مجله مهندسی مکانیک مدرس، دی 1395، دوره 16، شماره 10، ص‌ص 253-265

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

توسعه یک رهیافت بالادست ضمنی مبتنی بر فیزیک جریان برای روش حجم محدود مرکزسلولی

شیدوش وکیلی‌پور[1*]، مسعود محمدی[2]، روزبه ریاضی[1]

1- استادیار، مهندسی هوافضا، دانشگاه تهران، تهران
2- دانشجوی دکتری، مهندسی هوافضا، دانشگاه تهران، تهران
* تهران، صندوق پستی 1439957131، vakilipour@ut.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 09 تیر 1395
پذیرش: 15 شهریور 1395
ارائه در سایت: 24 مهر 1395

کلید واژگان:
روش حجم محدود مرکزسلولی
روش بالادست متأثر از فیزیک جریان
روش اختلاف بالادست مورب
روش اختلاف نمایی
پخش کاذب

چکیده

کار اصلی در روش‌های حجم محدود، تخمین صحیح مقادیر روی سطوح گذرنده شارها براساس مقادیر محاسبه‌شده در گره‌ها یا مراکز سلول‌ها است. در این راستا، رهیافت بالادست از کارآمدترین روش‌ها در تخمین مقادیر روی سطوح حجم کنترلی است. رهیافت بالادست با تکنیک‌های متنوع و دقت‌های مناسبی در روش‌های حجم محدود روی انواع شبکه‌های باسازمان و بی‌سازمان توسعه یافته است. در پژوهش حاضر، روش بالادست مبتنی بر فیزیک جریان (PIS) به رهیافت حجم کنترل مرکزسلولی با یک حلگر ضمنی کوپل توسعه یافته و نتایج آن با روش‌های اختلاف نمایی (EDS) و اختلاف بالادست مورب (SUDS) در جریان حفره برای اعداد رینولدز 400 تا 10000 و جریان گذرنده از روی پله در عدد رینولدز 800 مقایسه شده است. نتایج نشان‌دهنده اختلاف قابل ملاحظه روش EDS با مراجع، بویژه برای جریان حفره در اعداد رینولدز بالا است که علت آن تشدید پخش کاذب در اثر بالا رفتن عدد رینولدز و ناهم‌راستایی خطوط جریان و شبکه است. مقایسه نتایج دو روش SUDS و PIS نیز نشان از نزدیکی نتایج این دو روش در جریان روی پله و اختلاف قابل توجه آن‌ها در جریان درون حفره دارد. اختلاف نتایج روش SUDS در جریان حفره را می‌توان به تأثیرناپذیری این روش از اختلاف فشار بین نقاط سطح سلول و بالادست ارتباط داد که در جریان‌هایی با فیزیک حاکم گردابه‌ای بسیار اهمیت دارد. در مقابل، روش PIS از طریق یک معادله مومنتوم در راستای خط جریان، توانسته است نتایج خوبی از نظر تسخیر ساختارهای گردابه‌ای جریان و تطابق با نتایج مراجع به‌دست آورد.

Development of an Implicit Physical Influence Upwinding Scheme for Cell-Centered Finite Volume Method

Shidvash Vakilipour*, Masoud Mohammadi, Rouzbeh Riazi

Department of Aerospace Engineering, University of Tehran, Tehran, Iran
*P.O.B. 1439957131, Tehran, Iran, vakilipour@ut.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 29 June 2016
Accepted 05 September 2016
Available Online 15 October 2016

Keywords:
Cell-Centered Finite Volume Method
Physical Influence Scheme (PIS)
Exponential Differencing Scheme (EDS)
Skew Upwind Differencing Scheme (SUDS)
False Diffusion

ABSTRACT

The main task in finite volume methods (FVM) is to estimate proper values on the cell faces based on the calculated values on the nodes or cell centers. In this way, upwinding schemes are the most successful schemes for estimation of values on the control volume faces. These schemes have been developed in FVM for various techniques with proper accuracy on different kinds of structured and unstructured grids. In this research, the physical influence scheme (PIS) is developed to the cell-centered FVM in an implicit coupled solver and the results are compared with other two main branches of upwinding methods: exponential differencing scheme (EDS) and skew upwind differencing scheme (SUDS). Accuracy of these schemes is evaluated in lid-driven cavity flow at Re = 400-10000 and backward-facing step flow at Re = 800. Simulations show considerable difference between of the results EDS scheme with benchmarks, especially for lid-driven cavity flow at high Reynolds numbers which occurs due to false diffusion. Comparing SUDS and PIS schemes shows relatively close results in backward-facing step flow and different results in lid-driven cavity flow. The poor results of SUDS in cavity flow can be related to its non-pressure sensitivity between cell face and upwind points which is critical for such vortex dominant flows. Instead, the PIS scheme by applying a momentum equation between the cell face and upwind points, is able to capture flow vortices properly and matching well with benchmarks.

1- مقدمه

حل معادلات تراکم‌ناپذیر ناویر-استوکس موضوع مورد توجه پژوهشگران در طول چند دهه اخیر بوده است. این تلاش‌ها اغلب معطوف به یافتن راه‌کارهایی برای مواجهه با دو مشکل اصلی بوده است. مشکل نخست، جدایی میدان فشار-سرعت است که به دلیل مشارکت نداشتن مستقیم متغیر فشار در معادله پیوستگی رخ می‌دهد. این موضوع از یک سو، مشکلاتی در حل معادلات حاکم در یک شبکه

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:
Sh. Vakilipour, M. Mohammadi, R. Riazi, Development of an Implicit Physical Influence Upwinding Scheme for Cell-Centered Finite Volume Method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 10, pp. 253-265, 2016 (in Persian)

هم‌مرکز[1] پیش می‌آورد و از سوی دیگر، نوسانات غیرفیزیکی در میدان‌های فشار و سرعت ایجاد می‌کند. از این نوسانات اغلب با نام مشکل صفحه شطرنجی[2] در مقالات یاد می‌شود [2,1]. رهیافت‌های متعددی، از جمله بازنویسی معادلات ناویر-استوکس برحسب تابع جریان و ورتیسیتی (محدود به جریان‌های دوبعدی)، استفاده از شبکه جابه‌جاشده [3] (محدودیت در اعمال روی شبکه‌های غیرمتعامد و بی‌سازمان)، جایگزینی معادله پیوستگی با یک معادله پواسون فشار (نرخ همگرایی پایین)، استفاده از روش‌های تراکم‌پذیری مصنوعی [4] (هزینه محاسباتی بالا)، برای رفع این معضل پیشنهاد شده است. با این حال، دسته‌ای از روش‌ها توسعه یافتند که با تعریف دو نوع سرعت متفاوت روی سطح برای معادلات پیوستگی و مومنتوم، توانستند اغلب معایب روش‌های قبلی را برطرف کنند. از جمله این روش‌ها می‌توان به روش میانی‌یابی وزنی فشار[3] (PWIM) ری و چاو [5]، روش پراکاش و پاتانکار [6] در روش المان محدود برپایه حجم کنترل[4] (CVBFEM) و روش اشنایدر و کریمیان [8,7] اشاره کرد. اشرفی‌زاده و همکاران [9] نیز با به‌کارگیری معادلات بستار[5] مناسب روشی ارائه کرده‌اند که در آن برای ارتباط میدان فشار و سرعت نیازی به استفاده از روابط مجزا برای سرعت‌های جابه‌جاشونده و جابه‌جاکننده نیست.

مشکل دوم در حل معادلات تراکم‌ناپذیر ناویر-استوکس، غیرخطی بودن و مدل‌سازی نادرست جمله‌های جابه‌جایی در معادلات مومنتوم است؛ برای مثال، در جریان‌هایی با عدد رینولدز بالا که جمله جابه‌جایی اهمیت زیادی پیدا می‌کند، بی‌توجهی به آن می‌تواند موجب ناپایداری و حتی واگرایی در حل شود.

نخستین راهکار برای حل این مشکل، استفاده از تقریب بالادست مرتبه یک بود [3]. در این راهکار، مقدار سرعت روی سطح برابر با سرعت روی مرکز یکی از سلول‌های مجاور بود؛ یعنی به ازای شار مثبت از سلول سمت چپ و به ازای شار منفی از مقدار سلول سمت راست استفاده می‌شد. اما این تقریب خطی تنها در اعداد پکلت[6] (Pe) بسیار بزرگ صادق است و در اعداد پکلت کوچک و نسبتا کوچک، از دقت آن کاسته می‌شود. به‌علاوه، در اعداد پکلت بسیار بزرگ نیز که جمله پخش فیزیکی کم‌اثر می‌شود، این فرض خطی موجب پخش کاذب عددی[7] می‌شود. یک راه ساده برای کاهش اثرات پخش کاذب روش‌های بالادست، ریز کردن شبکه است که البته نمی‌تواند راهکار بهینه‌ای، بویژه برای جریان‌های پیچیده، محسوب شود.

برای حل این مشکلات، اسپالدینگ [10] براساس حل یک‌بعدی معادله جابه‌جایی-پخش، روش اختلاف نمایی را پیشنهاد داد. البته، همان‌طور که از اسم این روش پیداست، تخمین سرعت روی سطوح سلول‌ها برحسب تابع نمایی از عدد پکلت انجام می‌شود که هزینه محاسباتی آن بسیار زیاد است. ضمن آنکه این روش از حل یک‌بعدی استخراج شده و با همان دقت قابل تعمیم به حالت‌های دوبعدی و سه‌بعدی نبوده و لذا هزینه محاسباتی آن نیز توجیه‌پذیر نخواهد بود. به همین دلیل اسپالدینگ [10] سعی کرد روشی ترکیبی (هیبرید[8]) را به‌عنوان تقریبی برای روش نمایی ارائه کند که هم خاصیت اختلاف مرکزی در $|Pe|<2$ را داشته باشد و هم خاصیت بالادست در $|Pe|>2$. ضمن آنکه ضعف استفاده از تابع نمایی نیز در آن حذف شد. با وجود این، روش ترکیبی نیز از مشکلاتی چون اختلاف با حل دقیق در محدوده $|Pe|\approx 2$ و همچنین صفرشدن اجباری جمله پخش در $|Pe|>2$ مواجه بود.

به همین دلیل، پاتانکار [11] روشی جایگزین با نام قانون توانی[9] را پیشنهاد داد که در آن از تابعی با توان مرتبه پنج برحسب عدد پکلت استفاده شده است. این روش اگرچه سادگی روش هیبرید را ندارد، اما دقت آن به حل دقیق نزدیک‌تر و هزینه محاسباتی آن از اختلاف نمایی بسیار کمتر است. ریتبی و تورانس [1] نیز تابع جبری مرتبه سه و ریتبی و همکاران [12] تابع کسری مرتبه دو را برای تخمین روش نمایی ارائه کردند که هزینه محاسباتی آن‌ها از روش قانون توانی پاتانکار نیز کمتر است.

علاوه بر روش‌های مرتبه اول فوق، روش‌های مرتبه بالاتر نیز توسعه داده شده است که سعی در کاهش بیشتر خطای پخش دارد. روش میان‌یابی بالادست درجه دوم (کوئیک)[10] [13] یکی از شناخته‌شده‌ترین این روش‌هاست که از میان‌یابی درجه دوم وزنی سه نقطه، شامل دو سلول بالادست و یک سلول پایین‌دست سطح سلول استفاده می‌کند. اصلاحاتی روی روش اولیه کوئیک انجام شده است که ناپایداری آن را کاهش و سرعت همگرایی آن را هم افزایش می‌دهد [14-16]. غیر از روش کوئیک، روش‌های مرتبه بالاتری نظیر میان‌یابی بالادست مرتبه سوم[11] (CUI) و خانواده روش‌های کاهش تغییرات کل[12] (TVD) هم وجود دارد. روش‌های TVD به‌طور مشخص برای دستیابی به حل‌های بدون نوسان غیرفیزیکی توسعه یافته‌اند [17].

البته روش‌های دیگری چون الگوریتم شارپ[13] [18]، اختلاف تحلیلی محلی [19]، اختلاف بالادست انتقالی جهتی [20]، الگوریتم کاندیف[14] [21] و الگوریتم اسمارت[15] [22] نیز معرفی شدند که عمدتا سعی در ارتقای عملکرد روش‌های مذکور در جریان‌هایی با ناپیوستگی فیزیکی ترم‌های جابه‌جایی داشتند.

