‌گردد. به این تغییر شکل عرضی ناگهانی یا همان ناپایداری هندسی در اثر اعمال بار فشاری، پدیده کمناش و به بار موثر آن، بار بحرانی کمناش می‌گویند. حال اگر بارگذاری افزایش یابد، رفتار سازه تا جایی ادامه می‌یابد که دچار واماندگی گردد. لذا بررسی و تحلیل کمناش و محاسبه بارهای بحرانی در سازه‌های مختلف، از جمله مهمترین موضوعاتی است که دانشمندان و مهندسين به آن می‌پردازند.

در فاز اول این پژوهش، تحلیل کمناش سازه مخروطی ناقص ساندویچی

1- Donnell-type shell theory

2- ABAQUS

3- Functionally Graded

گرفته است. نمونه مورد مطالعه در این پژوهش فیرینگ ماهواره‌بر سفیر می باشد که پس از تحلیل سازه‌ای و نهایتاً بهینه سازی وزنی، نتایج قابل قبول و خوبی بدست آمده است.

3- تحلیل کماتش سازه مخروطی ناقص ساندویچی با هسته میانی انعطاف پذیر

3-1- استخراج معادلات تعادل پوسته مخروطی ساندویچی

از آنجا که تئوری‌های متداول قادر به پیش‌بینی اثرات موضعی و تغییر شکل‌های دقیق در راستای هسته نیستند، استفاده از یک مدل تحلیلی مرتبه بالا که قادر به لحاظ کردن اثرات انعطاف‌پذیری هسته باشد، ضروری است. به همین منظور در این پژوهش، مدل مرتبه بالای بهبود یافته پوسته ساندویچی² که توسط ملک‌زاده ارائه شده، پیشنهاد می‌شود. این رویکرد، نخستین بار توسط فروستگ مطرح شد و سپس، ملک‌زاده آن را بهبود بخشید. در این تئوری بر خلاف تئوری‌های متداول، هیچ محدودیتی بر میدان جابجایی هسته اعمال نمی‌گردد و اثرات مرتبه بالا پس از حل مسأله ظاهر می‌گردند. لازم به ذکر است در سال‌های اخیر، تئوری مرتبه بالای سازه‌های ساندویچی، بیشتر در بررسی تیرها و صفحات به کار گرفته شده و کمتر تحقیقی مبنی بر استفاده از این تئوری در پوسته‌های مخروطی ساندویچی مشاهده شده است.

معادلات حرکت پوسته ساندویچی کامپوزیتی از روش انرژی و به کمک اصل هامیلتون استخراج شده و پس از آن کماتش سازه تحلیل خواهد شد.

3-1-1- هندسه‌ی مسأله

پوسته مورد مطالعه به صورت مخروط ساندویچی ناقص است که از دو رویه چند لایه کامپوزیتی و هسته میانی انعطاف‌پذیر تشکیل شده است. ضخامت کل سازه h و طول آن L و ضخامت رویه بیرونی، هسته میانی و رویه داخلی به ترتیب برابر d_t ، t_c و d_b است. در شکل 2، پوسته مورد مطالعه به همراه دستگاه مختصات مربوطه نشان داده شده است.

α ، نیم زاویه رأس مخروط است. مختصه x در راستای یال مخروط بوده و از قسمت میانی طول مخروط شروع می‌شود و جهت مثبت آن به سمت مقطع بزرگتر مخروط است. مختصه θ در جهت محیطی و مختصه z در راستای ضخامت بوده و از لایه میانی رویه‌ها و هسته شروع شده و جهت مثبت آن به سمت بیرون مخروط است. لازم بذکر است سازه مورد نظر، تحت بار محوری فشاری $p(N)$ و فشار خارجی گسترده عمود بر سطح $q(Pa)$ قرار دارد. R_1 و R_2 شعاع‌های رویه‌های بیرونی و داخلی در قسمت میانی طول مخروط و در راستای عمود بر آن هستند، روابط (1) نیز برای شعاع در هندسه مورد نظر برقرار است:

$$\begin{aligned} R_t &= R_2 + x \sin \alpha = r_t \cos \alpha \\ R_b &= R_1 + x \sin \alpha = r_b \cos \alpha \\ r_{tc} &= r_t - \frac{d_t}{2} \\ r_{bc} &= r_b + \frac{d_b}{2} \end{aligned} \quad (1)$$

روابط سینماتیکی و ساختاری پوسته ساندویچی استوانه‌ای در مرجع [8] آمده است. با استفاده از آنها، روابط سینماتیکی کرنش‌ها در رویه‌های بیرونی و داخلی پوسته ساندویچی مخروطی به شکل (2) تعریف می‌گردند:

پس از بررسی تحلیل کماتش سازه‌های ساندویچی، به مطالعه کارهای انجام شده در حوزه بهینه‌سازی سازه پرداخته شد، که اهم آنها به شرح زیر می‌باشد:

داگلاس [13] در رساله دکترای خود با استفاده از الگوریتم ژنتیک با هدف مینیمم وزن و هزینه حامل، بهینه‌سازی طراحی یک ماهواره‌بر فضایی چندمرحله‌ای به مدار را انجام داد. این کار اولین تلاش برای مینیمم کردن هزینه ماهواره‌بر سوخت جامد در سطح طراحی مقدماتی با استفاده از الگوریتم ژنتیک بود. پس از آن سلیمی و همکارانش [14]، به ارائه یک طرح بهینه از سازه‌های دریایی ساندویچی کامپوزیتی در معرض انفجار زیرآب پرداخت. فرایند بهینه‌سازی با استفاده از الگوریتم ژنتیک مرتبط با روش المان محدود برای تحلیل سازه‌ای انجام شده است.

یوان [15]، بدنه وسایل پرنده را با یک پوسته کامپوزیتی ساندویچی طراحی کرد و بهینه‌سازی سازه‌ای آن را با استفاده از مدل المان محدود و تابع هدف مینیمم وزن انجام داد. قیود شامل پایداری سازه‌ای و معیارهای خرابی کامپوزیت است. سپس او [16]، بهینه‌سازی استوانه‌های ساندویچی قابل کاربرد در بدنه هواپیما را انجام داد. آنها روش جامع بهینه‌سازی الگوریتم ژنتیک و روش بردار انتقال آکوستیک را برای مینیمم کردن فشار داخلی بدنه توسعه دادند. او نشان داد که این روش بهینه‌سازی می‌تواند کارایی محاسبات را بهبود دهد و یک توافق خوب بین وزن، عملکرد مکانیکی و خواص آکوستیک بدنه ساندویچی ایجاد می‌کند. در همان سال اولاه و همکارانش [17]، رویکردی را برای طراحی مفهومی و ارزیابی ماهواره‌بر با استفاده از آنالیز تصمیم‌گیری چندمشرخصه ارائه نمودند. کاربرد موفق روش پیشنهادی در طراحی مفهومی و ارزیابی ماهواره‌بر، کاربردش را در فاز اولیه طراحی و تصمیم‌گیری سیستم‌های هوافضایی نشان می‌دهد. ینجی ما و همکارانش [18] در مقاله خود، شکل و گرادیان مواد سازه‌های داغ نوک تیز را به منظور دستیابی به شرایط پروازی مافوق صوت، مورد طراحی و بهینه سازی قرار داده‌اند. الگوریتم ژنتیک برای بهینه‌سازی شکل سازه به کار رفته و از نرم‌افزار آباکوس برای شبیه‌سازی توزیع دما و تنش با توزیع‌های گرادیان مواد مختلف بر روی سازه استفاده کرده‌اند و در نهایت توزیع بهینه گرادیان مواد برای سازه داغ نوک تیز پیشنهاد شده است. سپس ابراهیمی و وحدت آزاد [19]، به تحلیل حساسیت و بهینه‌سازی چندهدفی ستون‌های استوانه‌ای ساندویچی لانه زنبوری تحت بارهای برخورد محوری پرداخت. آنها مدل‌های مختلف از این سازه را با الگوریتم PSO¹ برای رسیدن به ماکزیمم توانایی جذب انرژی و مینیمم نیروی برخورد بهینه‌سازی کردند.

