مجله مهندسی مکانیک مدرس، مهر 1395، دوره 16، شماره 7، ص‌ص 361-372

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

حل تحلیلی استراتژی خط‌دید بهینه برای سیستم هدایت و کنترل یکپارچه ساده شده برای اهداف ثابت

سیدحسام سجادی[1]، سیدحمید جلالی نائینی[2*]

1- دانشجوی دکتری، مهندسی هوافضا، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

2- استادیار، مهندسی هوافضا، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

* تهران، صندوق پستی 111-14115، shjalalinaini@modares.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 06 اردیبهشت 1395

پذیرش: 03 تیر 1395

ارائه در سایت: 16 مرداد 1395

کلید واژگان:

هدایت و کنترل یکپارچه

کنترل بهینه

هدایت خط‌دید

سیستم‌های ناکمینه‌فاز

چکیده

در این مقاله، حل تحلیلی و صریح استراتژی خط دید بهینه برای سیستم‌های هدایت و کنترل یکپارچه بدون در نظر گرفتن اشباع زاویه بالک استخراج شده است. دینامیک وسیله پروازی بصورت یک تابع تبدیل مرتبه دوم ناکمینه‌فاز مدل شده است که نمایانگر تخمین پریود کوتاه است. برای حل مسئله کنترل بهینه، دینامیک عملگر ایده‌آل و بدون اشباع زاویه بالک فرض شده اما برای بررسی عملکرد، محدودیت روی زاویه بالک در شبیه‌سازی اعمال شده است. معادلات حرکت برای حل بهینه بصورت تک‌بعدی در نظر گرفته شده و زمان و موقعیت نهایی معلوم و ثابت فرض شده است. همچنین، معادلات با استفاده از چهار فرم بی‌بعدسازی مختلف استخراج شده است که سبب افزایش دید در طراحی و تحلیل عملکرد استراتژی هدایت و کنترل یکپارچه می‌شود. به‌علاوه، بهره‌های هدایت برای حل پایای استراتژی مذکور بصورت تحلیلی و صریح استخراج شده است. در مجموع، عملکرد «قانون هدایت و کنترل یکپارچه خط‌دید بهینه» از حل پایای آن بهتر بوده ولی بار محاسباتی آن بیشتر است؛ اگرچه برای ریزپردازنده‌های کنونی قابل قبول می‌باشد. به‌علاوه در پیاده‌سازی قانون مذکور از برازش منحنی یا جستجو در جدول می‌توان استفاده کرد. همچنین مطالعه پارامتری بی‌بعد قانون هدایت و کنترل یکپارچه، به‌طور نمونه برای ضریب وزنی فاصله از خط دید، بهره و فرکانس پریود کوتاه دینامیک وسیله پروازی صورت گرفته است. در نهایت، عملکرد هر دو قانون هدایت و کنترل یکپارچه با وجود عدم قطعیت در مدل دینامیک وسیله پروازی بررسی شده است.

Analytical Solution of Optimal Line-of-Sight Strategy for Simplified Integrated Guidance and Control System with Stationary Target

Sayyed Hesam Sajjadi, Seyed Hamid Jalali Naini*

Faculty of Mechanical Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran
* P.O.B. 14115111, Tehran, Iran, shjalalinaini@modares.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 25 April 2016
Accepted 23 June 2016
Available Online 06 August 2016

Keywords:
Integrated Guidance and Control
Optimal Control
Line-of-Sight Guidance
Non-Minimum Phase Systems

ABSTRACT

In this paper, an explicit formulation of optimal line-of-sight strategy is derived in closed-loop for integrated guidance and control (IGC) system without consideration of fin deflection limit. The airframe dynamics is modeled by a second-order non minimum phase transfer function, describing short period approximation. In the derivation of our optimal control problem, the actuator is assumed to be perfect and without limitation on fin deflection, whereas fin deflection limit is applied for the performance analysis of the presented optimal IGC solution. The problem geometry is assumed in one dimension and the final position and final time are fixed. The formulation is obtained in four different normalized forms to give more insight into the design and performance analysis of the optimal IGC strategy. In addition, guidance gains are obtained analytically in explicit form for steady-state solution. In most cases, the performance of IGC is better than that of IGC with steady-state gains, but has more computational burden; however, it is reasonable for today's microprocessors. Curve fitting or look-up table may be used instead for implementation of optimal IGC strategy. Moreover, parametric study of nondimensional IGC parameters is carried out, such as weighing factor, dc gain, and short period frequency. Finally, the performance of both IGC strategies is evaluated with airframe model uncertainties.

1-مقدمه

اغلب سیستم‌های خودکار پروازی کنونی، با استفاده از روش هدایت و کنترل غیریکپارچه طراحی شده است. امروزه، به‌منظور افزایش عملکرد و دقت سیستم‌های خودکار پروازی و با افزایش قدرت و سرعت ریزپردازنده‌ها، روش‌های هدایت و کنترل یکپارچه مد نظر قرار گرفته است [1-3].

امروزه در تعریف متداول در سیستم هدایت و کنترل یکپارچه، فرامین هدایت محاسبه نمی‌شود و یک دفعه، خروجی کنترلی محاسبه می‌شود. به‌طور نمونه، در سیستم‌های خودکار پروازی کنترل آیرودینامیک مانند

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:

S. H. Sajjadi, S. H. Jalali Naini, Analytical Solution of Optimal Line-of-Sight Strategy for Simplified Integrated Guidance and Control System with Stationary Target, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 7, pp. 361-372, 2016 (in Persian)

هواپیماهای بدون سرنشین از روش هدایت و کنترل یکپارچه، دستور شتاب جانبی محاسبه نشده، بلکه به‌طور مستقیم دستور زاویه انحراف بالک محاسبه و به عملگر اعمال می‌شود [2,1]. البته تعریف مذکور، به‌طور همسان و بصورت روال واحد در منابع مشاهده نمی‌شود.

در سیستم‌های هدایت و کنترل غیریکپارچه ممکن است قانون هدایت و قانون کنترلی جداگانه طراحی شود. با بررسی عملکرد کل مجموعه، در صورتی که این عملکرد مناسب نباشد؛ طراحی هر یک از این دو سیستم هدایت و کنترل بازنگری و مجددا عملکرد کل مجموعه ارزیابی می‌شود. این فرآیند تکرار شده تا عملکرد مناسب حاصل آید. طراحی با استفاده از این روش، به‌علت سیکل‌های متعدد، معمولا طولانی می‌شود. همچنین از حداکثر ظرفیت طراحی استفاده نشده و لذا عملکرد مجموعه می‌تواند با عملکرد سیستم هدایت و کنترل بهینه، فاصله قابل‌توجهی داشته باشد. از مزایای سیستم‌های سنتی می‌توان به سادگی نسبی در طراحی، بار محاسباتی نسبتا پایین (نسبت به سیستم هدایت و کنترل یکپارچه) اشاره نمود. به‌علاوه، در روش‌های غیریکپارچه، به‌علت طراحی جداگانه و امکان مشاهده رفتار پارامترهای زیرسیستم‌ها (به‌طور نمونه، نرخ چرخش خط‌دید، دستور شتاب)، اعمال روش‌های روتین و طراحی روشمند توسط طراح برای اصلاح رفتار سیستم وجود دارد. مطالعات بعضا اولیه بعضی از محققین نشان می‌دهد که سیستم هدایت و کنترل یکپارچه در مقایسه با سیستم‌های غیریکپارچه دارای عملکرد و دقت مطلوب‌تر و هزینه تمام شده کمتر است [4,3].

برای طراحی قانون هدایت به روش یکپارچه می‌توان از روش‌های متداول در طراحی قوانین کنترلی استفاده کرد. تاکنون روش‌های متعددی برای طراحی و یا بهینه‌سازی قانون هدایت و کنترل یکپارچه ارائه شده است. به‌طور نمونه می‌توان از کنترل مقاوم [5]، کنترل تطبیقی [7,6] و کنترل مود لغزشی [9,8] نام برد. کاربرد روش کنترل بهینه در مسائل کنترلی اعتبار و جایگاه خاص خود را دارد؛ اما در حالت کلی استخراج حل تحلیلی برای آن غامض است. استخراج روابط صریح برای ضرایب قانون بهینه حتی برای مسائل خطی نیز برحسب نوع قیود مسئله و با افزایش مرتبه سیستم دشوار است.

در مسائل هدایت و کنترل یکپارچه با توجه به مرتبه بالای سیستم و همچنین در هدایت خط‌دید به علت افزوده شدن ترم مجذور فاصله از خط‌دید در معیار عملکرد، استخراج روابط تحلیلی برای بهره‌های بهینه دشوارتر می‌شود. البته در منابع از حل عددی معادله جبری ریکاتی که منجربه استخراج بهره‌های بهینه پایا می‌شود، استفاده شده است [11,10]. در قانون هدایت خط‌دید، هدف آن است که وسیله پروازی همواره بر روی خط واصل بین هدف و ردیاب هدف (خط‌دید) قرار گیرد. به‌عبارت دیگر در هدایت خط‌دید، فاصله (عمودی) وسیله پروازی از خط‌دید به‌عنوان خطا در نظر گرفته شده و دستور شتاب به‌منظور صفر کردن این خطا محاسبه می‌شود. البته قوانین هدایت خط‌دید بهینه برای سیستم یکپارچه نیز به‌علت همان ترم مجذور فاصله از خط‌دید از مسائل هدایت دو نقطه‌ای غامض‌تر است. به‌طور نمونه، هدایت خط‌دید بهینه برای سیستم‌های غیریکپارچه تنها برای هدف ثابت و سیستم کنترل مرتبه صفرم (ایده‌آل) تا مرتبه دوم در حالت تک‌بعدی در منابع ذکر شده است [15-12].

در مرجع [10] روند کلی روابط کنترل بهینه برای هدایت خط‌دید مطابق منابع کنترل بهینه آورده شده است و در آن تنها به عملکرد هدایت و کنترل یکپارچه بهینه خط‌دید و حل جبری معادله ریکاتی برای استخراج ضرایب بهره پایا برای مسألهٔ تک‌بعدی اشاره‌ای کرده است. البته در مقاله مذکور، هیچ‌گونه اثری از حل تحلیلی معادلات یا اشاره‌ای به آن، دیده نمی‌شود و به‌نظر حل عددی صورت پذیرفته است. البته در عوض از خطی‌سازی و تابع توصیفی برای المان غیرخطی اشباع استفاده کرده است.

در مرجع [11] یک قانون تحت عنوان هدایت و کنترل یکپارچه بهینه خط‌دید برای پرواز آرایشمند چهار هواپیمای بدون سرنشین برای گردش حول یک دایره با شعاع ثابت در صفحه افق، که هدف در وسط آن دایره قرار دارد، در حالت پایا با استفاده از حل عددی معادله جبری ریکاتی استخراج شده است. البته در مرجع مذکور، حل تحلیلی برای بهره‌های پایا استخراج نشده است و با تغییر شرایط آیرودینامیکی و مشخصات جرمی، این بهره‌ها بصورت عددی محاسبه می‌شود. در مقاله فوق‌الذکر، فرامین هدایتی نیز استخراج شده و از روی آن، فرامین کنترلی محاسبه می‌شود که با تعریف اشاره شده در خصوص سیستم‌های هدایت و کنترل یکپارچه و همچنین کاربرد، مدل‌سازی و فرمولاسیون تحقیق حاضر بسیار متفاوت است.

در مرجع [14] دستور شتاب در قانون هدایت خط‌دید بهینه برای سیستم کنترل مرتبه دوم (غیریکپارچه) بدون در نظر گرفتن صفر کمینه‌فاز/ناکمینه‌فاز استخراج شده است. در مرجع [15] نیز برای سیستم کنترل مرتبه دوم دو جمله‌ای کمینه‌فاز و ناکمینه‌فاز، قانون هدایت خط‌دید بهینه غیریکپارچه بصورت حلقه بسته ارائه شده و اثر صفر ناکمینه‌فاز بررسی شده است. البته همان‌طور که اشاره شد در دو مرجع اخیر، دستور شتاب محاسبه شده است و نه زاویه انحراف بالک. لذا در چارچوب سیستم‌های هدایت و کنترل یکپارچه طبقه‌بندی نمی‌شود.

در این مقاله، با استفاده از تئوری کنترل بهینه، حل صریح و حلقه بسته هدایت و کنترل یکپارچه خط‌دید برای سیستم‌های مرتبه دوم ناکمینه‌فاز به‌ازای هدف ثابت، بصورت دستور زاویه بالک و در حالت تک‌بعدی استخراج شده است. به‌علاوه، بهره‌های پایای قانون مذکور نیز به‌طور صریح بدست آمده است. عملکرد هر دو قانون هدایت و کنترل یکپارچه بدون/با وجود عدم قطعیت در پارامترهای مدل دینامیک وسیله پروازی و با اعمال محدودیت اشباع زاویه بالک در شبیه‌سازی بررسی و مقایسه شده است. لازم به ذکر است از روش خطی‌سازی و تابع توصیفی مرجع [10] برای المان غیرخطی اشباع به‌عنوان معادلات حالت مسئله حاضر نیز می‌توان استفاده کرد.

