مجله مهندسی مکانیک مدرس، تیر 1395، دوره 16، شماره 4، ص‌ص 155-162

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

تحلیل ارتعاشات کوپل هیدروالاستیک در مخازن کروی با کفی غشایی حاوی سیال بدون اصطکاک

بهنام چراغی[1]، بابک میرزاوند بروجنی[2*]، مازیار شفائی[2]

1- کارشناسی ارشد ، مهندسی هوافضا، دانشگاه تهران، تهران
2- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه تهران، تهران
* تهران، صندوق پستی143951561، mirzavand@ut.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 29 آذر 1394
پذیرش: 11 اسفند 1394
ارائه در سایت: 28 فروردین 1395

کلید واژگان:
ارتعاشات کوپل هیدروالاستیک
مخزن کروی
کفی غشایی
سطح آزاد سیال

چکیده

یک تحلیل ارتعاش هم‌گیر هیدروالاستیک برای سیال بدون اصطکاک با درنظر گرفتن سطح آزاد سیال و همچنین کف انعطاف‌پذیر، در مخزن کروی ارائه شده‌است. دیواره به صورت صلب درنظر گرفته شده‌است. کف به صورت غشایی در فاصله‌ی مشخص از مرکز کره قراردارد، همچنین سطح سیال نیز دریک فاصله مشخص دربالای مرکز کره درنظر گرفته شده‌است. همچنین درنهایت با استفاده از روش گالرکین و اعمال آن بر معادلات نهایی، نتایج موردنظر بدست آمده‌اند. تأثیر پارامترهای مختلفی ازجمله؛ کشش کف، چگالی سیال و پارامترهای هندسی سیستم شامل شعاع مخزن، پارامتر مشخص کننده‌ی فاصله‌ی سطح سیال و پارامتر مشخص کننده‌ی فاصله‌ی کف، دیده شده‌است. استفاده از سیستم دستگاه‌های مختصات اصلی و کمکی به‌منظور تطابق مدل درنظر گرفته‌شده با فیزیک واقعی مورد نظر ما، امری است اجتناب ناپذیر که در این مطالعه مورد استفاده قرار گرفته‌است. فرکانس‌های طبیعی تلاطم این سیستم سیال و سازه ارائه شده‌اند که نشان می‌دهد؛ نتایج بدست آمده از این حل تحلیلی در تطابق با نتایج حاصل از مدل‌سازی سیستم مشابه در نرم‌افزارانسیس نیز می‌باشد. این نتایج نشان‌دهنده‌ی صحت روش تحلیلی ارائه شده است که می‌تواند به عنوان حالت پایه برای مسائل پیچیده‌تر با اعمال المان‌های خاص، مورد استفاده قرار گیرد.

Hydroelastic coupled vibrations in spherical containers of membrane bottom, partially filled with frictionless liquids

Behnam Cheraghi, Babak Mirzavand Boroujeni*, Maziar Shafaee

Department of New Sciences and Technology, University of Tehran, Tehran, Iran.
*P.O. B .143951561, Tehran, Iran, mirzavand@ut.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 20 December 2015
Accepted 01 March 2016
Available Online 16 April 2016

Keywords:
Hydroelastic coupled vibrations
spherical container
membrane bottom
liquid free surface

ABSTRACT

Free hydroelastic coupled vibration analysis of frictionless liquids with a free surface in spherical tanks with a flexible bottom has been performed. The side wall has been considered as a rigid body. The flexible bottom behaves as a membrane at a certain distance below the center point, and the free surface is considered as a cross cut at the top of the center point. The spherical coordinate system is adopted to derive the governing coupled equations, and finally a vibration analysis is carried out, using the traditional Galerkin's method, leading to closed-form solutions. Effects of various system parameters, i.e., membrane tension, liquid density, geometric parameters of the system such as the container radius, free surface distance discriminate parameter, and bottom distance discriminate parameter on the vibration behavior are investigated. The novelty of the present work is to obtain direct formulas for hydroelastic coupled vibration analysis of the mentioned system, which can be easily used in engineering design applications. Coupling between two mode numbers can be clearly seen in the results, in other words, there is a coupling between vibration modes as interaction in spherical geometry.

1- مقدمه

یکی از مهمترین و پرکاربردترین چیدمان‌های سازه‌ای، مخزن کروی تمام‌پر یا قسمتی‌پر[1] می‌باشد. به علت کمینه بودن حجم این نوع از مخازن و متعاقب آن کمینه بودن جرم آن‌ها، همواره مخازن کروی مورد توجه بوده‌اند. تحلیل ارتعاش هیدروالاستیک برای مخازن تمام یا قسمتی‌پر در انواع هندسه‌ها، موضوع بسیاری از مطالعه‌ها بوده‌است. به‌دلیل پیچیدگی بیشتر سیستم دستگاه مختصات کروی درمقایسه با سیستم‌های دستگاه مختصات استوانه‌ای و کارتزین، تحلیل ارتعاشی برای مخازن کروی درمقایسه با دیگر انواع مخازن به صورت محدودتری صورت گرفته است.

به‌منظور رسیدن به مدل سیستم سازه سیال هم‌گیر[2]، چندین تحلیل ارتعاشی ارائه شده‌است ، که دربرخی، کف به‌صورت یک صفحه‌ی ارتجاعی ایفای نقش می‌کند [1-4]، ویا به‌صورت

[1] Partially filled

[2] Coupled

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:
B. Cheraghi, B. Mirzavand Boroujeni, M. Shafaee, Hydroelastic coupled vibrations in spherical containers of membrane bottom, partially filled with frictionless liquids, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 4, pp. 155-162, 2016 (in Persian)