اگرچه روش اختلاف نمایی و تقریب‌های آن توانست تا حد زیادی مشکل پخش کاذب روش بالادست را کاهش دهد، اما هنوز هم در شبکه‌های نسبتا درشت و بویژه وقتی که خطوط جریان نسبت به خطوط شبکه محاسباتی مورب هستند، روش اختلاف محدود بالادست خطای قطع قابل توجهی را به همراه دارد که باعث تشدید پخش کاذب می‌شود. ریتبی [24,23] با تعریف راستای بالادست جریان که با توجه به جهت سرعت جریان روی سطح سلول تعیین می‌شد، روش اختلاف محدود بالادست مورب[16] (SUDS) را معرفی کرد که به‌طور چشم‌گیری پخش کاذب روش بالادست معمولی را کاهش می‌داد. البته همین روش نیز در بعضی موارد باعث تخمین بیشتر یا کمتر کمیت‌ها و نیز پراکندگی عددی می‌شود. راه‌های مختلفی برای بهبود عملکرد روش SUDS پیشنهاد شده است؛ از جمله استفاده از زاویه جریان در نقاط گوشه سلول‌های حجم کنترل به‌جای سطوح سلول‌ها [26,25]، افزودن یک اصلاحیه جابه‌جایی فیزیکی به روش SUDS که در آن تقریب کمیت جابه‌جاشده روی سطح سلول به‌گونه‌ای اصلاح می‌شود که بازتابی از تعامل میان جملات جابه‌جایی، پخش و چشمه است [27]. بوسناینا و همکاران [27] نمونه اصلاح‌شده‌ای از روش SUDS موسوم به SUWDS را پیشنهاد دادند که در آن به‌جای استفاده از یک نقطه در بالادست، از دو نقطه و میانگین‌گیری وزنی آن‌ها استفاده می‌شود. خانواده دیگری از روش‌های SUDS موسوم به وزن‌دهی‌شده جرمی[17] (MAW) به‌صورت مرتبه اول [29-31] و مرتبه دوم [32] توسعه یافته است که برمبنای وزن جرمی نقاط

[1] co-located grid
[2] checkerboard problem
[3] Pressure-Weighted Interpolation Method (PWIM)
[4] Control-Volume-Based Finite-Element method (CVBFEM)
[5] closure equations
[6] Peclet number
[7] numerical false diffusion
[8] hybrid

[9] power-law
[10] Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinetics (QUICK)
[11] Cubic Upwind Interpolation (CUI) Scheme
[12] Total Variation Diminishing (TVD)
[13] Simple High-Accuracy Resolution Program (SHARP)
[14] Controlled Numerical Diffusion with Internal Feedback (CONDIF)
[15] Sharp and Monotonic Algorithm for Realistic Transport (SMART)
[16] Skew Upwind Differencing Scheme (SUDS)
[17] Mass Weighted (MAW)

بالادست عمل می‌کنند. این روش‌ها نیز که اغلب برای روش CVBFEM توسعه یافته‌اند، جواب‌های بسیار بهتری نسبت به روش SUDS معمولی از نظر پخش کاذب و وابستگی کمتر به جهت شبکه به‌دست می‌دهند.

با وجود موفقیت‌های قابل توجه خانواده روش‌های SUDS در مقایسه با سایر روش‌های قدیمی‌تر بالادست مانند EDS و QUICK، هنوز مشکلاتی چون تخمین بالاتر یا پایین‌تر از حد واقعی و پخش کاذب در نتایج آن‌ها قابل مشاهده است. اشنایدر و راو [33] با در نظر گرفتن ایده روش SUDS، به‌جای استفاده از تخمین‌های مستقیم و میانگین‌گیری وزنی از نقاط بالادست، سعی کردند با توسعه روشی مبتنی بر فیزیک جریان[1] (PIS)، ارتباطی منطقی‌تر میان سرعت روی سطح و نقاط بالادست پیدا کنند. آن‌ها با نوشتن یک معادله مومنتوم در امتداد بالادست سطح، در تخمین سرعت روی سطح جملات مربوط به تغییرات فشار و پخش لزج را هم وارد کار کردند. آنها ایده خود را در روش المان محدود برپایه حجم محدود در یک شبکه چهاروجهی پیاده کردند و توانستند نتایج بسیار قابل قبول‌تری نسبت به روش SUDS به‌دست آورند. دربندی و همکاران [34] این روش را برای شبکه مثلثی باسازمان توسعه دادند. دربندی و وکیلی‌پور [36,35] با پیاده‌سازی همین روش در شبکه‌های مثلثی و مربعی در جریان‌های گذرنده از روی پله، درون حفره و حول استوانه، توانمندی این روش را در تخمین شار بالادست در متد المان محدود برپایه حجم محدود نشان دادند. علی‌صادقی و کریمیان [37] نیز از این روش برای بررسی دقت و همگرایی روش‌های مختلف مدل‌سازی سرعت سطح و اثرات آن بر درگیری میدان فشار-سرعت بهره گرفتند.

غیر از سه دسته روش توضیح داده‌شده، روش‌های بالادست دیگری نیز مبتنی بر روش مشخصه‌ها (الهام گرفته از جریان‌های تراکم‌پذیر) برای تقریب بالادست جریان‌های تراکم‌ناپذیر توسعه یافته است [38] که البته لازمه اعمال آن‌ها، استفاده از رهیافت‌های تراکم‌پذیری مصنوعی برای ارتباط میدان سرعت و فشار، مانند روش کورین [4]، است.

آنچه از مطالعات منتشرشده در زمینه روش بالادست متأثر از فیزیک جریان (PIS) می‌توان دریافت آنست که اغلب آن‌ها در روش المان محدود برپایه حجم محدود (FVBFEM) پیاده شده‌اند و هنوز عملکرد آن‌ها در روش حجم محدود با چیدمان مرکزسلول سنجیده نشده است. به همین دلیل، در این پژوهش به توسعه روش PIS برای روش حجم محدود مرکزسلولی فشارمبنا در جریان تراکم‌ناپذیر و مقایسه آن با دو روش EDS و SUDS پرداخته شده است. درگیری میدان فشار و سرعت در این شبیه‌سازی از طریق روش میان‌یابی وزنی فشاری (PWIM) برقرار شده و معادلات در قالب یک حلگر ضمنی و کوپل حل می‌شوند. نتایج حاصل از اعمال این روش‌ها، روی دو جریان حفره و پله در اعداد رینولدز بالا استخراج و عملکرد آن‌ها با هم مقایسه شده است.

2- معادلات حاکم

شکل انتگرالی معادلات حاکم بر جریان تراکم‌ناپذیر بدون جملات چشمه در یک شبکه ثابت به‌صورت زیر است:

معادله پیوستگی:

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho d\Omega + \int_S \rho \mathrm{v}\cdot \mathrm{n} dS = 0 \qquad (1)$$

معادله مومنتوم در جهت x:

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho U d\Omega + \int_S \rho U \mathrm{v}\cdot \mathrm{n} dS = -\int_\Omega \frac{\partial p}{\partial x} d\Omega + \int_S \mu \nabla U \cdot \mathrm{n} dS \qquad (2)$$

معادله مومنتوم در جهت y:

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho V d\Omega + \int_S \rho V \mathrm{v}\cdot \mathrm{n} dS = -\int_\Omega \frac{\partial p}{\partial y} d\Omega + \int_S \mu \nabla V \cdot \mathrm{n} dS \qquad (3)$$

که در آن‌ها، ρ چگالی سیال، U و V سرعت در راستای x و y، v بردار سرعت، p فشار استاتیک، μ ضریب لزجت دینامیکی سیال، n بردار عمود بر سطح حجم کنترل، S سطح حجم کنترل و Ω حجم حجم کنترل است.

3- مدل‌سازی محاسباتی

3-1- گسسته‌سازی میدان

گسسته‌سازی میدان حل در این تحقیق به روش باسازمان و به‌صورت شبکه هم‌مرکز انجام شده است. متغیرهای میدان در مراکز حجم کنترل‌ها (سلول‌ها) تعریف شده‌اند و مقادیر روی سطوح هر سلول از طریق مراکز سلول‌ها و با استفاده از روابط مناسب تخمین زده می‌شود. شکل 1 شماره‌گذاری و نام‌گذاری سلول‌های میدان را نشان می‌دهد. سلول مرکزی با نام P مشخص شده و 9 سلول مجاور آن با نام‌های متناسبی که نشان‌دهنده موقعیت آن‌ها نسبت به سلول مرکزی است نام‌گذاری شده‌اند؛ برای مثال، سلول شرقی با حرف E و سلول شمال شرقی با حروف NE مشخص شده‌اند. سطوح سلول محاسباتی P نیز با حروف کوچک e، w، n و s در چهار جهت شرقی، غربی، شمالی و جنوبی سلول شناسایی می‌شوند. مشخصات جریان در مرکز سلول شامل U_P، V_P و P_P و روی سطوح سلول‌ها با U_e و V_e برای سطح شرقی و U_n و V_n برای سطح شمالی ذخیره می‌شوند.

3-2- گسسته‌سازی معادله مومنتوم

برای گسسته‌سازی جمله زمانی از تقریب مرتبه یک زمانی استفاده شده است:

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho U d\Omega = \frac{\rho \Omega_P}{\Delta t}(U_P - U_P^o) = \frac{M_P}{\Delta t}(U_P - U_P^o) \qquad (4)$$

جملات جابه‌جایی نیز به‌صورت زیر گسسته می‌شوند:

$$\int_S \rho U \mathrm{v}\cdot \mathrm{n} dS = \dot{m}_e U_e - \dot{m}_w U_w + \dot{m}_n U_n - \dot{m}_s U_s \qquad (5)$$

که در آن، $\dot{m}_{f=e,w,n,s}$ شار جرمی گذرنده از سطوح سلول مورد نظر است. نحوه تخمین سرعت‌های جابه‌جایی U_f در بخش بعدی بیان خواهد شد. جمله فشار هم به‌صورت میانگین گرادیان فشار در حجم سلول تقریب زده می‌شود:

$$-\int_\Omega \frac{\partial p}{\partial x} d\Omega = -\Omega_P \left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_P \qquad (6)$$

جملات لزج نیز به‌صورت شار لزج عمود برسطح قابل بازنویسی است:

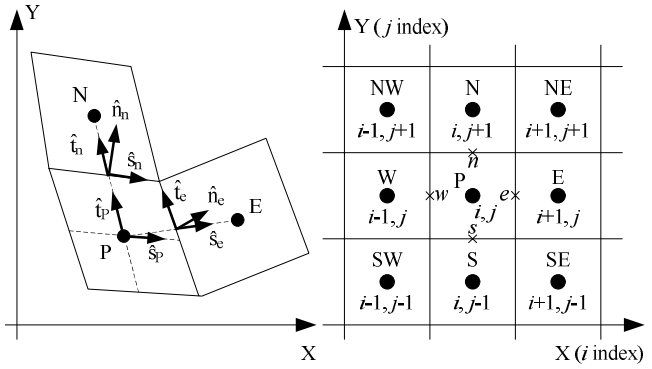


Fig. 1 Right: Nomenclature for cell faces of the cell *P* and its neighboring control volumes, Left: co-located variable storage.

شکل 1 راست: نام‌گذاری سطوح سلول P و سلول‌های همسایه آن، چپ: بردار یکه قائم $\hat{n}$ و بردارهای یکه جهتی $\hat{s}$ و $\hat{t}$ در شبکه نامتعامد.

[1] Physical Influence Schemes (PIS)

$$\int_S \mu \nabla U \cdot \mathrm{n} dS = \mu \int_S \left(\frac{\partial U}{\partial n}\right) dS = \sum_{f=e,w,n,s} \left(\mu S_f \left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_f\right) \quad (7)$$

که در آن مشتقات لزج عمود بر سطح را می‌توان به‌صورت زیر و برحسب جهت‌های بردارهای یکه $\hat{n}$، $\hat{s}$ و $\hat{t}$ (شکل) نوشت:

$$\left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_e = \frac{1}{\hat{n}_e \cdot \hat{s}_e}\left(\left.\frac{\partial U}{\partial s}\right|_e - \left.\frac{\partial U}{\partial t}\right|_e \hat{t}_e \cdot \hat{s}_e\right) \quad (8)$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_n = \frac{1}{\hat{n}_n \cdot \hat{t}_n}\left(\left.\frac{\partial U}{\partial t}\right|_n - \left.\frac{\partial U}{\partial s}\right|_n \hat{t}_n \cdot \hat{s}_n\right) \quad (9)$$

به این ترتیب، مشتق قائم سرعت روی سطح به دو جمله، شامل $\left.\frac{\partial U}{\partial s}\right|_e$، بیانگر نفوذ مومنتوم در جهت شرق به غرب و $\left.\frac{\partial U}{\partial t}\right|_e \hat{t}_e \cdot \hat{s}_e$ (جمله مشتق متقاطع) بیانگر نفوذ مومنتوم در جهت جنوب به شمال سطح سلول شرقی است.

مشتقات سرعت در جهات s و t نیز با استفاده از گسسته‌سازی اختلاف مرکزی تقریب زده می‌شوند. برای مثال،

$$\left.\frac{\partial U}{\partial s}\right|_e = \frac{U_E - U_P}{(ds)_e}, \quad \left.\frac{\partial U}{\partial t}\right|_e = \frac{U_{ne} - U_{se}}{(dt)_e} \quad (10)$$

که در آن U_{ne} و U_{se} مقادیر سرعت روی نقاط گوشه سلول هستند که با استفاده از میان‌یابی وزنی مراکز چهار سلول مجاور آن تخمین زده می‌شوند.