2-معادلات حرکت

معادله حرکت حاکم بر وسیله پروازی با فرض مدل جرم نقطه‌ای در حالت تک‌بعدی بصورت $\ddot{h} = a$ نوشته می‌شود که مطابق شکل 1، h فاصله وسیله پروازی از خط‌دید و a شتاب وسیله پروازی در جهت عمود بر خط‌دید است. در این شکل، وسیله پروازی با P و هدف با T نمایش داده شده است و هدف این است که وسیله پروازی P بر روی خط واصل بین نقاط O و T قرار گیرد.

برای استخراج «قانون هدایت و کنترل یکپارچه خط‌دید بهینه»، سیستم هدایت و کنترل وسیله پروازی بصورت تابع تبدیل مرتبه دوم ناکمینه‌فاز فرض شده است. به عبارت دیگر، کل دینامیک وسیله پروازی از ورودی دستور زاویه انحراف بالک (δ_c) تا خروجی شتاب مانوری با یک تابع تبدیل مرتبه دوم مدل شده است:

$$\frac{a}{\delta_c}(s) = \frac{k_1\omega^2(1 - T_z^2 s^2)}{s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2} \quad (1)$$

که در آن، k_1، T_z، ω، ζ پارامترهای سیستم و s متغیر حوزه لاپلاس است. به عبارت دیگر، در مدل‌سازی حاضر، از تقریب پریود کوتاه و فرض عملگر

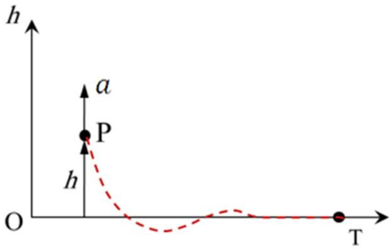


Fig. 1 Geometry of one-dimensional problem

شکل 1 هندسه تک‌بعدی مسئله

ایده‌آل مطابق مرجع [16] استفاده شده است. معادلات حالت مسئله با استفاده از روابط کنترل‌پذیر متعارف مطابق مرجع [17] براحتی استخراج می‌شود. در ادامه، فرم بی‌بعد معادلات حالت بصورت رابطه (2) نوشته می‌شود:

$$\begin{cases} \hat{h}' = \hat{v} \\ \hat{v}' = \hat{k}_1\hat{\omega}^2(1+\hat{\omega}^2\tau_z^2)\hat{x}_1 + 2\zeta\hat{k}_1\hat{\omega}^3\tau_z^2\hat{x}_2 - \hat{k}_1\hat{\omega}^2\tau_z^2\delta_c \\ \hat{x}_1' = \hat{x}_2 \\ \hat{x}_2' = -\hat{\omega}^2\hat{x}_1 - 2\zeta\hat{\omega}\hat{x}_2 + \delta_c \end{cases} \quad (2)$$

که در آن، پارامترهای بی‌بعد بصورت رابطه (3) تعریف می‌شود:

$$\tau = \frac{t}{T},\ \tau_f = \frac{t_f}{T},\ \tau_{\text{go}} = \frac{t_{\text{go}}}{T},\ \tau_z = \frac{T_z}{T},\ \hat{k}_1 = \frac{k_1}{A},\ \hat{\omega} = \omega T$$
$$\hat{h} = \frac{h}{AT^2},\ \hat{v} = \frac{v}{AT},\ \hat{x}_1 = \frac{x_1}{T^2},\ \hat{x}_2 = \frac{x_2}{T},\ \hat{a} = \frac{a}{A} \quad (3)$$

همچنین، $(\,)' = d(\,)/d\tau$ نمایانگر مشتق نسبت به زمان بی‌بعد τ، T ثابت زمانی معادل سیستم یکپارچه هدایت و کنترل (1)، t_f زمان نهایی، $t_{go} = t_f - t$ زمان باقیمانده تا زمان نهایی (تا رسیدن به هدف)، A پارامتر بی‌بعدسازی با دیمانسیون مشابه شتاب، v مؤلفه سرعت وسیله پروازی در جهت عمود بر خطدید (در راستای محور h) و x_1 و x_2 متغیرهای حالت واسط هستند. ثابت زمانی معادل سیستم هدایت و کنترل یکپارچه مذکور را می‌توان مطابق منابع هدایت بصورت رابطه (4) تقریب زد [16]:

$$T = \frac{2\zeta}{\omega} + T_z - T_z = \frac{2\zeta}{\omega} \quad (4)$$

بنابراین، با توجه به رابطه (3) می‌توان نوشت:

$$2\zeta = \hat{\omega} \quad (5)$$

بنابراین با جایگذاری رابطه فوق در معادلات حالت (2)، می‌توان ζ را از این معادلات حذف کرد. شتاب مانوری (a) نیز به‌عنوان خروجی بصورت رابطه (6) محاسبه می‌شود. این رابطه، همان رابطه خروجی در فرم کنترل‌پذیر متعارف است که با استفاده از پارامترهای رابطه (3) بی‌بعد شده است.

$$\hat{a} = \hat{k}_1\hat{\omega}^2(1+\hat{\omega}^2\tau_z^2)\hat{x}_1 + \hat{k}_1\hat{\omega}^4\tau_z^2\hat{x}_2 - \hat{k}_1\hat{\omega}^2\tau_z^2\delta_c \quad (6)$$

3-مسئله هدایت خطدید بهینه

معیار عملکرد بی‌بعد در «قانون هدایت و کنترل یکپارچه خطدید بهینه» را می‌توان بصورت رابطه (7) نوشت:

$$\frac{\mathfrak{J}}{T} = \frac{1}{2}\int_0^{\tau_f}[\hat{b}\hat{h}^2 + \delta_c^2]d\tau,\qquad \hat{b} = bA^2T^4 \quad (7)$$

که در آن، δ_c دستور زاویه انحراف بالک به عنوان ورودی کنترلی به سیستم و $b > 0$ ضریب وزنی برای مجذور فاصله از خطدید است.

در ادامه، مسئله «هدایت و کنترل یکپارچه خطدید بهینه» بصورت بی‌بعد تعریف می‌شود. ورودی کنترل δ_c باید بگونه‌ای استخراج شود که تابع عملکرد (7) منوط به معادلات حالت (2) و شرایط اولیه و نهایی (8) به ازای زمان نهایی معین τ_f (مقدار ثابت از پیش تعیین شده) کمینه شود.

$$\begin{cases} \hat{h}(0) = \hat{h}_0 \\ \hat{v}(0) = \hat{v}_0 \\ \hat{x}_1(0) = \hat{x}_{1_0} \\ \hat{x}_2(0) = \hat{x}_{2_0} \end{cases} \qquad \begin{cases} \hat{h}(\tau_f) = 0 \\ \hat{v}(\tau_f) = \text{free} \\ \hat{x}_1(\tau_f) = \text{free} \\ \hat{x}_2(\tau_f) = \text{free} \end{cases} \quad (8)$$

در روابط فوق، زیرنویس "0" نمایانگر مقدار اولیه است. تابع هامیلتونی مسئله بصورت رابطه (9) نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{1}{2}\hat{b}\hat{h}^2 + \frac{1}{2}\delta_c^2 + \lambda_h\hat{v} \\ &+ \lambda_v[\hat{k}_1\hat{\omega}^2(1+\hat{\omega}^2\tau_z^2)\hat{x}_1 + \hat{k}_1\hat{\omega}^4\tau_z^2\hat{x}_2 - \hat{k}_1\hat{\omega}^2\tau_z^2\delta_c] \\ &+ \lambda_{x_1}\hat{x}_2 + \lambda_{x_2}[-\hat{\omega}^2\hat{x}_1 - \hat{\omega}^2\hat{x}_2 + \delta_c] \end{aligned} \quad (9)$$

که در آن، ضرایب لاگرانژ با λ_h، λ_v، λ_{x_1} و λ_{x_2} نمایش داده شده است. با استفاده از روابط کنترل بهینه می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial\delta_c} = 0 \to \delta_c = \hat{k}_1\hat{\omega}^2\tau_z^2\lambda_v - \lambda_{x_2} \\ \dfrac{d(\vec{\lambda})}{d\tau} = -\dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial\vec{X}} \to \begin{cases} \lambda_h' = -\hat{b}\hat{h} \\ \lambda_v' = -\lambda_h \\ \lambda_{x_1}' = -\hat{k}_1\hat{\omega}^2(1+\hat{\omega}^2\tau_z^2)\lambda_v + \hat{\omega}^2\lambda_{x_2} \\ \lambda_{x_2}' = -\hat{k}_1\hat{\omega}^4\tau_z^2\lambda_v - \lambda_{x_1} + \hat{\omega}^2\lambda_{x_2} \end{cases} \end{cases} \quad (10)$$

که در آن، $\vec{X} = [\hat{h}\quad \hat{v}\quad \hat{x}_1\quad \hat{x}_2]^{\mathrm{T}}$ و $\vec{\lambda} = [\lambda_h\quad \lambda_v\quad \lambda_{x_1}\quad \lambda_{x_2}]^{\mathrm{T}}$. با ترکیب معادلات مستخرج مرتبه یک می‌توان نوشت:

$$\frac{d}{d\tau}\begin{bmatrix}\vec{X}\\ \vec{\lambda}\end{bmatrix} = A_p\begin{bmatrix}\vec{X}\\ \vec{\lambda}\end{bmatrix},\qquad A_p = \begin{bmatrix} A_s & -BB^{\mathrm{T}} \\ -Q & -A^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \quad (11)$$

که در آن،

$$A_s = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{k}_1\hat{\omega}^2(1+\hat{\omega}^2\tau_z^2) & \hat{k}_1\hat{\omega}^4\tau_z^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\hat{\omega}^2 & -\hat{\omega}^2 \end{bmatrix},$$
$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ -\hat{k}_1\hat{\omega}^2\tau_z^2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\quad Q = \begin{bmatrix} \hat{b} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

در رابطه فوق، A_s و B به ترتیب ماتریس سیستم و ورودی برای سیستم (2) است. همچنین Q ماتریس وزنی متغیرهای حالت در فرم متعارف معیار عملکرد مسئله رگولاتور است. حل سیستم خطی (11) بین زمان حال و زمان نهایی (بی‌بعد)، مطابق حل کلی مسئله خطی، بصورت (13) نوشته می‌شود:

$$\begin{bmatrix}\vec{X}(\tau_f)\\ \vec{\lambda}(\tau_f)\end{bmatrix}_{8\times1} = \Phi(\tau_{\text{go}})\begin{bmatrix}\vec{X}(\tau)\\ \vec{\lambda}(\tau)\end{bmatrix}_{8\times1} \quad (13)$$

که در آن، $\Phi(\tau)$ ماتریس انتقال حالت برای ماتریس سیستم A_p است. بنابراین،

$$\Phi(\tau) = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A_p)^{-1}\}\big|_{\tau} \quad (14)$$

که در آن، I ماتریس همانی با ابعاد 8×8 است. اگرچه معادلات کلی حل بهینه مسئله خطی در منابع موجود است؛ اما استخراج تحلیلی ماتریس انتقال حالت، ریشه‌های معادله مشخصه آن و ضرایب «قانون هدایت و کنترل یکپارچه» با افزایش مرتبه سیستم غامض‌تر می‌شود. برای مسئله حاضر، استخراج تحلیلی ماتریس انتقال حالت در پیوست الف آمده است.

با توجه به معین بودن مقدار نهایی h و آزاد بودن سایر مقادیر نهایی

متغیرهای حالت، شرایط اولیه و نهایی مورد نیاز برای حل مسئله بصورت رابطه (15) بازنویسی می‌شود:

$$\begin{cases}\hat{h}(0)=\hat{h}_0\\ \hat{v}(0)=\hat{v}_0\\ \hat{x}_1(0)=\hat{x}_{1_0}\\ \hat{x}_2(0)=\hat{x}_{2_0}\end{cases}\qquad \begin{cases}\hat{h}(\tau_f)=0\\ \lambda_v(\tau_f)=0\\ \lambda_{x_1}(\tau_f)=0\\ \lambda_{x_2}(\tau_f)=0\end{cases} \tag{15}$$

با قرار دادن مقادیر نهایی (15) برای سطر اول و سه سطر آخر معادله ماتریسی (13) می‌توان نوشت:

$$P_1(\tau_{\text{go}})\vec{X}(\tau)+P_2(\tau_{\text{go}})\vec{\lambda}(\tau)=\vec{0} \tag{16}$$

که در آن،

$$P_1(\tau_{\text{go}})=\begin{bmatrix}\phi_{11}(\tau_{\text{go}}) & \phi_{12}(\tau_{\text{go}}) & \phi_{13}(\tau_{\text{go}}) & \phi_{14}(\tau_{\text{go}})\\ \phi_{61}(\tau_{\text{go}}) & \phi_{62}(\tau_{\text{go}}) & \phi_{63}(\tau_{\text{go}}) & \phi_{64}(\tau_{\text{go}})\\ \phi_{71}(\tau_{\text{go}}) & \phi_{72}(\tau_{\text{go}}) & \phi_{73}(\tau_{\text{go}}) & \phi_{74}(\tau_{\text{go}})\\ \phi_{81}(\tau_{\text{go}}) & \phi_{82}(\tau_{\text{go}}) & \phi_{83}(\tau_{\text{go}}) & \phi_{84}(\tau_{\text{go}})\end{bmatrix} \tag{17}$$

$$P_2(\tau_{\text{go}})=\begin{bmatrix}\phi_{15}(\tau_{\text{go}}) & \phi_{16}(\tau_{\text{go}}) & \phi_{17}(\tau_{\text{go}}) & \phi_{18}(\tau_{\text{go}})\\ \phi_{65}(\tau_{\text{go}}) & \phi_{66}(\tau_{\text{go}}) & \phi_{67}(\tau_{\text{go}}) & \phi_{68}(\tau_{\text{go}})\\ \phi_{75}(\tau_{\text{go}}) & \phi_{76}(\tau_{\text{go}}) & \phi_{77}(\tau_{\text{go}}) & \phi_{78}(\tau_{\text{go}})\\ \phi_{85}(\tau_{\text{go}}) & \phi_{86}(\tau_{\text{go}}) & \phi_{87}(\tau_{\text{go}}) & \phi_{88}(\tau_{\text{go}})\end{bmatrix} \tag{18}$$