غشا[1] [3-7]. درتعدادی از مطالعه‌های گفته‌شده نیز اثر کشش سطحی[2] دیده شده‌است [1-4,7,8]. به‌عنوان نتایج کلی این مطالعات می‌توان گفت؛ به‌طور کلی فرکانس‌های طبیعی هم‌گیر تلاطم[3]، با کاهش سختی[4] کف، مقداری کم می‌شوند. درحالی که اثر کشش سطحی، فرکانس‌های طبیعی تلاطم را افزایش می‌دهند. درچنین سیستم‌هایی، رفتار دینامیکی سیال و کف انعطاف‌پذیر به صورت هم‌گیر می‌باشند که درجه هریک وابسته به پارامترهای دخیل در آن سیستم است، مانند؛ پارامتر ارتفاع سیال، نسبت چگالی‌ها ویا پارامتر سختی کف. چیبا و همکاران [8] یک تحلیل جامع ارتعاشات هم‌گیر را در مخزن استوانه‌ای همراه با سطح آزاد سیال و کف غشا، برای انواعی از شرایط مرزی ارائه داده‌اند. تحلیل‌های پایه‌ای برای هندسه‌ی کروی نیز درمطالعات زیادی گزارش شده‌اند [9-11]. همچنین تحلیلی هیدروالاستیک با استفاده از روش گالرکین[5] نیز انجام شده است[12]. معادلات پایه و اثبات آن‌ها را در دو کتاب مطرح و مرجع معرفی شده می‌یابیم [13، 14]. سالم و همکاران [15] تحلیلی برای تلاطم سیال در حالت مخازن قسمتی پر از سیال بر مبنای روش آونگی ارائه نموده‌اند. مخازن انعطاف‌پذیر نیز در تحلیل آقای نیکولیکی و بیلیگان [16] دیده می‌شود. عموم مطالعات مربوط به حل‌های تحلیلی در این زمینه، بصورت مسائل مقدار مرزی و البته شرایط مرزی بسیار پیچیده می‌باشند. مطالعات در حوزه‌ی حل‌های تحلیلی برای هندسه‌ی استوانه‌ای و مستطیلی در دو و سه بعد به وفور گزارش شده‌است اما در هندسه‌ی کروی جز در چندین مورد پایه‌ای، مورد برجسته‌ای گزارش نشده‌است.

در مطالعه‌ی حاضر، تمرکز ما بر ارتعاشات هیدروالاستیک هم‌گیر در محیط کروی با دیواره‌ی صلب و یک کف انعطاف‌پذیر است که به‌صورت قسمتی‌پر از سیال بدون اصطکاک درنظر گرفته می‌شود، کف به صورت غشا فرض شده‌است. تبدیلات مختصاتی خاص و استفاده از سیستم دستگاه مختصات کمکی نیز مشهود است. در نتایج عددی، فرکانس‌های هم‌گیر ارتعاشی برای مقادیر مشخص پارامترهای سیستم، تعیین شده‌اند.

2- معادلات حاکم

یک مخزن کروی با دیواره‌ی صلب و کف غشا، در زاویه‌ی θ_2 که تا زاویه‌ی سطح θ_1 از یک سیال غیرلزج و تراکم‌ناپذیر پر شده‌است را مطابق شکل 1 درنظر می‌گیریم، همچنین سیستم دستگاه مختصات اصلی کروی (r,θ,φ) و سیستم دستگاه مختصات کمکی استوانه‌ای $(\Re,\Theta,Z)$ نیز نشان داده شده است. برای سرعت‌های کم سیال، معادلات حاکم می‌توانند به فرم خطی شده درآیند [8، 12]. از تغییر شکل استاتیکی غشای کف صرفنظر می‌کنیم. ازآنجا که رفتار سیال به صورت غیرچرخشی فرض شده، پتانسیل سرعت سیال $\Phi(r,\theta,\varphi,t)$، درمعادله‌ی لاپلاس به صورت رابطه (1) صدق می‌کند[13] :

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} = 0 \quad , (0 < r < R \quad \theta_1 < \theta < \theta_2 \quad 0 < \varphi < 2\pi) \tag{1}$$

یکی از شرایط مرزی که باید ارضا شود، شرط مرزی دیواره است. این شرط مرزی بیان می‌کند که مولفه‌ی سرعت عمودی سیال درمواجهه با دیواره کروی مخزن صفر می‌شود که به صورت رابطه (2) بیان می‌شود:

[1] Membrane
[2] Surface tension
[3] Sloshing
[4] Stiffness
[5] Galerkin

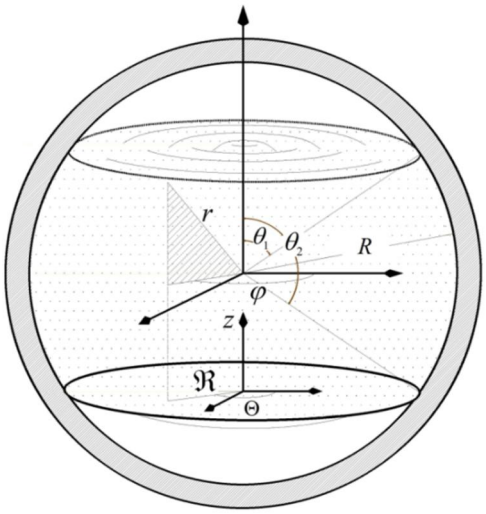

Fig. 1 Spherical container with a membrane bottom and adopted coordinate systems

شکل 1 مخزن کروی با کفی غشایی حاوی سیال و دستگاه‌های مختصات

$$\frac{d\Phi}{dr} = 0 \ , \ r = R \tag{2}$$

شرایط مرزی درسطح آزاد سیال شامل شرط مرزی سطح آزاد سینماتیکی[6] و شرط مرزی سطح آزاد دینامیکی[7] است. در معادله‌ی ناویر استوکس، با ثابت بودن ویسکوزیته دینامیکی[8] و شرط غیر لزج بودن[9] (صرفنظر از اثرات ویسکوزیته)، معادله‌ی اولر[10] حاصل می‌شود. با درنظر گرفتن نیروهای حجمی پایستار[11] و عملیات ریاضی و همچنین شرط غیرچرخشی[12] بودن سیال، معادله به فرم مورد نظر درمی‌آید. به‌دلیل اینکه نیروهای گرانشی به طور ذاتی درمورد موج‌های سطحی دارای اهمیت می‌باشند، جاذبه باید در جمله‌ی نیروهای حجمی درنظر گرفته شود [13]. همچنین در سطح آزاد، فشار برابر است با فشار محیط[13] که معادل با مقدار صفر جمله‌ی فشار در معادله‌ی یادشده می‌باشد. در نهایت به دلیل کوچک بودن مؤلفه‌های سرعت جریان سیال در تحلیل مورد نظر ما و خطی کردن معادلات، جمله‌ی مربوط به سرعت خود سیال در معادله حذف خواهدشد. ترم‌های کشش سطحی[14] و دیگر ترم‌ها می‌توانند به این معادله وارد افزوده شوند. شرط مرزی سطح آزاد دینامیکی در دستگاه مختصات کمکی استوانه‌ای به صورت رابطه (3) بیان می‌شود [14]:

$$\frac{d\Phi}{dt} + g\Gamma = \text{const} \ , \ z = h \tag{3}$$

که درآن Γ، تغییر مکان سطح آزاد سیال و g، شتاب جاذبه می‌باشند. با تبدیل معادله‌ی (3) از سیستم دستگاه مختصات کمکی استوانه‌ای به سیستم دستگاه مختصات کروی اصلی، معادله‌ی شرط مرزی سطح آزاد دینامیکی را می‌توان به صورت رابطه (4) بیان نمود:

$$\frac{d\Phi}{dt} + g\Gamma = \text{const} \ , \ r\cos\theta = R\cos\theta_1 \tag{4}$$

