



مدل سازی دینامیکی ربات های زمینی و فضایی در حالت زنجیر باز براساس فرمی از معادلات بولتزمن - هامل

عبدالمجید خوشنود^{1*}، اسحاق آزاد²، سید محمدامین رضوی³

1- استادیار، مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

2- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی هوافضا دینامیک پرواز و کنترل، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

3- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی هوافضا دینامیک پرواز و کنترل، دانشگاه شهید بهشتی، تهران

* تهران، صندوق پستی 16569-83911، khoshnood@kntu.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 19 دی 1394

پذیرش: 05 فروردین 1395

ارائه در سایت: 30 خرداد 1395

کلید واژگان:

معادلات بولتزمن - هامل

شبه مختصات

ربات های زنجیر باز

ربات های فضایی

ربات های زمینی

چکیده

در این مقاله، فرمی متفاوت از فرم متداول معادلات بولتزمن-هامل (معادلات لاگرانژ برحسب شبه مختصات) استخراج گردیده و براساس آن الگوریتمی جامع جهت مدل سازی دینامیکی ربات های زمینی و فضایی، با تعداد دلخواه عضو صلب در حالت زنجیر باز، ارائه شده است. این فرم از معادلات بولتزمن - هامل، در عین پرهیز از پیچیدگی های فرم متداول، دارای مزایای قابل توجهی است که از جمله ی آن ها می توان به عدم نیاز به تشکیل انرژی جنبشی به صورت تابعی از مختصات تعمیم یافته و شبه سرعت ها، بیان نیروهای تعمیم یافته برحسب بردارهای پایه ی بدنی اجزای سیستم و ارائه ی تصویری واضح از دینامیک سیستم اشاره نمود. در مسیر استخراج الگوریتم مذکور، معادلات حرکت یک جسم صلب یکبار با استفاده از فرم ارائه شده و بار دیگر با استفاده از فرم متداول معادلات بولتزمن-هامل به دست آمده که از مقایسه ی آن ها سه اتحاد سینماتیکی کاربردی اثبات گردیده و از آن ها در مدل سازی دینامیکی استفاده شده است. به منظور آشنایی با نحوه ی استفاده از الگوریتم ارائه شده، مدل دینامیکی یک ربات دو لینکی زمینی به صورت گام به گام به دست آمده است. در نهایت نتایج شبیه سازی ربات دو لینکی در نرم افزار متلب، به ازای مقادیر عددی، با نتایج به دست آمده از مدل سیستم در نرم افزار آدامز، مقایسه و صحت آن محرز گردیده است.

Dynamics modeling of open-chain terrestrial and space robots using a form of Boltzmann-Hamel equations

Abdol Majid Khoshnood^{1*}, Es'hagh Azad¹, Seyed Mohammad Amin Razavi²

1- Faculty of Aerospace Engineering, Khaje Nasir Toosi University, Tehran, Iran

2- Faculty of New Technologies Engineering, Shahid Beheshti University, Tehran, Iran

*P.O.B. 16569-83911, Tehran, Iran, khoshnood@kntu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 09 January 2016
Accepted 24 March 2016
Available Online 19 June 2016

Keywords:
Boltzmann-Hamel equations
Quasi-coordinates
open-chain robots
space robots
terrestrial robots

ABSTRACT

In this article, a form of Boltzmann-Hamel equations (Lagrange's equations in terms of quasi-coordinates), different from the latter's standard form and avoiding its structurally inherent complexity, is derived based on which a general algorithm for the dynamics modeling of open-chain terrestrial and space robots with an arbitrary number of rigid elements is presented. This form of Boltzmann-Hamel equations is shown to be particularly advantageous in terms of not requiring the determination of the kinetic energy as a function of generalized coordinates and quasi-velocities, representing generalized forces in terms of body basis vectors and offering a panoramic view of the dynamics of the systems. In the act of developing the algorithm, three highly useful kinematic identities are derived via comparison between the single rigid body equations derived from both the standard and the proposed form of Boltzmann-Hamel equations. These identities are then used to considerably simplify the final dynamics model of both systems. Finally, the equations of motion for a two-link terrestrial robot is derived using the proposed algorithm and simulation results in MATLAB are compared with the model of the system in ADAMS to validate the model.

1- مقدمه

جامع برای مدل سازی یک سیستم مکانیکی با درجه ی آزادی دلخواه و آرایش هندسی معلوم، نسبت به روش های پیشرفته تر مدل سازی با سختی بیشتری همراه خواهد بود. برای نمونه، در مدل سازی با استفاده از معادلات نیوتن - اوپلر، به علت احتساب نیروهای قیدی و نیروهای داخلی بین اجزای سیستم، تعداد مجهولات و تبعاً تعداد معادلات حرکت از تعداد درجات آزادی سیستم

از جمله چالش برانگیزترین مسائل در مدل سازی سیستم های مکانیکی پیچیده، با استفاده از روش های معمول همچون معادلات نیوتن - اوپلر و معادلات استاندارد لاگرانژ، حجم محاسباتی است که با افزایش درجات آزادی سیستم، به یک روند طاقت فرسا می انجامد؛ به طوری که پی ریزی یک الگوریتم

استفاده از معادلات بولتزمن-هامل در اثر پژوهشی جهرمی [6] انجام شده است.

کمرن و بوک [7]، با استفاده از معادلات بولتزمن-هامل، نحوه استخراج مدل دینامیکی مکانیزم‌ها با مفاصل غیرهولونومیک را از طریق حل چند مثال نشان داده‌اند. در این مقاله ثابت شده است که برخلاف معادلات لاگرانژ که در آن مسئله‌ی ظاهر شدن و سپس حذف ضرایب لاگرانژ به وجود می‌آید، استفاده از معادلات بولتزمن-هامل به‌طور خودکار از وارد شدن مجهولات اضافی در معادلات نهایی حرکت جلوگیری می‌کند.

در مرجع [8]، ترنر در مسئله‌ی شبیه‌سازی وسایط نقلیه‌ی زمینی با سرعت زیاد از معادلات بولتزمن-هامل استفاده نموده است.

سیبیلسکی و زیلوک [9]، روند مدل‌سازی وسایط نقلیه‌ی هوایی و به‌طور خاص هواپیما و هلیکوپتر را با استفاده از روش‌های دینامیک چندجسمی از جمله معادلات بولتزمن-هامل شرح داده و مزایا و معایب انواع روش‌ها را بررسی نموده است.

در مرجع [10]، تالاموچی مسئله‌ی تأثیر انواع انتخاب‌های ممکن از شبه سرعت‌ها در مدل‌سازی دینامیکی سیستم‌های غیرهولونومیک با استفاده از معادلات بولتزمن-هامل را مورد بررسی قرار داده و با ابداع و اعمال یک روش جبری، تأثیر انتخاب مناسب شبه‌سرعت‌ها در ساده‌سازی ریاضیات مرتبط با مدل‌سازی دینامیکی را نشان داده است.

خوشنود و مرادی [11]، با استفاده از ترکیبی از معادلات استاندارد لاگرانژ و معادلات لاگرانژ برحسب شبه مختصات، معادلات حرکت یک ماهواره شامل یک قسمت صلب مکعب شکل و دو صفحه‌ی خورشیدی انعطاف‌پذیر را استخراج و براساس آن یک کنترلر برای کاهش دامنه‌ی ارتعاشات اجزای انعطاف‌پذیر طراحی نموده‌اند.

در مرجع [12]، ماروسکین و بلاخ فرم خاصی از معادلات بولتزمن-هامل را استخراج نموده و از آن در طراحی کنترل بهینه‌ی سینماتیکی و دینامیکی سیستم‌های مکانیکی با قیود غیرهولونومیک استفاده نموده‌اند.

مینگلو و همکاران [13]، با استفاده از روش کین⁴ معادلات حرکت یک سیستم مکانیکی صفحه‌ای شامل تعداد دلخواه میله‌ی صلب در حالت زنجیرباز را استخراج نمودند.

2- استخراج معادلات بولتزمن-هامل از معادلات لاگرانژ به کمک حساب دیفرانسیل ماتریسی

در مراجع [3,2]، فرم عمومی و به نسبت پیچیده‌ی معادلات بولتزمن-هامل به صورت مؤلفه به مؤلفه (جبر اسکالر و حساب دیفرانسیل چند متغیره) استخراج و سپس به‌صورت یک معادله‌ی ماتریسی بیان شده است. با این وجود، استفاده از ایده‌ی اولیه‌ی معادلات بولتزمن-هامل موسوم به مفهوم شبه‌مختصات و شبه‌سرعت‌ها و تلاش در استخراج دوباره‌ی آن، صرفاً به فرم ماتریسی، به معادله‌ای منجر خواهد شد که در این مقاله از آن استفاده شده است. در ادامه، نشان خواهیم داد که حداقل در مورد سیستم‌های دینامیکی مورد بررسی در این مقاله، این فرم از معادلات بولتزمن-هامل نسبت به فرم متداول آن به روند مناسب‌تری در مدل‌سازی دینامیکی می‌انجامد و لذا نه تنها نیازی به پرداختن به جزئیات فرم متداول وجود ندارد بلکه از پیچیدگی‌های غیرضروری آن نیز پرهیز می‌شود. معادلات لاگرانژ برای یک سیستم مکانیکی m درجه آزادی و به‌ازای مختصات تعمیم‌یافته‌ی مستقل (فاقد قیود جبری و دیفرانسیلی بین مختصات) عبارت است از:

بیشتر خواهد بود. در چنین شرایطی مسئله‌ی حذف جبری این نیروها اجتناب‌ناپذیر بوده و حل معادلات نهایی را پیچیده می‌کند. از طرف دیگر، فرم استاندارد معادلات لاگرانژ که در مورد سیستم‌های غیرهولونومیک¹ و در حالت مختصات تعمیم‌یافته‌ی مستقل به‌کار گرفته می‌شود، نیروهای قیدی و نیروهای داخلی (در حالتی که جابه‌جایی آن‌ها روی دو جسم یکسان باشد) را در مدل‌سازی دینامیکی وارد نمی‌کند و لذا از این حیث نسبت به معادلات نیوتن-اولر ارجحیت دارد. با این وجود، معادلات لاگرانژ نیز دارای معایبی هستند که به‌طور خاص با افزایش درجات آزادی سیستم آشکار می‌شوند. در چنین شرایطی انرژی جنبشی که بایستی به‌صورت تابعی از مختصات تعمیم‌یافته و سرعت‌های تعمیم‌یافته به‌دست آید به طرز کنترل نشده‌ای بزرگ می‌شود و لذا مشتق‌گیری‌های جزئی و زمانی به محاسباتی الگو ناپذیر و طاقت‌فرسا منتهی می‌گردد. به‌علاوه، نیروهای تعمیم‌یافته با پیچیده شدن سیستم به‌سختی محاسبه می‌شوند. در این میان، معادلات بولتزمن-هامل با پرهیز از معایب روش‌های نیوتن-اولر و لاگرانژ به‌طور هم‌زمان، ابزار قدرتمندی در مدل‌سازی دینامیکی سیستم‌های پیچیده به‌حساب می‌آید. ایده‌ی اساسی این معادلات بر مفاهیم شبه مختصات² و شبه سرعت‌ها³ استوار است. با استفاده از این مفاهیم، انرژی جنبشی برخلاف روش لاگرانژ برحسب مختصات تعمیم‌یافته و شبه سرعت‌ها به‌دست‌آمده و نیاز به محاسبه‌ی مشتق انرژی جنبشی نسبت به سرعت‌های تعمیم‌یافته به‌کلی از میان برداشته می‌شود. به‌علاوه، نیروهای تعمیم‌یافته برحسب ترکیبی از نیروها، گشتاورها و ماتریس‌های دوران در پایه‌ی بدنی اجزای سیستم به‌دست می‌آیند و لذا از مسئله‌ی بیان بردارها در پایه‌ی اینرسی و همچنین محاسبه مشتقات جزئی اجتناب می‌شود. با این وجود، بدیهی به نظر می‌رسد که معادلات بولتزمن-هامل نیز همچون سایر روش‌های مدل‌سازی دینامیکی نمی‌تواند از هر نظر ایده‌آل به‌حساب آید. برای نمونه، بهره‌مندی حداکثری از مزایای قابل‌توجه معادلات بولتزمن-هامل وابستگی فراوانی به استخراج اتحادهای سینماتیکی متنوع دارد که نمونه‌های معدودی از آن در کار پژوهشی کوبین [1] به دست آمده و در مدل‌سازی دینامیکی مورد استفاده قرار گرفته است. به‌علاوه ساختار عمومی این معادلات آن‌گونه که در مراجع گرین‌وود [2] و میروویچ [3] آورده شده است در مقایسه با معادلات نیوتن-اولر و معادلات لاگرانژ دارای پیچیدگی‌ها و جزئیاتی است که بایستی مورد توجه قرار گیرند. در این مقاله به منظور پرهیز از پیچیدگی‌های مذکور و نیز عدم نیاز به تشکیل انرژی جنبشی برحسب مختصات تعمیم‌یافته و شبه‌سرعت‌ها، فرمی متفاوت از فرم متداول معادلات بولتزمن-هامل استخراج گردیده و کارایی آن در قالب استخراج معادلات حرکت ربات‌های زمینی و فضایی با تعداد دلخواه عضو صلب در حالت زنجیرباز نشان داده شده است. در این راستا، سه اتحاد سینماتیکی نیز اثبات گردیده و در حل مسئله مورد استفاده قرار گرفته است. در کار پژوهشی حبیب نژاد کورایم و شافعی [4]، فرمولاسیونی بازگشتی مبتنی بر روش گیبس-اپل جهت استخراج معادلات حرکت بازوهای رباتیک ویسکوالاستیک براساس تئوری تیر تیموشنکو ارائه گردید.

در مرجع [5]، علیپور و همکاران مدلی تحلیلی برای ربات‌های متحرک چرخ‌دار با تعلیق انعطاف‌پذیر براساس روش نیوتن-اولر استخراج نموده و برای صحت‌سنجی مدل از نرم‌افزار آدامز استفاده نموده‌اند.

مسئله‌ی مدل‌سازی دینامیکی سیستم فرمان و هندلینگ خودرو با

¹ Nonholonomic Systems

² Quasi-Coordinates

³ Quasi-Velocities

⁴ Kane's Method

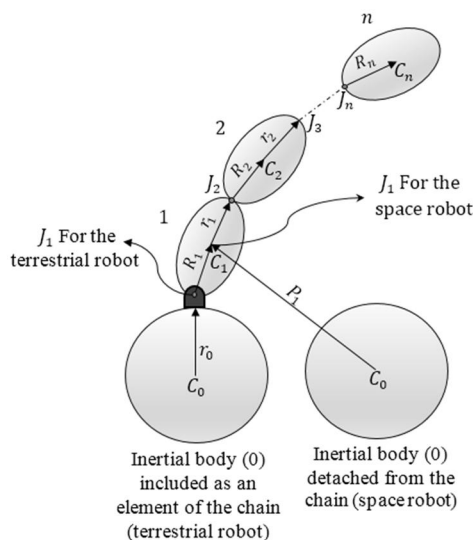


Fig. 1 Numbering the elements of terrestrial and space robots and assigning symbols to quantities and points

شکل 1 شماره‌گذاری اجزای ربات‌های زمینی و فضایی به همراه نمادگذاری کمیت‌ها و نقاط در هریک از آنها

$$q_t \quad \alpha_1^T \quad \alpha_2^T \quad \dots \quad \alpha_n^T \quad T \quad (الف-6)$$

$$q_s \quad p_1^T \quad \alpha_1^T \quad \alpha_2^T \quad \dots \quad \alpha_n^T \quad T \quad (ب-6)$$

در دو معادله‌ی اخیر اندیس t برای ربات زمینی و s برای ربات فضایی در نظر گرفته شده است. همچنین p_1 ماتریس ستونی حاصل از تجزیه‌ی بردار مکان مرکز جرم جسم 1 در پایه‌ی ایرسی و α_i ماتریس ستونی حاوی زوایای وضعیت جسم i ام نسبت به جسم $i-1$ ام هستند به‌طوری‌که:

$$q_t \quad \alpha_1^T \quad \alpha_2^T \quad \dots \quad \alpha_n^T \quad T \quad (الف-7)$$

$$\alpha_i \quad \psi_i \quad \theta_i \quad \phi_i \quad T \quad (ب-7)$$

که در آن الزامی در تعریف زوایای ψ_i, θ_i, ϕ_i وجود ندارد. به عبارت دیگر، هر ترکیبی از زوایا که بتواند وضعیت جسم i ام نسبت به جسم $i-1$ ام را به‌طور کامل معلوم کند مجاز بوده و لذا هر 12 ترتیب زوایای اوپلر تنها حالت خاصی از آن به حساب می‌آید.

3-2- انتخاب شبه سرعت‌های مستقل

فرض کنیم $\{b_1^{(i)}, b_2^{(i)}, b_3^{(i)}\}$ یک مجموعه‌ی سه‌تایی از بردارهای یکه، دوبه‌دو متعامد و ساکن در عضو دلخواه i ام باشد. این مجموعه را پایه‌ی بدنی عضو i ام (یا به اختصار پایه‌ی i ام) می‌نامیم. حال یک ماتریس ستونی به صورت $b_i = \{b_1^{(i)} \quad b_2^{(i)} \quad b_3^{(i)}\}^T$ تعریف می‌کنیم. اگر ω_i بردار سرعت زاویه‌ای جسم i ام نسبت به جسم $i-1$ ام و ω_i ماتریس ستونی حاوی مؤلفه‌های ω_i در پایه‌ی بدنی عضو i ام باشند آن‌گاه می‌توان نوشت:

$$\omega_i \quad b_i^T \quad \omega_i \quad (8)$$

به علاوه از مرجع [1] داریم:

$$\omega_i \quad D_i \quad \dot{\alpha}_i \quad (9)$$

که در آن D_i یک ماتریس و تابعی از α_i است. با استفاده از این معادله می‌توان گفت که چون α_i ها از نظر سینماتیکی مستقل از یکدیگرند، ω_i ها نیز به هم وابسته نیستند و لذا می‌توانند به عنوان شبه سرعت‌ها انتخاب شوند. بدین ترتیب در مورد ربات زمینی می‌توان نوشت:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q \quad (1)$$

حال فرض کنیم انرژی جنبشی به جای T به صورت $\bar{T}$ نوشته شود و داشته باشیم:

$$\lambda \quad S \quad \dot{q} \quad (2)$$

که در آن، S یک ماتریس مربعی $m \times m$ و تابعی از q است. درایه‌های ماتریس ستونی λ را شبه سرعت‌ها می‌نامیم. تنها محدودیتی که در انتخاب شبه سرعت‌ها وجود دارد استقلال آن‌ها از یکدیگر است [2].