برای محاسبه گرادیان فشار یا سرعت نسبت به x و y در شبکه نامتعامد، ابتدا باید آن را برحسب گرادیان‌های جهتی بردارهای یکه $\hat{s}$ و $\hat{t}$ (شکل 1) تعریف کرد. تغییرات کمیت Φ در جهت غرب به شرق (راستای s) و جنوب به شمال (راستای t) با استفاده از قاعده زنجیری، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} \quad (11)$$

به این ترتیب، با استفاده از قانون کرامر می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial s}t_y - \frac{\partial \Phi}{\partial t}s_y}{s_x t_y - t_x s_y}, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial s}s_x - \frac{\partial \Phi}{\partial t}t_x}{t_y s_y - s_y t_x} \quad (12)$$

که در آن، مؤلفه‌های یکه بردارهای جهتی t و s به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$t_x = \frac{\partial x}{\partial t}, \qquad s_x = \frac{\partial x}{\partial s}, \qquad t_y = \frac{\partial y}{\partial t}, \qquad s_y = \frac{\partial y}{\partial s} \quad (13)$$

مشتقات جهات s و t نیز مشابه رابطه (10) به‌صورت ضمنی گسسته می‌شود.

3-3- تخمین شارهای جابه‌جایی معادله مومنتوم

از میان جملات جابه‌جایی، پخش و فشار، جملات جابه‌جایی پیچیده‌ترین و مؤثرترین رفتار را دارند. به همین دلیل نیز این تحقیق بر مدل‌سازی جملات جابه‌جایی متمرکز شده است. از آنجا که نقش جابه‌جایی، انتقال یک خاصیت جریان در میدان حل است، روش‌های بالادست از کارآمدترین روش‌ها در مدل‌سازی آن‌ها به شمار می‌رود [3]. با این حال، روش‌های بالادست معمولا مستعد تولید پخش کاذب هستند [3]. در ادامه، روابط مربوط به سه روش مرسوم اختلاف نمایی (EDS)، اختلاف بالادست مورب (SUDS) و روش تأثیر فیزیکی (PIS) ارائه و در بخش نتایج در مورد آن‌ها بحث می‌شود.

3-3-1- روش اختلاف نمایی (EDS)

برای تخمین سرعت جمله جابه‌جایی معادله مومنتوم روی سطح سلول به روش اختلاف نمایی (EDS) از روش وزنی پاتانکار [11] استفاده شده است. برای مثال، در وجه شرقی سلول، داریم:

$$U_e = (0.5 + \alpha_e)U_P + (0.5 - \alpha_e)U_E \quad (14)$$

که در آن، α_e به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\alpha_e = \mathrm{sign}(\dot{m}_e)\frac{0.5\mathrm{Pe}_e^2}{5 + \mathrm{Pe}_e^2} \quad (15)$$

در این رابطه، Pe عدد پکلت سلول است که با رابطه‌ی زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{Pe}_e = \frac{\rho U_e (ds)_e}{\mu} \quad (16)$$

که در آن، $(ds)_e$ طول فاصله مرکز سلول P از مرکز سلول شرقی است.

3-3-2- روش اختلاف بالادست مورب (SUDS)

با در نظر گرفتن ماهیت خط جریانی روش بالادست [32,29,24]، اندازه مناسب برای مجهول ϕ روی سطح سلول را می‌توان، مثلا برای وجه e، به‌صورت $\phi_e = \phi_{\mathrm{up}} + \Delta\phi_e$ پیشنهاد داد که $\Delta\phi_e$ تغییرات ϕ_e در جهت جریان را نشان می‌دهد. در روش بالادست مورب، فرض بر آنست که $\Delta\phi_f = 0$ و در نتیجه، $\phi_f = \phi_{\mathrm{up}}$ است. شکل نمونه‌ای از پیدا کردن نقطه بالادست برای وجه شرقی سلول P در روش حجم محدود مرکزسلولی را نشان می‌دهد. برای این کار لازم است ابتدا یک المان از مجموعه‌ی نقاطی که سطح e را احاطه کرده‌اند تشکیل شود. سپس، براساس جهت سرعت در سطح e، خطی در امتداد بردار سرعت به‌سمت بالادست ترسیم می‌شود. این خط در هر جهتی که باشد، حتما المان فرضی فوق را در یکی از وجوه آن قطع خواهد کرد و این نقطه تقاطع نیز الزاما بین دو مرکز سلول قرار خواهد داشت. فاصله بین مرکز سطح سلول و نقطه بالادست را طول بالادست می‌گویند و با L_{up} نشان می‌دهند. سرعت u_{up} را می‌توان با استفاده از میانگین وزنی سرعت دو مرکز سلول مجاور نقطه بالادست از رابطه زیر محاسبه کرد:

$$\left(u_{\mathrm{up}}\right)_e = \left[\frac{a}{b}U_{\mathrm{upr}} + \left(1 - \frac{a}{b}\right)U_{\mathrm{upl}}\right]_e \quad (17)$$

که زیرنویس‌های upr و upl به‌ترتیب بیانگر مراکز سلول سمت چپ و راست نسبت به نقطه بالادست هستند. ضرایب a و b نیز به‌ترتیب فاصله نقطه بالادست از نقطه upr و فاصله دو مرکز سلول است. برای مثال، با فرض آنکه مطابق شکل 2 نقطه تقاطع بین دو مرکز سلول S و P واقع شده باشد، نقطه S نماینده upr و نقطه P نماینده upl خواهد بود. به این ترتیب با جایگزینی سرعت سطح سلول با سرعت u_{up} روش بالادست SUDS تکمیل خواهد شد.

3-3-3- روش تأثیر فیزیکی (PIS)

برخلاف روش SUDS که تقریبی خطی بین دو نقطه سطح سلول و نقطه بالادست برقرار می‌کرد، در روش PIS برای ایجاد یک تقریب جامع برای $\Delta\phi_f$، از معادلات پایای مومنتوم در جهت جریان به‌صورت زیر استفاده می‌شود [33]:

$$\rho V_{\mathrm{tot}}\frac{\partial u}{\partial s} - \mu\nabla^2 u + \frac{dp}{dx} = S_{\mathrm{diff}}^x \quad (18)$$

$$\rho V_{\mathrm{tot}}\frac{\partial v}{\partial s} - \mu\nabla^2 v + \frac{dp}{dy} = S_{\mathrm{diff}}^y \quad (19)$$

که $V_{tot} = (\overline{\mathrm{U}}_e^2 + \overline{\mathrm{V}}_e^2)^{1/2}$ و s بیانگر جهت جریان است. $\overline{\mathrm{U}}_e$ و $\overline{\mathrm{V}}_e$ مؤلفه‌های سرعت روی سطح سلول است و مقادیر آن‌ها از تکرار قبل تخمین زده می‌شود. معادلات (18) و (19) برای تخمین U و V روی مرز سلول‌ها استفاده می‌شود. با در نظر گرفتن جهت بالادست، جمله $\partial u/\partial s$ در معادله (18) را می‌توان به‌صورت زیر به روش اختلاف رو به عقب گسسته کرد:

$$\left(\rho V_{\mathrm{tot}}\frac{\partial u}{\partial s}\right)_e \approx \left(\rho V_{\mathrm{tot}}\frac{U - U_{\mathrm{up}}}{L_{\mathrm{up}}}\right)_e \quad (20)$$

که e نشان‌دهنده وجه شرقی سلول P است. نحوه یافتن نقطه بالادست در روش PIS و تخمین مقدار U_{up} همانند روش SUDS است.

جمله گرادیان فشار معادله (18) مطابق رابطه (12) به جهات s و t تبدیل و با استفاده از رابطه (10) گسسته می‌شود. اما برای محاسبه جملات پخش معادله

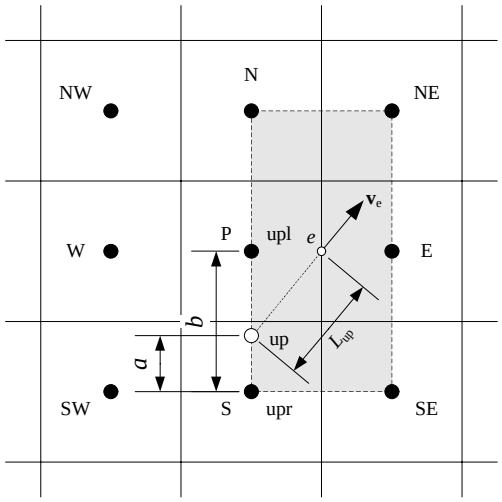


Fig. 2 An element constructed from cell centers surrounding the cell face *e* of the cell *P*, and representation of the skew upwind point for face *e*; here, cell centers *S* and *P* are the right (upr) and left (upl) points of the upwind point (up), respectively.

شکل 2 المان تشکیل‌شده از مراکز سلول حول سطح e سلول P و نحوه تعیین نقطه بالادست مورب برای وجه e؛ در اینجا، مراکز سلول‌های S و P به‌ترتیب نقاط سمت راست (upr) و چپ (upl) نقطه بالادست (up) هستند.

(18) از شیوه دیگری استفاده شده است. با توجه به نامتعامد و غیریکنواخت بودن شبکه، مشتق دوم سرعت در جهات x و y را با استفاده از اختلاف مرکزی زیر، مطابق شکل 1، می‌توان گسسته کرد:

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_e = \frac{\alpha_x U_{\bar{P}} + (1+\alpha_x)U_e + U_{\bar{E}}}{\alpha_x(1+\alpha_x)(dx)_{\overline{W}\bar{e}}} \quad (21)$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_e = \frac{\alpha_y U_{\overline{ne}} + (1+\alpha_y)U_e + U_{\overline{se}}}{\alpha_y(1+\alpha_y)(dy)_{\overline{se}\bar{e}}} \quad (22)$$

که در آن

$$U_{\bar{P}} = a_{\bar{P}}U_S + b_{\bar{P}}U_P + c_{\bar{P}}U_N$$
$$U_{\bar{E}} = a_{\bar{E}}U_{SE} + b_{\bar{E}}U_E + c_{\bar{E}}U_{NE} \quad (23)$$

$$U_{\overline{ne}} = a_{\overline{ne}}U_N + b_{\overline{ne}}U_{NE}$$
$$U_{\overline{se}} = a_{\overline{se}}U_S + b_{\overline{se}}U_{SE} \quad (24)$$

ضرایب a_m، b_m و c_m ضرایب میان‌یابی خطی سرعت بین نقاط مؤثر در شکل 3 است. مقادیر α_x و α_y در روابط (21) و (22) نیز نسبت نایکنواختی شبکه در جهات x و y هستند که باتوجه به شکل 3 به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\alpha_x = (dx)_{e\bar{E}}/(dx)_{\bar{P}e}, \qquad \alpha_y = (dy)_{e\,\overline{ne}}/(dy)_{\overline{se}e} \quad (25)$$

با جایگذاری تقریب‌های (20)، (21) و (22) همراه با تقریب مربوط به گرادیان فشار، در معادله (18) و مرتب‌سازی آن، شکل گسسته 9 نقطه‌ای سرعت سطح سلول به‌صورت کلی زیر در می‌آید:

$$U_e = \left(U_{\mathrm{up}}\right)_e + \left(\frac{L_{\mathrm{up}}}{\rho V_{\mathrm{tot}}}\right)_e \sum_P (c_{NB}U_{NB}) + \left(\frac{L_{\mathrm{up}}}{\rho V_{\mathrm{tot}}}\right)_e \left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_e \quad (26)$$

که در آن، c_{NB} ضرایب سرعت مراکز سلول‌های نه‌گانه درگیر در محاسبات مربوط به سلول P هستند. با اجرای همین روند برای سرعت‌های V_e، U_n و V_n و جایگزینی آن‌ها در معادلات مومنتوم (2) و (3)، شکل کلی معادلات مومنتوم برای روش بالادست PIS به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$A_P^u U_P = \sum_P A_{NB}^u U_{NB} + \left(\frac{M_P^o}{\Delta t}\right)U_P^o - \Omega_P \left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_P - \dot{m}_e\left(\frac{L_{\mathrm{up}}}{\rho V_{\mathrm{tot}}}\right)_e \left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_e + \dot{m}_w\left(\frac{L_{\mathrm{up}}}{\rho V_{\mathrm{tot}}}\right)_w \left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_w - \dot{m}_n\left(\frac{L_{\mathrm{up}}}{\rho V_{\mathrm{tot}}}\right)_n \left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_n + \dot{m}_s\left(\frac{L_{\mathrm{up}}}{\rho V_{\mathrm{tot}}}\right)_s \left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_s \quad (27)$$

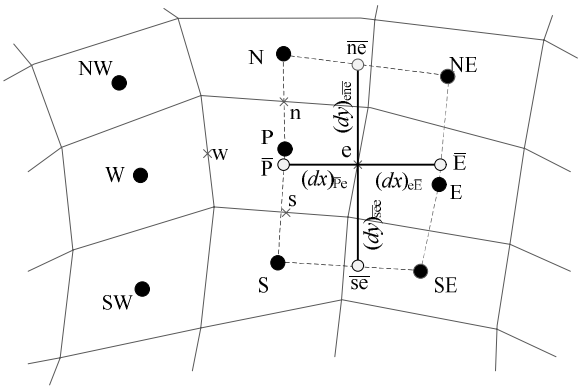


Fig. 3 Parameters affecting velocity Laplace.