شرط مرزی دیگری که درسطح آزاد سیال حاکم است، شرط مرزی

[6] Free Surface Kinematic BC
[7] Free Surface Dynamic BC
[8] Dynamic Viscosity
[9] Inviscid
[10] Euler
[11] Conservative
[12] Irrotational
[13] Ambient Pressure
[14] Surface Tension

سینماتیکی سطح آزاد سیال است. بطور کلی این شرط بیان کننده‌ی برابری سرعت مرز و سیال داخل می‌باشد [13]. فرآیند انجام شده‌ی بالا برای تبدیل شرط مرزی سطح آزاد دینامیکی از دستگاه مختصات کمکی به اصلی برای شرط مرزی سینماتیکی نیز انجام می‌شود. شرط مرزی سینماتیکی سطح آزاد سیال در سیستم دستگاه مختصات کمکی استوانه‌ای به صورت زیر ارائه می شود [8، 13، 14]:

$$\frac{d\Phi}{dz} = \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \ , \ z = h \tag{5}$$

که با تبدیل به دستگاه مختصات اصلی کروی به صورت رابطه (6) بیان می‌شود:

$$\cos\theta \frac{d\Phi}{dr} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{d\Phi}{d\theta} = \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \ , \ r\cos\theta = R\cos\theta_1 \tag{6}$$

برای برقراری شرط سازگاری[1] سیال و غشا در کف، مولفه‌ی عمودی سرعت سیال و سرعت غشای کف نیز باید با یکدیگر برابر باشند. در سیستم دستگاه مختصات کمکی استوانه‌ای، این شرط به صورت ساده‌ی (7) نوشته می‌شود [8, 14]:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d\Phi}{dz} \ , \ z = 0 \tag{7}$$

که در رابطه (7) W، خیز غشای کف می‌باشد. با تبدیل این معادله از سیستم دستگاه مختصات کمکی استوانه‌ای به سیستم مختصات اصلی کروی به شرط مرزی سازگاری در کف به‌صورت رابطه (8) می‌رسیم:

$$\cos\theta \frac{d\Phi}{dr} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{d\Phi}{d\theta} = \frac{\partial W}{\partial t} \ , \ r\cos\theta = R\cos\theta_2 \tag{8}$$

معادله‌ی حرکت غشای کف در دستگاه مختصات کمکی استوانه‌ای به صورت (9) می‌باشد [8، 14]:

$$T\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \Re^2} + \frac{1}{\Re}\frac{\partial W}{\partial \Re} - \frac{1}{\Re^2}\frac{\partial^2 W}{\partial \Theta^2}\right) = \rho_m \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - \rho_f \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \rho_f g W \ , \ z = 0 \tag{9}$$

که درآن ρ_f و ρ_m به‌ترتیب چگالی سیال و چگالی سطحی کف می‌باشند.

این معادله در سیستم دستگاه مختصات اصلی کروی، شکل (10) را به خود می‌گیرد:

$$T\left(\left(\frac{1}{r} + \frac{\cos\theta^2}{r}\right)\frac{\partial W}{\partial r} + \left(\frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta} - \frac{2\cos\theta\sin\theta}{r^2}\right)\frac{\partial W}{\partial \theta} - \left(\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\right)\frac{\partial^2 W}{\partial\theta\partial r} + (\sin\theta^2)\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \left(\frac{\cos\theta^2}{r^2}\right)\frac{\partial^2 W}{\partial\theta^2} + \left(\frac{1}{r^2\sin\theta^2}\right)\frac{\partial^2 W}{\partial\varphi^2}\right) = \rho_m \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - \rho_f \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \rho_f g W \ , \ r\cos\theta = R\cos\theta_2 \tag{10}$$

که درآن T، کشش کف و ρ_m، جرم واحد سطح غشای کف می‌باشد. درنهایت، محل اتصال دیواره مخزن به غشای کف که همان مرز حلقوی غشا می‌باشد، ایجاب می‌کند که [8، 13]:

$$W = 0 \ , \ r = R \ \& \ \theta = \theta_2 \tag{11}$$

3- روش و فرآیند حل

حل معادله‌ی لاپلاس (1)، که می‌تواند شرایط مرزی را برآورده نماید، به صورت (12) ارائه و پیشنهاد می‌شود:

$$\Phi_t(r,\theta,\varphi,t) = i\omega e^{i\omega t}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} r^n P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi + i\omega e^{i\omega t}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} r^{-n-1} P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi + i\omega e^{i\omega t}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} r^n P_n^m(\cos\theta)\sin m\varphi + i\omega e^{i\omega t}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} r^{-n-1} P_n^m(\cos\theta)\sin m\varphi \tag{12}$$

همچنین پاسخ تغییر شکل غشای کف به‌صورت (13) پیشنهاد می‌شود:

$$W_t(r,\theta,\varphi,t) = e^{i\omega t}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[W_{mn}\left((r^n + r^{-n-1})P_n^m(\cos\theta) - \left(R^n + R^{-n-1}\right)P_n^m(\cos\theta_2)\cos m\varphi\right)\right] \tag{13}$$

که $P_n^m(\mathrm{Cos}\theta)$، تابع لژاندر وابسته‌ی نوع اول[2] می‌باشد، همچنین A_{mn}، B_{mn}، C_{mn}، D_{mn} و W_{mn} نیز ضرایب مجهول هستند. لازم به‌ذکر است که فرم جواب درنظر گرفته شده برای خیز کف (13)، به صورت خودبه‌خود شرط مرزی حلقوی اتصال کف و دیواره‌ی (11) را ارضا می‌نماید.