به عبارت دیگر، در تئوری معادلات بولتزمن-هامل، وجود هیچ رابطه‌ی سینماتیکی میان هر دو عضو دلخواه از λ مجاز نیست. با استفاده از قاعده‌ی زنجیره‌ای در حساب دیفرانسیل ماتریسی و همچنین با توجه به تساوی $T = \bar{T}(q, \lambda, \dot{q})$ داریم:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \bar{T}}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial \lambda}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \lambda} \quad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \lambda}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \lambda} + \frac{\partial S}{\partial \dot{q}} \dot{q} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \lambda} = S^T \frac{\partial \bar{T}}{\partial \lambda} \quad (4)$$

با جای گذاری طرف راست روابط (3) و (4) در رابطه‌ی (1)، مرتب‌سازی عبارت‌ها و سپس ضرب طرفین در S^{-T} ، معادله‌ای به صورت رابطه (5) حاصل می‌شود:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \dot{\lambda}} \right) - S^{-T} \left(\dot{S}^T - \frac{\partial \lambda}{\partial \dot{q}} \right) \frac{\partial \bar{T}}{\partial \lambda} - S^{-T} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \lambda} = \Phi \quad (5)$$

که در آن Φ را شبه نیرو نامیده و به صورت $\Phi \stackrel{\text{def}}{=} S^{-T} Q$ تعریف می‌کنیم. معادله‌ی فوق همان فرمی از معادلات بولتزمن-هامل است که در مدل‌سازی دینامیکی سیستم‌های مورد مطالعه در این مقاله مورد استفاده قرار گرفته است. روند مدل‌سازی دینامیکی با استفاده از معادله‌ی (5) می‌تواند طبق مراحل زیر انجام شود:

(الف) انتخاب مختصات تعمیم یافته‌ی مستقل (q): با توجه به این که معادله‌ی (5) از معادله‌ی لاگرانژ در حالت مختصات تعمیم یافته‌ی مستقل به دست آمد، درایه‌های ماتریس ستونی q الزاماً می‌بایستی مستقل انتخاب شوند. (ب) انتخاب شبه سرعت‌های مستقل (λ): انجام تحلیل سینماتیکی برحسب شبه سرعت‌های انتخاب شده (د) استخراج ماتریس مربعی S : پس از معرفی ماتریس‌های ستونی q و λ ، ماتریس مربعی S از رابطه‌ی (2) استخراج می‌شود. (ه) محاسبه‌ی عبارت $\dot{S}^T - \frac{\partial \lambda}{\partial \dot{q}}$ (و) محاسبه‌ی $\frac{\partial \bar{T}}{\partial \lambda}$ (ز) محاسبه‌ی $\frac{\partial \bar{T}}{\partial \dot{\lambda}}$ (ح) محاسبه‌ی شبه نیرو Φ .

3-3- مدل‌سازی دینامیکی ربات زمینی و فضایی

در این قسمت با اعمال مراحل مذکور، به مدل‌سازی دینامیکی ربات زمینی و فضایی پرداخته خواهد شد. آرایش هندسی این دو سیستم به همراه نمادگذاری بردارهای مکان لازم برای تحلیل سینماتیکی در "شکل 1" نشان داده شده است.

3-1- انتخاب مختصات تعمیم یافته‌ی مستقل

در حالت کلی که حرکت اجزای ربات زمینی و فضایی نسبت به هم سه بعدی است، مختصات تعمیم یافته‌ی مستقل می‌توانند به صورت بردارهای ستونی زیر در حالت بلوک‌بندی¹ شده انتخاب شوند:

² Basis

¹ Block Matrices

$$\bar{T} - \sum_{i=1}^n m_i V_i^T V_i \quad \Omega_i^T I_i \Omega_i \quad (16)$$

در تبدیل روابط (12) و (14) از فرم برداری به فرم ماتریسی هر کمیت برداری در پایهی متناظر با اندیس آن کمیت تجزیه می‌شود. لذا خواهیم داشت:

$$b_k^T \Omega_k \quad b_{k-1}^T \Omega_{k-1} \quad b_k^T \omega_k \quad (17\text{-الف})$$

$$b_k^T V_k \quad b_{k-1}^T V_{k-1} \quad b_{k-1}^T r_{k-1} \quad b_{k-1}^T \Omega_{k-1} \quad b_k^T R_k \quad (17\text{-ب})$$

حال طبق تعریف ماتریس دوران داریم:

$$b_{k-1}^T \quad b_k^T C_{k-1}^k \quad (18)$$

که در آن C_{k-1}^k ماتریس دوران از پایهی $k-1$ به پایهی k می‌باشد. همچنین می‌توان ثابت نمود که:

$$b_{k-1}^T \Omega_{k-1} \quad b_{k-1}^T r_{k-1} \quad b_{k-1}^T \Omega_{k-1} \quad (19\text{-الف})$$

$$b_k^T \Omega_k \quad b_k^T R_k \quad b_k^T R_k^T \Omega_k \quad (19\text{-ب})$$

که در آن به ازای هر بردار ستونی سه مؤلفه‌ای به فرم x ماتریس کراس¹ با خاصیت پادتقارن به‌صورت رابطه (20) تعریف می‌شود [3]:

$$x = \begin{bmatrix} -x_3 & x_2 \\ x_3 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 \end{bmatrix} \quad (20)$$

با جای‌گذاری معادلات (18) و (19) در معادلات (17) و سپس حذف b_k^T از طرفین، فرم ماتریسی روابط سینماتیکی به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\Omega_k \quad C_{k-1}^k \quad \Omega_{k-1} \quad \omega_k \quad (21\text{-الف})$$

$$C_{k-1}^k \quad V_{k-1} \quad C_{k-1}^k \quad r_{k-1}^T \Omega_{k-1} \quad R_k^T \Omega_k \quad (21\text{-ب})$$

از این دو رابطه نتیجه می‌شود:

$$\frac{\partial \Omega_k}{\partial \Omega_{k-1}} \quad \frac{\partial V_k}{\partial V_{k-1}} \quad C_{k-1}^k{}^T \quad (22\text{-الف})$$

$$\frac{\partial \Omega_k}{\partial \Omega_k} \quad U \quad U \stackrel{\text{def}}{=} \text{Identity matrix} \quad (22\text{-ب})$$

$$\frac{\partial \omega_k}{\partial V_k} \quad R_k \quad (22\text{-ج})$$

$$\frac{\partial \Omega_k}{\partial \Omega_{k-1}} \quad r_{k-1} \quad C_{k-1}^k{}^T \quad (22\text{-د})$$

3-4- استخراج ماتریس‌های

در مورد بردار سرعت مرکز جرم جسم 1 می‌توان نوشت:

$$V_1 \quad b_0^T \dot{p}_1 \quad b_1^T V_1 \quad (23)$$

حال اگر ماتریس دوران از پایهی b_0 به پایهی b_1 را با C_0^1 نمایش دهیم آنگاه طبق تعریف خواهیم داشت:

$$b_0^T \quad b_1^T C_0^1 \quad (24)$$

از دو معادله‌ی اخیر نتیجه می‌شود:

$$V_1 \quad C_0^1 \dot{p}_1 \quad (25)$$

از ترکیب روابط (2)، (6-الف)، (9) و (10) برای ربات زمینی و روابط (2)، (6-ب)، (9)، (11) و (25) برای ربات فضایی، ماتریس‌های S برای هر یک به‌صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\lambda_t \quad \omega_1^T \quad \omega_2^T \quad \dots \quad \omega_n^T \quad (10)$$

که ابعاد آن با تعداد درجات آزادی ربات زمینی (n) برابر است. این در حالی است که ربات فضایی، سه درجه‌ی آزادی بیش از ربات زمینی دارد. بنابراین برای ربات فضایی یک ماتریس ستونی سه مؤلفه‌ای غیر از ω_i ها موردنیاز است. یک انتخاب می‌تواند ماتریس ستونی سرعت مرکز جرم جسم 1 در پایهی اینرسی یعنی $\dot{p}_1 \quad \dot{x}_1 \quad \dot{y}_1 \quad \dot{z}_1^T$ باشد. با این وجود، همان‌طور که در ادامه خواهیم دید، انتخاب ماتریس ستونی سرعت مرکز جرم جسم 1 در پایهی بدنی همان جسم به روابط سینماتیکی منظم‌تری می‌انجامد و لذا انتخاب مناسب‌تر است. اگر این کمیت را با V_1 نمایش دهیم آنگاه شبه سرعت برای ربات فضایی عبارت خواهد بود از:

$$\lambda_s \quad V_1^T \quad \Omega_1^T \quad \omega_2^T \quad \dots \quad \omega_n^T \quad (11)$$

با توجه به این‌که در ربات فضایی، برخلاف ربات زمینی، چارچوب مرجع اینرسی عضوی از زنجیره نیست، ω_1 در مورد آن معنا ندارد و لذا از Ω_1 به‌جای ω_1 استفاده شده است که بیانگر ماتریس ستونی مؤلفه‌های بردار سرعت زاویه‌ای جسم 1 نسبت به چارچوب مرجع اینرسی در پایهی بدنی همان جسم است.

4- تحلیل سینماتیکی

4-1- تحلیل سینماتیکی برداری

اگر فرض کنیم Ω_k بردار سرعت زاویه‌ای جسم k نسبت به جسم صفرم (چارچوب مرجع اینرسی) باشد، آنگاه با استفاده از قضیه‌ی جمع سرعت‌های زاویه‌ای خواهیم داشت:

$$\Omega_k \quad \Omega_{k-1} \quad \omega_k \quad (12)$$

همچنین با استفاده از نمادگذاری‌های انجام شده در "شکل 1" داریم:

$$V_k \quad \frac{0}{dt} P_0 P_k \quad \frac{0}{dt} P_0 P_{k-1} \quad \frac{0}{dt} dr_{k-1} \quad \frac{0}{dt} dR_k \quad (13)$$

که در آن $\frac{0}{dt}$ بیانگر مشتق‌گیری از کمیت برداری نسبت به چارچوب مرجع اینرسی () است. حال با توجه به این‌که $\frac{0}{dt} C_0 C_{k-1}$ و V_{k-1} با اعمال قضیه‌ی انتقال نرخ تغییرات یک بردار میان دو چارچوب مرجع، معادله‌ی (13) می‌تواند به‌صورت زیر نوشته شود:

$$V_k \quad V_{k-1} \quad \Omega_{k-1} \quad r_{k-1} \quad \Omega_k \quad R_k \quad (14)$$

روابط (12) و (14) در ربات زمینی به ازای $n \dots k$ و در ربات فضایی به ازای $n \dots k$ برقرار هستند.