در روابط اخیر، $\phi_{ij}(\tau_{\text{go}})$ المان سطر iام و ستون jام ماتریس انتقال حالت (14) است. اگر P_2 معکوس‌پذیر باشد، $\vec{\lambda}(\tau)$ از رابطه (16) محاسبه می‌شود. البته با توجه به رابطه (10)، برای محاسبه دستور زاویه انحراف بالک، مؤلفه دوم و چهارم بردار $\vec{\lambda}(\tau)$ نیاز است. بنابراین،

$$\begin{cases}\lambda_v(\tau)=\hat{C}_1(\tau_{\text{go}})\hat{h}+\hat{C}_2(\tau_{\text{go}})\hat{v}+\hat{C}_3(\tau_{\text{go}})\hat{x}_1+\hat{C}_4(\tau_{\text{go}})\hat{x}_2\\ \lambda_{x_2}(\tau)=\hat{C}_5(\tau_{\text{go}})\hat{h}+\hat{C}_6(\tau_{\text{go}})\hat{v}+\hat{C}_7(\tau_{\text{go}})\hat{x}_1+\hat{C}_8(\tau_{\text{go}})\hat{x}_2\end{cases} \tag{19}$$

که در آن،

$$\begin{cases}\hat{C}_1(\tau_{\text{go}})=-f_1\phi_{11}-f_2\phi_{61}-f_3\phi_{71}-f_4\phi_{81}\\ \hat{C}_2(\tau_{\text{go}})=-f_1\phi_{12}-f_2\phi_{62}-f_3\phi_{72}-f_4\phi_{82}\\ \hat{C}_3(\tau_{\text{go}})=-f_1\phi_{13}-f_2\phi_{63}-f_3\phi_{73}-f_4\phi_{83}\\ \hat{C}_4(\tau_{\text{go}})=-f_1\phi_{14}-f_2\phi_{64}-f_3\phi_{74}-f_4\phi_{84}\end{cases} \tag{20}$$

$$\begin{cases}\hat{C}_5(\tau_{\text{go}})=-f_5\phi_{11}-f_6\phi_{61}-f_7\phi_{71}-f_8\phi_{81}\\ \hat{C}_6(\tau_{\text{go}})=-f_5\phi_{12}-f_6\phi_{62}-f_7\phi_{72}-f_8\phi_{82}\\ \hat{C}_7(\tau_{\text{go}})=-f_5\phi_{13}-f_6\phi_{63}-f_7\phi_{73}-f_8\phi_{83}\\ \hat{C}_8(\tau_{\text{go}})=-f_5\phi_{14}-f_6\phi_{64}-f_7\phi_{74}-f_8\phi_{84}\end{cases} \tag{21}$$

همچنین:

$$\begin{cases}f_1(\tau_{\text{go}})=\dfrac{1}{|P_2|}\left(-f_{n_6}\phi_{68}+f_{n_5}\phi_{78}-f_{n_4}\phi_{88}\right)\\ f_2(\tau_{\text{go}})=\dfrac{1}{|P_2|}\left(+f_{n_6}\phi_{18}-f_{n_3}\phi_{78}+f_{n_2}\phi_{88}\right)\\ f_3(\tau_{\text{go}})=\dfrac{1}{|P_2|}\left(-f_{n_5}\phi_{18}+f_{n_3}\phi_{68}-f_{n_1}\phi_{88}\right)\\ f_4(\tau_{\text{go}})=\dfrac{1}{|P_2|}\left(+f_{n_4}\phi_{18}-f_{n_2}\phi_{68}+f_{n_1}\phi_{78}\right)\end{cases} \tag{22}$$

$$\begin{cases}f_5(\tau_{\text{go}})=\dfrac{1}{|P_2|}\left(+f_{n_6}\phi_{66}-f_{n_5}\phi_{76}+f_{n_4}\phi_{86}\right)\\ f_6(\tau_{\text{go}})=\dfrac{1}{|P_2|}\left(-f_{n_6}\phi_{16}+f_{n_3}\phi_{76}-f_{n_2}\phi_{86}\right)\\ f_7(\tau_{\text{go}})=\dfrac{1}{|P_2|}\left(+f_{n_5}\phi_{16}-f_{n_3}\phi_{66}+f_{n_1}\phi_{86}\right)\\ f_8(\tau_{\text{go}})=\dfrac{1}{|P_2|}\left(-f_{n_4}\phi_{16}+f_{n_2}\phi_{66}-f_{n_1}\phi_{76}\right)\end{cases} \tag{23}$$

و

$$\begin{cases}f_{n_1}=\phi_{15}\phi_{67}-\phi_{17}\phi_{65}\\ f_{n_2}=\phi_{15}\phi_{77}-\phi_{17}\phi_{75}\\ f_{n_3}=\phi_{15}\phi_{87}-\phi_{17}\phi_{85}\\ f_{n_4}=\phi_{65}\phi_{77}-\phi_{67}\phi_{75}\\ f_{n_5}=\phi_{65}\phi_{87}-\phi_{67}\phi_{85}\\ f_{n_6}=\phi_{75}\phi_{87}-\phi_{77}\phi_{85}\end{cases} \tag{24}$$

$$|P_2(\tau_{\text{go}})|=\phi_{18}f_5+\phi_{68}f_6+\phi_{78}f_7+\phi_{88}f_8 \tag{25}$$

لازم به ذکر است که ϕ_{ij} در روابط (20) الی (25) تابعی از τ_{go} است که برای خلاصه‌نویسی نمایش داده نشده است. البته المان‌های ماتریس انتقال حالت، تابعی از ثوابت $\hat{b}$، $\hat{k}_1$، $\widehat{\omega}$ و τ_z نیز می‌باشد. در نهایت با جایگذاری ضرایب لاگرانژ λ_v و λ_{x_2} از رابطه (19) در رابطه (10)، دستور زاویه انحراف بهینه بالک بصورت صریح و حلقه‌بسته به‌دست می‌آید:

$$\delta_c=-C_h\,h-C_v\,v-C_{x_1}x_1-C_{x_2}\,x_2 \tag{26}$$

که در آن،

$$C_h=\frac{\hat{C}_h}{AT^2},\quad C_v=\frac{\hat{C}_v}{AT},\quad C_{x_1}=\frac{\hat{C}_{x_1}}{T^2},\quad C_{x_2}=\frac{\hat{C}_{x_2}}{T} \tag{27}$$

همچنین:

$$\begin{cases}\hat{C}_h=-\hat{k}_1\widehat{\omega}^2\tau_z^2\hat{C}_1+\hat{C}_5\\ \hat{C}_v=-\hat{k}_1\widehat{\omega}^2\tau_z^2\hat{C}_2+\hat{C}_6\\ \hat{C}_{x_1}=-\hat{k}_1\widehat{\omega}^2\tau_z^2\hat{C}_3+\hat{C}_7\\ \hat{C}_{x_2}=-\hat{k}_1\widehat{\omega}^2\tau_z^2\hat{C}_4+\hat{C}_8\end{cases} \tag{28}$$

همان‌گونه که ملاحظه می‌شود، ضرایب قانون بهینه فوق علاوه بر τ_{go} تابعی از ثوابت $\hat{b}$، $\hat{k}_1$، $\widehat{\omega}$ و τ_z نیز است.

رفتار ضرایب بی‌بعد «قانون هدایت و کنترل یکپارچه خط‌دید بهینه» برای سیستم مرتبه دوم (26) در "شکل 2 و 3" برحسب زمان باقیمانده بی‌بعد به‌ازای ضرایب مختلف وزنی $\hat{b}$ و $\hat{k}_1$ ترسیم شده است. از "شکل 2" ملاحظه می‌شود که با افزایش ضریب وزنی بی‌بعد، ضرایب بهره بی‌بعد سریعتر به مقدار پایای خود می‌رسد. نکته مهم دیگری که در دو "شکل 2 و 3" مشاهده می‌شود، صفر شدن ضرایب و تغییر علامت ضرایب در نزدیکی انتهای مسیر است. این رفتار به علت وجود صفر ناکمینه‌فاز در سیستم کنترلی است. در مرجع [15] این مساله بصورت دقیق‌تر بررسی شده است. همچنین در "شکل 3" ملاحظه می‌شود که به ازای مقادیر $\hat{k}_1=1,2,4,6$، مقدار بهره اول ($\hat{C}_h$) به یک مقدار پایای یکسان می‌رسد؛ به عبارت دیگر، ضریب $\hat{k}_1$ در مقدار پایای این بهره اثری ندارد. این موضوع از لحاظ ریاضی در ادامه اثبات شده است.

همان‌طور که ملاحظه شد، بهره‌های «قانون هدایت و کنترل یکپارچه خط‌دید بهینه» برای سیستم مرتبه دوم به یک مقدار پایا می‌رسد. بهره‌های پایا را می‌توان با استفاده از معادله جبری ریکاتی (29) محاسبه نمود:

$$\dot{S}=-SA_s-A_s^{\mathrm{T}}S-Q+SBB^{\mathrm{T}}S=0 \tag{29}$$

که در آن، S یک ماتریس متقارن 4x4 است. به‌طور نمونه:

$$S=\begin{bmatrix}S_1 & S_5 & S_6 & S_7\\ S_5 & S_2 & S_8 & S_9\\ S_6 & S_8 & S_3 & S_{10}\\ S_7 & S_9 & S_{10} & S_4\end{bmatrix} \tag{30}$$

با جایگذاری S و ماتریس‌های A_s، B و Q در رابطه (29)، دستگاه معادلات 10 معادله و 10 مجهول حاصل می‌شود. با انجام عملیات متعدد ریاضی و حل دستگاه معادلات، ماتریس S به‌دست آمده و متعاقبا بردار ضرایب لاگرانژ محاسبه می‌شود ($\vec{\lambda}=S\vec{X}$). در نتیجه با جایگذاری برای بردار ضرایب لاگرانژ در رابطه (10)، دستور زاویه انحراف بالک بصورت (31) حاصل می‌شود:

$$\delta_c(\tau) = -\hat{C}_h(\infty)\,\hat{h} - \hat{C}_v(\infty)\,\hat{v} - \hat{C}_{x_1}(\infty)\hat{x}_1 - \hat{C}_{x_2}(\infty)\,\hat{x}_2 \quad (31)$$

که در آن،

$$\begin{cases} \hat{C}_h(\infty) = \sqrt{\hat{b}} \\ \hat{C}_v(\infty) = \sqrt{2S_5} \\ \hat{C}_{x_1}(\infty) = \hat{\omega}\sqrt{\hat{\omega}^2 + 2S_8} - \hat{\omega}^2 \\ \hat{C}_{x_2}(\infty) = \sqrt{\hat{\omega}^4 + 2S_{10}} - \hat{\omega}^2 \end{cases} \quad (32)$$

نحوه استخراج روابط سه عنصر S_5، S_8 و S_{10} در پیوست ب آمده است.

4-بحث و نتایج شبیه‌سازی

در این‌جا، عملکرد «قانون هدایت و کنترل یکپارچه خطدید بهینه مرتبه دوم» مطابق رابطه (26) با استفاده از حل عددی و برای اهداف ثابت بررسی می‌شود. لازم به ذکر است در شبیه‌سازی‌های عددی، مدل وسیله پروازی به-صورت تابع تبدیل مرتبه دوم با اعمال زاویه اشباع برای بالک (δ_{sat}) لحاظ شده است. به منظور تحلیل عملکردی بی‌بعد و مطالعه پارامتری می‌توان از چهار پارامتر بی‌بعد کننده $A = h_0/T^2$، $A = v_0/T$، $A = k_1$ و $A = k_1\delta_{\text{sat}}$ در شرایط و سناریوهای مختلف استفاده نمود. اعمال هر یک از این پارامترها برای یک دسته مشخص از سناریوها مناسب است. به‌طور نمونه، با استفاده از پارامتر بی‌بعد کننده $A = h_0/T^2$، می‌توان دستور زاویه انحراف بالک و دیگر مقادیر عملکردی را برای تمام مقادیر اولیه فاصله از خطدید و ثابت زمانی سیستم به‌ازای مقادیر ثابت v_0T/h_0 در نموداری ترسیم نمود. البته برای حالتی که $v_0 = 0$ است، نتایج و نمودارهای عملکردی بی‌بعد مذکور عملا همه حالات را شامل می‌شود.