با اعمال فرم جواب پیشنهادی (12) در شرط مرزی دیواره‌ی (3)، نتیجه‌ی (4) حاصل می‌شود:

$$\left.\frac{\partial \Phi_t}{\partial r}\right|_{r=R} \equiv i\omega e^{i\omega t}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} n\, r^n P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi + i\omega e^{i\omega t}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} -B_{mn}(n+1) r^{-n-1} P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi + i\omega e^{i\omega t}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} n\, r^n P_n^m(\cos\theta)\sin m\varphi + i\omega e^{i\omega t}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} -C_{mn}(n+1) r^{-n-1} P_n^m(\cos\theta)\sin m\varphi \tag{14}$$

برطبق رابطه‌ی (14) می‌توان گفت درصورتی که رابطه‌ی (15) برقرار باشد، فرم جواب پیشنهاد شده‌ی (12)، شرط مرزی دیواره را می‌تواند ارضا نماید:

$$B_{mn} = A_{mn} n R^{2n+2} \quad \& \quad C_{mn} = D_{mn} n R^{2n+2} \tag{15}$$

بنابراین، جواب پیشنهاد شده‌ی (12) با استفاده از رابطه‌ی (15) به صورت (16) اصلاح می‌گردد:

$$\Phi_{t_m} = i\omega e^{i\omega t}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}(r^n + nR^{2n+2}r^{-n-1})P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi + i\omega e^{i\omega t}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} C_{mn}(r^n + nR^{2n+2}r^{-n-1})P_n^m(\cos\theta)\sin m\varphi \tag{16}$$

دو شرط مرزی سطح آزاد دینامیکی (4) و شرط مرزی سطح آزاد

[1] Compatibility Condition

[2] Associated Legendre Function of the First Kind

سینماتیکی (6) می‌توانند به صورت (17) تلفیق شوند:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + g\left(\cos\theta\frac{\partial\Phi}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) = 0 \quad , \ r\cos\theta = R\cos\theta_1 \tag{17}$$

قراردهی جواب اصلاح شده‌ی پیشنهادی (16) در رابطه‌ی شرط مرزی تلفیق شده‌ی (17)، منجر به جواب (18) می‌شود:

$$(-\omega^2)\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_{mn}(f_1) + C_{mn}(f_2)\right) + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_{mn}(U_1) + C_{mn}(U_2)\right) = R_1 \quad , \ r\cos\theta = R\cos\theta_1 \tag{18}$$

که توابع f_1 ، f_2 ، U_1 و U_2 ، توابعی از پارامترهای چگالی سیال و همچنین چندین پارامتر هندسی و غیر هندسی دیگر هستند و به تفصیل در پیوست الف داده شده‌اند و همچنین R_1 نیز عبارت باقیمانده‌ی[1] معادله‌ی (17) است. مجددا با قراردهی حل‌های پیشنهاد شده و اصلاح شده برای معادله‌ی لاپلاس (16) و همچنین حل پیشنهادی برای خیز کف (13) در معادله‌ی سازگاری در کف (6)، ضریب مجهول W_{mn} برحسب دو ضریب مجهول دیگر یعنی A_{mn} و C_{mn} به صورت (19) نتیجه می‌شود:

$$W_{mn} = A_{mn}\Lambda_1 + C_{mn}\Lambda_2 \quad , \ r\cos\theta = R\cos\theta_2 \tag{19}$$

که درآن Λ_1 و Λ_2 توابعی از پارامترهای سیستم‌اند و در پیوست ب به صورت مبسوط آورده شده‌اند. همچون روند بالا، با قراردهی فرم پاسخ‌های پیشنهادی در معادله‌ی حرکت غشای (10) خواهیم داشت:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\{W_{mn}[T(F_1) + F_2]\} - \omega^2\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\{[W_{mn}(F_3)] + [A_{mn}(F_4) + C_{mn}(G_4)]\} = R_2 \quad , \ r\cos\theta = R\cos\theta_2 \tag{20}$$

که F_1 تا F_4 و G_4، توابعی از پارامترهای سیستم می‌باشند که در پیوست ج به صورت بسط یافته ارائه شده‌اند، همچنین R_2 نیز عبارت باقیمانده‌ی معادله‌ی (10) است. بعد از آن با قراردهی نتیجه‌ی معادله‌ی سازگاری در کف (19)، در نتیجه‌ی معادله‌ی حرکت غشای (18)، داریم:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}[A_{mn}\Lambda_1(T(F_1) + F_2)] + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}[C_{mn}\Lambda_2(T(F_1) + F_2)] - \omega^2\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}[A_{mn}(\Lambda_1F_3 + F_4) + C_{mn}(\Lambda_2F_3 + G_4)] \quad , \ r\cos\theta = R\cos\theta_2 \tag{21}$$

مطابق با روش گالرکین، عبارات باقیمانده‌ی معادله‌ی سطح سیال و معادله‌ی غشای کف متعامد بر جواب خواهد بود، یعنی برای معادله‌ی سطح آزاد سیال خواهیم داشت:

$$\int\int(R_1)\left((r^n + r^{-n-1})P_n^m(\cos\theta)(\cos m\varphi + \sin m\varphi)\right)\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta^2}\right)^2 d\theta\, d\varphi = \emptyset \tag{22}$$

همچنین برای معادله‌ی کف نیز داریم:

$$\int\int(R_2)\left((r^n + r^{-n-1})P_n^m(\cos\theta)(\cos m\varphi + \sin m\varphi)\right)\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta^2}\right)^2 d\theta\, d\varphi = \emptyset \tag{23}$$

درنهایت برای وجود جواب غیر بدیهی باید دترمینان سیستم معادلات (22) و (23) برابر با صفر شود که این نیز منجر به بدست آمدن فرکانس‌های سیستم، می‌گردد.

4- نتایج عددی

نتایج حاصل از تحلیل پارامتری برای نیم‌موج‌های مختلف در ادامه آورده شده‌اند. این نتایج با حذف مقادیر منفی و همچنین مقادیر مختلط به علت عدم تطابق با واقعیت فیزیکی، بدست آمده‌اند. فرکانس‌های ارتعاشی سیستم هم‌گیر سیال و سازه، برای پارامترهای مختلف سیستم شامل؛ پارامتر کشش غشای کف T، پارامتر چگالی سیال ρ_f، پارامتر چگالی سطحی غشا ρ_m، شتاب گرانش g، همچنین پارامترهای هندسی سیستم شامل پارامتر شعاع بیرونی R، پارامتر تعیین کننده‌ی فاصله‌ی سطح سیال θ_1 و درنهایت پارامتر تعیین کننده‌ی فاصله‌ی کف غشا از مرکز θ_2، که در جدول 1 ارائه شده‌اند، بدست آمده‌اند و نتایج آن در جدول 2 ارائه شده‌اند.

4-1- مدل نرم‌افزاری و نتایج

\مخزن کروی به شعاع 0.5 متر و همچنین سطح آزاد سیال و کف بترتیب در زوایای θ_1 و θ_2، در نرم‌افزار انسیس مدل شده‌است. دیواره به صورت صلب و کف به صورت انعطاف‌پذیر مقید شده‌است. شکل 2، مود دوم و جدول 3، مودهای اول تا دهم این مدل را ارایه می‌دهند.