باروتاجی و همکارانش [20] لوله‌های ساندویچی جدار نازک با هسته فوم آلومینیومی تحت بارگذاری جانبی را به عنوان وسیله جذب انرژی مورد بررسی و مطالعه قرار دادند. پس از فرایند بهینه‌سازی، لوله با مینیمم قطر لایه داخلی و ماکزیمم ضخامت فوم، مناسب‌ترین حالت برای استفاده به عنوان ترکیبات جذب انرژی هستند.

بنابراین، هیچگونه تحقیقی مبنی بر بهینه‌سازی پوسته‌های مخروط ناقص ساندویچی کامپوزیتی با هسته انعطاف‌پذیر و تحت بار ترکیبی انجام نشده است. در این تحقیق، بارگذاری ترکیبی بوسیله بار فشاری محوری و فشار یکنواخت خارجی اعمال شده، سپس برای تحلیل کماتش پوسته‌های ساندویچی از یک تئوری مرتبه بالای بهبود یافته استفاده شده است. پس از آن سازه استخراج شده با استفاده از الگوریتم ترکیبی مورد بهینه‌سازی قرار

در حد فاصل رویه بیرونی و هسته:

$$\begin{aligned}\bar{u}_c(r=r_{tc}) &= \bar{u}_{ct} = u_t - \frac{d_t}{2}\psi_{xt} \\ \bar{v}_c(r=r_{tc}) &= \bar{v}_{ct} = v_t - \frac{d_t}{2}\psi_{\theta t} \\ \bar{w}_c(r=r_{tc}) &= \bar{w}_{ct} = w_t\end{aligned}\quad (4)$$

در حد فاصل رویه داخلی و هسته:

$$\begin{aligned}\bar{u}_c(r=r_{bc}) &= \bar{u}_{cb} = u_b + \frac{d_b}{2}\psi_{xb} \\ \bar{v}_c(r=r_{bc}) &= \bar{v}_{cb} = v_b + \frac{d_b}{2}\psi_{\theta b} \\ \bar{w}_c(r=r_{bc}) &= \bar{w}_{cb} = w_b\end{aligned}\quad (5)$$

3-3- استخراج معادلات حاکم بر پوسته ساندویچی

معادلات حرکت و شرایط مرزی در این تئوری با استفاده از روش انرژی و اصل هامیلتون استخراج می‌گردند:

$$\delta(U+V)=0 \quad (6)$$

که در این رابطه U انرژی پتانسیل و V کار نیروهای خارجی است. تغییرات مرتبه اول انرژی پتانسیل پوسته ساندویچی مخروطی را می‌توان به شکل رابطه (7) نمایش داد:

$$\begin{aligned}\delta U = & \iiint_{V_t} (\sigma_{xxt}\delta\epsilon_{xxt} + \delta\epsilon_{\theta\theta t}\delta\epsilon_{\theta\theta t} + \tau_{x\theta t}\delta\gamma_{x\theta t} \\ & + \tau_{xzt}\delta\gamma_{xzt} + \tau_{\theta zt}\delta\gamma_{\theta zt})dV_t \\ & + \iiint_{V_b} (\sigma_{xxb}\delta\epsilon_{xxb} + \sigma_{\theta\theta b}\delta\epsilon_{\theta\theta b} + \tau_{x\theta b}\delta\gamma_{x\theta b} \\ & + \tau_{xzb}\delta\gamma_{xzb} + \tau_{\theta zb}\delta\gamma_{\theta zb})dV_b \\ & + \iiint_{V_c} (\tau_{xrc}\delta\epsilon_{xrc} + \tau_{\theta rc}\delta\epsilon_{\theta rc} + \sigma_{rrc}\delta\epsilon_{rrc})dV_c\end{aligned}\quad (7)$$

که در این روابط $\sigma_{xxi}, \sigma_{\theta\theta i}, \tau_{x\theta i}$ ($i = t, b$) تنش‌های عمودی و برشی درون صفحه‌های رویه‌های بیرونی و داخلی و τ_{xzi} و $\tau_{\theta zi}$ تنش‌های برشی برون صفحه‌ای هستند و $\epsilon_{xxi}, \epsilon_{\theta\theta i}, \gamma_{x\theta i}$ تنش‌های درون صفحه‌ای رویه‌های بیرونی و داخلی و γ_{xzi} و $\gamma_{\theta zi}$ تنش‌های برون صفحه‌ای هستند. همچنین $\sigma_{rrc}, \tau_{xrc}, \tau_{\theta rc}$ تنش‌های شعاعی و برشی و کرنش‌های موجود در هسته هستند، مؤلفه‌های تنش درون صفحه‌ای شامل σ_{xxc} و $\sigma_{\theta\theta c}$ و $\tau_{x\theta c}$ در هسته نادیده گرفته شده است.

در پل‌های ساندویچی با هسته نرم عموماً مدول الاستیسیته هسته تا هزار برابر کوچکتر از مدول رویه‌ها است و همین موضوع باعث می‌شود تنش‌های ایجاد شده در صفحه $x\theta$ عموماً توسط رویه‌ها تحمل شود. مؤلفه‌های تنش در راستای عمودی در هسته مقادیر قابل توجهی دارند که لازمست در معادله انرژی لحاظ شوند. لازم به ذکر است فرض مذکور باعث ساده‌سازی معادلات تعادل در هسته می‌شود که امکان حل تحلیلی آن بوجود می‌آید.

تغییرات کار نیروهای خارجی را می‌توان به شکل رابطه (8) نمایش داد:

$$\begin{aligned}\delta V = & -\int_{-l/2}^{l/2} \int_{\theta} (q_r^t R_t \delta w_t + q_r^b R_b \delta w_b + q_x^t R_t \delta u_t \\ & + q_x^b R_b \delta u_b + q_{\theta}^t R_t \delta v_t + q_{\theta}^b R_b \delta v_b) dx d\theta\end{aligned}\quad (8)$$

که در این رابطه w_i, v_i, u_i مؤلفه‌های جابجایی رویه‌ها و $q_r^t, q_r^b, q_x^t, q_x^b, q_{\theta}^t, q_{\theta}^b$ مؤلفه‌های نیروهای گسترده اعمالی بر رویه‌های بیرونی و داخلی پوسته هستند.

با بهره‌گیری از روابط حاصله و اعمال اصل همیلتون معادلات تعادل پوسته ساندویچی مخروطی به صورت روابط (9) استخراج می‌شود:

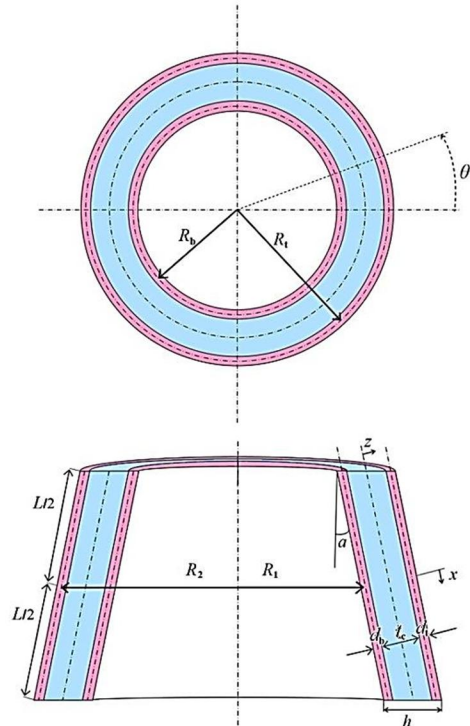


Fig. 2 Geometry of the truncated conical composite sandwich shell

شکل 2 هندسه و دستگاه مختصات پوسته مخروطی ساندویچی

$$\begin{aligned}\epsilon_{xxi} &= \epsilon_{xx0i} + z_i k_{xxi} \\ \epsilon_{\theta\theta i} &= \epsilon_{\theta\theta 0i} + z_i k_{\theta\theta i} \\ \gamma_{x\theta i} &= \gamma_{x\theta 0i} + z_i k_{x\theta i} \\ \epsilon_{\theta zi} &= \psi_{\theta i} + \frac{w_{i,\theta} - v_i \cos\alpha}{R_i} \\ \epsilon_{xzi} &= \psi_{xi} + w_{i,x} \\ \epsilon_{zzi} &= 0\end{aligned}\quad (2)$$

که در این روابط u_i, v_i و w_i مؤلفه‌های تغییر مکان در صفحه میانی رویه‌ها و ψ_{xi} و $\psi_{\theta i}$ مؤلفه‌های چرخش در رویه‌ها می‌باشند.