در ابتدا رفتار پارامترهای مهم «قانون هدایت و کنترل یکپارچه خطدید بهینه مرتبه دوم (SOOG-IGC)» با زمان و تغییر فرکانس طبیعی سیستم (فرکانس دامنه کوتاه) و محل صفر تابع تبدیل سیستم کنترل اجمالا بررسی می‌شود. برای این منظور در "شکل 4"، «فاصله عمودی بی‌بعد وسیله پروازی از خطدید»، «شتاب بی‌بعد وسیله پروازی» و «مقدار انحراف زاویه بالک» برحسب زمان بی‌بعد، به‌ازای مقادیر فرکانس طبیعی بی‌بعد $\hat{\omega} = 0.1, 0.3, 0.5$ ترسیم شده است. در شکل مذکور از $A = v_0/T$ به‌عنوان پارامتر بی‌بعدکننده استفاده شده است. همان‌طور که در "شکل 6" مشاهده می‌شود با افزایش $\hat{\omega}$، مقدار شتاب و زاویه انحراف بالک در لحظات ابتدایی بیشتر شده که این امر سبب کاهش سریع‌تر فاصله وسیله پروازی از خطدید می‌شود. لازم به ذکر است که با توجه به مساله حاضر، تابع هامیلتونی تابع صریحی از زمان نبوده و زمان نهایی ثابت فرض شده است، مقدار آن باید یک مقدار ثابت شود. با حل عددی و شبیه‌سازی صورت گرفته و با انتخاب گام زمانی انتگرال‌گیری مناسب، صحت این مساله بررسی شد.

در ادامه، خطای نهایی بی‌بعد «قانون هدایت و کنترل یکپارچه خطدید بهینه مرتبه دوم» بررسی شده و نتایج با قانون مذکور به‌ازای ضرایب بهره پایا که در شکل‌ها با نماد SOOG-IGC ($t_f = \infty$) مشخص شده، مقایسه می‌شود. در "شکل‌های 5 الی 7"، خطای نهایی بی‌بعد برای دو «قانون هدایت و کنترل یکپارچه خطدید بهینه مرتبه دوم» و «قانون هدایت و کنترل یکپارچه خطدید بهینه مرتبه دوم پایا» برحسب زمان نهایی بی‌بعد به‌ازای سه از چهار پارامتر بی‌بعد کننده مطرح شده ترسیم شده است. همان‌طور که در این سه شکل مشاهده می‌شود، با توجه به شرایط و مقادیر مفروض، در مجموع «قانون هدایت و کنترل یکپارچه خطدید بهینه مرتبه دوم» از حالت پایای آن دارای خطای کمتری است، البته در برخی از بازه‌های زمانی کوچک برای

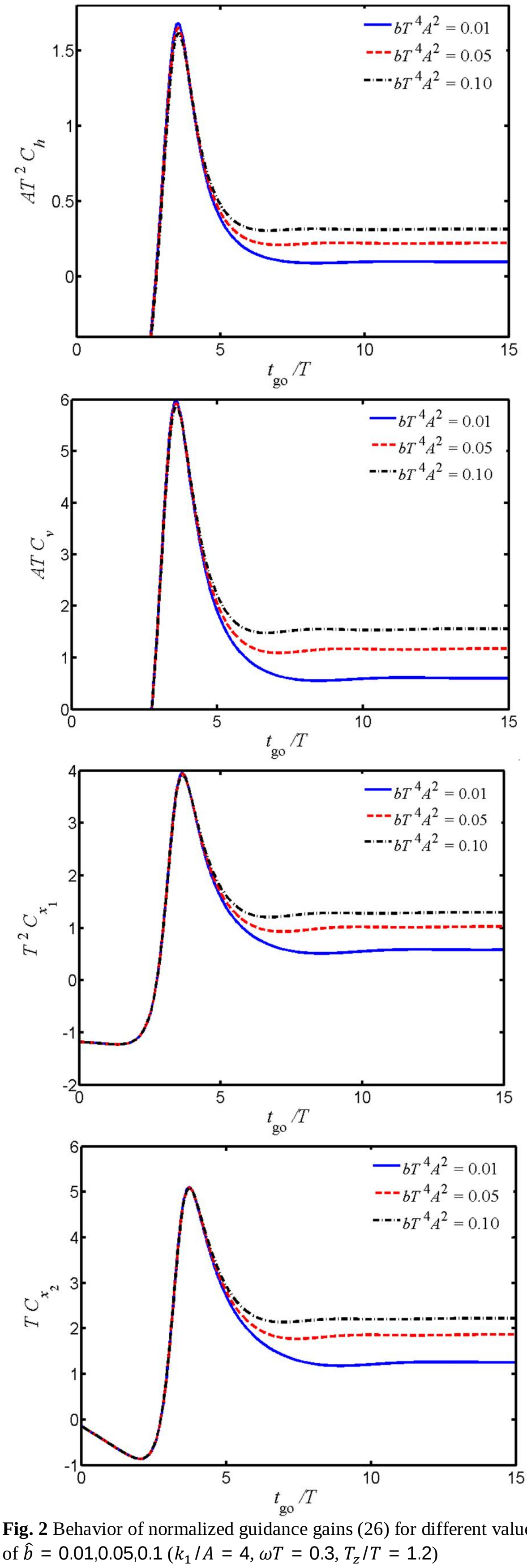


Fig. 2 Behavior of normalized guidance gains (26) for different values of $\hat{b} = 0.01, 0.05, 0.1$ ($k_1/A = 4$, $\omega T = 0.3$, $T_z/T = 1.2$)

شکل 2 رفتار ضرایب بی‌بعد قانون هدایت (26) به ازای مقادیر مختلف ضریب وزنی بی‌بعد $\hat{b} = 0.01, 0.05, 0.1$ ($k_1/A = 4$, $\omega T = 0.3$, $T_z/T = 1.2$)

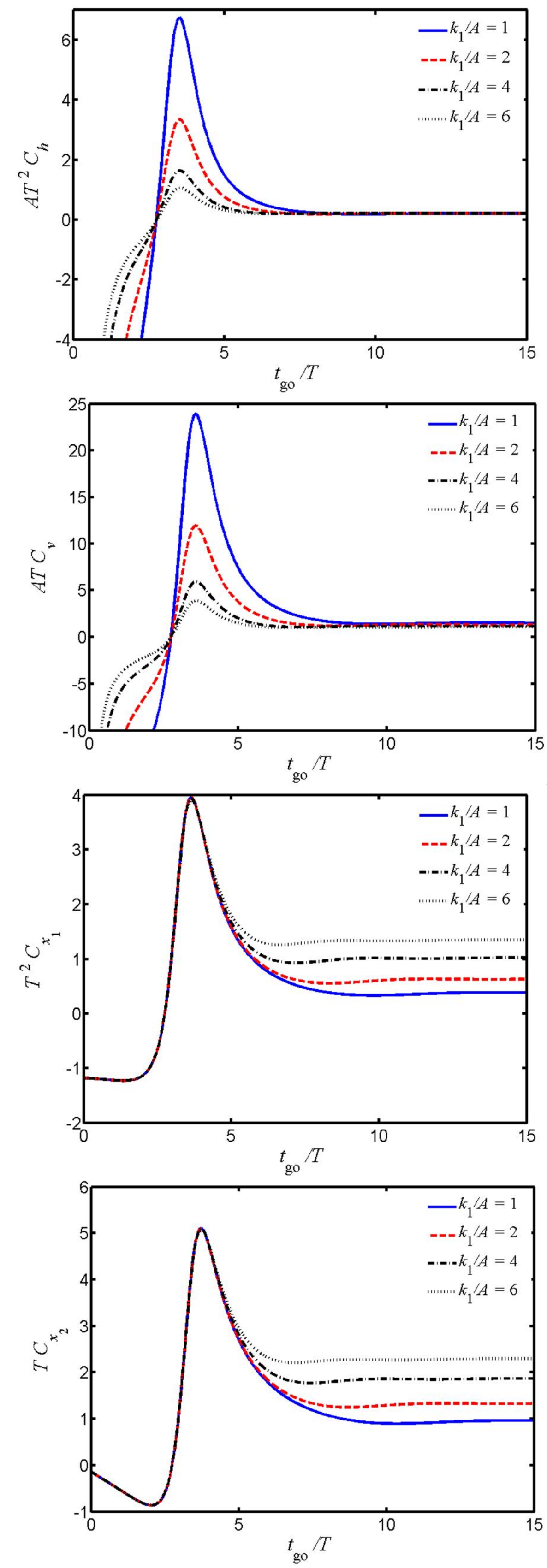


Fig. 3 Behavior of normalized guidance gains (26) for different values of $\hat{k}_1 = 1,2,4,6$ ($bT^4A^2 = 0.05$, $\omega T = 0.3$, $T_z/T = 1.2$)

شکل 3 رفتار ضرایب بی‌بعد قانون هدایت (26) به ازای مقادیر مختلف $\hat{k}_1 = 1,2,4,6$
($bT^4A^2 = 0.05$, $\omega T = 0.3$, $T_z/T = 1.2$)

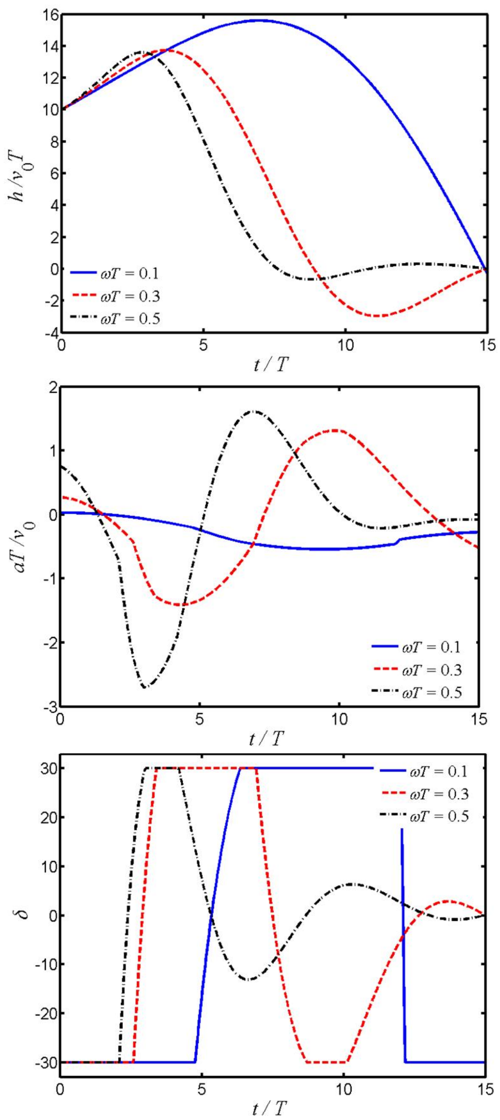


Fig. 4 Normalized distance from LOS, acceleration, and fin deflection vs normalized time for different values of $\hat{\omega} = 0.1,0.3,0.5$ ($k_1/A = 4$, $T_z/T = 1.2$, $bT^2v_0^2 = 0.05$, $\delta_{sat} = 30^{\circ}$)

شکل 4 فاصله بی‌بعد از خط‌دید، شتاب پرنده و زاویه انحراف بالک برحسب زمان بی‌بعد به ازای مقادیر مختلف $\hat{\omega} = 0.1,0.3,0.5$
($k_1/A = 4$, $T_z/T = 1.2$, $bT^2v_0^2 = 0.05$, $\delta_{sat} = 30^{\circ}$)

زمان نهایی بی‌بعد، به‌علت رفتار شبه نوسانی، خطای قانون هدایت پایا کمتر بوده که مجموعا در مقایسه قابل اغماض است. شایان ذکر است که "شکل‌های 5 و 6" به ازای مقدار اشباع $\delta_{sat} = 30^{\circ}$ ترسیم شده است؛ در صورتی‌که در "شکل 7"، با پارامتر بی‌بعدسازی $A = k_1\delta_{sat}$ نتایج به ازای تمام مقادیر شتاب اشباع، قابل استخراج است.