لازم به‌ذکر است که ستون‌ها نشان دهنده‌ی عدد نیم طول موج n، و سطرها نشان دهنده‌ی عدد نیم طول موج m می‌باشند. همچنین درجایی که عدد نیم طول موج m از عدد نیم طول موج n بزرگتر باشد، باتوجه به فرم جواب‌های درنظر گرفته شده، جوابی غیربدیهی بدست نمی‌آید؛ بنابراین این محدوده در جدول 2 درنظر گرفته نشده‌است. در نهایت نیز نتایج بدست آمده از حل به‌صورت مود اول ارتعاشی سطح سیال در شکل 3، مود اول ارتعاشی کف غشا در شکل 4، مود دوم ارتعاشی سطح سیال در شکل 5 و مود دوم ارتعاشی کف غشا در شکل 6 ارائه شده‌اند.

5- نتیجه‌گیری

روش تحلیلی ارائه شده برای سیستم سازه سیال، همراه با سطح آزاد سیال و کف انعصاف‌پذیر را می‌توان یکی از چندین روش بدست آوردن فرکانس‌های طبیعی تلاطم دانست. این روش به علت ماهیت تحلیلی خود می‌تواند به عنوان مرجع دیگر حل‌ها مورد استفاده قرار گیرد. همان‌طور که از نتایج بدست آمده از تحلیل عددی یا پارامتری و همچنین مدل‌سازی نرم‌افزاری مشاهده می‌شود، مقادیر محاسبه شده‌ی فرکانس‌های طبیعی به مقادیر بدست آمده از مدل نرم‌افزاری بسیار نزدیک است. تفاوت‌های دیده شده در مقادیر را می‌توان به‌علت دخیل بودن تعداد پارامترهای بیشتر در مدل تحلیلی نسبت به مدل نرم‌افزاری دانست. مقادیر فرکانس‌های بدست‌آمده از دوروش تحلیلی و نرم‌افزاری همراه با مقادیر اختلاف، در جدول 4 ارایه شده‌اند. این نتایج به‌وضوح دقت روش تحلیلی ارائه شده را نشان می‌دهند. همچنین این حالت می‌تواند به‌عنوان حالت پایه برای مسائلی با شرایط مرزی سطح و کف پیچیده‌تر نیز درنظر گرفته شود.

[1] Residue

جدول 1 مقادیر درنظر گرفته شده برای پارامترهای سیستم

Table 1 Characteristic parameters of the system

پارامتر	θ_2 (rad)	θ_1 (rad)	σ (N/m)	ρ_m (kg/m^2)	ρ_f (kg/m^2)	g (m/s^2)	T (N/m)	R (m)
مقدار	$3\pi/4$	$\pi/3$	0.01	39	1000	0.1	10^5	0.5

جدول 2 مقادیر فرکانس‌های بدست‌آمده برای پارامترهای نیم موج مختلف

Table 2 System frequencies for different half wave parameters

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1.15	-	2.97	3.79	4.99	4.68	7.76	9.15	10.7	12
2	-	-	7.2	3.9	4.8	6.24	7.8	8.98	10.4	11.9
3	-	-	-	2.5	9.65	7.64	7.68	8.98	14	13.3
4	-	-	-	-	21.1	7.42	7.65	8.95	10.4	11.9
5	-	-	-	-	6.99	-	11.4	6.8	10.9	12
6	-	-	-	-	-	-	-	12.4	11	12
7	-	-	-	-	-	-	-	-	19.9	14.5
8	-	-	-	-	-	-	-	-	-	23.5
9	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

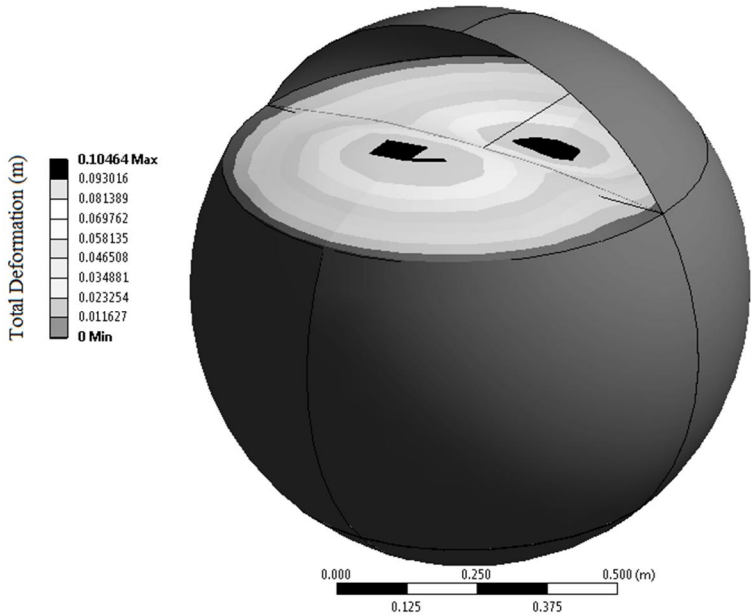

Fig. 2 2nd mode shape in software modeling

شکل 2 شکل مود دوم برای مدل ایجاد شده شامل مخزن ، سیال، کفی و سطح آزاد

جدول 3 ده فرکانس طبیعی اول حاصل از مدلسازی نرم افزاری

Table 3 10 first natural frequencies obtained from software modeling

مود	فرکانس (Hz)
1	1.09
2	2.37
3	2.80
4	3.64
5	3.79
6	4.51
7	4.67
8	4.68
9	5.98
10	6.87