شکل 3 متغیرهای مؤثر در محاسبه لاپلاس سرعت.

$$A_P^v V_P = \sum_P A_{NB}^v V_{NB} + \left(\frac{M_P^o}{\Delta t}\right)V_P^o - \Omega_P \left.\frac{\partial p}{\partial y}\right|_P - \dot{m}_e\left(\frac{L_{\mathrm{up}}}{\rho V_{\mathrm{tot}}}\right)_e \left.\frac{\partial p}{\partial y}\right|_e + \dot{m}_w\left(\frac{L_{\mathrm{up}}}{\rho V_{\mathrm{tot}}}\right)_w \left.\frac{\partial p}{\partial y}\right|_w - \dot{m}_n\left(\frac{L_{\mathrm{up}}}{\rho V_{\mathrm{tot}}}\right)_n \left.\frac{\partial p}{\partial y}\right|_n + \dot{m}_s\left(\frac{L_{\mathrm{up}}}{\rho V_{\mathrm{tot}}}\right)_s \left.\frac{\partial p}{\partial y}\right|_s \quad (28)$$

که در آن، A_P^u و A_P^v ضرایب سرعت سلول P و A_{NB}^u و A_{NB}^v ضرایب سرعت سلول‌های مجاور سلول P در معادله مومنتوم هستند.

3-4- گسسته‌سازی معادله پیوستگی و ارتباط میدان فشار و سرعت

شکل گسسته معادله پیوستگی به‌صورت زیر است:

$$\int_\Omega \rho\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}\right)d\Omega = \int_S \rho(Un_x + Vn_y)dS = \rho(U_e n_{xe} + V_e n_{ye})A_e - \rho(U_w n_{xw} + V_w n_{yw})A_w + \rho(U_n n_{xn} + V_n n_{yn})A_n - \rho(U_s n_{xs} + V_s n_{ys})A_s \quad (29)$$

برای ارتباط میدان فشار و سرعت در معادله پیوستگی از روش میان‌یابی وزنی فشاری (PWIM) مبتنی بر کار ری و چاو [5] استفاده شده است. در این روش، سرعت سطح سلول از میان‌یابی سرعت مومنتوم مراکز دو سلول مجاور آن به‌دست می‌آید که جزئیات آن در کار وکیلی‌پور و ارمیستون [39] آمده است. شکل نهایی سرعت‌های معادله پیوستگی به‌صورت زیر است:

$$U_e = f_e U_P + (1-f_e)U_E + \left(\frac{M_e^o}{\Delta t}\right)\frac{1}{A_e^u}[U_e^o - f_e U_P^o - (1-f_e)U_E^o] - \frac{\Omega_e}{A_e^u}\left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_e + f_e\frac{\Omega_P}{A_P^u}\left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_P + (1-f_e)\frac{\Omega_E}{A_E^u}\left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_E \quad (30)$$

$$V_e = f_e V_P + (1-f_e)V_E + \left(\frac{M_e^o}{\Delta t}\right)\frac{1}{A_e^u}[V_e^o - f_e V_P^o - (1-f_e)V_E^o] - \frac{\Omega_e}{A_e^v}\left.\frac{\partial p}{\partial y}\right|_e + f_e\frac{\Omega_P}{A_P^v}\left.\frac{\partial p}{\partial y}\right|_P + (1-f_e)\frac{\Omega_E}{A_E^v}\left.\frac{\partial p}{\partial y}\right|_E \quad (31)$$

در روابط (30) و (31)، از جملات فشاری ناشی از اعمال روش PIS در معادلات مومنتوم (27) و (28) صرفنظر شده است. اگرچه حذف این جملات تأثیر قابل توجهی بر عملکرد روش PIS نخواهد داشت (چنانکه در بخش نتایج دیده خواهد شد)، به‌نظر می‌رسد تأثیراتی بر روند همگرایی دارد؛ به‌طوری‌که نوساناتی را در نمودار باقیمانده‌ها ایجاد کرده است. یادآوری می‌شود که برای توسعه حلگر کوپل، جمله فشاری روی سطح روابط (30) و (31) به‌صورت ضمنی و مطابق با رابطه (10) گسسته شده‌اند. شکل کلی و گسسته معادله پیوستگی به‌صورت زیر خواهد بود:

$$A_P^{cp}P_P = \sum A_{NB}^{cu}U_{NB} + \sum A_{NB}^{cv}V_{NB} + \sum A_{NB}^{cp}P_{NB} + b^c \quad (32)$$

که در آن، A_P^{cp}، A_P^{cu} و A_P^{cv} ضرایب فشار و سرعت‌های سلول P و A_{NB}^{cp}، A_{NB}^{cu} و A_{NB}^{cv} ضرایب فشار و سرعت سلول‌های مجاور سلول P در معادله مومنتوم و b^c مقادیر مربوط به جملات صریح معادله هستند. به این ترتیب، دستگاه معادلات 9 نقطه‌ای حاصل از سه معادله پیوستگی و مومنتوم x و y در

یک شبکه هم‌مرکز و با یک حلگر کوپل تشکیل و حل می‌شود.

4- نتایج و بحث

در این بخش به ارائه نتایج پیاده‌سازی الگوریتم مورد نظر برای دو هندسه حفره با دیواره متحرک فوقانی و پله معکوس پرداخته می‌شود. ماهیت این دو جریان در اعداد رینولدز مورد نظر، پایا است. از این رو، اگرچه الگوریتم پیشنهادی این مقاله در حالت کلی و گذرا تنظیم و ارائه شده است، به دلیل ماهیت پایا بودن مسائل مورد نظر، در روند حل از گام زمانی بی‌نهایت (Δt = 1E8) استفاده شده است و عملا جملات زمانی بی‌اثر شده‌اند. با توجه به استفاده از حلگر کاملا ضمنی، از هیچ ضریب تخفیفی استفاده نشده است.

4-1- جریان داخل حفره

میدان جریان داخل حفره به همراه شرایط مرزی، تقسیم‌بندی شبکه‌ای و نیز ساختارهای جریانی حاکم بر آن در شکل 4 نشان داده شده است. میدان جریان شامل مربعی به ضلع واحد است که در سه ضلع پایین، چپ و راست به دیواره ساکن و در ضلع بالا به دیواره‌ای با سرعت افقی $u = 0$ و سرعت عمودی $v = 0$ محصور می‌شود. همان‌طور که در شکل 4 دیده می‌شود، ساختارهای اصلی جریان شامل یک گردابه اصلی در میانه میدان و چند گردابه فرعی در سه گوشه آن می‌شود. گردابه‌های فرعی پایین سمت راست، با حروف مخفف BR1 و BR2، گردابه‌های فرعی پایین سمت چپ، با حروف مخفف BL1 و BL2، و گردابه بالا سمت چپ نیز با حروف TL از هم متمایز شده‌اند. البته همه این ساختارها الزاما در تمام رینولدزها وجود ندارد که توضیح بیشتر در این زمینه در بخش تحلیل نتایج جریان حفره خواهد آمد. شبیه‌سازی‌های مورد نظر در این تحقیق شامل 6 عدد رینولدز نسبتا بالا (400 و 1000)، بالا (3200 و 5000) و خیلی بالا (7500 و 10000) می‌شود. نتایج این بخش با کار گیا و همکاران [40] مقایسه شده است.

4-1-1- شبکه محاسباتی و استقلال حل از شبکه

برای تولید شبکه نیز با توجه به حساسیت گردابه‌های فرعی، میدان جریان به سه بخش در دو جهت x و y تقسیم شده است: دو بخش کناری به طول هرکدام L_c = 0.25 و یک بخش میانی به طول L_m = 0.5. تعداد تقسیمات در بخش‌های کناری با هم برابر است و تعداد تقسیمات میانی نیز بین 1.2 تا 1.7 برابر هر بخش کناری است. این تقسیم‌بندی میدان امکان ریزکردن شبکه در نواحی گردابه‌ها و تسخیر بهتر این ساختارهای جریان را فراهم می‌سازد.

موضوع قابل توجه درباره این سه روش، میزان وابستگی یا حساسیت آن‌ها به شبکه محاسباتی است. مطالعات استقلال حل از شبکه برای دو عدد رینولدز 1000 و 3200 برای دو سرعت بیشینه افقی و عمودی در مقاطع میانی حفره در شکل 5 نشان داده شده است. شبکه پایه برای عدد رینولدز 1000، شبکه 55×55 و برای رینولدز 3200، شبکه 69×69 است. در این نمودار، میزان تغییرات نسبت به شبکه پایه و به‌صورت زیر محاسبه شده است:

$$DR(\%) = 100 \times (\varphi - \varphi_0)/\varphi_0 \quad (33)$$

که در آن، φ سرعت بیشینه افقی (U_{max}) یا عمودی (V_{max}) در شبکه‌های مختلف، φ_0 همین کمیت‌ها در شبکه پایه و DR میزان تغییرات نسبی این کمیت‌ها برحسب درصد است. براساس شکل 5، تغییرات نسبی در روش EDS به شکل خطی رو به افزایش است و محدوده تغییرات آن در ریزترین شبکه به حدود 60% نیز می‌رسد. این تغییرات در روش SUDS شیب ملایم‌تری دارد و حداکثر به 20% می‌رسد. اما در روش PIS شیب تغییرات بشدت پایین‌تر است و در ریزترین شبکه نیز کمتر از 5% است. به بیان دیگر، روش PIS توانسته است با ایجاد ارتباط فیزیکی بسیار دقیق‌تر بین سطح سلول و نقطه بالادست، نسبت به دو روش دیگر حساسیت به تعدادسلول‌ها را تا حد قابل توجهی کاهش دهد.

با توجه به این توضیحات، روشن است که دو روش EDS و SUDS برای دستیابی یا حداقل نزدیک‌شدن به جواب درست (بویژه در اعداد رینولدز بسیار بالا) نیازمند شبکه‌ای به مراتب ریزتر از روش PIS هستند که به‌طور طبیعی مورد هدف این پژوهش نیست. از این رو، سعی شده است برای مقایسه بین نتایج، از شبکه مطلوب روش PIS برای دو روش دیگر نیز استفاده شود؛ گرچه در مورد روش EDS گاهی لزوم همگرایی حل سبب شده تا از شبکه ریزتری استفاده شود. این موضوع در بخش بررسی روند همگرایی بیشتر توضیح داده خواهد شد.

4-2-1- روند همگرایی

تأثیر اندازه شبکه بر روند همگرایی حل جریان حفره در اعداد رینولدز 1000، 3200 و 7500 در شکل 6 نشان داده شده است. مقدار باقیمانده‌ها در این شکل مربوط به معادله پیوستگی است و به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

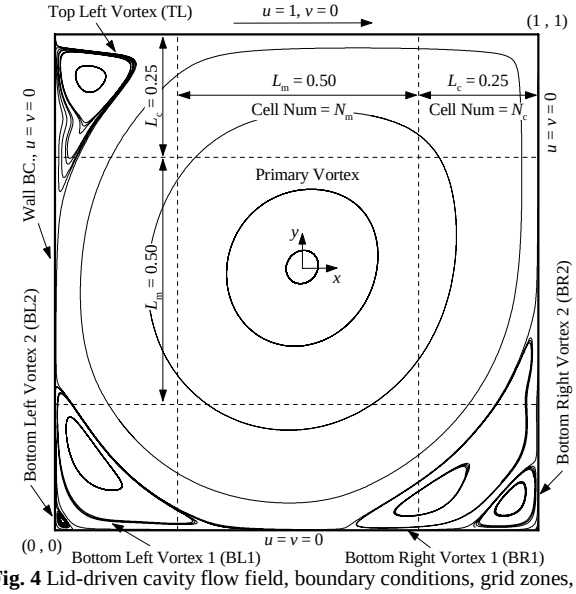


Fig. 4 Lid-driven cavity flow field, boundary conditions, grid zones, and its dominant flow structures.

شکل 4 میدان جریان دورن حفره، شرایط مرزی، ناحیه‌بندی شبکه و ساختارهای جریان.

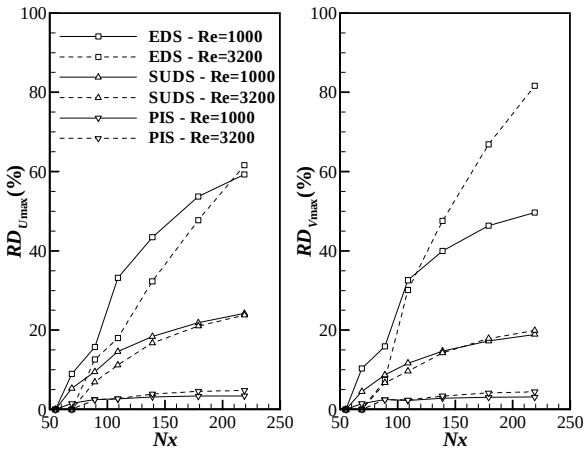


Fig. 5 The grid dependency study in lid-driven cavity flow according to maximum u and v velocities at mid sections for Re = 1000 and 3200.