در ادامه، تحلیل پارامتری فاصله خطای بی‌بعد برای دو «قانون هدایت و کنترل یکپارچه خط‌دید بهینه مرتبه دوم (SOOG-IGC)» و «قانون هدایت و کنترل یکپارچه خط‌دید بهینه مرتبه دوم پایا ($\text{SOOG-IGC-}t_f = \infty$)» به‌ازای ضریب وزنی، اشباع زاویه بالک، بهره و فرکانس طبیعی تابع تبدیل سیستم کنترل با استفاده از پارامترهای مختلف بی‌بعدکننده A ارائه می‌شود. در "شکل 8" فاصله خطای نهایی بی‌بعد برحسب ضریب وزنی بی‌بعد $\hat{b}$ برای دو قانون هدایت مذکور به ازای دو مقدار 30 و 50 درجه برای زاویه اشباع بالک

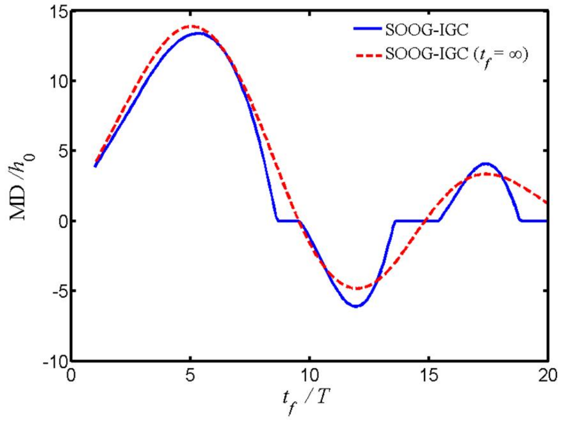


Fig. 5 Normalized miss distance vs normalized final time for the two guidance laws (v_0T/h_0 = 3, k_1T^2/h_0 = 4, T_z/T = 1.2, bh_0^2 = 0.05, ωT = 0.3, $\delta_{\rm sat}$ = 30°, $A = h_0/T^2$)

شکل 5 خطای نهایی برحسب زمان نهایی بی‌بعد (v_0T/h_0 = 3, k_1T^2/h_0 = 4) (T_z/T = 1.2, bh_0^2 = 0.05, ωT = 0.3, $\delta_{\rm sat}$ = 30°, $A = h_0/T^2$)

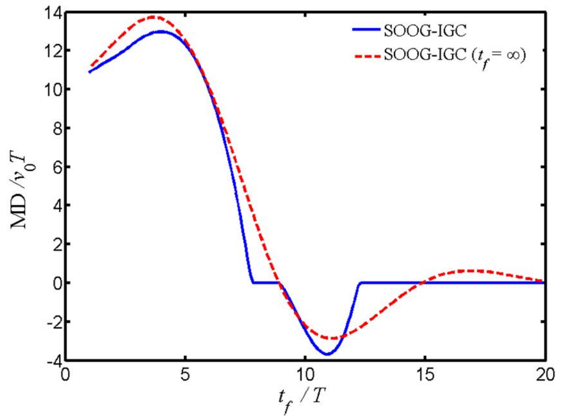


Fig. 6 Normalized miss distance vs normalized final time for the two guidance laws (h_0/v_0T = 10, k_1T/v_0 = 4, T_z/T = 1.2, $bT^2v_0^2$ = 0.05, ωT = 0.3, $\delta_{\rm sat}$ = 30°, $A = v_0/T$)

شکل 6 خطای نهایی بی‌بعد برحسب زمان نهایی بی‌بعد برای دو قانون هدایت (h_0/v_0T = 10 , k_1T/v_0 = 4 , T_z/T = 1.2 , $bT^2v_0^2$ = 0.05 , ωT = 0.3 , $\delta_{\rm sat}$ = 30°, $A = v_0/T$)

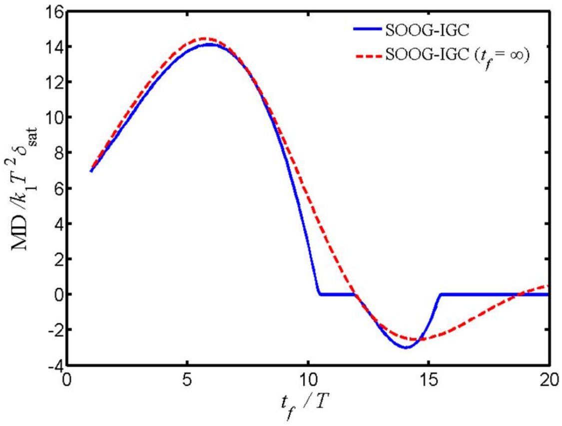


Fig. 7 Normalized miss distance vs normalized final time for the two guidance laws ($h_0/k_1\delta_{\rm sat}T^2$ = 5 , $v_0/k_1\delta_{\rm sat}T$ = 2 , T_z/T = 1.2 , $bT^4k_1^2\delta_{\rm sat}^2$ = 0.05, ωT = 0.3, $A = k_1\delta_{\rm sat}$)

شکل 7 خطای نهایی بی‌بعد برحسب زمان نهایی بی‌بعد برای دو قانون هدایت ($h_0/k_1\delta_{\rm sat}T^2$ = 5, $v_0/k_1\delta_{\rm sat}T$ = 2, T_z/T = 1.2, $bT^4k_1^2\delta_{\rm sat}^2$ = 0.05, ωT = 0.3, $A = k_1\delta_{\rm sat}$)

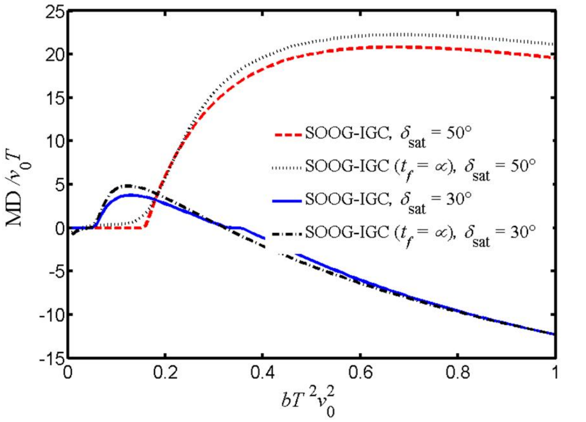


Fig. 8 Normalized miss distance vs normalized weighting factor for the two guidance laws with different values of $\delta_{\rm sat}$ = 30°, 50° (t_f/T = 15, h_0/v_0T = 10, k_1T/v_0 = 4, T_z/T = 1.2, ωT = 0.3)

شکل 8 خطای نهایی برحسب ضریب وزنی بی‌بعد به‌ازای $\delta_{\rm sat}$ = 30°, 50° (t_f/T = 15, h_0/v_0T = 10, k_1T/v_0 = 4, T_z/T = 1.2, ωT = 0.3)

مقایسه شده است. با افزایش ضریب وزنی، به‌علت به اشباع رفتن زاویه بالک، خطای نهایی هر دو قانون هدایت افزایش می‌یابد. به‌طور مثال، با افزایش مقدار زاویه اشباع بالک از 30 به 50 درجه، بزرگترین مقدار ضریب وزنی بی‌بعدی که در آن خطای نهایی نزدیک مقدار صفر است، از 0.05 به 0.16 افزایش می‌یابد. همان‌طور که از این شکل ملاحظه می‌شود، در صورت استفاده از ضرایب بهره پایا مقدار فاصله خطا افزایش می‌یابد.

خطای نهایی بی‌بعد برحسب ضریب بی‌بعد $\hat{k}_1$، به‌ازای دو مقدار بی‌بعد $\hat{\omega}$ = 0.2,0.3 در "شکل 9" نمایش داده شده است. محدوده $\hat{k}_1$ به ازای یک فاصله خطای مجاز از "شکل 9" قابل استخراج است. تحت شرایط مفروض، با تغییر $\hat{\omega}$ از 0.2 به 0.3 فاصله خطای نهایی هر دو قانون کاهش یافته است. برای بررسی دقیق‌تر این موضوع، اثر افزایش فرکانس بی‌بعد در خطای نهایی در "شکل 10" ترسیم شده است. همان‌طور که از این شکل ملاحظه می‌شود، با افزایش $\hat{\omega}$ مقدار خطای نهایی دو قانون هدایت کاهش می‌یابد. با توجه به مقادیر مفروض در "شکل 10"، به ازای $0.14 < \hat{\omega} < 0.2$، خطای نهایی SOOG-IGC ($t_f = \infty$) از SOOG-IGC کمتر شده است؛ ولی در مجموع خطای قانون SOOG-IGC کمتر از قانون مذکور با ضرایب پایا است. با تغییر مقدار τ_z از 1.2 به 1.5 از "شکل 10" ملاحظه می‌شود که در همان محدوده $0.14 < \hat{\omega} < 0.2$ خطای نهایی برای «قانون هدایت و کنترل یکپارچه خطدید بهینه مرتبه دوم» کمتر شده، ولی برای قانون هدایت مذکور با بهره‌های پایا تغییر چندانی نیافته است. به‌طور خلاصه به ازای مقادیر مفروض، مقادیر مجاز حداکثر $\hat{b}$، حداقل $\hat{k}_1$ و حداقل $\hat{\omega}$ برای یک خطای نهایی معین، به ترتیب از "شکل‌های 8 تا 10" قابل استخراج است.

اثر افزایش مقدار زاویه اشباع بالک ($\delta_{\rm sat}$) در خطای نهایی در شکل 11 ارائه شده است. همان‌طور که در این شکل ملاحظه می‌شود، با افزایش زاویه اشباع بالک (به ازای $\delta_{\rm sat}$ > 10°)، خطای نهایی دو قانون هدایت کاهش می‌یابد. البته برای قانون هدایت SOOG-IGC ($t_f = \infty$) با افزایش $\delta_{\rm sat}$ مقدار خطای نهایی به یک مقدار پایای بی‌بعد 0.23 می‌رسد؛ ولی برای قانون SOOG-IGC خطای نهایی تقریبا صفر می‌شود.

همان‌طور که اشاره شد، برای بررسی حساسیت قانون هدایت به مدل‌سازی سیستم هدایت و کنترل، عدم قطعیت پارامترهای سیستم مرتبه دوم بر قانون بهینه در کد شبیه‌سازی اعمال و اثر آن مطالعه می‌شود. عدم قطعیت در یک پارامتر (که با علامت Δ مشخص شده است؛ بصورت درصد

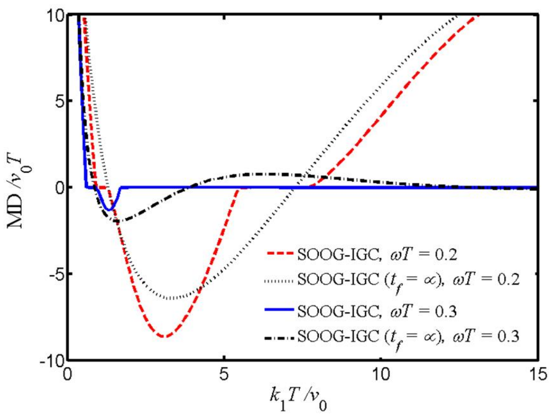


Fig. 9 Normalized miss distance vs $\hat{k}_1$ for the two guidance laws with different values of $\hat{\omega}$ = 0.2,0.3 (t_f/T = 15, h_0/v_0T = 10, T_z/T = 1.2, $bT^2v_0^2$ = 0.05, δ_{sat} = 30°)

شکل 9 خطای نهایی برحسب $\hat{k}_1$ برای دو قانون هدایت به ازای $\hat{\omega}$ = 0.2,0.3
(t_f/T = 15, h_0/v_0T = 10, T_z/T = 1.2, $bT^2v_0^2$ = 0.05, δ_{sat} = 30°)

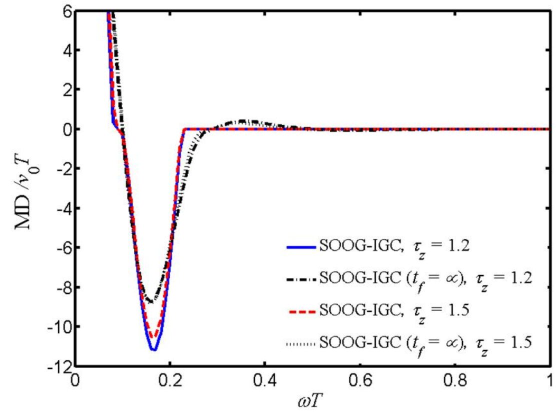


Fig. 10 Normalized miss distance vs $\hat{\omega}$ for the two guidance laws with different values of τ_z = 1.2,1.5 (t_f/T = 15, h_0/v_0T = 10, k_1T/v_0 = 4, $bT^2v_0^2$ = 0.05, δ_{sat} = 30°)

شکل 10 خطای نهایی برحسب $\hat{\omega}$ برای دو قانون هدایت به ازای τ_z = 1.2,1.5
(h_0/v_0T = 10, k_1T/v_0 = 4, k_1T/v_0 = 4, $bT^2v_0^2$ = 0.05, ωT = 0.3)

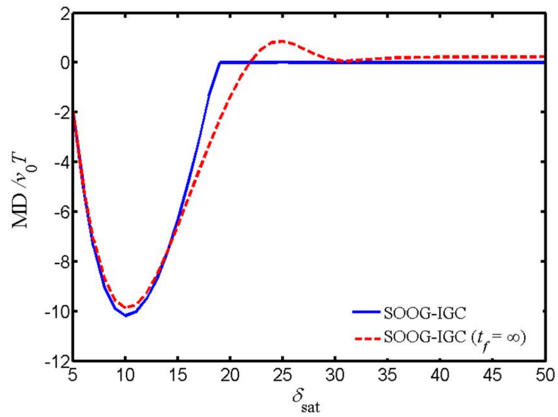


Fig. 11 Normalized miss distance vs fin deflection limit for the two guidance laws (t_f/T = 15, h_0/v_0T = 10, k_1T/v_0 = 4, T_z/T = 1.2, $bT^2v_0^2$ = 0.05, ωT = 0.3)

