



## بررسی رفتار دینامیکی یک سیستم دوار به دو روش مدل سازی غیر خطی و المان محدود

محمد صالح صدوقی<sup>1</sup>، سیامک اسماعیل زاده خادم<sup>2\*</sup>، سعید باب<sup>3</sup>

1- دانشجوی دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

2- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

3- دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

\* تهران، صندوق پستی 14155-111، khadem@modares.ac.ir

### چکیده

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 16 خرداد 1395

پذیرش: 04 مرداد 1395

ارائه در سایت: 16 شهریور 1395

کلید واژگان:

ارتعاشات سیستم دوار

مدلسازی غیر خطی

المان محدود

اختلاف فاز نابالانسی

در این مقاله به بررسی رفتار دینامیکی یک سیستم دوار ایستا شامل روتور، بلبرینگ و دیسک در دوره های مختلف به دو روش المان محدود و مدل سازی غیر خطی پرداخته شده است. وجود مشخصه های غیر خطی در این نوع سیستمها باعث می شود که مدل سازی و تحلیل های خطی از دقت کافی برخوردار نباشد، لذا در این مقاله به استخراج و حل معادلات دینامیکی غیر خطی سیستم مورد نظر پرداخته شده است. به منظور استخراج معادلات از روش همپلتون استفاده شده و برای کاهش تعداد معادلات، تبدیل مختصات مختلط بکار گرفته می شود. پس از حل معادلات، جهت بررسی خواص ارتعاشی سیستم، نمودارهای پاسخ زمانی، مدار دینامیکی، پاسخ فرکانسی و شکل مود ارتعاشات روتور ترسیم می شود. به منظور صحت سنجی نتایج تحلیلی، از روش المان محدود در نرم افزار انسیس استفاده شده است. مقایسه نتایج حاصل از مدل سازی غیر خطی با نتایج حاصل از حل المان محدود انطباق خوبی در فرکانس های رزونانس سیستم در سه مود اول مشاهده می شود که نشان از دقت کافی در مدل سازی غیر خطی دارد. از مدل سازی غیر خطی می توان به این نتیجه رسید که نرخ کاهش برای تمامی مودها منفی است که نشانه پایداری کلیه مودها است همچنین بیشینه دامنه ارتعاشات در یاتاقان و روتور، به ترتیب در مود سوم و دوم رخ می دهد. اختلاف فاز نابالانسی 90 درجه در دو دیسک، باعث تحریک هر سه مود فرکانسی سیستم می شود در حالی که به ازای اختلاف فاز 0 و 180 درجه به ترتیب فقط مودهای فرد (اول و سوم) و زوج (دوم) تحریک می شوند.

## Dynamic behavior investigation of a rotating system by two methods of nonlinear modeling and finite element

Mohammad Saleh Sadooghi<sup>1</sup>, Siamak Esmail Zadeh Khadem<sup>1\*</sup>, Saeid Bab<sup>1</sup>

1- Department of Mechanical Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran.

\* P.O.B. 14155-111 Tehran, Iran, khadem@modares.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 05 June 2016  
Accepted 25 July 2016  
Available Online 06 September 2016

**Keywords:**  
Vibration of rotating systems  
nonlinear modeling  
finite element  
unbalance phase difference

### ABSTRACT

In this paper the dynamic behavior of a rotating system which includes rotor (shaft), ball bearing and disk in stationary condition and different speeds is investigated. There are nonlinear characteristics in these systems which make the linear modeling inaccurate. So, in this paper the nonlinear dynamic equations of the system are derived and solved. To derive the equations of the system, Hamiltonian method is used, and complex coordinate transform is employed to reduce the number of equations. After solving the equations, to investigate the vibrational properties of the system, time response diagram, dynamic orbit, frequency response, and mode shape of the rotor is plotted. To validate the analytical results, finite element method by ANSYS (workbench) software is used. There is good conformity between the analytical results and finite element results in resonance frequencies of the system in the first three modes which indicates the sufficient accuracy in nonlinear modeling. It can be concluded from nonlinear modeling that the decay rate is negative for the all modes, which indicates the stability of them. Also, the maximum vibration amplitude in the bearing and rotor occurs in third and second modes respectively. Unbalance phase difference of 90 degrees in two discs causes the excitation of all three frequency modes, whereas by unbalance phase difference of 0 or 180 degrees in two discs, only the odd modes (first and third) and the even modes (second) are excited respectively.