شکل 5 بررسی استقلال حل از شبکه در جریان حفره براساس سرعت بیشینه افقی و عمودی مقاطع میانی جریان حفره در دو عدد رینولدز 1000 و 3200.

$$Res^{c}_{tot} = \min(Res^{c}_{Cell}) \quad (34)$$

Res^{c}_{Cell} مقدار باقیمانده معادله پیوستگی در هر سلول است که با استفاده از مقدار نرمال اختلاف سمت راست و چپ رابطه (32) به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$Res^{c}_{Cell} = \frac{A^{cp}_{P}P_{P} - \left(\sum A^{cu}_{NB}U_{NB} + \sum A^{cv}_{NB}V_{NB} + \sum A^{cp}_{NB}P_{NB} + b^{c}\right)}{A^{cp}_{P}P_{P}} \quad (35)$$

با توجه به این نمودارها به چند نکته اصلی درباره این سه روش می‌توان اشاره کرد. نخست آنکه نرخ همگرایی در روش EDS بویژه در اعداد رینولدز بالا بشدت به اندازه شبکه بستگی دارد؛ به‌طوری‌که در اعداد رینولدز 3200 و 7500، تنها در ریزترین شبکه همگرایی حاصل می‌شود. نکته دوم، نرخ همگرایی نسبتا کندتر روش PIS نسبت به روش SUDS است که آن هم می‌تواند به‌دلیل به‌کارگیری تغییرات فشار در روش بالادست PIS باشد که سرعت همگرایی را کمی کاهش می‌دهد. نکته سوم، لزوم ریزتر شدن شبکه در همه روش‌ها با بالا رفتن عدد رینولدز است. البته، این تعداد سلول نسبت به کار گیا و همکارن [40] که حدود 129×129 برای اعداد رینولدز 1000 و 3200 و 257×257 برای اعداد رینولدز 5000 تا 10000 است، بسیار کمتر است. نکته پایانی، روند نوسانی نمودار همگرایی در روش PIS است که به نظر می‌رسد به حذف جملات فشار ناشی از روش PIS در معادله پیوستگی مرتبط باشد.

4-1-3- نمودار سرعت

شکل 7 توزیع سرعت‌های افقی و عمودی در مقاطع میانی حفره را برای شش عدد رینولدز مورد نظر و سه روش بالادست نشان می‌دهد. از این نتایج به‌خوبی می‌توان دقت روش PIS در تخمین سرعت نسبت به دو روش EDS و SUDS را مشاهده کرد. همان‌طور که در مقدمه اشاره شد، روش EDS در جریان‌هایی که خطوط جریان با شبکه همراستا نباشند، دچار پخش کاذب می‌شود. جریان درون حفره نیز نمونه‌ای از این نوع جریان است که بخش اعظمی از میدان جریان آن چنین ویژگی را دارد. از این رو، همان‌طور که در نمودارهای توزیع سرعت دیده می‌شود، اثر پخش کاذب در این روش، بویژه در اعداد رینولدز بالا، به‌وضوح دیده می‌شود. روش SUDS نیز با آنکه شرایط نسبتا بهتری از روش EDS دارد، اختلاف آن با نتایج گیا و همکاران [40] بسیار زیاد است. این موضوع نشانه آنست که روش بالادست مورب SUDS با یک نقطه در بالادست چندان نمی‌تواند دقت لازم را فراهم کند و حداقل نیازمند دو نقطه در بالادست و یا استفاده از تمهیداتی چون میانگین وزنی جرمی [29-31] است. در مقابل، روش PIS توانسته است کارایی خود را به‌خوبی تا اعداد رینولدز بسیار بالای 7500 و 10000 نیز حفظ کند.

4-1-4- اثر شبکه نامتعامد

پیش از ادامه بحث درباره نتایج جریان حفره در شبکه متعامد، برای ارزیابی عملکرد روش‌های بالادست مورد نظر در شبکه نامتعامد، نمودارهای سرعت مربوط به دو عدد رینولدز 3200 و 7500 در شبکه‌ای مطابق شکل 8 (الف) استخراج شد. همان‌طور که از شکل 8 (ب) و (پ) برمی‌آید، روش PIS عملکرد خود را در شبکه نامتعامد نیز به‌خوبی حفظ کرده و نتایجی بسیار نزدیک به نتایج گیا و همکاران [40] به‌دست آورده است. البته، با توجه به رعایت اثر نامتعامد و غیریکنواخت بودن شبکه در روند گسسته‌سازی، نتایج دو روش EDS و PIS نیز چندان دورتر از نتایج شبکه متعامد نیست.

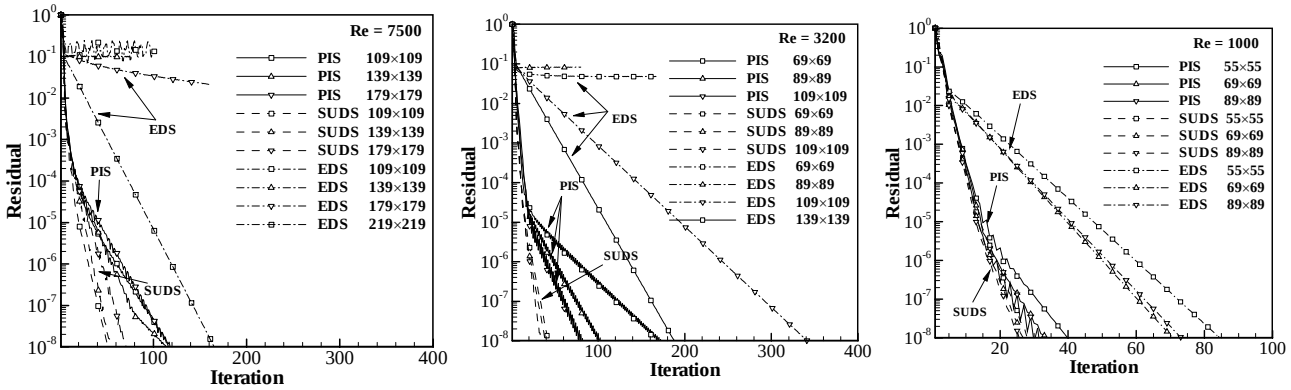
4-1-5- خطوط جریان و گردابه‌های میدان

خطوط جریان حفره برای اعداد رینولدز مختلف در شکل 9 نشان داده شده است. مهمترین نکته‌ای که از این شکل‌ها قابل برداشت است، تشکیل‌شدن یا نشدن گردابه‌های فرعی میدان (بویژه گردابه‌های TL، BL2 و BR2) در روش‌های بالادست مختلف است. به‌طور کلی، در روش EDS به دلیل پخش کاذب بسیار زیاد، اندازه گردابه‌های گوشه میدان نسبت به دو روش دیگر بسیار کوچک‌تر است؛ حتی در عدد رینولدز 3200، گردابه TL و در اعداد رینولدز 5000 به بالا، گردابه‌های BL2 و BR2 تشکیل نشده و یا بسیار ضعیف‌تر از حد انتظار هستند. این وضعیت در روش SUDS کمی بهبود یافته، ولی همچنان اختلاف آن با روش PIS قابل توجه است. در مقابل، روش PIS توانسته است کلیه گردابه‌های میدان را به‌شکلی مناسب و واضح تسخیر کند. برای ارزیابی کمی و کیفی نحوه تسخیر گردابه‌ها، مختصات مرکز گردابه‌های میدان در روش‌های مختلف و کلیه اعداد رینولدز استخراج و در شکل 10 با نتایج گیا و همکاران [40] مقایسه شده است. بررسی این نمودارها نیز تطابق بسیار خوب نتایج روش PIS و اختلاف قابل ملاحظه دو روش EDS و SUDS نسبت به مرجع را نشان می‌دهد.

4-2- جریان گذرنده از روی پله

4-2-1- میدان جریان، شرایط مرزی و ساختارهای جریانی حاکم

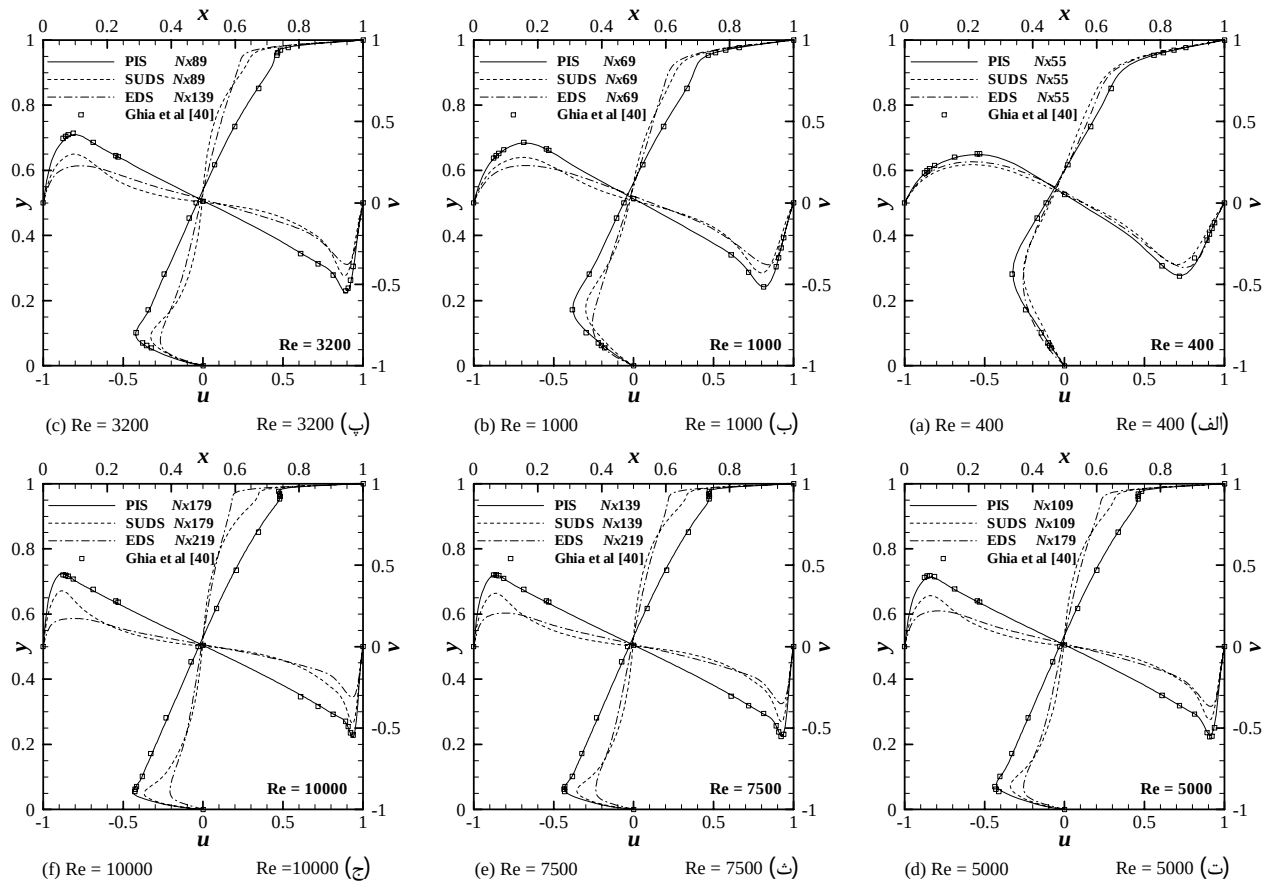
میدان جریان گذرنده از روی پله به همراه شرایط مرزی، تقسیم‌بندی شبکه‌ای و ساختارهای جریانی حاکم بر آن در شکل نشان داده شده است. میدان جریان شامل مستطیلی به ارتفاع H و طول $30H$ است که در دو ضلع پایین و بالا به دیواره ساکن با شرط مرزی بدون لغزش محصور است. ضلع سمت چپ میدان دارای دو شرط مرزی دیواره غیرلغزشی در نیمه پایین و جریان ورودی با توزیع سهموی در نیمه بالا است. ضلع سمت راست نیز به شرط مرزی خروجی میدان با



(c) Re = 7500 Re =7500 (پ) (b) Re = 3200 Re = 3200 (ب) (a) Re = 1000 Re = 1000 (الف)

Fig. 6 Convergence histories of various upwinding schemes in lid-driven cavity flow at different Reynolds numbers and grid sizes.

شکل 6 روند همگرایی حل جریان درون حفره برای روش‌های بالادست متفاوت در اعداد رینولدز و شبکه‌های مختلف.

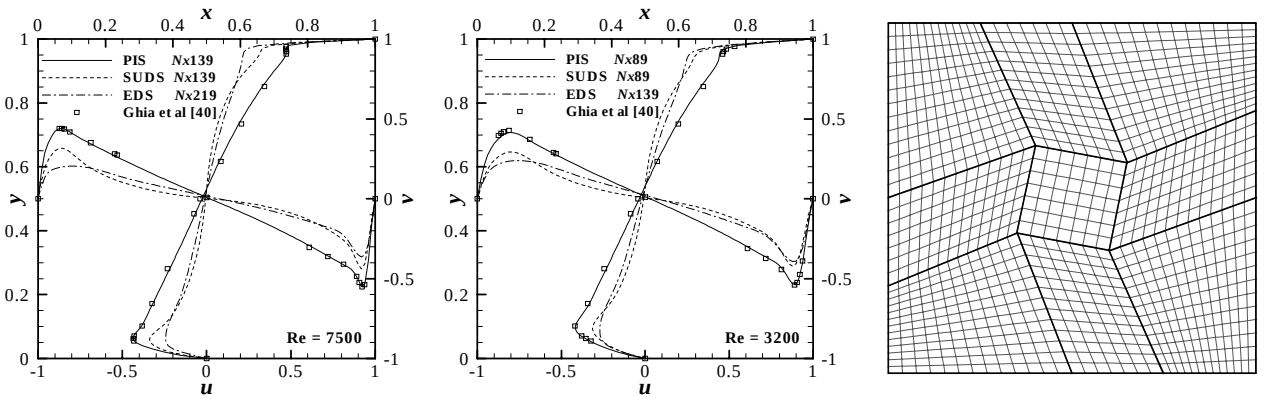


(c) Re = 3200 Re = 3200 (پ) (b) Re = 1000 Re = 1000 (ب) (a) Re = 400 Re = 400 (الف)

(f) Re = 10000 Re =10000 (ج) (e) Re = 7500 Re = 7500 (ث) (d) Re = 5000 Re = 5000 (ت)

Fig. 7 Velocity profiles in lid-driven cavity flow at mid sections for various upwinding schemes.