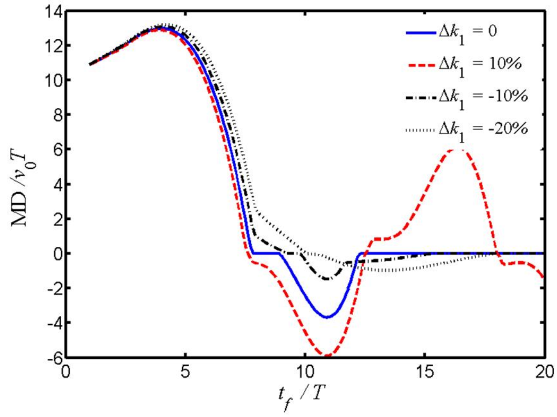
شکل 11 خطای نهایی بی‌بعد برحسب مقدار اشباع بالک برای دو قانون هدایت
(τ_f = 15,h_0/v_0T = 10,k_1T/v_0 = 4,τ_z = 1.2,$bT^2v_0^2$ = 0.05,$\hat{\omega}$ = 0.3)

بیان شده است که در آن ضرایب بی‌بعد با زیرنویس G نمایانگر مقدار آن در قانون بهینه و با زیرنویس A/F نمایانگر مقادیر مدل شبیه‌سازی پرواز است:

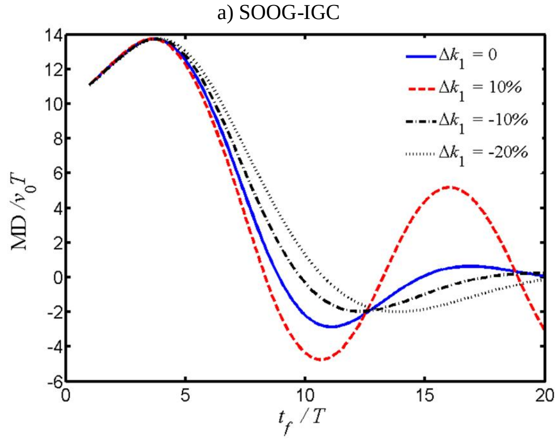
$$\begin{cases} \hat{k}_{1_{\text{A/F}}} = \hat{k}_{1_{\text{G}}}(1 + \Delta k_1/100) \\ \hat{\omega}_{\text{A/F}} = \hat{\omega}_{\text{G}}(1 + \Delta\omega/100) \\ \hat{\tau}_{z_{\text{A/F}}} = \hat{\tau}_{z_{\text{G}}}(1 + \Delta\tau_z/100) \end{cases} \tag{33}$$

در "شکل 12" اثر عدم قطعیت در $\hat{k}_1$ (Δk_1) بر خطای نهایی دو قانون بهینه ترسیم شده است. همان‌طور که در این شکل مشاهده می‌شود، مقدار عدم قطعیت مثبت 10%، خطای نهایی هر دو قانون هدایت را به‌طور قابل ملاحظه‌ای افزایش می‌دهد؛ ولی مقدار 10%- سبب خطای نسبتا قابل قبولی برای SOOG-IGC می‌شود. با توجه به این شکل، تحت شرایط مفروض، حتی مقدار 20%- عدم قطعیت برای قانون SOOG-IGC در زمان‌های نهایی بی‌بعد $t_f/T > 18$ مجاز است. در این حالت در مجموع، خطای نهایی SOOG-IGC کمتر از SOOG-IGC ($t_f = \infty$) می‌شود. با توجه به این نکته توصیه می‌شود تا در تخمین پارامتر $\hat{k}_1$، در حضور عدم قطعیت، مقدار کمی بزرگتری در قانون بهینه منظور شود تا در صورت وجود عدم قطعیت مثبت، خطای نهایی آن قابل قبول شود.

اثر عدم قطعیت در پارامترهای $\hat{\omega}$ و τ_z بر خطای نهایی دو قانون هدایت بهینه در "شکل‌های 13 و 14" نمایش داده شده است. همان‌طور که از این دو شکل ملاحظه می‌شود، مقدار منفی در عدم قطعیت در پارامترهای $\hat{\omega}$ و τ_z، خطای کمتری نسبت به مقدار مثبت تولید می‌کند. به علاوه، اثر عدم قطعیت



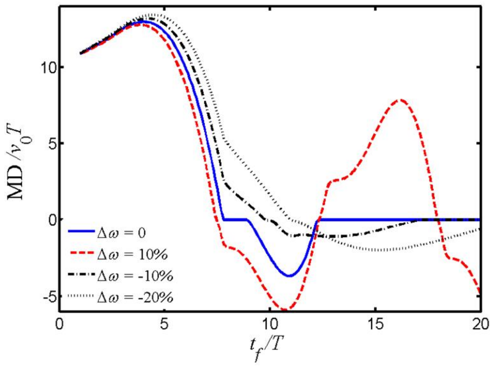
a) SOOG-IGC



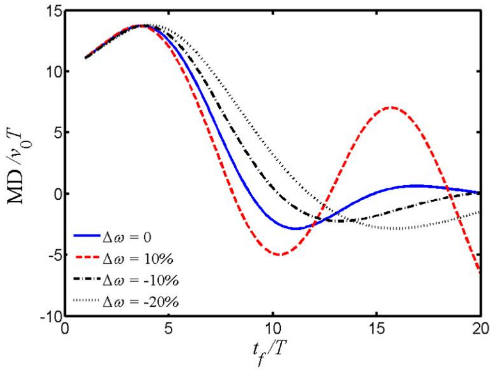
b) SOOG-IGC ($t_f = \infty$)

Fig. 12 Normalized miss distance vs normalized final time for the two guidance laws with uncertainty on $\hat{k}_1$ (h_0/v_0T = 10, $k_{1_G}T/v_0$ = 4, T_z/T = 1.2, $bT^2v_0^2$ = 0.05, ωT = 0.3, δ_{sat} = 30°)

شکل 12 خطای نهایی بی‌بعد برحسب زمان نهایی بی‌بعد برای دو قانون هدایت با وجود عدم قطعیت در $\hat{k}_1$ (h_0/v_0T = 10 , $k_{1_G}T/v_0$ = 4 , T_z/T = 1.2)
($bT^2v_0^2$ = 0.05, ωT = 0.3, δ_{sat} = 30°)



a) SOOG-IGC



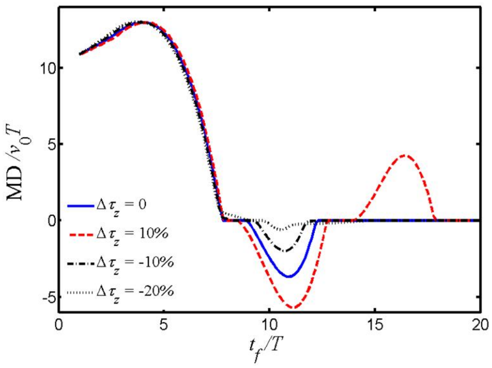
b) SOOG-IGC ($t_f = \infty$)

Fig. 13 Normalized miss distance vs normalized final time for the two guidance laws with uncertainty on $\hat{\omega}$ (h_0/v_0T = 10, k_1T/v_0 = 4, T_z/T = 1.2, $bT^2v_0^2$ = 0.05, $\omega_G T$ = 0.3, δ_{sat} = 30°)

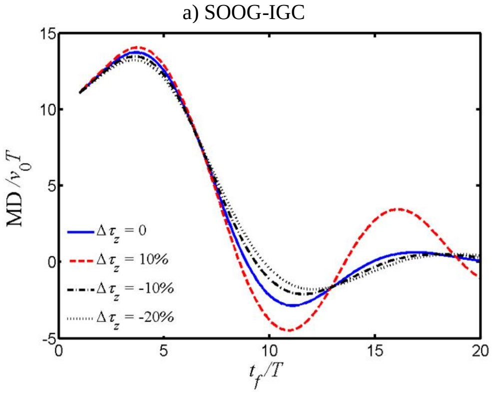
شکل 13 خطای نهایی بی‌بعد برحسب زمان نهایی بی‌بعد برای دو قانون هدایت با وجود عدم قطعیت در $\hat{\omega}$ (h_0/v_0T = 10, k_1T/v_0 = 4, T_z/T = 1.2) ($bT^2v_0^2$ = 0.05, $\omega_G T$ = 0.3, δ_{sat} = 30°)

τ_z در فاصله خطا کمتر از دو پارامتر $\hat{\omega}$ و $\hat{k}_1$ دیگر است. البته در شکل 14 مشاهده می‌شود که مقدار خطای 10% مثبت در محدوده‌هایی برای قانون SOOG-IGC قابل قبول است.

حال اثر عدم قطعیت در مدل با اعمال تابع تبدیل مرتبه اول با ثابت زمانی T_{act} برای عملگر بررسی می‌شود. برای این منظور، خطای نهایی بی‌بعد «قانون یکپارچه خط‌دید بهینه مرتبه دوم» برحسب زمان نهایی بی‌بعد به‌ازای سه مقدار ثابت زمانی بی‌بعد عملگر (T_{act}/T = 0, 0.45, 0.65) در "شکل 15" ترسیم شده است. با توجه به این شکل، همان‌طور که انتظار می‌رود، با افزایش τ_{act} خطای نهایی افزایش می‌یابد. در صورت مقادیر بزرگ برای ثابت زمانی عملگر، می‌توان ضریب وزنی فاصله از خط‌دید را کاهش داد تا خطای نهایی کاهش یابد. البته این کار، منجربه کاهش کیفیت تعقیب مسیر می‌شود. اگرچه روابط قانون یکپارچه بهینه بصورت تک بعدی استخراج شده است؛ ولی می‌توان از آن در حالت غیرخطی (حرکت دو بعدی در صفحه) استفاده کرد. در این حالت، شتاب a در تابع تبدیل (1) عمود بر بردار سرعت اعمال می‌شود. در معادلات شبیه‌سازی دو بعدی از پارامتر بی‌بعد کننده $A = v_{n_0}/T$ استفاده می‌شود که در آن v_{n_0} مولفه سرعت اولیه عمود بر خط‌دید است. همچنین زمان نهایی (یا زمان باقیمانده تا رسیدن به هدف) در حین پرواز، از تقسیم فاصله نسبی به سرعت پرنده، محاسبه و بروز می‌شود. بطور نمونه، خطای نهایی بی‌بعد برحسب فاصله افقی بی‌بعد تا هدف ($X_T/v_{n_0}T$) به ازای مقادیر مختلف خطای سمت برای قانون SOOG-IGC، با فرض عملگر ایده‌آل در "شکل 16" ترسیم شده است. در این حالت، پرنده از مبدا با خطای سمت



a) SOOG-IGC



b) SOOG-IGC ($t_f = \infty$)

Fig. 14 Normalized miss distance vs normalized final time for the two guidance laws with uncertainty on τ_z (h_0/v_0T = 10, k_1T/v_0 = 4, T_{z_G}/T = 1.2, $bT^2v_0^2$ = 0.05, ωT = 0.3, δ_{sat} = 30°)

شکل 14 خطای نهایی بی‌بعد برحسب زمان نهایی بی‌بعد برای دو قانون هدایت با وجود عدم قطعیت در τ_z (h_0/v_0T = 10, k_1T/v_0 = 4, T_{z_G}/T = 1.2) ($bT^2v_0^2$ = 0.05, ωT = 0.3, δ_{sat} = 30°)

اولیه، شروع به حرکت می‌کند. با توجه به این شکل، در صورت وجود فاصله کافی تا هدف، خطای نهایی قابل قبول خواهد بود.

در ادامه، علاوه بر معادلات غیرخطی حاکم، حرکت هدف نیز به عنوان عدم قطعیت در مدل، با اعمال دینامیک مرتبهٔ اول و محدودیت اشباع برای عملگر، در نظر گرفته می‌شود. فرض کنید هدف در لحظات پایانی، از حالت سکون با سرعت ثابتی برابر با یک‌دهم سرعت پرنده، در راستای عمود بر خط‌دید شروع به حرکت می‌کند. موقعیت اولیه پرنده بر روی خط‌دید است؛ اما خطای سمت سرعت اولیه آن 10 درجه است. خطای نهایی بی‌بعد در سناریو مفروض در "شکل 17" برحسب زمان باقیمانده بی‌بعد مانور هدف ($\tau_{go_m} = T_{go_m}/T$) ترسیم شده است. بطور نمونه اگر T_{go_m} = 2 باشد، به این معناست که هدف در زمان 2 ثانیه مانده به آخر، شروع به حرکت می‌کند. همان‌طور که از این شکل ملاحظه می‌شود، خطای نهایی SOOG-IGC کاهش قابل ملاحظه‌ای نسبت به SOOG-IGC ($t_f = \infty$) داشته است.

5-نتیجه‌گیری

در این مقاله، قانون هدایت و کنترل یکپارچه خط‌دید بهینه حلقه‌بسته برای سیستم‌های مرتبه دوم بصورت دستور زاویه بالک و بی‌بعد استخراج گردید. در مسئله هدایت بهینه مذکور، زمان نهایی و موقعیت نهایی مشخص و معین در نظر گرفته شده است. مدل تابع تبدیل مرتبه دوم به‌عنوان مود پریود کوتاه منظور شده و عملگر بصورت ایده‌آل فرض شده است. همچنین روابط با استفاده از چهار فرم بی‌بعد شده و ضرایب قانون هدایت و کنترل یکپارچه و نتایج شبیه‌سازی عددی بصورت بی‌بعد ارائه شده است.