### 1- مقدمه

به بررسی رفتار روتوری که معمولاً با تکانهای زاویه ای قابل ملاحظه ای می چرخد، می پردازد. بر اساس تعریف استاندارد ایزو، روتور جسمی است که بر روی دو تکیه گاه به گونه ای قرار گرفته است که امکان چرخش آزاد آن حول یک محور در فضا موجود باشد.

در بررسی دینامیک روتورها، ایجاد یک مدل فیزیکی مناسب از سیستم واقعی برای بررسی رفتار ارتعاشی سیستم ضروری است. در زمینه ی

توربوماشینها از جمله تجهیزاتی هستند که به طور گسترده ای در تولید کار و انرژی در صنایع مختلف استفاده می شوند. توربینهای گاز، توربینهای بادی، توربینهای بخار، توربینهای آبی و ... نمونه هایی از توربوماشینها می باشند. اینگونه ماشینها معمولاً شامل اجزای متحرکی هستند که با عنوان روتور شناخته می شوند. دینامیک روتورها یکی از شاخه های علم دینامیک است که

Please cite this article using:

M. S. Sadooghi, S. Esmail Zadeh Khadem, S. Bab, Dynamic behavior investigation of a rotating system by two methods of nonlinear modeling and finite element, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 8, pp. 303-314, 2016 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

مدل سازی سیستم های دوار تلاش های زیادی انجام شده است. اولین مدل تئوری که در این زمینه وجود دارد مدل جفکات می باشد که در سال 1914 توسط هنری هومان جفکات<sup>1</sup> ارائه شده است. مدل جفکات شامل یک شفت انعطاف پذیر بدون جرم است که در وسط این شفت یک دیسک قرار گرفته است. از آن سال تاکنون مدل های مختلفی برای تحلیل دینامیک سیستم های دوار ارائه شده است. همچنین در سیستم های واقعی وقوع پدیده هایی از قبیل رزونانس زیر هارمونیک<sup>2</sup>، رزونانس داخلی<sup>3</sup>، رزونانس فوق هارمونیک<sup>4</sup>، پاسخ آشوبناک<sup>5</sup>، پرش<sup>6</sup>، انشعاب<sup>7</sup> و ... امکان دارد، که این پدیده ها با مدل سازی های خطی قابل بررسی نمی باشند. بنابراین ارائه ی یک مدل غیر خطی که بتواند رفتار سیستم را به درستی پیش بینی نماید، ضروری می باشد.