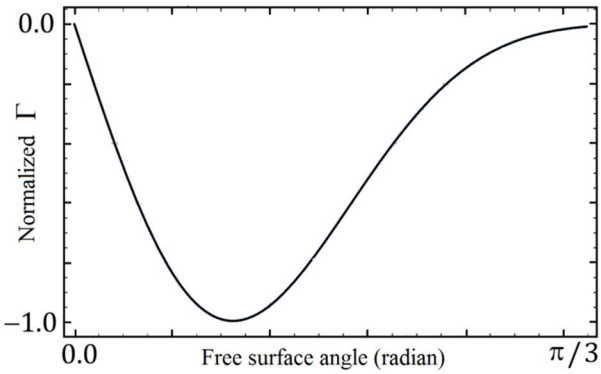

Fig. 3 1st vibration mode of the free surface

شکل 3 مود اول ارتعاشی سطح سیال

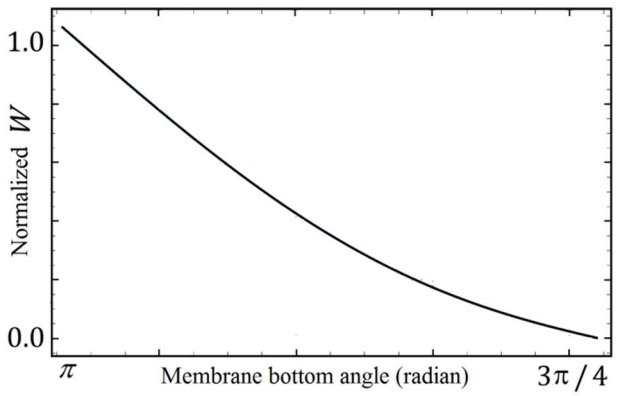

Fig. 4 1st vibration mode of the membrane bottom

شکل 4 مود اول ارتعاشی کف

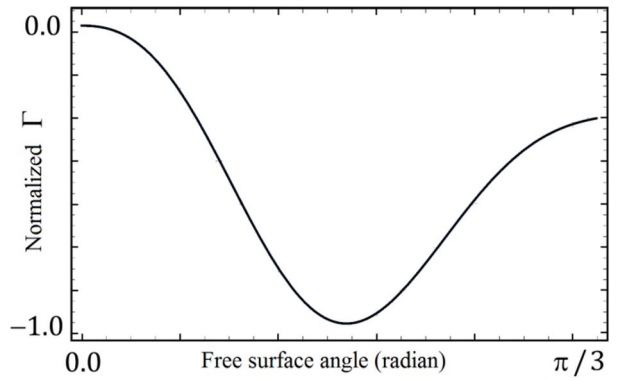

Fig. 5 2nd vibration mode of the free surface

شکل 5 مود دوم ارتعاشی سطح سیال

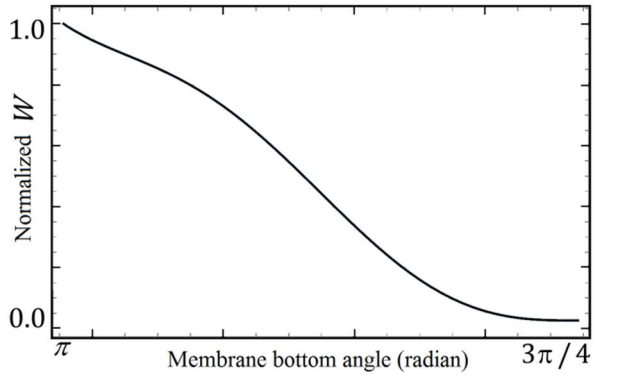

Fig. 6 2nd vibration mode of the membrane bottom

شکل 6 مود دوم ارتعاشی کف

یکی دیگر از نتایج مهمی که می‌توان از این تحلیل دریافت نمود، بدست آوردن نمودارهای پارامترهای مختلف بر حسب فرکانس‌های طبیعی سیستم است. در این مطالعه، مهم‌ترین پارامترهای ما عبارتند از کشش غشای کف، چگالی سیال داخلی و شعاع مخزن. از این نمودارها می‌توان به صورت مستقیم در فرآیندهای طراحی بهره جست. در واقع در حالتی که تعداد پارامترهای تحت کنترل طراح محدود باشد، می‌تواند بدون نیاز به فرآیند بهینه‌سازی از نمودارهای زیر برای تعیین و تغییر فرکانس‌های طبیعی سیستم مورد نظر خود به بهره گیرد.

باید توجه داشت که در این مطالعه، نمودارهای رسم شده به صورت مجموعه‌ای از نقاط گسسته هستند که برای هر میزان از پارامترها محاسبه شده‌اند و به صورت منحنی برازش شده نمی‌باشند بلکه مجموعه‌ای از خطوط به هم متصل شده هستند. علت این نوع از رسم منحنی، تاکید بر مقدار فرکانس‌های طبیعی و جدول فرکانسی است، به عبارت دیگر نمودارهای تغییرات فرکانس طبیعی بر حسب پارامترها، هدف اصلی این مطالعه نبوده است.

اولین نمودار مورد بررسی نمودار تغییرات فرکانس طبیعی سیستم بر حسب تغییرات کشش غشای کف می‌باشد. شکل 7 نشان می‌دهد که افزایش کشش غشای کف منجر به افزایش فرکانس‌های طبیعی سیستم می‌گردد. این افزایش فرکانس تا بی‌نهایت ادامه نمی‌یابد بلکه تا حدی است که کف به حالت صلبیت خود نزدیک شود. به عبارت بهتر حد افزایش فرکانس با افزایش کشش کف حد صلبیت غشا است. با توجه به این نمودار می‌توان مشاهده نمود که هرچه مود فرکانسی افزایش می‌یابد، میزان تغییرات نیز زیادتر می‌شود هرچند در نهایت تمامی مودها به حد مربوط به خود نزدیک می‌شوند.

نمودار بعدی که مورد بررسی قرار گرفته، نمودار تغییرات چگالی سیال داخل مخزن با فرکانس‌های طبیعی سیستم است. شکل 8 بیان می‌کند که افزایش چگالی سیال منجر به کاهش فرکانس‌های طبیعی می‌شود. نکته‌ای که در اینجا باید به آن توجه نمود این است که هرچند تغییرات فرکانس‌ها در این نمودار چشم‌گیر است اما با توجه به اینکه تغییر چگالی به معنای تغییر سیال داخلی است، قدرت طراح برای انتخاب هر نوع هر سیالی محدود است چرا که در سیستم‌های فضایی عموما سیال مورد استفاده در مخازن با توجه به ملاحظات دیگر و در مراحل دیگری تعیین می‌گردد.

سومین نمودار بررسی شده در این مطالعه، نمودار تغییرات فرکانس‌های طبیعی سیستم بر حسب تغییرات شعاع مخزن می‌باشد. شکل 9 نشان می‌دهد که افزایش شعاع مخزن به شدت به کاهش فرکانس‌های طبیعی منجر می‌شود. تغییرات مشاهده شده در این نمودار به مراتب بیشتر و شدیدتر

جدول 4 مقایسه ده فرکانس طبیعی اول بدست‌آمده از حل تحلیلی و مدلسازی نرم‌افزاری

Table 4 Comparison between natural frequencies of analytical method and those of software modeling

مود	فرکانس حل تحلیلی (Hz)	فرکانس، نرم‌افزاری (Hz)	درصد اختلاف
1	1.15	1.09	0.055
2	2.50	2.37	0.054
3	2.97	2.80	0.060
4	3.79	3.64	0.041
5	3.90	3.79	0.29
6	4.68	4.51	0.037
7	4.80	4.67	0.027
8	4.99	4.86	0.026
9	6.24	5.98	0.043
10	6.99	6.87	0.017