4-2- تحلیل سینماتیکی ماتریسی

با توجه به رابطه‌ی انرژی جنبشی برای یک جسم صلب، انرژی جنبشی برای ربات زمینی می‌تواند به‌صورت رابطه (15) نوشته شود:

$$\bar{T} - \sum_{i=1}^n m_i V_i \cdot V_i \quad \Omega_i \cdot I_i \cdot \Omega_i \quad (15)$$

که در آن تانسور اینرسی عضو i ام نسبت به مرکز جرم آن با I_i نمایش داده شده است. واضح است که بردارهای V_i ، Ω_i و تانسور مرتبه‌ی دوم I_i می‌توانند در هر پایهی دلخواهی تجزیه شوند. با این وجود، تجزیه‌ی I_i فقط در پایهی i ام به ماتریس اینرسی با درایه‌های نامتغیر با زمان منتهی می‌گردد و لذا مناسب است هر دو کمیت Ω_i و I_i در پایهی i ام تجزیه گردند. در چنین شرایطی هیچ دلیل منطقی در تجزیه‌ی V_i در پایهی غیر از پایهی i ام وجود ندارد. لذا منظور از V_i ، Ω_i و I_i ماتریس‌هایی است که مؤلفه‌های V_i ، Ω_i و I_i در پایهی i ام را در خود جای‌داده‌اند. بر این اساس بیان ماتریسی انرژی جنبشی برحسب این سه کمیت ماتریسی عبارت است از:

¹ Cross Matrix

$$S_s \quad diag \quad C_0^1 \quad D_1 \quad D_2 \quad \dots \quad D_n \quad (26-الف)$$

$$S_s \quad diag \quad C_0^1 \quad D_1 \quad D_2 \quad \dots \quad D_n \quad (26-ب)$$

4-4- محاسبه عبارت $-T \left(\dot{\lambda}^T - \frac{\partial \lambda}{\partial q} \right)$

ماتریس های S_s و S_t هر دو قطری بلوکی¹ هستند و لذا همان طور که در مرجع [14] آمده است، محاسبه S_s^{-T} ، S_t^{-T} و $\dot{S}_s^T$ و $\dot{S}_t^T$ به سادگی از اعمال $-T$ و $\dot{\lambda}^T$ روی درایه های قطر اصلی انجام می شود. بدین ترتیب تنها جمله ای که از عبارت $-T \left(\dot{S}^T - \frac{\partial \lambda}{\partial q} \right)$ باقی می ماند، $\frac{\partial \lambda}{\partial q}$ خواهد بود. به کمک روابط (9) و (25) نتیجه می گیریم که:

$$\forall i \neq n : \frac{\partial V_1}{\partial \alpha_i} \quad (27-الف)$$

$$\forall i \in n : \frac{\partial \omega_i}{\partial p_1} \quad (27-ب)$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial p_1} \quad (27-ج)$$

$$\forall i \neq j : \frac{\partial \omega_i}{\partial \{\alpha_j\}} \quad (27-د)$$

$$\forall j \neq n : \frac{\partial \Omega_1}{\partial \{\alpha_j\}} \quad (27-ه)$$

و لذا خواهیم داشت:

$$\frac{\partial \lambda_t}{\partial q_t} \quad diag \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial \alpha_1} \quad \frac{\partial \omega_2}{\partial \alpha_2} \quad \dots \quad \frac{\partial \omega_n}{\partial \alpha_n} \right) \quad (28-الف)$$

$$\frac{\partial \lambda_s}{\partial q_s} \quad \left(\frac{\partial V_1}{\partial \alpha_1} \right)_{21} \quad diag \left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial \alpha_1} \quad \frac{\partial \omega_2}{\partial \alpha_2} \quad \dots \quad \frac{\partial \omega_n}{\partial \alpha_n} \right) \quad (28-ب)$$

که در آن $\left(\frac{\partial V_1}{\partial \alpha_1} \right)_{21}$ ماتریسی مربعی با بلوک های 3×3 است که ماتریس $\frac{\partial V_1}{\partial \alpha_1}$ بلوک سطر دوم و ستون اول آن را تشکیل می دهد و سایر بلوک ها صفرند. در نهایت عبارت های $-T \left(\dot{S}^T - \frac{\partial \lambda}{\partial q} \right)$ به صورت زیر به دست می آیند:

$$S_t^{-T} \left(\dot{S}_t^T - \frac{\partial \lambda_t}{\partial q_t} \right) \quad \left(D_1^{-T} \left([\dot{D}_1]^T - \frac{\partial \omega_1}{\partial \alpha_1} \right) \quad D_n^{-T} \left([\dot{D}_n]^T - \frac{\partial \omega_n}{\partial \alpha_n} \right) \right) \quad (29-الف)$$

$$S_s^{-T} \left(\dot{S}_s^T - \frac{\partial \lambda_s}{\partial q_s} \right) \quad \left(-C_0^{1-T} \frac{\partial V_1}{\partial \alpha_1} \right)_{21} \quad \left(C_0^{1-T} [\dot{C}_0]^T \quad D_1^{-T} \left([\dot{D}_1]^T - \frac{\partial \omega_1}{\partial \alpha_1} \right) \quad D_n^{-T} \left([\dot{D}_n]^T - \frac{\partial \omega_n}{\partial \alpha_n} \right) \right) \quad (29-ب)$$

عبارت هایی به فرم $D_i^{-T} \left([\dot{D}_i]^T - \frac{\partial \omega_i}{\partial \alpha_i} \right)$ ، $C_0^{1-T} [\dot{C}_0]^T$ و $-C_0^{1-T} \frac{\partial V_1}{\partial \alpha_1}$ در دو رابطه ی اخیر مشاهده می شود که بایستی روابطی برای آن ها به دست آید. در مرجع [1] آمده است که:

$$[\dot{C}_{k-1}^k] \quad \omega_k \quad C_{k-1}^k \quad (30)$$

که در آن ماتریس کراس به صورت ترانهاده ی رابطه ی (30) تعریف شده است. لذا با توجه به تعریف ارائه شده از ماتریس کراس در این مقاله خواهیم داشت:

$$[\dot{C}_{k-1}^k] \quad \omega_k^T \quad C_{k-1}^k \quad (31)$$

بدین ترتیب داریم:

$$[\dot{C}_0^1]^T \quad C_0^1 \quad \Omega_1 \quad (32)$$

که نتیجه می دهد:

$$C_0^{1-T} [\dot{C}_0^1]^T \quad \Omega_1 \quad (33)$$

برای استخراج دو عبارت باقیمانده، مدل سازی دینامیکی برای سیستم یک جسمی (n)، یکبار با استفاده از فرم متداول معادلات بولتزمن-هامل که در مرجع [3] آورده شده و یکبار با استفاده از فرم پیشنهاد شده در این مقاله انجام می شود. این دو معادله با وجود این که ظاهر متفاوتی دارند، دینامیک سیستم یکسانی را توصیف می کنند و لذا معادل اند. از معادل بودن این دو معادله روابطی برای دو عبارت باقیمانده به دست می آید که فرم رابطه ی (5) را به ازای سیستم های دینامیکی مورد مطالعه در این مقاله بسیار ساده تر می کند.

در مرجع [2] معادله ی گشتاور نیرو حول مرکز جرم برای جسم صلب از فرم عمومی معادله ی بولتزمن-هامل و به صورت رابطه (34) به دست آمده است:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \Omega_1} \right) \quad \Omega_1 \quad \frac{\partial \bar{T}}{\partial \Omega_1} \quad V_1 \quad \frac{\partial \bar{T}}{\partial V_1} \quad \{M^{F/C}\} \quad (34)$$

که در آن $M^{F/C}$ بردار گشتاور سیستم نیرویی وارد بر جسم نسبت به نقطه ی مرکز جرم و $\{M^{F/C}\}$ ماتریس های ستونی حاصل از تجزیه ی این بردار در پایه ی بدنی جسم است. برای این مسئله ی خاص، داریم:

$$q_s \quad p_1^T \quad \alpha_1^T \quad T \quad (35-الف)$$

$$\lambda_s \quad V_1^T \quad \Omega_1^T \quad T \quad (35-ب)$$

$$S_s \quad diag \quad C_0^1 \quad D_1 \quad (35-ج)$$

$$S_s^{-T} \left(\dot{S}_s^T - \frac{\partial \lambda_s}{\partial q_s} \right) \quad \left[\begin{array}{c} \Omega_1 \\ -D_1^{-T} \frac{\partial V_1}{\partial \alpha_1} \quad D_1^{-T} \left([\dot{D}_1]^T - \frac{\partial \Omega_1}{\partial \alpha_1} \right) \end{array} \right] \quad (35-د)$$

از طرفی انرژی جنبشی برحسب q_s و λ_s عبارت است از:

$$\bar{T} \quad -m_1 V_1^T V_1 \quad -\Omega_1^T I_1 \Omega_1 \quad (36)$$

که نتیجه می دهد:

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial q_s} \quad (37)$$

با جای گذاری روابط اخیر در رابطه ی (5) و بسط سطر دوم آن خواهیم داشت:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \Omega_1} \right)$$