با استفاده از روابط تنش - جابجایی در هسته [8]، روابط ساختاری در هسته پوسته مخروطی ساندویچی بصورت رابطه (3) بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}\gamma_{\theta rc} &= v_{c,r} + \frac{w_{c,\theta} - v_c \cos\alpha}{R} \quad , \quad \epsilon_{rrc} = w_{c,r} \\ \gamma_{xrc} &= w_{c,x} + u_{c,r}\end{aligned}\quad (3)$$

2-2- شرایط سازگاری

اتصال کامل هسته و رویه‌ها درحین پدیده‌های خمش و کماتش یکی از مهمترین فرضیه‌های لازم برای استخراج معادلات است. با توجه به اینکه از انواع فوم برای ساخت پل‌های ساندویچی با هسته انعطاف‌پذیر استفاده می‌شود، فرض می‌شود چسبی که برای اتصال رویه‌ها و هسته استفاده شده، در هیچ یک از حالات دچار و اماندگی نمی‌شود و همواره اتصال رویه‌ها و هسته برقرار است. از این رو لازمست قیود مناسب این فرض در معادلات اعمال شود. بدین معنی که هر یک از سه مؤلفه جابجایی رویه بیرونی در محل اتصال با هسته با سه مؤلفه جابجایی متناظر هسته برابر است. به همین ترتیب این قید در محل اتصال هسته با رویه داخلی هم اعمال می‌شود.

شرایط سازگاری که مؤید پیوستگی جابجایی‌ها در حد فاصل رویه‌ها و هسته هستند، بصورت روابط (4,5) در نظر گرفته می‌شوند:

به منظور حل معادلات حاکم بر پوسته مخروطی ساندویچی با هسته انعطاف-پذیر ابتدا مقادیر مربوط به نتیجه‌های تنش و گشتاور بر حسب مؤلفه‌های جابجایی رویه‌ها در راستاهای طولی، محیطی و شعاعی در معادلات مذکور جایگذاری می‌شود. پس از انجام مراحل فوق سیستم معادلات دیفرانسیلی جزئی مربوط به حرکت سازه مطابق معادلات (12-21) به شکلی که در ادامه آمده است، به دست می‌آید.

که N_{kl}^i و M_{kl}^i متغیرهای نیرو و گشتاور می‌باشند و بصورت روابط (10) تعریف می‌گردند [21]:

که پس از جایگذاری روابط ساختاری در این معادلات، متغیرهای نیرو و گشتاور به صورت رابطه (11) تغییر می‌یابند:

که ماتریس‌های A ، B و D به ترتیب ماتریس سفتی کششی، ماتریس کوپلینگ خمشی-کششی و ماتریس سفتی خمشی نامیده می‌شوند.