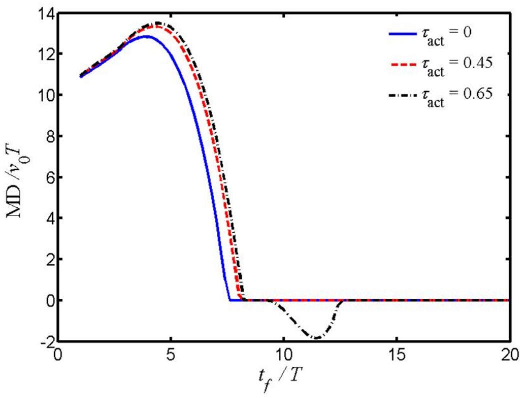


Fig. 15 Normalized miss distance vs normalized final time under SOOG-IGC with different values of $\tau_{act} = 0, 0.45\ 0.65$ ($k_1T/v_0 = 4$, $T_z/T = 1.2$, $bT^2v_0^2 = 0.01$, $\omega T = 0.3$, $\delta_{sat} = 30^{\circ}$)

شکل 15 خطای نهایی بی‌بعد برحسب زمان نهایی بی‌بعد برای قانون SOOG-IGC به‌ازای مقادیر مختلف $\tau_{act} = 0, 0.45\ 0.65$
($k_1T/v_0 = 4$, $T_z/T = 1.2$, $bT^2v_0^2 = 0.01$, $\omega T = 0.3$, $\delta_{sat} = 30^{\circ}$)

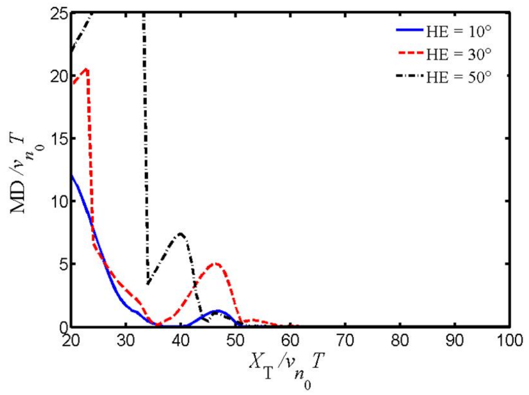


Fig. 16 Normalized miss distance vs normalized initial target position under SOOG-IGC with different values of HE = 10°, 30°, 50° ($k_1T/v_{n_0} = 4$, $T_z/T = 1.2$, $bT^2v_{n_0}^2 = 0.05$, $\omega T = 0.3$, $\delta_{sat} = 30^{\circ}$)

شکل 16 خطای نهایی بی‌بعد برحسب فاصله اولیه بی‌بعد هدف برای قانون SOOG-IGC به‌ازای مقادیر متفاوت خطای سمت HE = 10°, 30°, 50°
($k_1T/v_{n_0} = 4$, $T_z/T = 1.2$, $bT^2v_{n_0}^2 = 0.05$, $\omega T = 0.3$, $\delta_{sat} = 30^{\circ}$)

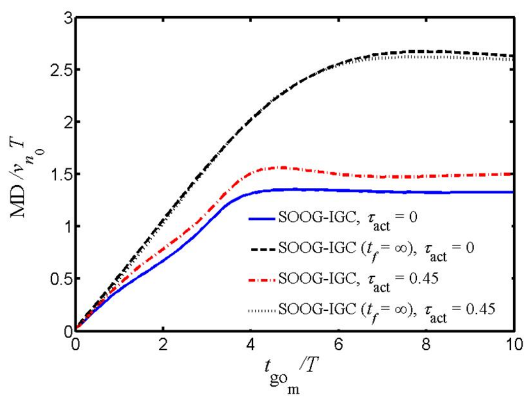


Fig. 17 Normalized miss distance vs normalized target maneuvering time-to-go for the two guidance laws with $\tau_{act} = 0, 0.45$ ($k_1T/v_0 = 4$, $T_z/T = 1.2$, $bT^2v_0^2 = 0.05$, $\omega T = 0.3$, $\delta_{sat} = 30^{\circ}$, HE = 10°)

شکل 17 خطای نهایی بی‌بعد برحسب زمان باقیمانده بی‌بعد مانور هدف (τ_{go_m}) برای دو قانون هدایت به ازای دو مقدار متفاوت $\tau_{act} = 0, 0.45$
($k_1T/v_0 = 4$, $T_z/T = 1.2$, $bT^2v_0^2 = 0.05$, $\omega T = 0.3$, $\delta_{sat} = 30^{\circ}$ HE = 10°)

به‌علاوه، بهره‌های قانون هدایت و کنترل یکپارچه خط‌دید بهینه در حالت پایا به‌طور صریح استخراج شده است. عملکرد قانون استخراج شده، با استفاده از شبیه‌سازی عددی و اعمال محدودیت زاویه بالک بررسی شده و با حالت ضرایب پایا مقایسه شده است. با توجه به نتایج شبیه‌سازی برای مدل جرم نقطه‌ای و در شرایط مفروض، می‌توان گفت که فاصله خطای نهایی به ازای قانون هدایت و کنترل یکپارچه خط‌دید بهینه مرتبه دوم، در اکثر محدوده‌ها نسبت به قانون هدایت و کنترل یکپارچه خط‌دید بهینه پایای مرتبه دوم بهبود می‌یابد. همچنین در ادامه، مطالعات پارامتری بی‌بعد روی ضریب وزنی فاصله از خط‌دید، بهره و فرکانس پریود کوتاه دینامیک وسیله پروازی برای هر دو قانون هدایت و کنترل یکپارچه صورت پذیرفته است. حساسیت دو قانون هدایت به مدل‌سازی سیستم هدایت و کنترل با اعمال عدم قطعیت در پارامترهای سیستم هدایت و کنترل یکپارچه مرتبه دوم بررسی اجمالی شده است. با توجه به عدم تقارن فاصله خطا نسبت به عدم قطعیت در پارامترهای دینامیک وسیله پروازی و این‌که درصدی منفی در این عدم قطعیت‌ها تأثیر قابل توجهی بر فاصله خطا ندارد، تخمین بزرگ‌تر برای پارامترهای بهره، «فرکانس پریود کوتاه» و «عکس قدرمطلق محل صفر» تابع تبدیل وسیله پروازی توصیه می‌شود تا در صورت وجود عدم قطعیت مثبت، خطای نهایی آن قابل قبول شود. شایان ذکر است تمرکز مقاله حاضر بر استخراج معادلات صریح برای مسئله بهینه خط‌دید بوده است. البته مطالعه مقدماتی حاضر در عملکرد/شبیه‌سازی به ازای مدل جرم نقطه‌ای صورت پذیرفته است و برای بررسی جامع نیاز به شبیه‌سازی شش درجه آزادی با تخمین متغیرهای حالت در حضور نویز و اغتشاش است.

در پایان، لازم به ذکر است که از روش خطی‌سازی و تابع توصیفی برای المان غیرخطی اشباع به‌عنوان معادلات حالت مسئله حاضر نیز می‌توان استفاده کرد. به‌علاوه، حل تحلیلی مذکور و ماتریس انتقال حالت بدست آمده، راه را برای حل مسئله هدایت بهینه با قید سرعت نهایی (زاویه نهایی) برای کاربرد تعقیب مسیر برای با تقریب مدل پریود کوتاه هموار می‌کند.

6-پیوست الف: محاسبه ماتریس انتقال حالت

برای محاسبه ماتریس انتقال حالت سیستم (11)، ابتدا معادله مشخصه آن استخراج می‌شود:

$$|sI - A_p| = z^4 + d_1z^3 + d_2z^2 + d_3z + d_4 = 0, \tag{34}$$

که در آن $z = s^2$ و

$$\begin{cases} d_1 = \hat{\omega}^2(2 - \hat{\omega}^2) \\ d_2 = \hat{\omega}^4(1 + \hat{b}\hat{k}_1^2\tau_z^4) \\ d_3 = -2\hat{b}\hat{k}_1^2\hat{\omega}^4\tau_z^2 \\ d_4 = \hat{b}\hat{k}_1^2\hat{\omega}^4 \end{cases} \tag{35}$$

معادله مشخصه (34) به‌ازای $0 < \hat{b}\hat{k}_1^2 \leq 5000$، $1.2 < \hat{\omega} < 0$ و $2 < \tau_z < 0$ بصورت رابطه (44) قابل تفکیک است. شایان ذکر است مطابق رابطه (5) $\hat{\omega} = 2\zeta$، بنابراین شرط $\hat{\omega} < 1.2$ بصورت $\zeta < 0.6$ نوشته می‌شود که با توجه به این‌که ضریب میرایی وسایل پروازی (بدون کنترل) مقدار نسبتا کوچکی است، لذا شرط $\hat{\omega} < 1.2$ عملا محدودیتی ایجاد نمی‌کند.

$$|sI - A_p| = (s^2 + 2\zeta_1\omega_1 s + \omega_1^2)(s^2 - 2\zeta_1\omega_1 s + \omega_1^2) \times (s^2 + 2\zeta_2\omega_2 s + \omega_2^2)(s^2 - 2\zeta_2\omega_2 s + \omega_2^2) \tag{36}$$

که در آن $(i = 1,2)$،

$$\omega_i = \sqrt[4]{\alpha_i^2 + \beta_i^2}\ , \qquad \zeta_i = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \frac{\alpha_i}{\omega_i^2})} \tag{37}$$

در رابطه فوق، ω_1 و ω_2 همیشه مثبت و حقیقی بوده و با توجه به این‌که به راحتی می‌توان نشان داد که $|\alpha_1/\omega_i^2| < 1$، مقدار ζ_1 و ζ_2 نیز حقیقی و بین صفر و یک خواهدبود، همچنین:

$$\alpha_i = -\frac{d_1}{4} + (-1)^i Q_1, \quad \beta_i = \frac{1}{2}\sqrt{4{Q_1}^2 + 2q_1 + (-1)^i \frac{q_2}{Q_1}} \tag{38}$$

که در آن،

$$\begin{cases} q_1 = \dfrac{8d_2 - 3d_1^2}{8} \\ q_2 = \dfrac{d_1^3 - 4d_1d_2 + 8d_3}{8} \end{cases} \tag{39}$$

$$\begin{cases} Q_1 = \dfrac{1}{2}\sqrt{-\dfrac{2}{3}q_1 + \dfrac{1}{3}\left(Q_2 + \dfrac{\Delta_0}{Q_2}\right)} \\ Q_2 = \sqrt[3]{\dfrac{\Delta_1 + \sqrt{\Delta_1^2 - 4\Delta_0^3}}{2}} \end{cases} \tag{40}$$

همچنین

$$\begin{cases} \Delta_0 = d_2^2 - 3d_1a_3 + 12d_4 \\ \Delta_1 = 2d_2^3 - 9d_1d_2d_3 + 27d_1^2d_4 + 27d_3^2 - 72d_2d_4 \end{cases} \tag{41}$$

ماتریس انتقال حالت در فضای لاپلاس بصورت (42) حاصل می‌شود:

$$\Phi(s) = \frac{M_1s^7 + M_2s^6 + M_3s^5 + M_4s^4 + M_5s^3 + M_6s^2 + M_7s + M_8}{s^8 + d_1s^6 + d_2s^4 + d_3s^2 + d_4} \tag{42}$$

که در آن،

$$\begin{cases} M_1 = I_{8\times8} \\ M_2 = A_p \\ M_3 = A_pM_2 + d_1M_1, \\ M_4 = A_pM_3 \end{cases} \quad \begin{cases} M_5 = A_pM_4 + d_2M_1 \\ M_6 = A_pM_5 \\ M_7 = A_pM_6 + d_3M_1 \\ M_8 = A_pM_7 \end{cases} \tag{43}$$

ماتریس انتقال حالت (42) را با استفاده از رابطه (36) می‌توان به کسرهای مجزا تفکیک نمود:

$$\begin{aligned} &\frac{M_1s^7 + M_2s^6 + M_3s^5 + M_4s^4 + M_5s^3 + M_6s^2 + M_7s + M_8}{s^8 + a_1s^6 + a_2s^4 + a_3s^2 + a_4} \\ &= \frac{C_1s + C_2}{s^2 + 2\zeta_1\omega_1s + \omega_1^2} + \frac{C_3s + C_4}{s^2 - 2\zeta_1\omega_1s + \omega_1^2} \\ &+ \frac{C_5s + C_6}{s^2 + 2\zeta_2\omega_2s + \omega_2^2} + \frac{C_7s + C_8}{s^2 - 2\zeta_2\omega_2s + \omega_2^2} \end{aligned} \tag{44}$$