¹ Block Diagonal

$$\Lambda_s \quad V_1^T \quad \Omega_1^T \quad \Omega_2^T \quad \dots \quad \Omega_n^T \quad T \quad (45)$$

از ترکیب روابط (44)، (45) و (46) نتیجه می‌شود:

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \lambda_s} = \frac{\partial \bar{T}}{\partial \Lambda_s} \quad (46)$$

رابطه‌ی اخیر در مورد ربات زمینی نیز صدق می‌کند. به عبارت دیگر داریم:

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \lambda_t} = \frac{\partial \bar{T}}{\partial \Lambda_t} \quad (47)$$

که در آن:

$$\Lambda_t \quad \Omega_1^T \quad \Omega_2^T \quad \dots \quad \Omega_n^T \quad T \quad (48)$$

با توجه به آنچه بیان گردید، معادله‌ی (5) برای ربات زمینی و فضایی به صورت زیر ساده می‌شوند:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \Lambda_t} \right) \lambda_t \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \Lambda_t} \right) - S_t^{-T} \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial q_t} \right) \quad (49\text{-الف})$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \Lambda_s} \right) \lambda_s \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \Lambda_s} \right) - S_s^{-T} \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial q_s} \right) \quad (49\text{-ب})$$

4-5- محاسبه‌ی $\frac{\partial \bar{T}}{\partial \lambda_s}$ برای ربات فضایی

در محاسبه‌ی $\frac{\partial \bar{T}}{\partial \Lambda_s}$ به درک نحوه‌ی ارتباط میان کمیت‌های سینماتیکی (رابط 21) نیاز داریم. یک راه‌کار بسیار مناسب در دستیابی به این هدف رسم گرافی است که تصویر واضحی از نقش تک‌تک کمیت‌های سینماتیکی در تشکیل انرژی جنبشی را در اختیار گذارد. گراف متناظر با روابط سینماتیکی (21-الف) و (21-ب) می‌تواند به صورت "شکل 2" نمایش داده شود.

در گراف فوق A و B به ترتیب انرژی جنبشی انتقالی و دورانی کل سیستم و A_i و B_i به ترتیب انرژی جنبشی انتقالی و دورانی جزء i ام هستند. به عبارت دیگر داریم:

$$A_i = m_i V_i^T V_i \quad (50\text{-الف})$$

$$B_i = \Omega_i^T I_i \Omega_i \quad (50\text{-ب})$$

از روابط اخیر خواهیم داشت:

$$\frac{\partial A_i}{\partial V_i} = m_i V_i \quad (51\text{-الف})$$

$$\frac{\partial B_i}{\partial \Omega_i} = I_i \Omega_i \quad (51\text{-ب})$$

نحوه‌ی استفاده از این گراف در محاسبه‌ی درایه‌های $\frac{\partial \bar{T}}{\partial \Lambda_s}$ به این صورت است که در گام اول تمام مسیرهای آغاز شده از کمیت داخل کروشه تا $\bar{T}$ شناسایی می‌شوند. در گام دوم به ازای هر یک از پاره‌خط‌های جهت‌دار در یک مسیر دلخواه از کمیت انتهایی پاره‌خط جهت‌دار نسبت به کمیت حاضر در ابتدای آن، گرادیان ماتریسی گرفته می‌شود. در گام سوم همه‌ی گرادیان‌ها از پاره‌خط جهت‌دار اول تا آخر در هم ضرب می‌شوند. با به دست آمدن این حاصل‌ضرب‌ها برای تمامی مسیرها، آن‌ها را با هم جمع می‌کنیم. در نهایت حاصل این جمع همان $\frac{\partial \bar{T}}{\partial \Lambda_s}$ خواهد بود.

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial V_1} = \sum_{k=1}^n C_1^k T m_k V_k \quad (52\text{-الف})$$

$$D_1^{-T} \left([\dot{D}_1]^T - \frac{\partial \Omega_1}{\partial \alpha_1} \right) \frac{\partial \bar{T}}{\partial \Omega_1} - D_1^{-T} \frac{\partial V_1}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \bar{T}}{\partial V_1} \quad (38)$$

حال با کم کردن رابطه‌ی (38) از رابطه‌ی (34) خواهیم داشت:

$$\left(\Omega_1 - D_1^{-T} \left([\dot{D}_1]^T - \frac{\partial \Omega_1}{\partial \alpha_1} \right) \right) \frac{\partial \bar{T}}{\partial \Omega_1} - \left(V_1 - D_1^{-T} \frac{\partial V_1}{\partial \alpha_1} \right) \frac{\partial \bar{T}}{\partial V_1} - \{M^{F/C}\} - D_1^{-T} \{Q_{\alpha_1}\} \quad (39)$$

طی روندی طولانی اثبات نموده‌ایم که ضرایب مومنتوم‌های خطی و زاویه‌ای در معادله‌ی (39) هر دو صفرند و لذا دو اتحاد سینماتیکی به صورت زیر حاصل می‌شوند:

$$\Omega_1 - D_1^{-T} \left([\dot{D}_1]^T - \frac{\partial \Omega_1}{\partial \alpha_1} \right) = 0 \quad (40\text{-الف})$$

$$V_1 - D_1^{-T} \frac{\partial V_1}{\partial \alpha_1} = 0 \quad (40\text{-ب})$$

به همین ترتیب از صفر بودن طرف راست معادله‌ی (39) ثابت می‌کنیم که:

$$x - D_i^{-T} \frac{\partial C_{i-1}^T}{\partial \alpha_i} x = 0 \quad (40\text{-ج})$$

که در آن x هر برداری است که به α_1 بستگی نداشته باشد. روابط (40) صرفاً بیانگر ارتباط میان انواع کمیت‌های سینماتیکی هستند و لذا به اندیس وابستگی ندارند (به ازای سایر اندیس‌ها نیز صحیح‌اند). با استفاده از این واقعیت و نیز جای‌گذاری از رابطه‌ی (25) خواهیم داشت:

$$\omega_i - D_i^{-T} \left([\dot{D}_i]^T - \frac{\partial \omega_i}{\partial \alpha_i} \right) = 0 \quad (41\text{-الف})$$

$$C_{i-1}^T x - D_i^{-T} \frac{\partial C_{i-1}^T}{\partial \alpha_i} x = 0 \quad (41\text{-ب})$$

$$x - D_i^{-T} \frac{\partial C_{i-1}^T}{\partial \alpha_i} x = 0 \quad (41\text{-ج})$$

که در آن برای ربات زمینی $n \dots i$ و برای ربات فضایی $n \dots i$ خواهد بود.

حال با جای‌گذاری رابطه‌ی (41-الف) در روابط (29) نتایج زیر حاصل خواهند شد:

$$\lambda_t \stackrel{\text{def}}{=} S_t^{-T} \left(\dot{S}_t^T - \frac{\partial \lambda_t}{\partial q_t} \right) \quad (42\text{-الف})$$

$$\lambda_s \stackrel{\text{def}}{=} S_s^{-T} \left(\dot{S}_s^T - \frac{\partial \lambda_s}{\partial q_s} \right) \quad (42\text{-ب})$$

$$diag \begin{bmatrix} \Omega_1 & \Omega_1 & \omega_2 & \omega_n \end{bmatrix} \quad (42\text{-ج})$$

که در آن دو ماتریس λ_t و λ_s تعریف شده‌اند. با استفاده از رابطه‌ی (11) و طبق تعاریف حساب دیفرانسیل ماتریسی داریم:

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \lambda_s} = \left\{ \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial V_1} \right)^T \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \Omega_1} \right)^T \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \omega_2} \right)^T \dots \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \omega_n} \right)^T \right\}^T \quad (43)$$

از رابطه‌ی (22-ب) داریم:

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \omega_i} = \frac{\partial \Omega_i}{\partial \omega_i} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \Omega_i} \quad (44)$$

حال تعریف می‌کنیم:

از روابط (21) نتیجه می‌گیریم که درایه‌های ماتریس ستونی p_1 و ماتریس مربعی $\alpha_1 C_0^1$ در تابع انرژی جنبشی حضور ندارند. لذا می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial p_1} = \frac{\partial \bar{T}}{\partial \alpha_1} \quad (55)$$

حال به ازای n خواهیم داشت:

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \sum_{j=1}^{i-1} \bar{T}_j = \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \sum_{j=i}^n \bar{T}_j \quad (56)$$

واضح است که $\bar{T}_j$ به ازای $i - j$ تابعی از C_{i-1}^i نبوده و لذا تابعی از α_i نیز نخواهد بود. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \alpha_i} = \sum_{j=i}^n \frac{\partial \bar{T}_j}{\partial \alpha_i} \quad (57)$$

از طرفی داریم:

$$\bar{T}_j = \bar{T}_j(\{V_j\} \alpha_i \{\Omega_j\} \alpha_i) \quad (58)$$

با گردان‌گیری از طرفین نسبت به α_i خواهیم داشت:

$$\frac{\partial \bar{T}_j}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial \{V_j\}}{\partial \alpha_i} \frac{\partial \bar{T}_j}{\partial \{V_j\}} + \frac{\partial \{\Omega_j\}}{\partial \alpha_i} \frac{\partial \bar{T}_j}{\partial \{\Omega_j\}} = \frac{\partial \{V_j\}}{\partial \alpha_i} m_j \{V_j\} + \frac{\partial \{\Omega_j\}}{\partial \alpha_i} [I_j] \{\Omega_j\} \quad (59)$$

با جای‌گذاری رابطه‌ی اخیر در رابطه‌ی (57) نتیجه می‌شود:

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \alpha_i} = \sum_{j=i}^n \left(\frac{\partial \{V_j\}}{\partial \alpha_i} m_j \{V_j\} + \frac{\partial \{\Omega_j\}}{\partial \alpha_i} [I_j] \{\Omega_j\} \right) \quad (60)$$

گام بعدی محاسبه‌ی $\frac{\partial \{V_j\}}{\partial \alpha_i}$ و $\frac{\partial \{\Omega_j\}}{\partial \alpha_i}$ خواهد بود. برای این منظور داریم:

$$\frac{\partial \{\Omega_j\}}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial \Omega_i}{\partial \alpha_i} \frac{\partial \{\Omega_j\}}{\partial \Omega_i} \quad (61)$$

از ترکیب روابط (21-الف)، (41-ب) نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{\partial \Omega_i}{\partial \alpha_i} = -D_i^T C_{i-1}^i \Omega_{i-1} C_{i-1}^{i-1T} \quad (62)$$

به علاوه از قاعده‌ی زنجیره‌ای خواهیم داشت:

$$\frac{\partial \{\Omega_j\}}{\partial \Omega_i} = \frac{\partial \Omega_{i+1}}{\partial \Omega_i} \frac{\partial \{\Omega_{i+2}\}}{\partial \Omega_{i+1}} \frac{\partial \{\Omega_j\}}{\partial \{\Omega_{j-1}\}} \quad (63)$$

حال با استفاده از رابطه‌ی (22-الف) می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial \{\Omega_j\}}{\partial \Omega_i} = C_{i+1}^{i+1T} C_{i+2}^{i+2T} [C_{j-1}^i]^T [C_i^i]^T \quad (64)$$

از ترکیب روابط (61)، (62) و (64) نتیجه‌ی زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{\partial \{\Omega_j\}}{\partial \alpha_i} = -D_i^T C_{i-1}^i \Omega_{i-1} [C_{i-1}^i]^T \quad (65)$$

برای محاسبه‌ی $\frac{\partial \{V_j\}}{\partial \alpha_i}$ با استفاده از رابطه‌ی (21) می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial \{V_j\}}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial \{V_{j-1}\}}{\partial \alpha_i} [C_{j-1}^j]^T + \frac{\partial \{\Omega_{j-1}\}}{\partial \alpha_i} ([r_{j-1}] [C_{j-1}^j]^T + [C_{j-1}^j]^T [R_j]) \quad (66)$$

در رابطه‌ی اخیر، $\frac{\partial \{\Omega_{j-1}\}}{\partial \alpha_i}$ از رابطه‌ی (65) به دست می‌آید. به علاوه از روابط (21) و (41-ب) داریم:

$$\frac{\partial V_i}{\partial \alpha_i} = -D_i^T C_{i-1}^i [V_i] C_{i-1}^{i-1T} \frac{\partial \{\Omega_j\}}{\partial \alpha_i} R_i \quad (67)$$

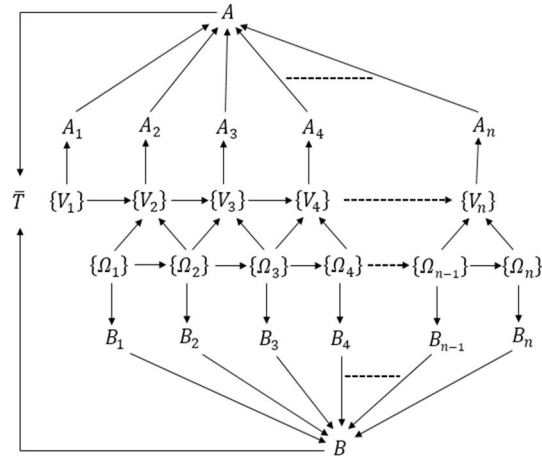


Fig. 2 The role of each kinematic quantity in forming the total kinetic energy of the system

شکل 2 نحوه‌ی تشکیل انرژی جنبشی کل توسط کمیت‌های سینماتیکی

با انجام روند مذکور به ازای تک تک درایه‌های A_s و بهره‌گیری از روابط (51) نتایج عمومی زیر حاصل می‌شوند:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \Omega_i} &= \sum_{k=i}^n C_i^k T I_k \Omega_k \\ &+ \sum_{k=i}^n \left(\sum_{j=i}^k ([C_i^j]^T L_{j,k} [C_j^k]^T) \right) m_k V_k \end{aligned} \quad (52-ب)$$

که در آن:

$$R_1 = \begin{cases} [R_j] & j = k \\ [R_j] \quad [r_j] & j \neq k \end{cases} \quad (52-ج)$$

4-6- محاسبه‌ی $\frac{\partial \bar{T}}{\partial \lambda_i}$ برای ربات زمینی

گراف شکل 2 برای ربات زمینی نیز قابل استفاده است با این تفاوت که بایستی یک پاره‌خط جهت‌دار از سمت Ω_1 به V_1 نیز رسم شود تا وابستگی آن‌ها در ربات زمینی نشان داده شود. با استفاده از این گراف، روابطی به‌صورت زیر به‌دست خواهد آمد:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \Omega_i} &= \sum_{k=i}^n C_i^k T I_k \Omega_k \\ &+ \sum_{k=i}^n \left(\sum_{j=i}^k ([C_i^j]^T L_{j,k} [C_j^k]^T) \right) m_k V_k \end{aligned} \quad (53)$$

این رابطه با رابطه‌ی (50-ب) یکسان است با این تفاوت که با توجه به "شکل 2"، R_1 صفر نیست.

4-7- محاسبه‌ی $\frac{\partial \bar{T}}{\partial q_s}$ برای ربات فضایی

از رابطه‌ی (6-ب) داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{T}}{\partial q_s} &= \left\{ \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial p_1} \right)^T \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \alpha_1} \right)^T \dots \dots \right. \\ &\quad \left. \dots \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \alpha_n} \right)^T \right\}^T \end{aligned} \quad (54)$$

که در آن:

$$\{V_i\} \quad V_{i-1} \quad r_{i-1}^T \quad \Omega_{i-1} \quad (68)$$

با استفاده از رابطه‌ی (67)، مقادیر $\frac{\partial \{V_i\}}{\partial \alpha_i}$ به ازای n از i به j صورت بازگشتی به دست می‌آیند.

4-8- محاسبه‌ی $\frac{\partial \bar{T}}{\partial q_t}$ برای ربات زمینی

روابط (59) تا (68) در مورد ربات زمینی نیز صدق می‌کنند با این تفاوت که داریم:

$$\{V_2\} \quad R_1 \quad r_1^T \quad \omega_1 \quad (69)$$

5- محاسبه‌ی شبه نیروها

فرض کنیم F نیرویی دلخواه، اعمال شده بر عضوی دلخواه باشد. بردار مکان متناظر با محل اعمال این نیرو می‌تواند به دو قسمت P_1 (بردار مکان مرکز جرم جسم اول) و u تقسیم شود که در آن برداری است که از مرکز جرم جسم اول آغاز و به محل اعمال نیرو منتهی می‌شود. لذا می‌توان نوشت:

$$Q_x \quad \sum_{sys} F \cdot \frac{\partial P_1}{\partial x} u \quad (70)$$

واضح است که بردار u به x بستگی ندارد و لذا $\frac{\partial u}{\partial x}$ خواهد بود. به علاوه داریم:

$$\frac{\partial P_1}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial x} (x b_1^0 \quad y b_2^0 \quad z b_3^0) \quad b_1^0 \quad (71)$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$Q_x \quad \left(\sum_{sys} F \right) \cdot b_1^0 \quad (72)$$

بدین ترتیب $\{Q_{P_1}\}$ به صورت رابطه (73) به دست می‌آید:

$$\{Q_{P_1}\} \quad \left\{ \left(\sum_{sys} F \right) \cdot b_1^0 \quad \left(\sum_{sys} F \right) \cdot b_2^0 \quad \left(\sum_{sys} F \right) \cdot b_3^0 \right\}^T \quad (73)$$

از معادله‌ی اخیر معلوم می‌گردد که $\{Q_{P_1}\}$ همان ماتریس ستونی حاوی مؤلفه‌های نیروی برآیند وارد بر کل سیستم در پایه‌ی اینرسی است.

ماتریس دوران C_{i-1}^i به عنوان تابعی از ماتریس ستونی α_i ، در بردارهای مکان مستقر در جسم i ام به بعد حضور دارد. لذا در محاسبه‌ی Q_{ψ_i} با زنجیره‌ای از اعضا متشکل از جسم i ام تا جسم n ام مواجه خواهیم بود. لذا می‌توان نوشت:

$$Q_{\psi_i} \quad \sum_k F_k \cdot \frac{\partial u_{ik}}{\partial \psi_i} \quad (74)$$

که در آن F_k نیروی k ام وارد بر سیستم متشکل از جسم i ام تا جسم n ام و u_{ik} بردار مکان از J_i به محل اعمال F_k هستند.