$$\begin{aligned} & - \left[(R_b N_{x0}^b w_{b,x} + N_{x\theta 0}^b w_{b,\theta})_{,x} \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{1}{R_b} N_{x\theta 0}^b w_{b,\theta} + N_{x0 0}^b w_{b,x} \right)_{,\theta} \right] \\ & - \frac{\tau_{\theta,\theta}}{r_{bc} \cos \alpha} \left[\frac{r_{tc} - r_{bc}}{r_{tc} \ln \left(\frac{r_{bc}}{r_{tc}} \right)} + 1 \right] \cos \alpha \\ & + \tau_{x,x} \left[\frac{r_{tc} - r_{bc}}{\ln \left(\frac{r_{bc}}{r_{tc}} \right)} + r_{bc} \right] \cos \alpha \\ & - \frac{E_c}{\ln \left(\frac{r_{bc}}{r_{tc}} \right)} (w_b - w_t) \cos \alpha = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} & -B_{11t} [u_{t,x} \sin \alpha + R_t u_{t,xx}] \\ & -B_{12t} [v_{t,x\theta} + w_{t,x} \cos \alpha] - B_{16t} [R_t v_{t,xx} + 2u_{t,x\theta}] \\ & -D_{11t} [\Psi_{xt,x} \sin \alpha + R_t \Psi_{xt,xx}] - D_{12t} \Psi_{\theta t,x\theta} \\ & -D_{16t} [R_t \Psi_{\theta t,xx} + 2\Psi_{xt,x\theta}] \\ & + B_{22t} \frac{\sin \alpha}{R_t} [v_{t,\theta} + u_t \sin \alpha + w_t \cos \alpha] \\ & + B_{26t} \left[v_{t,x} \sin \alpha - \frac{1}{R_t} v_t \sin^2 \alpha - \frac{1}{R_t} (v_{t,\theta\theta} + w_{t,\theta} \cos \alpha) \right] \\ & + D_{22t} \frac{\sin \alpha}{R_t} [\Psi_{\theta t,t} + \Psi_{xt} \sin \alpha] \\ & + D_{26t} \left[\Psi_{\theta t,x} \sin \alpha - \frac{1}{R_t} \Psi_{\theta t} \sin^2 \alpha - \frac{1}{R_t} \Psi_{\theta t,\theta\theta} \right] \\ & -B_{66t} \left[v_{t,x\theta} \sin \alpha + \frac{1}{R_t} (u_{t,\theta\theta} - v_{t,\theta} \sin \alpha) \right] \\ & -D_{66t} \left[\Psi_{\theta t,x\theta} + \frac{1}{R_t} (\Psi_{xt,\theta\theta} - \Psi_{\theta t,\theta} \sin \alpha) \right] \\ & + R_t k G_{xzt} d_t (\Psi_{xt} + w_{t,x}) - \tau_x(\theta, x) \frac{d_t}{2} \cos \alpha = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} & -B_{11b} [u_{b,x} \sin \alpha + R_b u_{b,xx}] - B_{12b} [v_{b,x\theta} + w_{b,x} \cos \alpha] \\ & -B_{16b} [R_b v_{b,xx} + 2u_{b,x\theta}] - D_{11b} [\Psi_{xb,x} \sin \alpha + R_b \Psi_{xb,xx}] \\ & -D_{12b} \Psi_{\theta b,x\theta} - D_{16b} [R_b \Psi_{\theta b,xx} + 2\Psi_{xb,x\theta}] \\ & + B_{22b} \frac{\sin \alpha}{R_b} [v_{b,\theta} + u_b \sin \alpha + w_b \cos \alpha] \\ & + B_{26b} \left[v_{b,x} \sin \alpha - \frac{1}{R_b} v_b \sin^2 \alpha - \frac{1}{R_b} (v_{b,\theta\theta} + w_{b,\theta} \cos \alpha) \right] \\ & + D_{22b} \frac{\sin \alpha}{R_b} [\Psi_{\theta b,x} + \Psi_{xb} \sin \alpha] \\ & + D_{26b} \left[\Psi_{\theta b,x} \sin \alpha - \frac{1}{R_b} \Psi_{\theta b} \sin^2 \alpha - \frac{1}{R_b} \Psi_{\theta b,\theta\theta} \right] \\ & -B_{66b} \left[v_{b,x\theta} + \frac{1}{R_b} (u_{b,\theta\theta} - v_{b,\theta} \sin \alpha) \right] \\ & -D_{66b} \left[\Psi_{\theta b,x\theta} + \frac{1}{R_b} (\Psi_{xb,\theta\theta} - \Psi_{\theta b,\theta} \sin \alpha) \right] \\ & + R_b k G_{xzb} d_b (\Psi_{xb} + w_{b,x}) - \tau_x(\theta, x) \frac{d_b}{2} \cos \alpha = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & -B_{12t} u_{t,x\theta} - B_{22t} \frac{v_{t,\theta\theta} + u_{t,\theta} \sin \alpha + w_{t,\theta} \cos \alpha}{R_t} \\ & -B_{26t} \left[2v_{t,x\theta} + u_{t,x} \sin \alpha + w_{t,x} \cos \alpha \right. \\ & \quad \left. + \frac{u_{t,\theta\theta} + u_t \sin^2 \alpha + w_t \sin \alpha \cos \alpha}{R_t} \right] \\ & -D_{12t} \Psi_{xt,x\theta} - D_{22t} \frac{\Psi_{\theta t,\theta\theta} + \Psi_{xt,\theta} \sin \alpha}{R_t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -A_{12b} u_{b,x\theta} - A_{22b} \frac{1}{R_b} [v_{b,\theta\theta} + u_{b,\theta} \sin \alpha + w_{b,\theta} \cos \alpha] \\ & -A_{26b} \left[2v_{b,x\theta} + u_{b,x} \sin \alpha + w_{b,x} \cos \alpha + \frac{1}{R_b} u_{b,\theta\theta} \right. \\ & \quad \left. + \frac{\sin \alpha}{R_b} (u_b \sin \alpha + w_b \cos \alpha) \right] \\ & -B_{12b} \Psi_{xb,x\theta} - B_{22b} \frac{1}{R_b} [\Psi_{\theta b,\theta\theta} + \Psi_{xb,\theta} \sin \alpha] \\ & -B_{26b} \left[2\Psi_{\theta b,x\theta} + \Psi_{xb,x} \sin \alpha + \frac{1}{R_b} \Psi_{xb,\theta\theta} + \frac{\sin^2 \alpha}{R_b} \Psi_{xb} \right] \\ & -A_{16b} [2u_{b,x} \sin \alpha + R_b u_{b,xx}] \\ & -A_{66b} \left[v_{b,x} \sin \alpha + R_b v_{b,xx} + u_{b,x\theta} \right. \\ & \quad \left. + \frac{\sin \alpha}{R_b} (u_{b,\theta} - v_b \sin \alpha) \right] \\ & -B_{16b} [2\Psi_{xb,x} \sin \alpha + R_b \Psi_{xb,xx}] - B_{66b} [\Psi_{\theta b,x} \sin \alpha \\ & \quad + \Psi_{xb,x\theta} + R_t \Psi_{\theta b,xx} \\ & \quad + \frac{\sin \alpha}{R_b} (\Psi_{xb,\theta} - \Psi_{\theta b} \sin \alpha)] \\ & -k G_{\theta zb} d_b \left(\Psi_{\theta b} + \frac{w_{b,\theta} - v_b \cos \alpha}{R_b} \right) \cos \alpha \\ & - \frac{\tau_{\theta}(\theta, x)}{r_{bc}} \cos \alpha = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & A_{12t} u_{t,x} \cos \alpha + A_{22t} \frac{\cos \alpha}{R_t} [v_{t,\theta} + u_t \sin \alpha + w_t \cos \alpha] \\ & + A_{26t} \left[v_{t,x} \cos \alpha + \frac{\cos \alpha}{R_t} (u_{t,\theta} - v_t \sin \alpha) \right] \\ & + B_{12t} \Psi_{xt,x} \cos \alpha + B_{22t} \frac{\cos \alpha}{R_t} [\Psi_{\theta t,\theta} + \Psi_{xt} \sin \alpha] \\ & + B_{26t} \left[\Psi_{\theta t,x} \cos \alpha + \frac{\cos \alpha}{R_t} (\Psi_{xt,\theta} - \Psi_{\theta t} \sin \alpha) \right] \\ & -k G_{xzt} d_t (\Psi_{xt} + w_{t,x}) \sin \alpha - R_t k G_{xzt} d_t (\Psi_{xt,x} + w_{t,xx}) \\ & -k G_{\theta zt} d_t \left(\Psi_{\theta t,t} + \frac{w_{t,\theta\theta} - v_{t,\theta} \cos \alpha}{R_t} \right) \\ & - \left[(R_t N_{x0}^t w_{t,x} + N_{x\theta 0}^t w_{t,\theta})_{,x} + \left(\frac{1}{R_t} N_{\theta 0}^t w_{t,\theta} + N_{x\theta 0}^t w_{t,x} \right)_{,\theta} \right] \\ & + \frac{\tau_{\theta,\theta}}{r_{tc} \cos \alpha} \left[\frac{r_{tc} - r_{bc}}{r_{bc} \ln \left(\frac{r_{bc}}{r_{tc}} \right)} + 1 \right] \cos \alpha \\ & - \tau_{x,x} \left[\frac{r_{tc} - r_{bc}}{\ln \left(\frac{r_{bc}}{r_{tc}} \right)} + r_{tc} \right] \cos \alpha \\ & + \frac{E_c}{\ln \left(\frac{r_{bc}}{r_{tc}} \right)} (w_b - w_t) \cos \alpha = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & A_{12b} u_{b,x} \cos \alpha + A_{22b} \frac{\cos \alpha}{R_b} [v_{b,\theta} + u_b \sin \alpha + w_t \cos \alpha] \\ & + A_{26t} \left[v_{t,x} \cos \alpha + \frac{\cos \alpha}{R_t} (u_{t,\theta} - v_t \sin \alpha) \right] \\ & + B_{12t} \Psi_{xt,x} \cos \alpha - B_{22t} \frac{\cos \alpha}{R_t} [\Psi_{\theta t,\theta} + \Psi_{xt} \sin \alpha] \\ & + B_{26t} \left[\Psi_{\theta t,x} \cos \alpha + \frac{\cos \alpha}{R_t} (\Psi_{xt,\theta} - \Psi_{\theta t} \sin \alpha) \right] \\ & -k G_{xzt} d_t (\Psi_{xt} + w_{t,x}) \sin \alpha - R_t k G_{xzt} d_t (\Psi_{xt,x} + w_{t,xx}) \\ & -k G_{\theta zt} d_t \left(\Psi_{\theta t,\theta} + \frac{w_{t,\theta\theta} - v_{t,\theta} \cos \alpha}{R_t} \right) \end{aligned}$$

بررسی می‌شود. این حالت، شامل تعداد زوج از لایه‌های ارتوتروپیک روی هم با جهات مادی اصلی در 0 و 90 درجه می‌باشند. با ساده کردن روابط بالا برای این حالت خاص ($A_{kli}, B_{kli}, D_{kli} (i=t, b)$ بصورت رابطه (22) تعریف می‌گردند:

$$A_{11i} = A_{22i} = \frac{1}{h} (Q_{11i} + Q_{22i})h$$

$$D_{66i} = \frac{1}{12} Q_{66i} h^3 \quad A_{k6i} = B_{k6i} = D_{k6i} = 0 \quad k = 1, 2 \quad (22)$$

3-5- حل مسأله کمانش پوسته مخروطی با هسته انعطاف‌پذیر

برای به دست آوردن پاسخ پوسته مخروطی ساندویچی، پاسخ به صورت سری‌های توانی مطابق رابطه (23) در نظر گرفته می‌شوند:

$$u_i(x, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{mi} x^m \cos n\theta$$

$$v_i(x, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} b_{mi} x^m \sin n\theta$$

$$w_i(x, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} c_{mi} x^m \cos n\theta$$

$$\psi_{xi}(x, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} d_{mi} x^m \cos n\theta \quad i = (t, b)$$

$$\psi_{\theta i}(x, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} f_{mi} x^m \sin n\theta$$

$$\tau_x(x, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} g_m x^m \cos n\theta$$

$$\tau_{\theta}(x, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} h_m x^m \sin n\theta \quad (23)$$