شکل 7 توزیع سرعت جریان درون حفره در مقاطع میانی برای روش‌های بالادست مختلف.



(c) Re = 7500 Re = 7500 (پ) (b) Re = 3200 Re = 3200 (ب) (a) Non-orthogonal grid (الف) شبکه نامتعامد

Fig. 8 Evaluation of the various upwinding schemes in lid-driven cavity flow with non-orthogonal grid at Re = 3200 and Re = 7500.

شکل 8 ارزیابی روش‌های بالادست مختلف در جریان حفره با شبکه نامتعامد در اعداد رینولدز 3200 و 7500.

فرض گرادیان سرعت صفر و فشار معین اختصاص دارد.

عدد رینولدز برای این جریان با رابطه $\mathrm{Re} = \rho U_{ave} H/\mu$ تعریف می‌شود که در آن، U_{ave} سرعت میانگین جریان ورودی است. با توجه به عدد رینولدز نسبتا بالای 800 برای این میدان جریان، یک گردابه در مجاورت دیواره‌های پایین و چپ و گردابه دیگری در مجاورت دیواره بالا تشکیل می‌شود که به‌ترتیب با حروف LW و UW از هم متمایز شده‌اند. این گردابه‌ها در مجموع حدود $10H$ پایین‌دست ورودی را پوشش می‌دهند و از این رو، طول میدان به اندازه‌ای بلند ($30H$) انتخاب شده است که شرایط مرزی خروجی ذکرشده در بالا قابل پذیرش باشد. نتایج این بخش در سه بخش سرعت، فشار و ابعاد گردابه‌ها با کار گارتلینگ [41] مقایسه شده است.

4-2-2- شبکه محاسباتی و استقلال حل از شبکه

برای مطالعه استقلال حل از شبکه، با توجه به حساسیت و وسعت گردابه‌های حاکم، میدان جریان به دو بخش در جهت x تقسیم شده است: بخش اول به طول $L_1 = 12H$ در سمت چپ و بخش دوم به طول $L_2 = 18H$، در سمت راست. این تقسیم‌بندی طولی میدان امکان تمرکز بر ناحیه حساس میدان و جلوگیری از افزایش بی‌رویه اندازه شبکه را فراهم

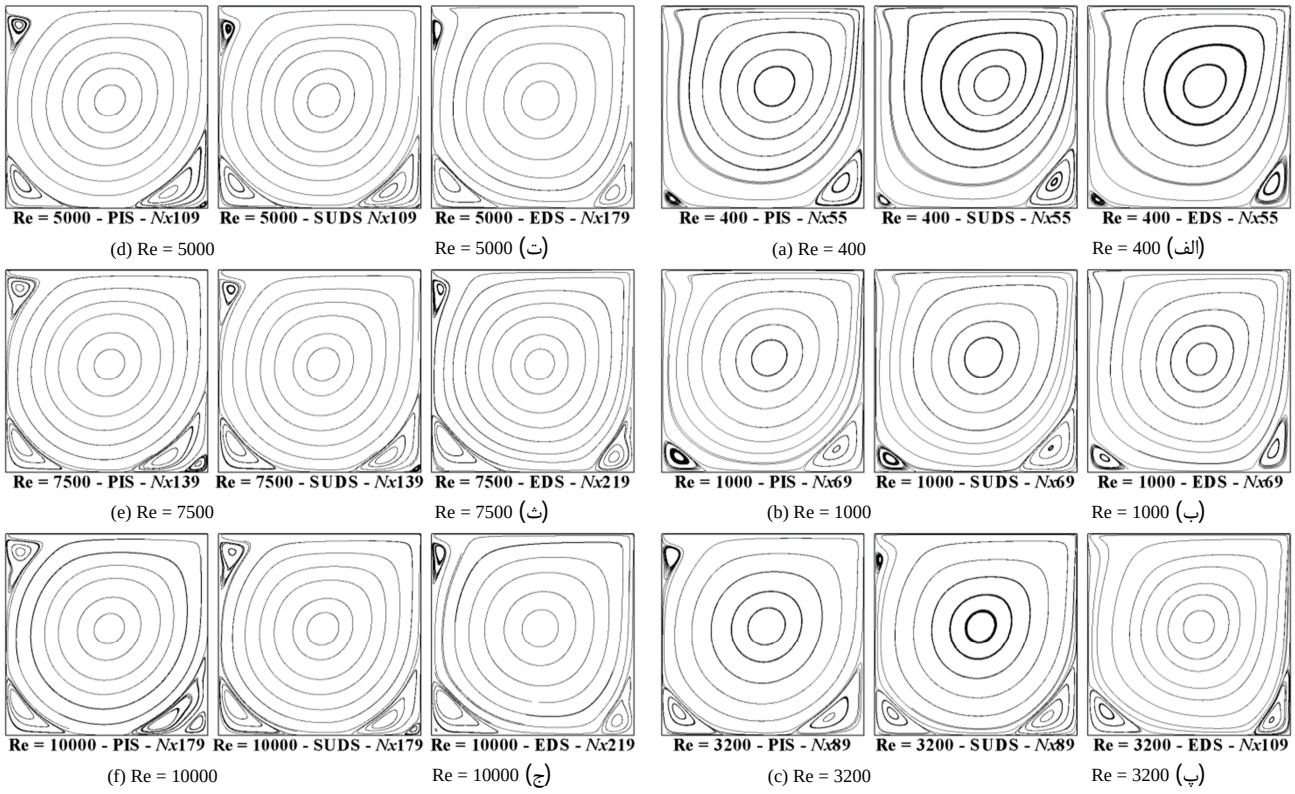


Fig. 9 Streamlines in lid-driven cavity flow for various upwinding schemes at different Reynolds numbers.

شکل 9 خطوط جریان درون حفره برای روش‌های بالادست متفاوت در اعداد رینولدز مختلف.

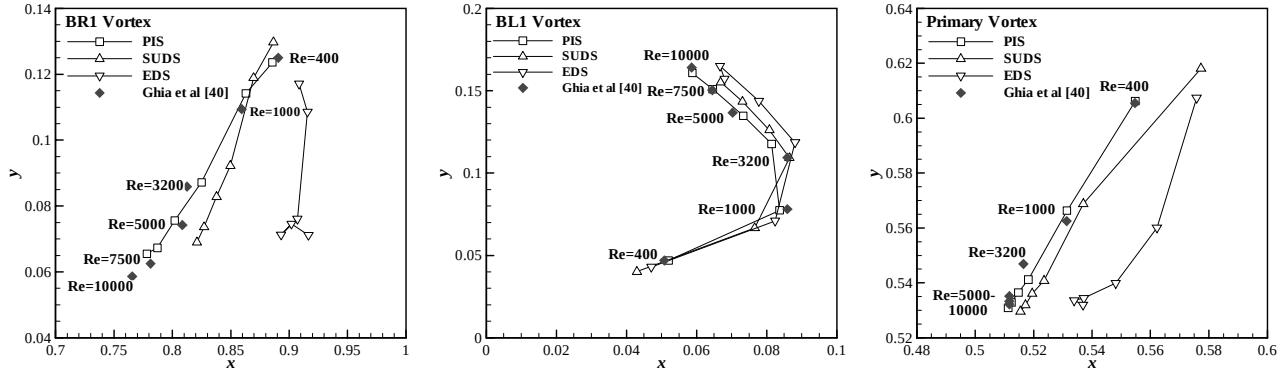


Fig. 10 Coordinates of the center of lid-driven cavity vortices at various Reynolds numbers and upwinding schemes.

شکل 10 مختصات نقاط مرکز گردابه‌های جریان درون حفره در اعداد رینولدز و روش‌های بالادست مختلف.

می‌سازد. در بخش دوم که در پایین‌دست گردابه‌ها قرار گرفته و بیشتر نقش رسیدن به جریان کاملا توسعه‌یافته را دارد، تعداد تقسیمات ثابت ($Nx_1 = 60$) است و اندازه آن‌ها هم به‌تدریج در جهت خروجی میدان افزایش می‌یابد؛ ولی در بخش اول که کانون فعالیت گردابه‌های جریان است، سه توزیع یکنواخت با تقسیمات طولی متفاوت ($Nx_2 = 120,180,240$) در نظر گرفته شده است. تقسیم‌بندی میدان در راستای y نیز یکنواخت با تقسیم‌بندی‌های $Ny = 62,92,122,152$ است.

مطالعه استقلال حل از شبکه در جریان گذرنده از روی پله روی دو پارامتر سرعت بیشینه افقی و عمودی در مقطع $x = 7H$ انجام و نتایج آن برای روش PIS در شکل 12 نشان داده شده است. در این نمودار، میزان تغییرات نسبت به شبکه پایه (62×180) از همان رابطه (33) محاسبه شده است. همان‌طور که در شکل 12 دیده می‌شود، حساسیت سرعت افقی به تعدادسلول‌ها بسیار ناچیز (کمتر از 0.1%) است؛ اما در مورد سرعت عمودی حساسیت بسیار بیشتر (حدود 10-50%) است. با توجه به این نمودار، شبکه 122×240 به‌عنوان شبکه نهایی برای شبیه‌سازی جریان انتخاب شد. توجه شود که منظور از 240 در این شبکه، مجموع 180 سلول در طول L_1 و 60 سلول در طول L_2 مطابق شکل 11 است.

4-2-3- روند همگرایی

شکل 13 روند همگرایی روش‌های بالادست مختلف را در جریان گذرنده از روی پله و برای شبکه‌های مختلف نشان می‌دهد. در این شکل تعداد سلول‌ها در راستای x ثابت ($Nx = 240$) فرض شده و فقط تعداد سلول‌ها در راستای y تغییر می‌کند. همان‌طور که ملاحظه می‌شود، نرخ همگرایی روش EDS حدود نصف نرخ همگرایی دو روش SUDS و PIS است. ضمن اینکه در تعداد تقسیمات $Ny = 62$

نرخ همگرایی روش EDS بسیار کندتر است. بررسی میدان جریان برای این تعداد سلول در روش EDS (که البته در اینجا آورده نشده) نشان داد که اساسا میدان جریان آنچنان که مورد انتظار بود، توسعه نیافته بود و گردابه‌ها هم از نظر اندازه و هم از نظر موقعیت تشکیل شدن، بسیار دورتر از شرایط مورد انتظار بودند. به بیان دیگر، در اعداد رینولدز بالا، روش EDS برای دستیابی به حداقل جواب مورد انتظار، نیازمند شبکه‌ای ریزتر از دو روش دیگر است و از این نظر بشدت وابسته به اندازه شبکه است. این موضوع، مؤید این نکته است که ریزکردن شبکه راهکاری برای کاهش پخش کاذب است؛ گرچه از نظر محاسباتی می‌تواند هزینه‌های زیادی در پی داشته باشد. در مقابل، دو روش بالادست SUDS و PIS از نظر نرخ همگرایی بسیار شبیه به هم عمل می‌کنند؛ ضمن اینکه وابستگی آن‌ها، بویژه روش PIS به اندازه شبکه نیز کمتر از روش EDS است.

4-2-4- نمودارهای سرعت و فشار

نمودارهای سرعت میدان در دو مقطع $x = 7H$ و $x = 15H$ و فشار دیواره‌های پایین و بالا برای سه روش بالادست در شکل 14 نشان داده شده‌است. با یک نگاه کلی به نتایج این نمودارها می‌توان اختلاف قابل توجه روش EDS با نتایج گارتلینگ [41] نسبت به دو روش دیگر را به‌خوبی دریافت. در سرعت افقی u، این اختلاف در سرعت‌های بیشینه و کمینه، بویژه در مقطع $x = 7H$ بیشتر نمود پیدا می‌کند. در سرعت افقی v، نتایج روش EDS بسیار ناامیدکننده است؛ به‌طوری‌که اساسا

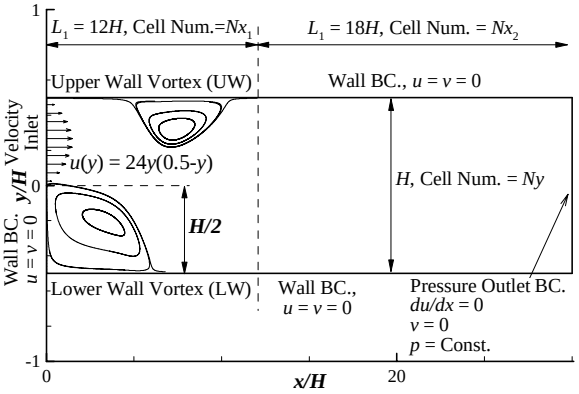


Fig. 11 BFS flow field, boundary conditions, grid zones, and its dominant flow structures.