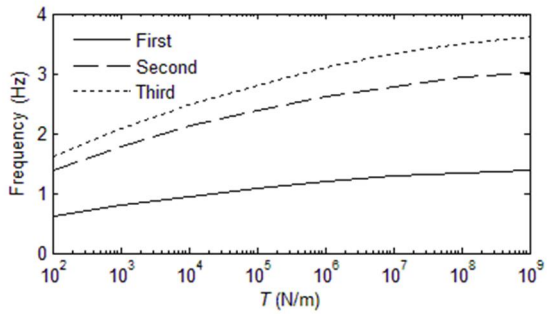

Fig. 7 Dependence of three natural frequency modes on membrane tension

شکل 7 تغییرات فرکانس طبیعی برای سه مود اول بر حسب کشش غشای کف

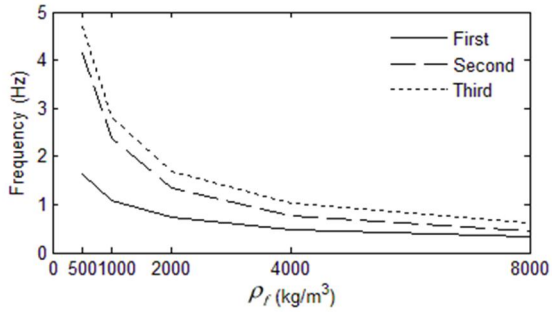

Fig. 8 Dependence of three natural frequency modes on liquid density

شکل 8 تغییرات فرکانس طبیعی برای سه مود اول بر حسب چگالی سیال

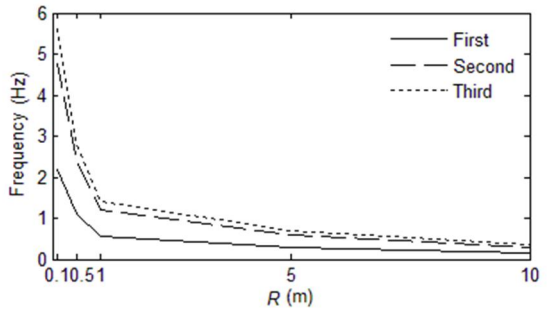

Fig. 9 Dependence of three natural frequency modes on container radius

شکل 9 تغییرات فرکانس طبیعی برای سه مود اول بر حسب شعاع مخزن

از دو نمودار قبل است، اما مجددا باید به نکته گفته شده در مورد شکل 8 دقت نمود. در واقع کنترل طراح بر میزان تغییرات شعاع مخزن عاملی است که می‌تواند به کم شدن کاربرد این نمودار کمک نماید.

در حقیقت در سامانه‌های فضایی عوامل مؤثر دیگری هستند که مقدار شعاع مخازن را تعیین می‌کنند، بنابراین به منظور تعیین و تغییر بازه فرکانس‌های طبیعی مورد دلخواه طراح، می‌بایست از ابزارهای دیگری همچون بهینه‌سازی چند متغییره نیز بهره جست، هرچند که داشتن دید کلی نسبت به پارامترها وعوامل مؤثر بر تغییر فرکانس‌ها بسیار مهم است. البته کاربرد اصلی نمودارهای بالا و دیگر نمودارهای مشابه در تغییر پارامترهای گفته شده به منظور رسیدن به فرکانس یا محدوده فرکانس طبیعی به قوت خود باقی است.

درنهایت همانگونه که گفته شد، این روش و الگو می‌تواند به عنوان حالت پایه و اولیه در هندسه‌ی کروی همراه با غشای کف و سطح سیال درنظر گرفته شود.

6- فهرست علائم

g	شتاب گرانش (ms^{-2})
R	شعاع بیرونی مخزن (m)
r	شعاع در مختصات کروی اصلی (m)
$\Re$	شعاع در دستگاه مختصات استوانه‌ای کمکی (m)
T	کشش کف (Nm^{-1})
W	خیز غشا

علائم یونانی

Φ	تابع پتانسیل سیال
Γ	جابجایی سطح سیال (m)
θ_1	زاویه‌ی سطح آزاد سیال (rad)
θ_2	زاویه‌ی غشای کف (rad)
ρ_f	چگالی سیال(kgm^{-3})
ρ_m	چگالی سطحی غشا (kgm^{-2})

زیرنویس‌ها

f	سیال
m	غشا
t	پاسخ کلی
t_m	پاسخ کلی اصلاح شده

7- پیوست ها

پیوست الف

توابع f_1 ، f_2 ، U_1 و U_2 عبارتند از:

$$f_1 = (r^n + nR^{2n+2}r^{-n-1})P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi$$
$$f_2 = (r^n + nR^{2n+2}r^{-n-1})P_n^m(\cos\theta)\sin m\varphi$$
$$U_1 = \left((g\cos\theta)(nr^{n-1} - n(n+1)R^{2n+2}r^{-n-2})P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi\right) - \left(g\frac{\sin\theta}{r}(r^n + nR^{2n+2}r^{-n-1})\frac{d(P_n^m(\cos\theta))}{d\theta}\cos m\varphi\right)$$
$$U_2 = \left((g\cos\theta)(nr^{n-1} - n(n+1)R^{2n+2}r^{-n-2})P_n^m(\cos\theta)\sin m\varphi\right) - \left(g\frac{\sin\theta}{r}(r^n + nR^{2n+2}r^{-n-1})\frac{d(P_n^m(\cos\theta))}{d\theta}\sin m\varphi\right)$$

پیوست ب

توابع Λ_1 و Λ_2 عبارتند از:

$$\Lambda_1 = \frac{\left(\cos\theta\,\alpha_2 P_n^m(\cos\theta) - \frac{\sin\theta}{r}\alpha_1\frac{d(P_n^m(\cos\theta))}{d\theta}\right)}{[(r^n + r^{-n-1})P_n^m(\cos\theta) - (R^n + R^{-n-1})P_n^m(\cos\theta_2)]}$$
$$\Lambda_2 = \frac{\left(\cos\theta\,\alpha_2 P_n^m(\cos\theta) - \frac{\sin\theta}{r}\alpha_1\frac{d(P_n^m(\cos\theta))}{d\theta}\right)\tan m\varphi}{[(r^n + r^{-n-1})P_n^m(\cos\theta) - (R^n + R^{-n-1})P_n^m(\cos\theta_2)]}$$

که:

$$\alpha_1 = (r^n + nR^{2n+2}r^{-n-1})$$
$$\alpha_2 = (nr^{n-1} - n(n+1)R^{2n+2}r^{-n-2})$$