که n نمایانگر عدد موج محیطی پوسته کمانه شده و ضرایب $a_{mi}, b_{mi}, c_{mi}, d_{mi}, f_{mi}, g_m$ می‌آیند. با قرار دادن حل‌های فوق (روابط 23) در معادلات پوسته ساندویچی به دست آمده در معادلات (21) - (12)، روابط بازگشتی به دست می‌آید. روابط بازگشتی این امکان را می‌دهد تا ثوابت نامشخص ضرایب $a_{mi}, b_{mi}, c_{mi}, d_{mi}, f_{mi}, g_m$ و h_m را بر حسب ضرایب $a_{0i}, a_{1i}, b_{0i}, b_{1i}, c_{0i}, c_{1i}, d_{0i}, d_{1i}, f_{0i}, f_{1i}, g_0, g_1$ از طرفی این ضرایب، ثوابت مجهولی هستند که با در نظر گرفتن شرایط مرزی در هر دو انتهای مخروط بدست می‌آیند. $N_x^i, w_i, M_x^i, v_i, M_{x\theta}^i, \tau_{xrc}$ برای به کار بستن شرایط مرزی محاسبه می‌شوند. p_{cr} و q_{cr} از شرایطی که در ترمینان ماتریس ضرایب حاصل از اعمال شرایط مرزی در هر دو انتهای مخروط یا استوانه برابر صفر است، بدست می‌آید. همگرایی بار بحرانی کمانش هم با افزایش m از 0 تا 75 بررسی شده است. مراحل گفته شده در بالا، الگوریتم حل مسأله فوق است که بصورت یک کد کامپیوتری در نرم‌افزار متلب¹ نوشته شده است. ورودی‌های مسأله هم، ابعاد، هندسه و خصوصیات مواد در رویه‌ها و هسته هستند.

3-6- شرایط مرزی

شرایط مرزی متناظر برای لبه‌های دو سرگیردار و تکیه‌گاه ساده به شرح زیر

$$-D_{26t} \left[2\psi_{\theta t, x\theta} + \psi_{xt, x} \sin \alpha + \frac{\psi_{xt, \theta\theta} + \psi_{xt} \sin^2 \alpha}{R_t} \right]$$

$$-B_{16t} [2u_{t, x} \sin \alpha + R_t u_{t, xx}]$$

$$-B_{66t} \left[v_{t, x} \sin \alpha + u_{t, x\theta} + R_t v_{t, xx} + \frac{u_{t, \theta} \sin \alpha - v_t \sin^2 \alpha}{R_t} \right]$$

$$-D_{16t} [2\psi_{xt, x} \sin \alpha + R_t \psi_{xt, xx}]$$

$$-D_{66t} \left[\psi_{\theta t, x} \sin \alpha + R_t \psi_{\theta t, xx} + \psi_{xt, x\theta} + \frac{\psi_{xt, \theta} \sin \alpha - \psi_{\theta t} \sin^2 \alpha}{R_t} \right]$$

$$+ R_t k G_{\theta zt} d_t \left(\psi_{\theta t} + \frac{w_{t, \theta} - v_t \cos \alpha}{R_t} \right)$$

$$- \frac{\tau_{\theta}}{r_{tc}} \frac{d_t}{2} \cos \alpha = 0 \quad (20)$$

$$-B_{12b} u_{b, x\theta} - B_{22b} \frac{v_{b, \theta\theta} + u_{b, \theta} \sin \alpha + w_{b, \theta} \cos \alpha}{R_b}$$

$$-B_{26b} \left[2v_{b, x\theta} + u_{b, x} \sin \alpha + w_{b, x} \cos \alpha + \frac{u_{b, \theta\theta} + u_b \sin^2 \alpha + w_b \sin \alpha \cos \alpha}{R_b} \right]$$

$$-D_{12b} \psi_{xb, x\theta} - D_{22b} \frac{\psi_{\theta b, \theta\theta} + \psi_{xb, \theta} \sin \alpha}{R_b}$$

$$-D_{26b} \left[2\psi_{\theta b, x\theta} + \psi_{xb, x} \sin \alpha + \frac{\psi_{xb, \theta\theta} + \psi_{xb} \sin^2 \alpha}{R_b} \right]$$

$$-B_{16b} [2u_{b, x} \sin \alpha + R_b u_{b, xx}]$$

$$-B_{66b} \left[v_{b, x} \sin \alpha + u_{b, x\theta} + R_b v_{b, xx} + \frac{u_{b, \theta} \sin \alpha - v_b \sin^2 \alpha}{R_b} \right]$$

$$-D_{16b} [2\psi_{xb, x} \sin \alpha + R_b \psi_{xb, xx}]$$

$$-D_{66b} \left[\psi_{\theta b, x} \sin \alpha + R_b \psi_{\theta b, xx} + \psi_{xb, x\theta} + \frac{\psi_{xb, \theta} \sin \alpha - \psi_{\theta b} \sin^2 \alpha}{R_b} \right]$$

$$+ R_b k G_{\theta zb} d_b \left(\psi_{\theta b} + \frac{w_{b, \theta} - v_b \cos \alpha}{R_b} \right)$$

$$- \frac{\tau_{\theta}}{r_{bc}} \frac{d_b}{2} \cos \alpha = 0 \quad (21)$$

به این ترتیب معادلات حاکم برحسب مقادیر نامعلوم مسأله شامل جایجایی‌های طولی، محیطی، و شعاعی، صفحه میانی رویه‌ها و مؤلفه‌های تنش‌های برشی هستند. این تنش‌ها را می‌توان به صورت $\tau_{\theta i}, \psi_{\theta i}, \psi_{xi}, w_i, v_i, u_i$ ($i = t, b$) ارائه می‌شوند. بنابراین در مجموع 12 معادله و 12 مجهول بدست می‌آید.

با قرار دادن $\alpha = 0$ در معادلات بدست آمده، معادلات حاکم بر پوسته‌های ساندویچی استوانه‌ای استخراج می‌شود. بدیهی است معادلات حاکمه مرتبه بالاتر برای یک پوسته مخروطی بسیار پیچیده است و به نظر می‌رسد بدست آوردن حل‌های تحلیلی دقیق غیرممکن است. در بخش بعدی روش حل سری‌های توانی برای بدست آوردن یک حل دقیق مسأله ارائه می‌شود. لازم به ذکر است که در این پژوهش، ورقه‌های نامتقارن متعامد مطالعه و

مسأله برای تحلیل سازه نیاز به دو نوع آنالیز است. اول باید با شرایط بارگذاری و شرایط مرزی پوسته را تحت آنالیز استاتیکی قرار داده و در ضمن تنظیمات لازم برای حل کمانش نیز انجام شود تا نرم‌افزار، تنش‌های ایجاد کننده ناپایداری استاتیکی در پوسته را ذخیره نماید. سپس با انتخاب نوع آنالیز کمانش، بارهای بحرانی استخراج می‌شوند. در این تحقیق، از آنجایی که حجم محاسبات الگوریتم بهینه‌سازی زیاد و نسبتاً زمان بر می‌باشد، آنالیز خطی کمانش انتخاب شده است. همگرایی جواب‌های بدست آمده با این روش، نشان دهنده صحت و دقت نتایج می‌باشد. شماتیک المان بندی شده پوسته‌های مخروطی و استوانه‌ای ساندویچی در شکل 3 آمده است.

بارهای بحرانی کمانش پوسته‌های مخروطی ساندویچی کامپوزیتی با $L/R_1=8$ و لایه چینی $(0/90/0/90)$ و $(0/90/0/90)$ هسته $(0/90/0/90)$ و شرایط مرزی مختلف با روش تحلیلی اشاره شده در پژوهش فوق و روش المان محدود بدست آمده و مورد مقایسه قرار گرفته است، که نتایج آن در جدول 1 آمده است. نتایج حاصل نشان می‌دهد که روش تحلیلی فوق با روش المان محدود، بطور کامل در تطابق است و اختلاف نتایج بدست آمده بسیار ناچیز بوده و در بدترین حالت آن، کمتر از 5% است.