رابطه‌ی اخیر را می‌توان طبق روند زیر برحسب پایه‌ی اینرسی بیان نمود:

$$Q_{\psi_i} \quad \sum_k b_0^T F_k \cdot \frac{\partial b_0^T u_{ik}}{\partial \psi_i} \quad \sum_k b_0^T F_k \quad \cdot \quad b_0^T \left(\frac{\partial u_{ik}}{\partial \psi_i} \right)^T \quad \sum_k \frac{\partial u_{ik}}{\partial \psi_i} F_k \quad (75)$$

که در آن اندیس صفر به این معناست که هر دو ماتریس‌های ستونی، حاصل تجزیه‌ی بردارهای داخل کروه در پایه‌ی اینرسی هستند. از رابطه‌ی اخیر خواهیم داشت:

$$\{Q_{\alpha_i}\} \quad \sum_k \frac{\partial u_{ik}}{\partial \alpha_i} F_k \quad (76)$$

حال اگر رابطه‌ی اخیر را برحسب u_{ik} بنویسیم رابطه‌ی (77) حاصل می‌شود:

$$\{Q_{\alpha_i}\} \quad \sum_k \frac{\partial [C_0^i]^T}{\partial \alpha_i} u_{ik} F_k \quad (77)$$

از طرفی داریم:

$$\frac{\partial [C_0^i]^T}{\partial \alpha_i} u_{ik} \quad \frac{\partial [C_0^{i-1}]^T [C_{i-1}^i]^T}{\partial \alpha_i} u_{ik} \quad (78)$$

با استفاده از رابطه‌ی (41-ج) و اعمال قاعده‌ی زنجیره‌ای خواهیم داشت:

$$\frac{\partial [C_0^i]^T}{\partial \alpha_i} u_{ik} \quad D_i^T u_{ik} [C_0^i] \quad (79)$$

که جای‌گذاری آن در رابطه‌ی (77) به معادله‌ی (80) منتج می‌گردد:

$$\{Q_{\alpha_i}\} \quad D_i^T \sum_k u_{ik} [C_0^i] F_k \quad D_i^T \sum_k u_{ik} F_k \quad (80)$$

نهایتاً از ضرب S^{-T} در Q شبه نیروها به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\Phi \quad \left\{ \{\Phi_{P_1}\}^T \quad \{\Phi_{\alpha_1}\}^T \quad \{\Phi_{\alpha_n}\}^T \right\}^T \quad (81)$$

که در آن:

$$\{\Phi_{P_1}\} \quad C_0^1 \{Q_{P_1}\} \quad (82)$$

و:

$$\{\Phi_{\alpha_i}\} \quad D_i^{-T} \{Q_{\alpha_i}\} \quad \sum_k u_{ik} F_k \quad (83)$$

5-1- محاسبه‌ی شبه نیروها برای ربات زمینی

رابطه‌ی (83) در مورد هر دو ربات صحیح است با این تفاوت که J_1 برای ربات زمینی، مفصل آن با زمین و برای ربات فضایی، نقطه‌ی مرکز جرم جسم اول هستند (شکل 1).

6- مدل‌سازی دینامیکی یک ربات دو لینکی زمینی

در این قسمت قصد داریم با استفاده از الگوریتم ارائه شده مدل دینامیکی یک ربات دو لینکی زمینی در حالت صفحه‌ای را به دست آوریم (شکل 3). در مورد این سیستم داریم:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \Omega_1} \\ \frac{\partial \bar{T}}{\partial \Omega_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \Omega_1} \\ \frac{\partial \bar{T}}{\partial \Omega_2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} D_1^{-T} \\ D_2^{-T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \alpha_1} \\ \frac{\partial \bar{T}}{\partial \alpha_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\Phi_{\alpha_1}\} \\ \{\Phi_{\alpha_2}\} \end{bmatrix} \quad (84)$$

$$C_1^2 \begin{bmatrix} \cos \psi_2 & \sin \psi_2 \\ -\sin \psi_2 & \cos \psi_2 \end{bmatrix} \quad (85)$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \Omega_2} \left\{ \begin{matrix} -ml^2(\dot{\psi}_1 & \psi_2 & \dot{\psi}_2) \end{matrix} \right\}^T \quad (89\text{-ب})$$

$$-D_2^{-T} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \alpha_2} \left\{ \begin{matrix} ml^2 \dot{\psi}_1 & \psi_1 & \dot{\psi}_2 & \psi_2 \end{matrix} \right\} \quad (89\text{-ج})$$

$$\left[\begin{matrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \Omega_1} \\ \frac{\partial \bar{T}}{\partial \Omega_2} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \dot{\psi}_1 \\ \dot{\psi}_2 \end{matrix} \right\} \quad (89\text{-د})$$

6-1- محاسبه ی شبه نیروها برای ربات دو لینکی زمینی

با توجه به "شکل 3" و روابط (86) داریم:

$$\{\Phi_{\alpha_1}\} \quad R \quad F_1 \quad R \quad C_1^2 \quad T \quad R \quad F_2 \quad \left\{ \begin{matrix} l(f_1 \\ f_2 \cos \psi_2) \end{matrix} \right\}^T \quad (90\text{-الف})$$

$$\{\Phi_{\alpha_2}\} \quad R \quad F_2 \quad l f_2 \quad T \quad (90\text{-ب})$$

در نهایت، با جای‌گذاری روابط (89) و (90) در رابطه‌ی (84)، معادلات حرکت به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$l(f_1 \quad f_2 \quad \cos \psi_2) \quad -ml^2 \left[\begin{matrix} \cos \psi_2 \ddot{\psi}_1 \\ \cos \psi_2 \ddot{\psi}_2 \\ -\dot{\psi}_2 (\dot{\psi}_1 \sin \psi_2) \end{matrix} \right] \quad (91\text{-الف})$$

$$l f_2 \quad -ml^2 \left[\begin{matrix} \ddot{\psi}_2 \cos \psi_2 \dot{\psi}_1 \\ \dot{\psi}_1^2 \sin \psi_2 \end{matrix} \right] \quad (91\text{-ب})$$

7- نتایج شبیه‌سازی

در این قسمت نتایج شبیه‌سازی و صحت‌سنجی مدل در نرم‌افزار آدامز به ازای شرایط اولیه‌ی صفر، $kg \quad m \quad I_{xx} \quad I_{yy} = I_{zz}$ ، طول لینک $2m$ و تحریک $sint \quad N$ $f_1 = f_2$ به‌دست آمده و همان‌طور که در شکل‌های 4، 5، 6 و 7 مشاهده می‌شود، نمودارهای حاصل از شبیه‌سازی توسط الگوریتم ارائه شده با مدل نرم‌افزار آدامز به‌طور کامل مطابقت دارد.

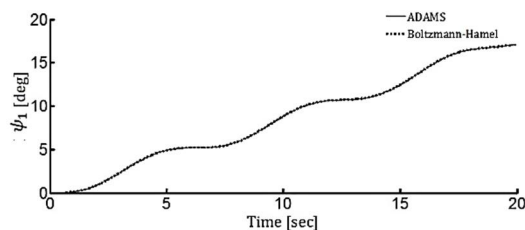


Fig. 4 Validation of the first generalized coordinate

شکل 4 صحت‌سنجی اولین مختصه‌ی تعمیم یافته

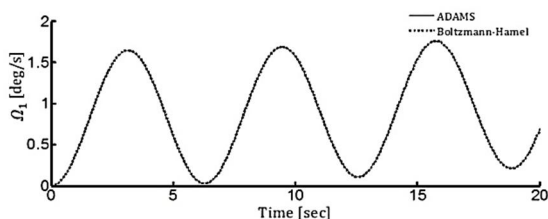


Fig. 5 Validation of the first quasi-velocity

شکل 5 صحت‌سنجی شبه‌سرعت اول

حال فرض می‌کنیم لینک‌ها، میله‌هایی باریک و همسان باشند و نیروها همواره عمود بر میله‌ها باقی بمانند. بر این اساس داریم:

$$m_1 \quad m_2 \quad m \quad (86\text{-الف})$$

$$I_1 \quad I_2 \quad I \quad -ml^2 \left[\begin{matrix} R \\ R \\ l \end{matrix} \right]^T \quad (86\text{-ب})$$

$$R_1 \quad r_1 \quad R_2 \quad R \quad l \quad T \quad (86\text{-ج})$$

$$F_1 \quad f_1 \quad T \quad (86\text{-د})$$

$$F_2 \quad f_2 \quad T \quad (86\text{-هـ})$$

با در نظر گرفتن ساده‌سازی‌های اخیر و استفاده از روابط (53)، (60)، (62) و (67) داریم:

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \Omega_1} \quad I \quad \Omega_1 \quad C_1^2 \quad T \quad I \quad \Omega_2 \quad R \quad m \quad V_1 \quad R \quad C_1^2 \quad T \quad m \quad V_2 \quad (87\text{-الف})$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \Omega_2} \quad I \quad \Omega_2 \quad R \quad m \quad V_2 \quad (87\text{-ب})$$

$$-D_1^{-T} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \alpha_1} \quad (87\text{-ج})$$

$$-D_2^{-T} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \alpha_2} \quad C_1^2 \quad (\quad V_1 \quad C_1^2 \quad T \quad m \quad V_2 \quad \Omega_1 \quad C_1^2 \quad T \quad I \quad \Omega_2 \quad R \quad m \quad V_2 \quad) \quad (87\text{-د})$$

از طرفی از روابط سینماتیکی (21) داریم:

$$\Omega_1 \quad \omega_1 \quad \left\{ \begin{matrix} \dot{\psi}_1 \end{matrix} \right\}^T \quad (88\text{-الف})$$

$$\Omega_2 \quad \left\{ \begin{matrix} \dot{\psi}_1 & \dot{\psi}_2 \end{matrix} \right\}^T \quad (88\text{-ب})$$

$$V_1 \quad \left\{ \begin{matrix} l \dot{\psi}_1 \end{matrix} \right\}^T \quad (88\text{-ج})$$

$$V_2 \quad \left\{ \begin{matrix} l \dot{\psi}_1 \sin \psi_2 \\ l \dot{\psi}_1 \cos \psi_2 & l \dot{\psi}_2 \end{matrix} \right\}^T \quad (88\text{-د})$$

حال با جای‌گذاری از روابط (88) در روابط (53)، (60)، (62) و (67) خواهیم داشت:

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \Omega_1} \left\{ \begin{matrix} -ml^2(\dot{\psi}_1 & \psi_2 & \dot{\psi}_2 & \psi_2) \end{matrix} \right\}^T \quad (89\text{-الف})$$