پیوست ج

توابع F_1 تا F_4 و G_4 عبارتند از:

$$F_2 = (\rho_f g)\left((r^n + r^{-n-1})P_n^m(\cos\theta) - (R^n + R^{-n-1})P_n^m(\cos\theta_2)\right)\cos m\varphi$$

$$F_3 = (-\rho_m)\big((r^n + r^{-n-1})P_n^m(\cos\theta) - (R^n + R^{-n-1})P_n^m(\cos\theta_2)\big)\cos m\varphi$$

$$F_4 = (\rho_f)\big((r^n + nR^{2n+2}r^{-n-1})P_n^m(\cos\theta) - (R^n + R^{-n-1})P_n^m(\cos\theta_2)\big)\cos m\varphi$$

$$G_4 = (\rho_f)\Big(\big(r^n + nR^{2n+2}r^{-(n+1)}\big)P_n^m(\cos\theta) - \big(R^n + R^{-(n+1)}\big)P_n^m(\cos\theta_2)\Big)\sin m\varphi$$

$$\begin{aligned}
F_1 = \Bigg(&\Bigg[\left(\frac{1+\cos\theta^2}{r}\right)\big((nr^{n-1} - (n+1)r^{-n-2})P_n^m(\theta) \\
&- (R^n + R^{-n-1})P_n^m(\cos\theta)\big)\cos m\varphi\Bigg] \\
&+ \Bigg[\left(\frac{\cot\theta - 2\cos\theta\sin\theta}{r^2}\right)\Bigg((r^n \\
&+ r^{-n-1})\frac{\mathrm{d}\big(P_n^m(\cos\theta)\big)}{\mathrm{d}\theta} \\
&- (R^n + R^{-n-1})P_n^m(\cos\theta_2)\Bigg)\cos m\varphi\Bigg] \\
&+ \Bigg[\left(\frac{2\cos\theta\sin\theta}{r}\right)\Bigg((nr^{n-1} \\
&- (n+1)r^{-n-2})\frac{\mathrm{d}\big(P_n^m(\cos\theta)\big)}{\mathrm{d}\theta} \\
&- (R^n + R^{-n-1})P_n^m(\cos\theta_2)\Bigg)\cos m\varphi\Bigg] \\
&+ \big[(\sin\theta^2)\big((n(n-1)r^{n-2} \\
&- (n+1)(n+2)r^{-n-3})P_n^m(\cos\theta) \\
&- (R^n + R^{-n-1})P_n^m(\cos\theta_2)\big)\cos m\varphi\big] \\
&+ \Bigg[\left(\frac{\cos\theta^2}{r^2}\right)\Bigg((r^n \\
&+ r^{-n-1})\frac{\mathrm{d}^2\big(P_n^m(\cos\theta)\big)}{\mathrm{d}\theta^2} \\
&- (R^n + R^{-n-1})P_n^m(\cos\theta_2)\Bigg)\cos m\varphi\Bigg] \\
&+ \Bigg[\left(\frac{1}{r^2\sin\theta^2}\right)\big((r^n + r^{-n-1})P_n^m(\cos\theta) \\
&- (R^n \\
&+ R^{-n-1})P_n^m(\cos\theta_2)\big)(-m^2)\cos m\varphi\Bigg]\Bigg)
\end{aligned}$$

8- مراجع

[1] H. F. Bauer, J. Siekmann, J. T. S. Wang, Axisymmetric hydroelastic sloshing in an annular cylindrical container, *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 5, No. 8, pp. 981-983, 1968 .

[2] Y. Kerboua, A. A. Lakis, M. Thomas, L. Marcouiller, Vibration analysis of rectangular plates coupled with fluid. *Journal of Mathematical Modelling*, Vol. 32, No. 1, pp. 2570-2586, 2008.

[3] M. Chiba, Nonlinear hydroelastic vibration of a cylindrical tank with an elastic bottom, containing liquid. Part II: Linear axisymmetric vibration analysis, *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 7, No. 1, pp. 57-73, 1993.

[4] M. Chiba, Axisymmetric Free hydroelastic vibration of a flexural bottom plate in a cylindrical tank supported on an elastic foundation , *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 169, No. 3, pp. 387-394, 1994.

[5] H. F. Bauer, W. Eidel, Hydroelastic vibrations in a two-dimensional rectangular container filled with frictionless liquid and a partly elastically covered free surface, *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 19, No. 2, pp. 209-220, 2004 .

[6] M. Chiba, K. Abe, Nonlinear hydroelastic vibration of a cylindrical tank with an elastic bottom containing liquid-analysis using harmonic balance method, *Thin-Walled Structures*, Vol. 34, No. 3, pp. 233-260, 1999 .

[7] J. Siekmann, S.-C. Chang, On the dynamics of liquids in a cylindrical tank with a flexible bottom, *Ingenieur-Archiv*, Vol. 37, No. 2, pp. 99-109, 1968 .

[8] M. Chiba, H. Watanabe, H. F. Bauer, Hydroelastic coupled vibraiotns in a cylindrical container with a membrane bottom, containing liquid with surface tension, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 251, No. 4, pp. 717-740, 2002 .

[9] H. F. Bauer, Oscillations of immiscible liquids in free space or in spherical containers in zero-gravity environment, *Ingenieur-Archiv*, Vol. 51, No. 6, pp. 363-381, 1982.

[10] H. F. Bauer, *Oscillations of non-viscous liquid in various container geometries*: First Edition,pp.223-230, Neubiberg : Institut für Raumfahrttechnik, 1999 .

[11] H. F. Bauer, W. Eidel, Nonlinear liquid oscillations in spherical systems under zero-gravity, *Acta Mechanica*, Vol. 65, No. 1-4, pp. 107-126, 1987.

[12] Y. K. Cheung, D .Zhou, Hydroelastic vibration circular container bottom plate using the galerkin method, *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 16, No. 4, pp. 561-580, 2002 .

[13] I. G. Currie, *Fundamental Mechanics of Fluids*, Fourth Edition, pp.27-37, Boca Raton: CRC, Taylor & Francis, 2012.

[14] R. A. Ibrahim, *Liquid Sloshing Dynamics*: First Edition ,pp.490-497, Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2005

[15] M. I. Salem, V. H. Mucino, E. Saunders, M. Gautam, A. Lozano, Lateral sloshing in partially filled elliptical tanker trucks using a trammel pendulum vibration analysis, *International Journal of Heavy Vehicle Systems*, Vol. 16, No. 1, pp. 207-224, 2009

[16] S. Nicolici, R. M. Bilegan, Fluid structure interaction modeling of liquid sloshing phenomena in flexible tanks, Nuclear Engineering and Design, Vol. 258, No. 0, pp. 51-56, 2013.