برخی پارامترهای هندسی مثل ضخامت اثرات مهمی بر روی رفتار دینامیکی پوسته دارد. اثر ضخامت بر روی بارهای کمانش در جدول 2 بررسی شده است. برای این هدف، پوسته مخروطی با نیم‌زاویه رأس مخروط 30 درجه $(\alpha = 30)$ و با فرض ثابت ماندن R_1 و نسبت ضخامت رویه به ضخامت هسته، نسبت ضخامت به شعاع (h/R_1) از 0.1 تا 0.4 مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج نشان می‌دهد که افزایش در ضخامت باعث افزایش بار کمانش می‌شود. همچنین نتایج حاصل نشان می‌دهد که برای شرایط مرزی مختلف در هر نسبت ضخامتی، افزایش نسبت ضخامت به شعاع، افزایش پارامتر فرکانس متناظر را در بردارد.

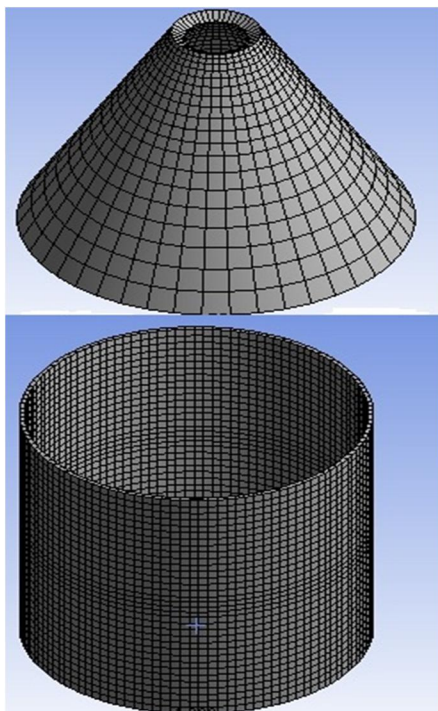


Fig. 3 Geometry of finite element of truncated conical and cylindrical sandwich shells

شکل 3 هندسه المان محدود پوسته‌های استوانه‌ای و مخروطی ساندویچی

است که در این پژوهش دوشروط مرزی در $x = \pm \frac{L}{2}$ بررسی شده است:

دو سرگیردار $^{(CC)}$:

$$u_i = 0, v_i = 0, w_i = 0, w'_i = 0, \psi_{xi} = 0, \psi_{\theta i} = 0 \quad (24)$$

تکیه‌گاه ساده $^{(SS)}$:

$$N_x^i = 0, v_i = 0, w_i = 0, M_x^i = 0, M_{x\theta}^i = 0, \tau_{xrc} = 0 \quad (25)$$

که نتیجه‌های تنش و گشتاور به منظور به کار بستن شرایط مرزی به صورت روابط (26-28) نوشته می‌شوند:

$$\begin{aligned} N_x^i &= A_{11i} \sum_{m=0}^{\infty} m a_{mi} x^{m-1} \cos n\theta \\ &+ \frac{A_{12i} n}{R_i} \sum_{m=0}^{\infty} b_{mi} x^m \cos n\theta \\ &+ \frac{A_{12i} \sin \alpha}{R_i} \sum_{m=0}^{\infty} a_{mi} x^m \cos n\theta \\ &+ \frac{A_{12i} \cos \alpha}{R_i} \sum_{m=0}^{\infty} c_{mi} x^m \cos n\theta \\ &+ B_{11i} \sum_{m=0}^{\infty} m d_{mi} x^{m-1} \cos n\theta \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} M_x^i &= B_{11i} \sum_{m=0}^{\infty} m b_{mi} x^{m-1} \cos n\theta \\ &+ D_{11i} \sum_{m=0}^{\infty} m d_{mi} x^m \cos n\theta \\ &+ \frac{D_{12i} n}{R_i} \sum_{m=0}^{\infty} f_{mi} x^m \cos n\theta \\ &+ \frac{D_{12i} \sin \alpha}{R_i} \sum_{m=0}^{\infty} d_{mi} x^m \cos n\theta \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} M_{x\theta}^i &= D_{66i} \sum_{m=0}^{\infty} m f_{mi} x^{m-1} \sin n\theta \\ &- \frac{D_{66i} n}{R_i} \sum_{m=0}^{\infty} d_{mi} x^{m-1} \sin n\theta \\ &+ \frac{D_{66i} \sin \alpha}{R_i} \sum_{m=0}^{\infty} f_{mi} x^m \sin n\theta \end{aligned} \quad (28)$$

در نهایت بارهای بحرانی کمانش و شکل مودهای مربوطه، با برابر صفر قراردادن دترمینان ماتریس ضرایب حاصل از به کار بستن شرایط مرزی در هردو انتهای مخروط بدست می‌آید.

4- اعتبارسنجی روش به کار رفته در تحلیل کمانش سازه ساندویچی کامپوزیتی

در این بخش به منظور اعتبارسنجی، نتایج بدست آمده با روش تحلیلی با روش المان محدود مقایسه می‌شود. برای آنالیز المان محدود از نرم‌افزار انسیس 15 استفاده شده است. مقادیر ورودی لازم برای تعریف المان، تعداد رویه‌ها، ضخامت هر رویه، ضخامت هسته، جنس رویه‌ها، جنس هسته، جهت گیری الیاف، لایه چینی، ضریب پواسون در جهات اصلی المان و مدول یانگ و برشی مربوط به جنس پوسته در جهات اصلی المان است. در این

1- Clamped-Clamped
2- Simply-Supported

جدول 1 مقایسه بارهای کمانش با روش‌های تحلیلی و المان محدود

Table 1 Comparing of buckling loads with analytical and finite element methods

شرایط مرزی	تکیه گاه ساده				دو سر گیردار			
	تحلیلی		المان محدود		تحلیلی		المان محدود	
روش	$p_{cr} \times 10^5$ (N)	$q_{cr} \times 10^5$ (Pa)	$p_{cr} \times 10^5$ (N)	$q_{cr} \times 10^5$ (Pa)	$p_{cr} \times 10^5$ (N)	$q_{cr} \times 10^5$ (Pa)	$p_{cr} \times 10^5$ (N)	$q_{cr} \times 10^5$ (Pa)
0/90/0/90)								
هسته/0/90/0/90)	2.9	1.2	2.98	1.21	2.85	1.2	2.97	1.21
0/90/0/90/هسته)	1.3	0.9	1.31	0.947	1.3	0.9	1.31	0.948

کامپوزیتی 100 کیلوگرم می باشد [1].

Objective Function = min ($m_{fairing}$)

2-1-5- تعیین متغیرهای طراحی

متغیرهای طراحی یک مجموعه از متغیرها هستند که سیستم را توصیف می کنند، آنها طوری انتخاب می شوند که یک طراحی را به طور منحصربه فرد مشخص کنند، این متغیرها باید دویه دو مستقل باشند، بنابراین انتخاب متغیرهای طراحی که تابع هدف را مینیمم کرده و همزمان تمامی قیود را برآورده می کند، یک طراحی بهینه است.

متغیرهای طراحی سازه فیرینگ شامل ضخامت هر رویه داخلی (d_b)، تعداد لایه‌های رویه داخلی (n_b)، ضخامت هسته (t_c)، ضخامت هر رویه بیرونی (d_t) و تعداد لایه‌های رویه بیرونی (n_t) است. توجه: (لایه چینی الیاف بصورت لایه‌های نامتقارن متعامد¹ در نظر گرفته شده است).