اما در سال های اخیر پژوهش های گوناگونی در زمینه مدل سازی و تحلیل سیستم های دوار انجام شده است. سینها [1] به بررسی خصوصیات دینامیکی مدل انعطاف پذیر روتور پره دار با در نظر گرفتن اصطکاک خشک در نوک پره به دلیل برخورد سایشی<sup>8</sup> پرداخته است. با استفاده از معادلات دینامیکی پره های دوار شعاعی یک سر گیردار تحت نیروی گریز از مرکز، معادلات مدل کامل روتور پره دار انعطاف پذیر (به همراهی دیسک) که توسط تعدادی یاتاقان در نقاط مختلف نگهداری می شود، به دست آمده است. معادلات دیفرانسیل پاره ای کوپل شده روتور و پره ها با استفاده از روش گالرکین تبدیل به معادلات دیفرانسیل معمولی کوپل شده، گشته است و این معادلات به صورت عددی حل شده اند. از آنجا که فنریت یاتاقان ها به جابجایی مرتبط است، ماتریس فنریت وابسته به زمان است و اصطلاحاً تحریک پارامتریک در سیستم وجود دارد. لسافره و همکاران [2] به بررسی مدل کامل و انعطاف پذیر روتور و پره های آن پرداخته اند. پره ها و روتور با استفاده از تئوری اویلر - برنولی مدل شده و ارتعاشات خمشی پره ها مورد بررسی قرار گرفته است. اثر ژيروسکوپ، اثر نرم شدگی چرخشی<sup>9</sup> و اثر سفت شدگی گریز از مرکز<sup>10</sup> در این مدل در نظر گرفته شده است. دو نوع ناپایداری در این سیستم مشاهده شده است که یکی حول فرکانس رزونانس اول رخ می دهد و دیگری نیز بر اثر کوپلینگ بین مدها در فرکانس های بالاتر رخ می دهد. آنها نشان داده اند که افزایش زاویه انحراف باعث کاهش ناحیه ناپایداری در سازه می شود. ایشیدا و همکاران [3] اثر جاذب آونگ گریز از مرکز<sup>11</sup> روی کاهش ارتعاشات پیچشی روتور را بررسی کردند. از آنجا که فرکانس های طبیعی جاذب آونگ گریز از مرکز وابسته به سرعت دورانی روتور است، نقاط پاد رزونانس می توانند در سرعت های مختلف جابجا شوند و در نتیجه جاذب آونگ گریز از مرکز این پتانسیل را دارد که در تمامی سرعت ها ارتعاشات پیچشی را حذف کند. در این تحقیق فرض شده است که روتور تحت تحریک نیروی نوسانی موتور است و این عامل باعث ارتعاشات پیچشی در روتور می شود. محاسبات به صورت تحلیلی، عددی و آزمایشگاهی انجام گرفته است. نتایج آنها نشان می دهد که جاذب آونگ گریز از مرکز با اینکه اثر مناسبی روی کاهش ارتعاشات هارمونیک روتور دارد، باعث ایجاد رزونانس های بالا- هارمونیک مرتبه دوم و سوم می شود و همچنین باعث ایجاد ارتعاشات ناپایدار