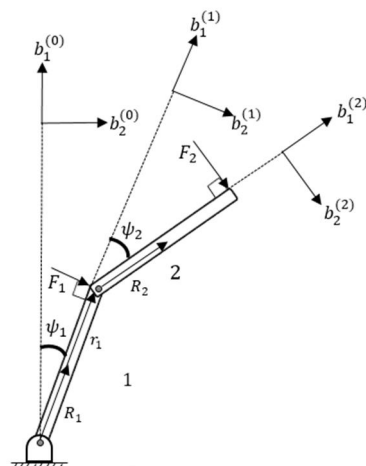


Fig. 3 A terrestrial two-link planar robot

شکل 3 یک ربات دو لینکی زمینی در حالت صفحه‌ای

پایه‌ی بدنی همان عضو	
مفصل بین عضو i ام و عضو $i-1$ ام	J_i
بردار مکان مرکز جرم عضو اول نسبت به نقطه‌ای ساکن در چارچوب مرجع اینرسی	p_1
ماتریس ستونی مختصات تعمیم‌یافته	q
بردار مکان مرکز جرم عضو i ام نسبت به مفصل J_i	R_i
بردار مکان مفصل J_{i+1} نسبت به مرکز جرم عضو i ام	r_i
ماتریس تبدیل از سرعت‌های تعمیم‌یافته به شبه‌سرعت‌ها	S
انرژی جنبشی کل سیستم برحسب مختصات تعمیم‌یافته و سرعت‌های تعمیم‌یافته و شبه‌سرعت‌ها	T
بردار مکان متناظر با محل اعمال نیروی دلخواه F نسبت به مرکز جرم عضو اول در ربات فضایی	u
بردار مکان متناظر با محل اعمال نیروی دلخواه F_k نسبت به مفصل J_i	u_{ik}
بردار سرعت مرکز جرم عضو i ام	V_i

علائم یونانی

ماتریس ستونی حاوی زوایای وضعیت عضو i ام نسبت به عضو $i-1$ ام	α_i
ماتریس ستونی شبه‌سرعت‌ها	λ
ماتریس ستونی حاوی مؤلفه‌های بردار سرعت زاویه‌ای عضو i ام نسبت به چارچوب مرجع اینرسی بیان شده در پایه‌ی i ام	Ω_i
ماتریس ستونی حاوی مؤلفه‌های بردار سرعت زاویه‌ای عضو i ام نسبت به عضو $i-1$ ام بیان شده در پایه‌ی i ام	ω_i

بالانویس‌ها

اپراتور تبدیل از ماتریس ستونی به ماتریس کراس	
ترانهاده‌ی ماتریس	
معکوس ترانهاده‌ی ماتریس	-

زیرنویس‌ها

ربات فضایی	s
ربات زمینی	t

10- مراجع

- [1] R. D. Quinn, Equations of motion for structures in terms of quasi-coordinates, *Journal Of Applied Mechanics*, Vol. 57, No. 3, pp. 745-749, 1990.
- [2] D. T. Greenwood, *Advanced dynamics*, pp.226-305, Cambridge: Cambridge University Press, 2003.
- [3] Leonard Meirovitch, *Methods of analytical dynamics*, pp. 157-164, New York: McGraw-Hill, 1970.
- [4] M. Korayem, A. Shafei, Application of recursive gibbs-appell formulation in deriving the Equations of motion of N-viscoelastic robotic manipulators in 3D space using Timoshenko beam theory, *Acta Astronautica*, Vol. 83, No. 4 pp. 273-294, 2013.
- [5] Alipour, K., Moosavian, S.A.A. and Bahramzadeh, Y., Dynamics of wheeled mobile robots with flexible suspension: analytical modelling and verification. *International Journal of Robotics & Automation*, Vol. 23, No. 4, pp. 242, 2008.
- [6] A. F. Jahromi, R. B. Bhat, W. F. Xie integrate, Integrated ride and handling vehicle model using lagrangian quasi-coordinates, *International Journal of Automotive Technology*, Vol. 16, No. 2, pp 239-251, 2014.
- [7] J. M. Cameron, W. J. Book, Modeling mechanisms with nonholonomic joints using the Boltzmann-Hamel equations, *International Journal On Robotics Research*, Vol. 16, No. 1, pp. 47-59, 1997.
- [8] J. D. Turner, Symbolic Equation of motion and linear algebra models for high-speed ground vehicle simulations, *Journal Of Guidance And Control*, Vol. 10, No. 5, pp. 8-18, 2001.
- [9] K. Sibalski, A. Zyluk, Generation of equations of motion of flying vehicles as multi-body systems - general remarks, *guidance, Navigation And Control and Co-located Conferences*, Vol. 56 No. 4, pp. 10-13, 2009.
- [10] F. Talamucci, An algebraic procedure for reducing the Boltzmann-Hamel

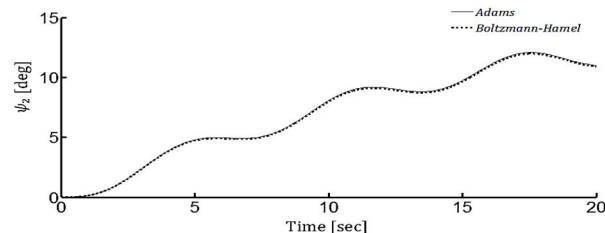


Fig. 6 Validation of the first generalized coordinate

شکل 6 صحت سنجی مختصه تعمیم یافته اول

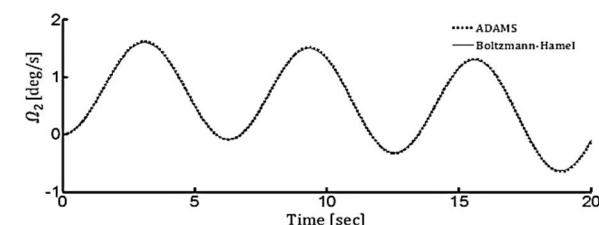


Fig. 7 Validation of the second quasi-velocity

شکل 7 صحت سنجی شبه‌سرعت دوم

8- نتیجه‌گیری

در این مقاله، الگوریتمی جهت استخراج معادلات حرکت ربات‌های زمینی و فضایی با تعداد دلخواه عضو صلب در حالت زنجیرباز ارائه گردید. با توجه به معایب روش‌های نیوتن-اوایلر و لاگرانژ و نیز مزایای قابل توجه مفهوم شبه مختصات و شبه‌سرعت‌ها، از فرمی از معادلات مبتنی بر معادلات بولتزمن-هامل که مفاهیم مذکور در آن حضور دارند، جهت مدلسازی دینامیکی استفاده گردید. به‌طور خاص، مشاهده گردید که این رویکرد در مدلسازی دینامیکی، با از میان برداشتن معایب روش‌های نیوتن-اوایلر و لاگرانژ (نیاز به تشکیل انرژی جنبشی و احتساب نیروهای داخلی بین اجزای سیستم)، امکان استخراج معادلات این سیستم‌ها را در حالت عمومی فراهم آورده و بدین جهت می‌تواند روشی مطلوب در ارائه الگوریتم‌های عمومی تشکیل معادلات به‌شمار آید. همچنین نقش کلیدی استخراج اتحادهای سینماتیکی در ساده‌سازی معادلات بولتزمن-هامل، از طریق اثبات سه رابطه‌ی کاربردی نشان داده شده و مورد استفاده قرار گرفت. در ادامه، نحوه‌ی استفاده از الگوریتم ارائه شده، از طریق حل یک مثال نشان داده شد و نهایتاً صحت مدل به‌وسیله‌ی مقایسه‌ی نمودارهای حاصل از شبیه‌سازی یک ربات دو لینکی دو درجه آزادی و نمودارهای به‌دست‌آمده از مدل ربات در نرم‌افزار آدامز تأیید گردید.

9- فهرست علائم

انرژی جنبشی انتقالی عضو i ام	A_i
انرژی جنبشی دورانی عضو i ام	B_i
ماتریس ستونی حاوی بردارهای پایه‌ی بدنی عضو i ام	b_i
نقطه‌ی مرکز جرم عضو i ام	C_i
ماتریس دوران از پایه‌ی i ام به پایه‌ی j ام	$[C_i^j]$
ماتریس تبدیل از مشتق زوایای عضو i ام به سرعت‌های زاویه‌ای همان عضو	D_i
بردار نیروی دلخواه وارد شده بر عضو دلخواهی از سیستم	F
بردار نیروی دلخواه واردشده بر عضو i ام	F_i
ماتریس اینرسی عضو i ام نسبت به مرکز جرم آن بیان شده در	I_i

- International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 21, No. 4, pp. 373-386, 2011.
- [13] M. Lu, W. Gu, J. Liu, Z. Wang, Z. Jing, G. Qin, S. Tu, Recursive dynamic algorithm of open-chain multibody system, *Mathematical Problems in Engineering*, Vol. 14, No. 2, pp. 194–197, 2014.
- [14] J. R. Magnus, H. Neudecker, *Matrix Differential Calculus With Applications in Statistics and Econometrics*, Second Edition, pp.226-305, New York: Wiley, 1999.
- equations in nonholonomic systems, *Advances In Theoretical And Applied Mechanics*, Vol. 8, No. 1, pp. 7 – 26, 2015.
- [11] A. Khoshnood, H. M. Maryamnegari, Dynamics modeling and active vibration control of a Satellite with flexible solar panels, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 16, pp. 57-66, 2015. (in Persian فارسی)
- [12] J. M. Maruskin, A. M. Bloch, The Boltzmann–Hamel equations for the optimal control of mechanical systems with nonholonomic constraints,