3-1-5- قیود اعمالی در بهینه‌سازی

تقریباً تمام مسائل واقعی بهینه سازی طراحی مسائل مقید هستند، یعنی بر روی مشخصات کارایی یک سیستم مهندسی بعضی محدودیت‌ها وجود دارد. فرموله کردن یک مسئله ریاضی می‌تواند شامل چند قید یعنی محدودیت‌هایی که بر روی بعضی رفتارهای مسئله اعمال می‌شود، باشد.

- قیود مرزهای فضای طراحی ممکن را مشخص می‌کنند.
- قیود می‌توانند بر روی موارد زیر اعمال شوند: هزینه، تنش معادل و بار بحرانی کمانش.

از آنجا که یکی از مهمترین پارامترهای مؤثر در استحکام سازه، موضوع کمانش است، این موضوع به عنوان قید اصلی در بهینه‌سازی، در نظر گرفته شده است.

$$\frac{p}{p_{cr}} + \frac{q}{q_{cr}} \leq 1$$

p و q بارهای وارده بر فیرینگ هستند که از دیسپلین مسیر محاسبه می شوند، بارهای بحرانی p_{cr} و q_{cr} از تحلیل سازه بدست می‌آیند.

4-1-5- فرایند بهینه سازی

در این پروژه، برای بهینه‌سازی مسئله، از نرم‌افزار متلب استفاده شده است. همانطور که ذکر شد، بهینه‌سازی، با استفاده از الگوریتم ترکیبی انجام گردید. بطوری که ابتدا با استفاده از الگوریتم ژنتیک، نقطه اولیه مناسبی را پیدا کرده و با این نقطه اولیه بهینه‌سازی با روش سیمپلکس ادامه می‌یابد. یکی از مزایای این روش آن است که همگرا شدن به نقطه بهینه با سرعت بیشتری اتفاق می‌افتد.

پس از انجام فرایند بهینه‌سازی، با رسم داده‌های باقی‌مانده، روند حرکت تابع هدف به سمت کمترین مقدار آشکار می‌شود، به عنوان نمونه، روند

جدول 2 اثر ضخامت بر روی فرکانس پوخته مخروطی ساندویچی کامپوزیتی

Table 2 Effect of thickness on the frequency of the composite sandwich conical shell

شرایط مرزی	تکیه گاه ساده			
	المان محدود	تحلیلی	المان محدود	تحلیلی
h/R_1				
0.1	0.78009	0.78	0.7798	0.77
0.2	1.5064	1.501	1.5062	1.5
0.4	3.0131	3.01	3.013	3

5 - بهینه‌سازی سازه فیرینگ ماهواره‌بر

1-5- تعریف مسئله بهینه‌سازی طراحی

بهینه سازی طراحی، یافتن یک طراحی منطقی است که بهترین طراحی ممکن برای دستیابی به یک هدف معین با توجه به قیود هندسی و عملکردی می باشد.

برای تبدیل مسئله طراحی یک سیستم فضایی در قالب مسئله بهینه سازی مقید، باید تابع هدف، متغیرهای طراحی و محدوده‌های بالا و پایین برای هر یک را مشخص نمود. در ادامه همچنین باید قیود تساوی و نامساوی را که محدوده‌ها را تعیین می‌کنند مشخص کرد. تابع هدف، میزان بهینه بودن طراحی را کمی کرده و بصورت معیاری که جهت جستجو را مشخص می‌کند، عمل می‌نماید. قیود، طراحی قابل قبول را مشخص می‌نماید. با داشتن یک مسئله بهینه‌سازی مقید به فرم ریاضی، برای مدل طراحی مفهومی سیستم فضایی یک حل مقید که تابع هدف را بهینه می‌کند (مینیمم - ماکزیمم)، به عنوان الگوریتمی تعریف می‌شود که گزینه‌های مناسب جهت سیستم را بر اساس معیارهای ارزیابی استخراج می‌کند.

مراحل فرموله کردن مسئله شامل سه بخش عمده مشخص کردن پارامترهای طراحی (متغیرهای طراحی)، تابع هدف طراحی و مشخص کردن قیود می‌باشد.

در این پژوهش، هدف طراحی بهینه سازه ساندویچی کامپوزیتی فیرینگ یک ماهواره‌بر سوخت مایع دو مرحله‌ای است. به عنوان مثال، ماموریت ماهواره‌بر سفیر، انتقال یک ماهواره 50 کیلوگرمی (سفیر امید) به مدار دایروی در ارتفاع 250 کیلومتری و سرعت مداری 7755 متر بر ثانیه است. براین اساس در این بخش از کار، بایستی مراحل زیر انجام شوند:

1-1-5- تعیین تابع هدف

برای بهبود طراحی، بایستی حرکت در جهت کاهش هدف باشد به نحوی که که از قیود تجاوز نکند. در این مسئله، تابع هدف مینیمم کردن جرم فیرینگ است. لازم به ذکر است که وزن فیرینگ سفیر با ساختار مشبک و

1- Anti-symmetric cross-ply Laminates

بهینه‌سازی، متغیرهای طراحی و تابع هدف با ارضای قیود مربوطه بدست می‌آید. نتایج حاصل از بهینه‌سازی دو بخش فیرینگ در جدول 4 آمده است.

جرم کل فیرینگ بصورت رابطه (29) محاسبه می‌شود:

$$m_{\text{fairing}} = (m_{\text{cylindrical}} + m_{\text{conical}}) \times 1.05 \quad (29)$$

که با توجه به نتایج بدست آمده جرم فیرینگ برای شرط مرزی تکیه‌گاه ساده 61.26 کیلوگرم و برای شرط مرزی دوسرگیردار 57.25 کیلوگرم خواهد شد.

6- نتیجه‌گیری

همان‌طور که در چکیده هم اشاره شده، این پژوهش در دو فاز انجام گرفته است. در بخش اول، تحلیل کماتش سازه‌ی مخروطی ساندویچی کامپوزیتی با استفاده از تئوری‌های مرتبه بالا انجام گرفت که نتایج حاصل از روش تحلیلی با روش المان محدود مورد مقایسه قرار گرفته است، نتایج حاصل که در جداول 1 و 2 آمده، حاکی از صحت و دقت روش به کار رفته است. اختلاف نتایج بدست آمده بسیار ناچیز و در بدترین حالت به کمتر از 5 درصد می‌رسد. در فاز دوم، بهینه‌سازی سازه با استفاده از الگوریتم ترکیبی انجام گرفته است. نتایج بهینه‌سازی نشان می‌دهد که وزن فیرینگ ماهواره‌بر نمونه در این مطالعه نسبت به فیرینگ مشابه واقعی آن حدود 40% کاهش یافته است که این نتیجه مهم می‌تواند باعث کاهش وزن کل ماهواره‌بر و در نهایت کاهش هزینه شود. از طرفی با این کاهش وزن می‌توان محموله سنگین‌تری را در مدار قرار داد. شایان ذکر است این کاهش وزن قابل توجه، ناشی از تغییر همزمان جنس سازه و بهینه‌سازی می‌باشد که البته بخش عمده این کاهش وزن به دلیل تغییر جنس به سازه ساندویچی کامپوزیتی با هسته فوم بوده و با بهینه‌سازی، کاهش وزن بیشتری هم حاصل شده است. به دلیل نداشتن اطلاعات لازم در مورد خصوصیات سازه به کار رفته در فیرینگ سفیر (بویژه ضخامت) تفکیک درصد کاهش وزن ناشی از تغییر جنس و درصد کاهش ناشی از بهینه‌سازی امکان‌پذیر نبود.

7- مراجع

- [1] *Informations of spacerockets*, Accessed 10 January 2015; http://www.b14643.de/Spacerockets_1/Rest_World/Safir-1-IRILV/Description/Frame.htm.
- [2] L. Tong, TK. Wang, Buckling analysis of laminated composite conical shells, *Composites Science and Technology*, Vol. 47, pp. 57-63, 1993.
- [3] AH. Sofiyev, The buckling of an orthotropic composite truncated conical shell with continuously varying thickness subject to a time dependent external pressure, *International Journal of Composite Materials: Part B*, Vol. 34, No. 3, pp. 227-233, 2003.
- [4] C. Zhong, H-G. Reimerdes, Stability behavior of cylindrical and conical sandwich shells with flexible core, *Journal of Sandwich Structures and Materials*, Vol. 9, No. 2, pp. 143-166, 2007.
- [5] A. Lavasani, Simple solutions for buckling of conical shells

بهینه‌سازی پوسته مخروطی فیرینگ تحت شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده در شکل 4 بخوبی نمایانگر این بحث است.