شکل 11 میدان جریان گذرنده از روی پله، شرایط مرزی، ناحیه‌بندی شبکه‌ای و ساختارهای جریانی حاکم بر آن.

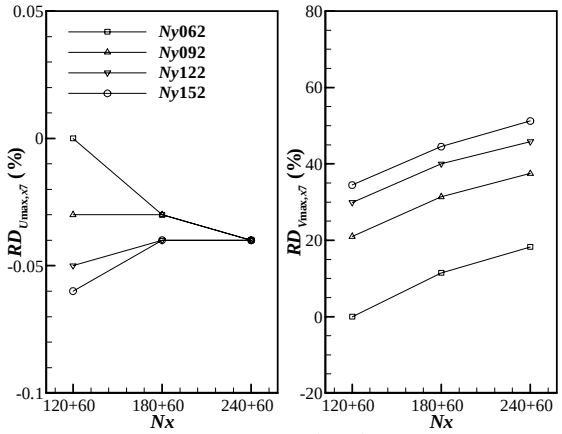


Fig. 12 Grid dependency study in BFS flow for PIS scheme according to velocities at $x = 7H$.

شکل 12 بررسی استقلال حل از شبکه در جریان گذرنده از روی پله در روش PIS براساس سرعت بیشینه در $x = 7H$.

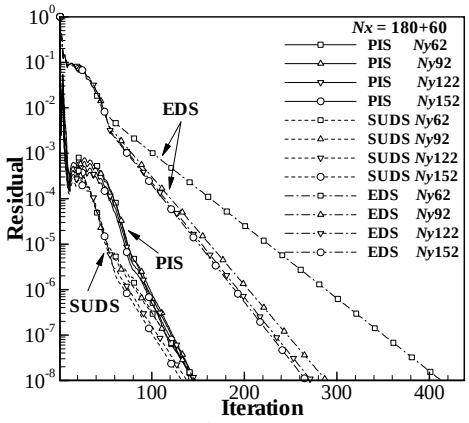


Fig. 13 Convergence histories of various upwinding schemes in BFS flow.

شکل 13 روند همگرایی روش‌های بالادست مختلف در جریان گذرنده از روی پله.

پیش‌بینی آن از جهت جریان نیز نادرست است. به‌طور طبیعی، این اختلاف در نمودار فشار نیز وجود دارد. از سوی دیگر، نتایج دو روش SUDS و PIS بسیار به هم نزدیک است و تطابق خوبی هم با نتایج گارتلینگ [41] نشان می‌دهند. البته، این تطابق برای روش PIS بهتر از SUDS است. در نمودار فشار دیواره‌های پایین و بالای میدان نیز اختلاف روش EDS نسبت به دو روش دیگر مشهود است. ضمن اینکه روش PIS هم نسبت به روش SUDS تطبیق بهتری با نتایج گارتلینگ [41] (بویژه در نواحی اکسترمم فشارها) دارد.

4-2-5- خطوط جریان و گردابه‌های میدان

شکل 15 خطوط جریان و گردابه‌های حاکم بر میدان جریان گذرنده از روی پله را در سه روش بالادست نشان می‌دهد. به لحاظ ظاهری، ابعاد گردابه‌ها و موقعیت آغاز و پایان آن‌ها در روش EDS نسبت به دو روش دیگر کوچکتر و عقب‌تر است؛ اما تفاوت قابل توجهی بین دو روش SUDS و PIS در شکل‌گیری گردابه‌ها دیده نمی‌شود. موقعیت مرکز و ابعاد گردابه‌های دیواره‌های پایین و بالا و مقایسه آن‌ها با نتایج گارتلینگ [41] در جدول 1 آمده است. اعداد این جدول نیز حاکی از نتایج ضعیف‌تر روش EDS، بویژه درباره موقعیت طولی مرکز و ابعاد گردابه‌ها است. درباره روش‌های SUDS و PIS نیز نتایج گردابه دیواره پایین (LW) بسیار به هم نزدیک است؛ ولی در گردابه دیواره بالا (UW)، نتایج روش PIS، بویژه درباره طول گردابه، بسیار بهتر از نتایج روش SUDS است.

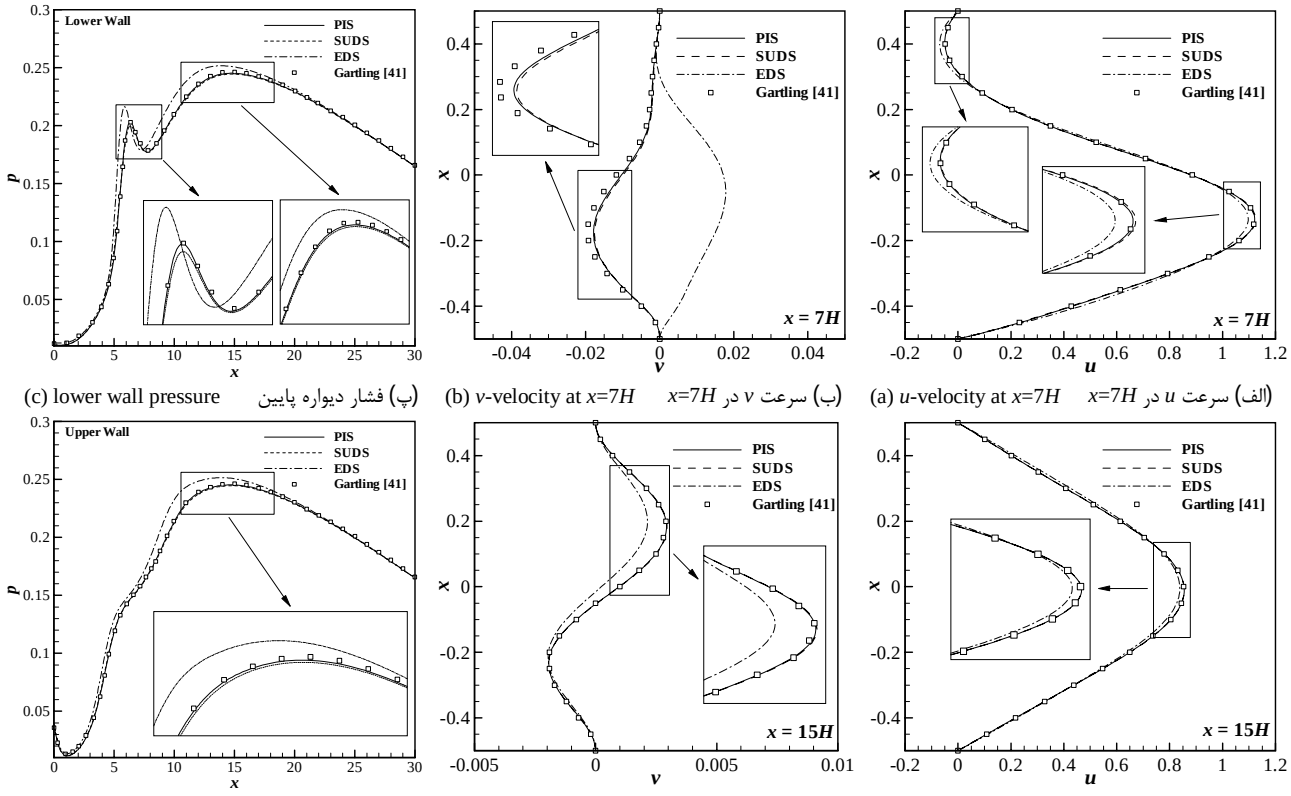
5- نتیجه‌گیری

روش بالادست مبتنی بر فیزیک جریان (PIS) در پژوهش‌های متعددی در روش‌های المان محدود برپایه حجم کنترل (FVBFEM) روی انواع شبکه‌های باسازمان و بی‌سازمان مربعی و مثلثی ارزیابی و توسعه داده شده است. در پژوهش حاضر، این رهیافت بر روی روش حجم کنترل مرکزسلولی با یک حلگر کوپل نیز توسعه یافته و نتایج آن با دو دسته دیگر از روش‌های مرسوم بالادست، یعنی روش

Table 1 The length and coordinates of the center of the lower and upper vortices in backward-facing step flow.

جدول 1 مختصات مرکز و طول گردابه‌های پایین و بالا در جریان گذرنده از روی پله.

اختلاف با مرجع			پژوهش حاضر (مقدار)			گارتلینگ	
PIS	SUDS	EDS	PIS	SUDS	EDS	[41]	
1.0%	1.0%	1.3%	3.385	3.385	3.392	3.350	$x_{cen,LW}$
2.2%	2.5%	5.1%	-0.204	-0.205	-0.210	-0.200	$y_{cen,LW}$
-0.5%	-0.5%	-7.1%	6.072	6.070	5.669	6.100	L_{LW}
0.4%	0.2%	-5.7%	7.429	7.417	6.981	7.400	$x_{cen,UW}$
4.8%	5.2%	0.2%	0.314	0.316	0.301	0.300	$y_{cen,LW}$
0.3%	1.5%	-4.0%	5.648	5.716	5.402	5.630	L_{UW}

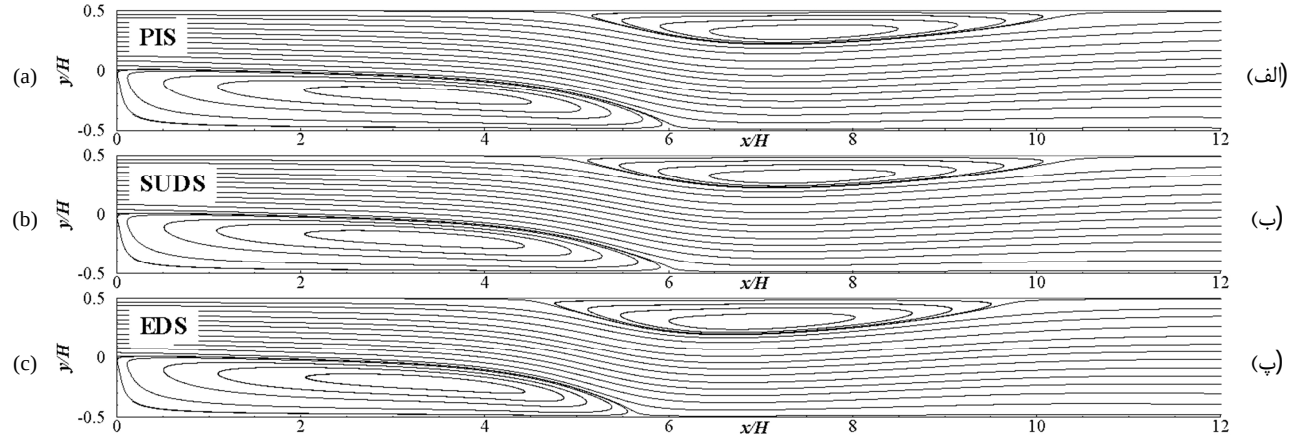


(الف) سرعت u در $x=7H$ (a) u-velocity at $x=7H$ (ب) سرعت v در $x=7H$ (b) v-velocity at $x=7H$ (پ) فشار دیواره پایین (c) lower wall pressure

(ت) سرعت u در $x=15H$ (d) u-velocity at $x=15H$ (ث) سرعت v در $x=15H$ (e) v-velocity at $x=15H$ (ج) فشار دیواره بالا (f) upper wall pressure

Fig. 14 Velocity profiles at $x = 7H$ and $x = 15H$ and pressure profiles on the lower and upper walls in backward-facing step for various upwinding schemes.

شکل 14 توزیع سرعت جریان گذرنده از روی پله در مقاطع $x = 7H$ و $x = 15H$ و فشار دیواره‌های پایین و بالا در روش‌های بالادست مختلف.



(الف) (a)

(ب) (b)

(پ) (c)

Fig. 15 Streamlines and vortices downstream of the backward-facing step for various upwinding schemes.

شکل 15 خطوط جریان و موقعیت گردابه‌های ایجادشده در پایین‌دست جریان گذرنده از روی پله در روش‌های بالادست مختلف.

اختلاف نمایی (EDS) و روش اختلاف بالادست مورب (SUDS) مقایسه شد.