روابط کلی تفکیک رابطه (44) به کسرهای مجزا برحسب ضرایب C_1 تا C_8، مشابه مرجع [14] است که در پیوست الف مرجع مذکور آمده و از ذکر مجدد آن خودداری می‌شود. در نهایت ماتریس انتقال حالت بصورت رابطه (45) حاصل می‌شود:

$$\Phi(t) = \Phi_1(t) + \Phi_2(t) + \Phi_3(t) + \Phi_4(t) \tag{45}$$

که در آن،

$$\begin{aligned} \Phi_1(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{C_1s + C_2}{s^2 + 2\zeta_1\omega_1s + \omega_1^2}\right\} \\ &= e^{-\zeta_1\omega_1t}\left(C_1\cos(\omega_{d_1}t) + \frac{(C_2 - C_1\zeta_1\omega_1)\sin(\omega_{d_1}t)}{\omega_{d_1}}\right) \end{aligned} \tag{46}$$

$$\begin{aligned} \Phi_2(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{C_3s + C_4}{s^2 - 2\zeta_1\omega_1s + \omega_1^2}\right\} \\ &= e^{\zeta_1\omega_1t}\left(C_3\cos(\omega_{d_1}t) + \frac{(C_4 + C_3\zeta_1\omega_1)\sin(\omega_{d_1}t)}{\omega_{d_1}}\right) \end{aligned} \tag{47}$$

$$\begin{aligned} \Phi_3(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{C_5s + C_6}{s^2 + 2\zeta_2\omega_2s + \omega_2^2}\right\} \\ &= e^{-\zeta_2\omega_2t}\left(C_5\cos(\omega_{d_2}t) + \frac{(C_6 - C_5\zeta_2\omega_2)\sin(\omega_{d_2}t)}{\omega_{d_2}}\right) \end{aligned} \tag{48}$$

$$\begin{aligned} \Phi_4(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{C_7s + C_8}{s^2 - 2\zeta_2\omega_2s + \omega_2^2}\right\} \\ &= e^{\zeta_2\omega_2t}\left(C_7\cos(\omega_{d_2}t) + \frac{(C_8 + C_7\zeta_2\omega_2)\sin(\omega_{d_2}t)}{\omega_{d_2}}\right) \end{aligned} \tag{49}$$

همچنین:

$$\omega_{d_i} = \omega_i\sqrt{1 - \zeta_i^2}\ , \quad i = 1,2 \tag{50}$$

7-پیوست ب: محاسبه ضرایب قانون هدایت پایا

در این بخش، ضرایب قانون هدایت و کنترل یکپارچه مرتبه دوم پایا (32) برحسب عناصر ماتریس S در معادله جبری ریکاتی (29) استخراج می‌شود. در ابتدا با جایگذاری S از رابطه (30) و ماتریس‌های B، A_s و Q از رابطه (12) در رابطه (29)، دستگاه معادلات 10 معادله و 10 مجهول به‌دست آمده که با انجام عملیات ریاضی، بصورت رابطه (51) ساده می‌شود:

$$\begin{cases} d_3S_5 + S_7 = \sqrt{\hat{b}} \\ (d_3S_5 + S_7)(d_3S_2 + S_9) = S_1 \\ (d_3S_5 + S_7)(d_3S_8 + S_{10} - d_1) = d_2S_5 \\ (d_3S_5 + S_7)(d_3S_9 + S_4 - d_1) = S_6 \\ (d_3S_2 + S_9)^2 = 2S_5 \\ (d_3S_2 + S_9)(d_3S_8 + S_{10} - d_1) = d_2S_2 + S_6 \\ (d_3S_2 + S_9)(d_3S_9 + S_4 - d_1) = S_7 + S_8 \\ (d_3S_8 + S_{10} - d_1)^2 = d_1^2 + 2d_2S_8 \\ (d_3S_8 + S_{10} - d_1)(d_3S_9 + S_4 - d_1) = S_3 + d_1^2 + d_2S_9 \\ (d_3S_9 + S_4 - d_1)^2 = d_1^2 + 2S_{10} \end{cases} \tag{51}$$

که در آن،

$$\begin{cases} d_1 = \hat{\omega}^2 \\ d_2 = \hat{k}_1\hat{\omega}^2 \\ d_3 = -\hat{k}_1\hat{\omega}^2\tau_z^2 \end{cases} \tag{52}$$

در ادامه با استفاده از روابط اول، پنجم، هشتم و دهم دستگاه معادلات مذکور می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} d_3S_5 + S_7 = \sqrt{\hat{b}} = \hat{C}_h(\infty) \\ d_3S_2 + S_9 = \sqrt{2S_5} = \hat{C}_v(\infty) \\ d_3S_8 + S_{10} = \hat{\omega}\sqrt{\hat{\omega}^2 + 2S_8} - \hat{\omega}^2 = \hat{C}_{x_1}(\infty) \\ d_3S_9 + S_4 = \sqrt{\hat{\omega}^4 + 2S_{10}} - \hat{\omega}^2 = \hat{C}_{x_2}(\infty) \end{cases} \tag{53}$$

بنابراین، با توجه به رابطه فوق، برای استخراج بهره‌های پایا، تنها نیاز به محاسبه سه مجهول S_5، S_8 و S_{10} است. این سه مجهول با توجه به دیگر روابط (51) و با انجام عملیات ریاضی متعدد بصورت (54) محاسبه می‌شود:

$$\begin{cases} S_5 = -\dfrac{a_1}{4a_0} + D_1 + \dfrac{1}{2}\sqrt{-4{D_1}^2 - 2p_0 - \dfrac{p_1}{D_1}} \\ S_8 = \dfrac{\hat{\omega}^2}{2\hat{b}\hat{k}_1}\left(\hat{k}_1^2S_5^2 - \hat{b}\right) \\ S_{10} = \hat{\omega}^2\left(\hat{k}_1\tau_z^2S_8 + \dfrac{\hat{k}_1}{\sqrt{\hat{b}}}S_5 - 1\right) \end{cases} \tag{54}$$

که در آن،

$$\begin{cases} p_0 = \dfrac{8a_0a_2 - 3a_1^2}{8a_0^2} \\ p_1 = \dfrac{a_1^3 - 4a_0a_1a_2 + 8a_0^2a_3}{8a_0^3} \end{cases} \tag{55}$$

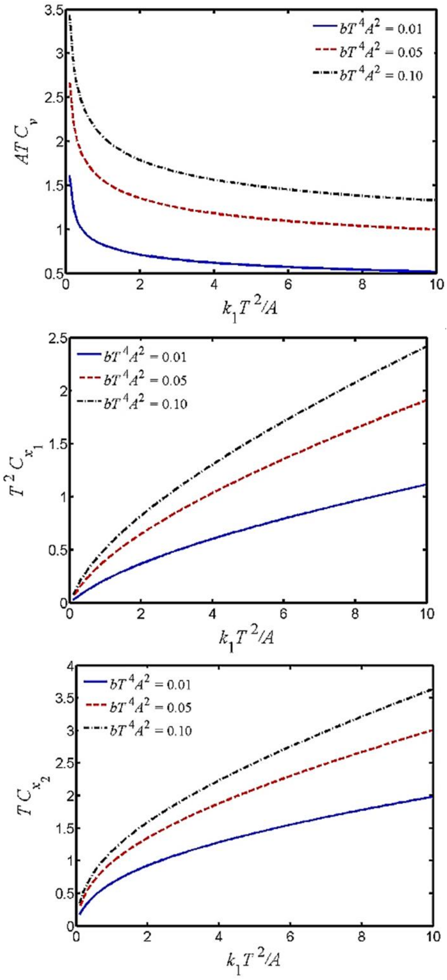


Fig. 18 Steady-state normalized guidance gains (31) vs. $\hat{k}_1$ for different values of $\hat{b}$ = 0.01,0.05,0.1 (ωT = 0.3, T_z/T = 1.2)

شکل 18 ضرایب بی‌بعد قانون هدایت بهینه پایا (31) برحسب $\hat{k}_1$ به ازای مقادیر مختلف ضریب وزنی بی‌بعد $\hat{b}$ = 0.01,0.05,0.1 (ωT = 0.3, T_z/T = 1.2)

$$\begin{cases} D_1 = \dfrac{1}{2}\sqrt{-\dfrac{2}{3}p_0 + \dfrac{1}{3a_0}\left(D_0 + \dfrac{\Delta_0}{D_0}\right)} \\ D_0 = \sqrt[3]{\dfrac{\Delta_1 + \sqrt{\Delta_1^2 - 4\Delta_0^3}}{2}} \end{cases} \tag{56}$$

$$\begin{cases} \Delta_0 = a_2^2 - 3a_1a_3 + 12a_0a_4 \\ \Delta_1 = 2a_2^3 - 9a_1a_2a_3 + 27a_1^2a_4 + 27a_0a_3^2 - 72a_0a_2a_4 \end{cases} \tag{57}$$

و

$$\begin{cases} a_0 = \hat{k}_1^4\hat{\omega}^4 \\ a_1 = -4\hat{b}\hat{k}_1^4\hat{\omega}^4\tau_z^2 \\ a_2 = 2\hat{b}\hat{k}_1^2\hat{\omega}^2\left(2\hat{b}\hat{k}_1^2\hat{\omega}^2\tau_z^4 - 6\sqrt{\hat{b}}\hat{k}_1 - \hat{\omega}^2\right) \\ a_3 = 4\hat{b}^2\hat{k}_1^2\hat{\omega}^2\left(\hat{\omega}^2\tau_z^2 + 2\sqrt{\hat{b}}\hat{k}_1\tau_z^2 - 2\hat{\omega}^2 + 4\right) \\ a_4 = \hat{b}^2\left(\hat{\omega}^2 - 2\sqrt{\hat{b}}\hat{k}_1\right) \end{cases} \tag{58}$$

همان‌طور که در رابطه (32) و (53) مشاهده می‌شود، ضریب $\hat{C}_h(\infty)$ تنها تابعی از ضریب $\hat{b}$ و برابر با جذر آن است. رفتار ضرایب بهره بی‌بعد دیگر در «قانون هدایت و کنترل یکپارچه خط‌دید بهینه مرتبه دوم پایا» مطابق رابطه (32) در "شکل 18" برحسب $\hat{k}_1$ و به‌ازای ضرایب مختلف وزنی بی‌بعد $\hat{b}$ ترسیم شده است. با توجه به "شکل 4"، با افزایش $\hat{k}_1$، ضریب $\hat{C}_v$ کاهش و دو ضریب $\hat{C}_{x_1}$ و $\hat{C}_{x_2}$ افزایش می‌یابد.

8-مراجع

[1] R. Yanushevsky, *Modern missile guidance*, pp. 145-167, Boca Raton: CRC Press, Taylor & Francis Group, 2008.
[2] R. Yanushevsky, *Guidance of Unmanned Aerial Vehicles*, pp. 243-273, Boca Raton: CRC Press, Taylor & Francis Group, 2011.
[3] N. F. Palumbo, B. E. Reardon, R. A. Blauwkamp, Integrated guidance and control for homing missiles, *Johns Hopkins Applied Physics Laboratory Technical Digest*, Vol. 25, No. 2, 2004.
[4] N. F. Palumbo, B. E. Reardon, R. A. Blauwkamp, Guest editor's introduction: integrated guidance and control for homing missiles, *Johns Hopkins Applied Physics Laboratory Technical Digest*, Vol. 29, No. 1, 2010.
[5] C. T. Chomel, *Design of a robust integrated guidance and control algorithm for the landing of an autonomous reusable launch vehicle*, MSc Thesis, Department of Aeronautics and Astronautics Massachusetts Institute of Technology, 1996.
[6] D. Chwa, J. Y. Choi, Anavatti, G. Sreenatha, Observer-based adaptive guidance law considering target uncertainties and control loop dynamics, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol. 14, No. 1, pp. 112-123, 2006.
[7] R. J. Sattigeri, A. J. Calise, Integration of adaptive estimation and adaptive control design for uncertain nonlinear systems, *American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA) Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit*, Hilton Head, South Carolina, August 20 - 23, 2007.
[8] T. Shima, M. Idan, O. M. Golan, Sliding-mode control for integrated missile autopilot guidance, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 29, No. 2, pp. 250-260, 2006.
[9] D. C. Foreman, C. H. Tournes, Y. B., Shtessel, Integrated missile flight control using quaternions and third-order sliding mode control, *American Control Conference*, Marriott Waterfront, Baltimore, MD, USA, June 30-July 02, 2010.
[10] J. E. Kain, D. J. Yost, Command to line-of-sight guidance: A stochastic optimal control problem, *American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA) Journal of Spacecraft*, Vol. 14, No. 7, pp. 438-444, 1977.
[11] M. Sadrayi, Optimal Integrated Guidance and Control Design for Line-of-Sight Based Formation Flight, *American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA) Guidance, Navigation, and Control Conference*, Portland, Oregon, August 08 – 11, 2011.
[12] S. H. Pourtakdoust, H. Nobahari, Line-of-Sight guidance law optimization for ground-to-air missiles, *the First Conference of Aerospace industries Organization*, Tehran, Iran, 2000, (in Persian فارسی).
[13] A. Ratnoo, P. B. Sujit, M. Kothari, Adaptive Optimal path following for high wind flights, *Proceedings of 18th International Federation of Automatic Control (IFAC) World Congress*, Milan, Italy, pp. 12,985–12,990, Aug 28–Sept 2, 2011.
[14] S. H. Sajjadi, S. H. Jalali Naini, Second-order optimal line-of-sight guidance for stationary targets, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 11, pp. 387-395, 2015 (in Persianفارسی)
[15] S. H. Jalali Naini, S. H. Sajjadi, Closed-loop optimal line-of-sight guidance for non-minimum phase second-order control systems, *the 15th International Conference of Aerospace Society*, Tehran, Iran, 2016, (in Persian فارسی).
[16] P. Zarchan, *Tactical and strategic missile guidance*, pp. 473-498, Virginia: American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA), *Progress in Astronautics and Aeronautics*, Vol. 239, 6th Ed., 2012.
[17] K. Ogata, *Modern Control Engineering*, pp. 711-718, New Jersey, Prentice-Hall, 3rd edition, 1997.