مسأله‌ی مورد نظر عبارتست از یافتن تعداد لایه‌های رویه‌های بیرونی و داخلی، ضخامت رویه‌های بیرونی و داخلی و ضخامت هسته، با انتخاب مناسب‌ترین جنس ماده که خواص آن در جدول 3 آورده شده است (این ماده بر اساس تحقیقی که در خصوص جنس فیرینگ ماهواره‌برهای روز دنیا انجام گرفته، انتخاب شده است)، برای دستیابی به کمترین وزن و بیشترین استحکام بطوری که قادر به انجام ماموریت تعریف شده باشد.

فیرینگ که از دو بخش استوانه‌ای و مخروطی تشکیل شده، ابعاد آن را با ابعاد ماهواره‌بر سفیر شبیه‌سازی نموده و هر دو بخش آن را تحت شرایط مرزی مختلف دوسرگیردار و تکیه‌گاه ساده و بارگذاری ترکیبی نیروی محوری فشاری p و فشار یکنواخت عمود بر سطح q مورد آنالیز قرار گرفته و پس از

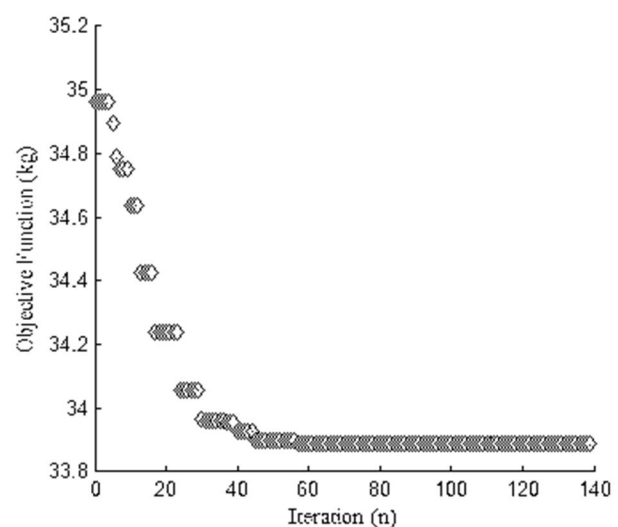


Fig. 4 Weight optimization graph of conical shell of fairing

شکل 4 نمودار بهینه‌سازی وزن پوسته مخروطی فیرینگ ماهواره‌بر

جدول 3 خواص مواد به کار رفته در پوسته ساندویچی کامپوزیتی مخروطی

Table 3 Material properties used in conical composite sandwich shell

خواص هسته	خواص رویه‌ها
$E_1=E_2=E_3=0.00689\text{GPa}$	$E_1=131\text{GPa}$
$G_{12}=G_{23}=G_{13}=0.00345\text{GPa}$	$E_2=E_3=10.34\text{GPa}$
$\nu=0$	$G_{12}=G_{23}=6.895\text{GPa}$
$\rho=97\text{kg/m}^3$	$G_{13}=6.205\text{GPa}$
	$\nu_{12}=\nu_{13}=0.22, \nu_{23}=0.49$
	$\rho=1627\text{kg/m}^3$

جدول 4 نتایج حاصل از بهینه‌سازی دو بخش فیرینگ تحت شرایط مرزی مختلف

Table 4 The results of the optimization of the fairing under different boundary conditions

part	B.C.	n_b	d_b (mm)	t_c (mm)	n_t	d_t (mm)	m (kg)	p_{cr} (kN)	q_{cr} (MPa)
مخروطی	SS	12	0.48	14.8	12	0.4867	33.8884	50	4.5
	CC	10	0.45	15.4	10	0.51	33.9078	50	3
استوانه ای	SS	10	0.476	15.3	10	0.497	24.4560	50	5
	CC	8	0.48	20	8	0.49	20.6092	50	2

- [14] H. Salimi, B. Saranjam, A. Hoseini Fard, M. Ahmadzadeh, Use of genetic algorithms for optimal design of sandwich panels subjected to underwater shock loading, *Journal of Mechanical Engineering*, Vol. 58, No. 3, pp. 156-164, 2012.
- [15] C. Yuan, O. Bergsma, S. Koussios, L. Zu, A. Beukers, Optimization of sandwich composites fuselages under flight loads, *Applied Composite Materials*, Vol. 19, pp. 47-64, 2012.
- [16] C. Yuan, N.B. Roozen, O. Bergsma, A. Beukers, Multi-discipline optimization of sandwich cylinders under a point force excitation, *Aerospace Science and Technology*, Vol. 30, No. 1, pp. 183-191, 2013.
- [17] R. Ullah, D. Zhou, P. Zhou, M. Hussain, M. AmjadSohail, An approach for space launch vehicle conceptual design and multi-attribute evaluation, *Aerospace Science and Technology*, Vol. 25, No. 1, pp. 65-74, 2013.
- [18] Y. Ma, X. Yao, Y. Su, Shape optimization and material gradient design of the sharp hot structure, *Acta Astronautica*, Vol. 103, pp. 106-112, 2014.
- [19] S. Ebrahimi, N. Vahdatazad, Multiobjective optimization and sensitivity analysis of honeycomb sandwich cylindrical columns under axial crushing loads, *Thin-Walled Structures*, Vol. 88, pp. 90-104, 2015.
- [20] A. Baroutaji, M. D. Gilchrist, D. Smyth, A. G. Olabi, Analysis and optimization of sandwich tubes energy absorbers under lateral loading, *International Journal of Impact Engineering*, In Press, Corrected Proof, Available online 7 February 2015.
- [21] J. N. Reddy, *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis*, Second Edition, pp. 449-480, Texas, 2004.
- composed of functionally graded materials, *Journal of Solid Mechanics*, Vol. 1, No. 2, pp. 108-117, 2009.
- [6] F. Shadmehri, SV. Hoa, M. Hojjati, Buckling of conical composite shells, *Composite Structures*, Vol. 94, No. 2, pp. 787-792, 2012.
- [7] AH. Sofiyev, The vibration and buckling of sandwich cylindrical shells covered by different coatings subjected to the hydrostatic pressure, *Composite Structures*, Vol. 117, pp. 124-134, 2014.
- [8] O. Rahmani, SMR. Khalili, K. Malekzadeh, Free vibration response of composite sandwich cylindrical shell with flexible core, *Composite Structures*, Vol. 92, No. 5, pp. 1269-1281, 2010.
- [9] K. Malekzadeh, MR. Khalili, RK. Mittal, Local and global damped vibrations of plates with a viscoelastic soft flexible core: an improved high-order approach, *Journal of Sandwich Structures & Materials*, Vol. 7, No. 5, pp. 431-456, 2005.
- [10] K.M. Fard, M. Livani, The buckling of truncated conical sandwich panels under axial compression and external pressure, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 229, pp. 1965-1978, 2015.
- [11] H. Biglari, AA. Jafari, High-order free vibrations of doubly-curved sandwich panels with flexible core based on a refined three-layered theory, *Composite Structures*, Vol. 92, No. 11, pp. 2685-2694, 2010.
- [12] J. Seidi, , S.M.R. Khalili, K. Malekzadeh, Temperature-dependent buckling analysis of sandwich truncated conical shells with FG facesheets, *Composite Structures*, Vol. 131, pp. 682-691, 2015.
- [13] J. Bayley Douglas, *Design optimization of a space launch vehicle using a genetic algorithm*, PhD Thesis, Auburn University, Auburn, Alabama, 2007.