برای ارزیابی عملکرد این سه روش از جریان درون حفره و جریان پله معکوس در اعداد رینولدز بالا استفاده شد. این دو جریان از یک سو به دلیل بالا بودن عدد رینولدز و از سوی دیگر وجود گردابه‌هایی که خطوط جریان آن‌ها با شبکه هم‌راستا نیست، هر دو ویژگی تشدیدکننده پخش کاذب در روش‌های بالادست را دارا هستند. میدان جریان حفره در 6 عدد رینولدز نسبتا بالا (400 و 1000)، بالا (3200 و 5000) و خیلی بالا (7500 و 10000) و میدان جریان پله در عدد رینولدز 800 حل و نتایج آن‌ها به‌ترتیب با کار گیا و همکاران [40] و گارتلینگ [41] مقایسه گردید. نتایج حاصل از شبیه‌سازی‌ها حاوی نکات متعددی بود که مهمترین آن‌ها عبارتند از: الف) نتایج روش EDS از دقت خوبی در اعداد رینولدز بالا، بویژه در جریان حفره، برخوردار نیست. البته، دقت نتایج روش EDS در جریان گذرنده از روی پله بهتر بود. علت این موضوع نیز وضعیت حادتر هر دو عامل عدد رینولدز و ناهم‌راستایی خطوط جریان و شبکه در جریان حفره نسبت به جریان پله است. ب) سرعت همگرایی روش EDS نسبت به دو روش دیگر کندتر و البته، وابستگی آن به اندازه شبکه بیشتر بود؛ به‌طوری‌که در جریان حفره، روش EDS در شبکه‌های هم‌اندازه با روش‌های PIS و SUDS همگرا نشده یا اختلاف میدان جریان حاصل از آن با این دو روش بسیار زیاد بود. پ) بررسی خطوط جریان و ساختارهای گردابه‌ای جریان حفره در روش EDS نیز نشان داد که به دلیل شدت پخش کاذب، گردابه‌ها بسیار کوچکتر از حد مورد انتظار هستند و در برخی موارد، گردابه‌های فرعی تشکیل نمی‌شوند؛

مگر آنکه شبکه ریزتری انتخاب شود. ت) مقایسه نتایج دو روش SUDS و PIS نیز نشان از نزدیکی نتایج این دو روش در جریان گذرنده از روی پله و اختلاف قابل توجه آن‌ها در جریان درون حفره داشت. اختلاف قابل ملاحظه در جریان حفره را می‌توان به عدم تأثیرپذیری روش USDS از اختلاف فشار بین نقطه سطح سلول و نقطه بالادست ارتباط داد که ممکن است با افزایش مرتبه دقت بالادست یا استفاده از روش‌های وزن جرمی بهبود یابد. در جریان حفره، به دلیل حاکم بودن جریان گردابه‌ای، اختلاف گرادیان‌های فشار روی سطوح سلول‌ها بسیار بیشتر از جریان پله است. به همین دلیل نیز روش SUDS تخمین‌های خوبی از سرعت بالادست ندارد. اما در جریان پله که این گرادیان‌های فشار اختلاف کمتری دارند، روش SUDS توانسته است به نتایجی نزدیک به روش PIS برسد. ث) نرخ همگرایی دو روش SUDS و PIS نیز بسیار به هم نزدیک و وابستگی آن‌ها به شبکه بسیار کمتر از روش EDS بود. ج) از نظر تسخیر ساختارهای گردابه‌ای جریان و تطابق آن‌ها با نتایج مرجع، روش PIS توانست بسیار موفق عمل کند. این روش با برقراری ارتباط قوی میان جمله جابه‌جایی با میدان فشار و جمله پخش از طریق یک معادله مومنتوم در راستای خط جریان، تخمین‌های بسیار نزدیک و در اغلب موارد منطبق بر نتایج مراجع ارئه کرد.

6- فهرست علائم

a	فاصله نقطه بالادست تا مرکز سلول سمت راست
b	فاصله خط واصل دو مرکز سلول حاوی نقطه بالادست
c_{pi}	ضرایب فشار مراکز سلول‌ها در معادله بالادست
c_{Ui}	ضرایب سرعت مراکز سلول‌ها در معادله بالادست
DR	اختلاف نسبی
dS	مساحت سطح سلول (m^2)
ds	فاصله دو مرکز سلول مجاور
H	عرض کانال (m)
L_{up}	طول بالادست
$\dot{m}$	شار جرمی گذرنده از سطح سلول
n	بردار نرمال سطح
P	فشار ($kgm^{-1}s^{-2}$)
Pe	عدد پکلت
Re	عدد رینولدز
t	زمان (s)
Δt	گام زمانی
V	بردار سرعت (ms^{-1})
U,V	سرعت در جهت x و y (ms^{-1})
u,v	سرعت در جهت x و y
V_{tot}	اندازه سرعت کل
x,y	طول در جهت x و y (m)

علائم یونانی

α	ضریب بالادست در روش EDS
μ	لزجت دینامیکی ($kgm^{-1}s^{-1}$)
ρ	چگالی (kgm^{-3})
ϕ	کمیت بالادست، مقدار یک کمیت مطالعه استقلال حل از شبکه
Ω	حجم سلول

زیرنویس‌ها

E	سطح شرقی سلول
up	نقطه بالادست
upr, upl	سمت راست و چپ نقطه بالادست

7- مراجع

[1] G. D. Raithby, K. E. Torrance, Upstream weighted differencing schemes and their application to elliptic problems involving fluid flow, *Computers and Fluids*, Vol. 8, No.12, pp. 191–206, 1974.

[2] A. W. Date, Complete pressure correction algorithm for solution of incompressible Navier–stokes equation on a non-staggered grid, *Numerical Heat Transfer, Part B*, Vol. 29, No. 4, pp. 441–458, 1996.

[3] S.V. Patankar, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Series in Computational Methods in Mechanics and Thermal Sciences. McGraw-Hill: New York, pp. 83-120, 1980.

[4] A. J. Chorin, A numerical method for solving incompressible viscous flow problems, *Journal of Computational Physics*, Vol. 2, No. 1, pp. 12–26, 1967.

[5] C. M. Rhie, W. L Chow, Numerical study of the turbulent flow past an airfoil with trailing edge separation, *AIAA Journal*, Vol. 21, No. 11, pp. 1525–1532, 1983.

[6] C. Prakash, S. V. Patankar, A control-volume based finite-element method for solving the Navier–Stokes equations using equal-order velocity–pressure interpolation, *Numerical Heat Transfer*, Vol. 8, No. 3, pp. 259–280, 1985.

[7] G. E. Schneider, S. M. H. Karimian, Advances in control-volume based finite-element methods for compressible flows, *Computational Mechanics*, Vol. 14, No. 5, pp. 1–16, 1994.

[8] S. M. H. Karimian, G. E. Schneider, Pressure-based computational method for compressible and incompressible flows, *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, Vol. 8, No.2, pp. 267–274, 1994.

[9] A. Ashrafizadeh, B. Alinia, P. Mayeli. A new co-located pressure-based discretization method for the numerical solution of incompressible Navier-Stokes equations, *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals*, Vol. 67, No. 6, pp. 563-589, 2015.

[10] D. B. Spalding, A novel finite difference formulation for differential expressions involving both first and second derivatives, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 4, No. 4, pp. 551-559, 1972.

[11] S. V. Patankar, A calculation procedure for two-dimensional elliptic situations, *Numerical heat transfer*, Vol. 4, No. 4, pp. 409-425, 1981.

[12] G. D. Raithby, P. F. Galpin, J. P. Van Doormaal, Prediction of heat and fluid flow in complex geometries using general orthogonal coordinates, *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, Vol. 9, No. 2, pp. 125-142, 1986.

[13] B. P. Leonard, A stable and accurate convective modeling procedure based on quadratic upstream interpolation, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 19, No. 1, pp. 59–98, 1979.

[14] T. Han, J. A. C. Humphrey, B. E. Launder, A comparison of hybrid and quadratic-upstream differencing in high Reynolds number elliptic flows, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 29, No. 1, pp. 81-95, 1981.

[15] A. Pollard, A. L. W. Siu, The calculation of some laminar flows using various discretisation schemes, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 35, No. 3, pp. 293-313, 1982.

[16] T. Hayase, J. A. C. Humphrey, R. Greif, A consistently formulated QUICK scheme for fast and stable convergence using finite-volume iterative calculation procedures, *Journal of Computational Physics*, Vol. 98, No. 1, pp. 108-118, 1992.

[17] H. K. Versteeg, W. Malalasekera, *An introduction to computational fluid dynamics: the finite volume method*, Pearson Education, Second Edittion, pp. 164-176, 2007.

[18] B. P. Leonard, Simple high-accuracy resolution program for convective modelling of discontinuities, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 8, No. 10, pp. 1291-1318, 1988.

[19] H. H. Wong, G. D. Raithby, Improved finite-difference methods based on a critical evaluation of the approximation errors, *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, Vol. 2, No. 2, pp. 139-163, 1979.

[20] A. Eraslan, W. Lin, R. D. Sharp, *FLOWER: A computer code for simulating three-dimensional flow, temperature, and salinity conditions in rivers, estuaries, and coastal regions*, Rept. No. ORNL/NUREG-8401. Oak Ridge National Lab., Oak Ridge. TN 37831, Dec. 1983.

[21] A. K. Runchal, CONDIF: A modified central-difference scheme for convective flows, *International journal for numerical methods in engineering*, Vol. 24, No. 8, pp. 1593-1608, 1987.

[22] P. H. Gaskell, A. K. C. Lau, Curvature-compensated convective transport: SMART, A new boundedness-preserving transport algorithm, *International Journal for numerical methods in fluids* Vol. 8, No. 6, pp. 617-641, 1988.

[23] G. D. Raithby, A critical evaluation of upstream differencing applied to problems involving fluid flow, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 9, No. 1, pp. 75-103, 1976.

[24] G. D. Raithby, Skew upstream differencing schemes for problems involving fluid flow, *Computer Methods in applied mechanics and engineering*, Vol. 9, No. 2, pp. 153-164, 1976.

No. 4, pp. 363–400, 1987.
[34] M. Darbandi, G. E. Schneider, K. Javadi, N. Solhpour, The performance of a physical influence scheme in structured triangular grids, *AIAA Paper*, 436, pp. 1-11, 2003.
[35] M. Darbandi, S. Vakilipour, Using fully implicit conservative statements to close open boundaries passing through recirculations, *International Journal for numerical methods in fluids*, Vol. 53, No. 3, pp. 371-389, 2007.
[36] M. Darbandi, S. Vakilipour, Developing implicit pressure-weighted upwinding scheme to calculate steady and unsteady flows on unstructured grids, *International Journal for numerical methods in fluids*, Vol. 56, No. 2, pp. 115-141, 2008.
[37] H. Alisadeghi, S. M. H. Karimian, Different modelings of cell-face velocities and their effects on the pressure–velocity coupling, accuracy and convergence of solution, *International Journal for numerical methods in fluids*, Vol. 65, No. 8, pp. 969-988, 2011.
[38] Y. Zhao, B. Zhang, A high-order characteristics upwind FV method for incompressible flow and heat transfer simulation on unstructured grids, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Vol. 190, No. 5, pp. 733-756, 2000.
[39] S. Vakilipour, S. J. Ormiston, A coupled pressure-based co-located finite-volume solution method for natural-convection flows, *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals*, Vol. 61, No. 2, pp. 91-115, 2012.
[40] U. K. N. G. Ghia, K. N. Ghia, C. T. Shin, High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method, *Journal of computational physics*, Vol. 48, No. 3, pp. 387-411, 1982.
[41] D. K. Gartling, A test problem for outflow boundary conditions—flow over a backward-facing step, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 11, No. 7, pp. 953-967, 1990.
[25] M. K. Patel, M. Cross, N. C. Markatos, An assessment of flow oriented schemes for reducing 'false diffusion', *International Journal for numerical methods in engineering*, Vol. 26, No. 10, pp.2279-2304, 1988.
[26] M. K. Patel, N. C. Markatos, M. Cross. Method of reducing false-diffusion errors in convection—diffusion problems, *Applied mathematical modelling*, Vol. 9, No. 4, pp. 302-306, 1985.
[27] J. P. van Doormaal, A. Turan, G. D. Raithby, Evaluation of new techniques for the calculation of internal recirculating flows, *AIAA 25th Aerospace Sciences Meeting*, Reno, NV, January, 12-15, 1987.
[28] A. A. Busnaina, X. Zheng, M. A. R. Sharif, A modified skew upwind scheme for fluid flow and heat transfer computations. *Applied mathematical modelling*, Vol. 15, No. 8, pp. 425-432, 1991.
[29] G. E. Schneider, M. J. Raw, A skewed, positive influence coefficient upwinding procedure for control-volume-based finite-element convection-diffusion computation, *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, Vol. 9, No. 1, pp. 1-26, 1986.
[30] H. J. Saabas, B. R. Baliga, Co-located equal-order control-volume finite-element method for multidimensional, incompressible, fluid flow—Part II: verification, *Numerical Heat Transfer*, Vol. 26, No. 4, pp. 409-424, 1994.
[31] C. Masson, H. J. Saabas, B. R. Baliga, Co-located equal-order control-volume finite element method for two-dimensional axisymmetric incompressible fluid flow, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 18, No. 1, pp. 1-26, 1994.
[32] L. Dung Tran, M. Christian, S. Arezki, A stable second-order mass- weighted upwind scheme for unstructured meshes, *International Journal for numerical methods in fluids*, Vol. 51, No.7 , pp. 749-771, 2006.
[33] G. E. Schneider, M. J. Raw, Control volume finite element method for heat transfer and fluid flow using collocated variables. 1. Computational procedure; 2. Application and validation, *Numerical Heat Transfer*, Vol. 11,