از نوع هارمونیک در شرایط خاص می شود. ایشیدا و اینویه [4] کاهش ارتعاشات سیستم روتور غیر خطی را با استفاده از جاذب دینامیکی مورد بررسی قرار دادند. یاتاقان های بلبرینگ شیار عمیق<sup>12</sup> یک ردیفه به دلیل لقی، خاصیت فنریت غیر خطی دارند. آنها با تحلیل نشان دادند که خصوصیت غیر خطی روی خصوصیات ارتعاشی روتور اثر دارد و همچنین برای روتوری که دارای فنریت تکیه گاهی غیر خطی متقارن همسانگرد<sup>13</sup> است، نمی توان از تئوری نقطه ثابت<sup>14</sup> برای بهینه سازی جاذب دینامیکی استفاده کرد، زیرا ارتعاشات به دلیل اثر غیر خطی افزایش پیدا می کند. آنها همچنین با در نظر گرفتن اثرات غیر خطی موجود در سیستم به بهینه سازی پارامترهای جاذب دینامیکی پرداختند و از روش عددی نیوتن-رافسون برای طراحی جاذب دینامیکی استفاده کرده و مشخص کرده اند که با در نظر گرفتن اثرات غیر خطی موجود در سیستم می توان جاذب دینامیکی مناسب برای سیستم طراحی کرد. ایشیدا [5] روش جدید فنریت غیر پیوسته<sup>15</sup> را برای کاهش غیر فعال ارتعاشات روتور و همچنین روشی برای افزایش کارایی متعادل کننده های گلوله ای<sup>16</sup> اتوماتیک ارائه کرده است. روش فنریت غیر پیوسته علاوه بر کاهش دامنه ارتعاشات در حالت رزونانس، برای حذف نوسانات ناپایدار شفت های غیر متقارن<sup>17</sup> و روتور هایی که به طور ناقص با مایع پر شده اند، قابل استفاده است. وی نشان داده است که متعادل کننده گلوله ای اتوماتیک، ارتعاشات را بالاتر از سرعت بحرانی اصلی<sup>18</sup> کاهش می دهد، اما اصطکاک می تواند کارایی آن را کاهش دهد. با استفاده همزمان از فنریت غیر پیوسته و متعادل کننده های گلوله ای دامنه نوسانات روتور در کل ناحیه فرکانسی (رزونانس و ناحیه بالاتر از آن) به طور مناسب کاهش پیدا می کند. بای و سونگ [6] به بررسی نوع جدیدی از جاذب دینامیکی مغناطیسی پرداختند و روشی برای میزان کردن فرکانس طبیعی جاذب ارائه کردند. این جاذب در محل یاتاقان ها به سیستم روتور- یاتاقان متصل است و تغییر فرکانس طبیعی سیستم و جاذب، با استفاده از تغییر لقی بین سطح روتور و سطح داخلی آهن ربای الکتریکی به دست می آید. پاتیل و همکاران [7] به بررسی اثر خرابی در حلقه گردش<sup>19</sup> بلبرینگ بر روی ارتعاشات روتور پرداخته اند. برای استخراج معادلات، فنریت بلبرینگ به صورت غیر خطی و با استفاده از تئوری هرتز استخراج شده است. نتایج ارتعاشی در حوزه زمان و فرکانس استخراج شده است. محاسبات برای یاتاقان شیار عمیق / اس کا اف<sup>20</sup> 6010 صورت گرفته است. بای و همکاران [8] به بررسی رفتار ارتعاشی یک سیستم روتور و بلبرینگ پرداخته اند. از یک مدل گسسته شش درجه آزادی برای مدل سازی رفتار سیستم با در نظر گرفتن فنریت غیر خطی و لقی بلبرینگ ها استفاده شده است. از نمودارهای پاسخ فرکانسی، مدار دینامیکی و آشنایی برای بررسی رفتار سیستم استفاده شده است. در پاسخ سیستم در بعضی از دورها پاسخ زیر هارمونیک مشاهده شده است. ژو و همکاران [9] به بررسی رفتار ارتعاشات کوپل شده یک روتور بر روی بلبرینگ و دمپینگ فیلم فشاری<sup>21</sup> پرداخته اند. معادلات سیستم به صورت عددی حل شده است و کارایی دمپینگ فیلم فشاری در کاهش ارتعاشات سیستم به صورت عددی و

<sup>12</sup> Deep groove

<sup>13</sup> isotropic

<sup>14</sup> Fixed points theorem

<sup>15</sup> the discontinuous spring characteristics

<sup>16</sup> Ball balancer

<sup>17</sup> asymmetrical

<sup>18</sup> the major critical speed

<sup>19</sup> raceway

<sup>20</sup> SKF 6010

<sup>21</sup> squeeze film damper

<sup>1</sup> Henry Homan Jeffcott

<sup>2</sup> Sub-harmonic resonance

<sup>3</sup> Internal resonance

<sup>4</sup> Super-harmonic resonance

<sup>5</sup> Chaotic response

<sup>6</sup> Jump

<sup>7</sup> Bifurcation

<sup>8</sup> Rub impact

<sup>9</sup> The spin softening effects

<sup>10</sup> The centrifugal stiffening effects

<sup>11</sup> Centrifugal pendulum

جدول 1 مشخصه‌های فیزیکی اجزای سیستم دوار

مقدار	مشخصه
0.01194 kgm <sup>2</sup>	ممان اینرسی جرمی قطبی هر دیسک
0.00614 kgm <sup>2</sup>	ممان اینرسی جرمی قطری هر دیسک
3.780 kg	جرم هر دیسک
7800 kgm <sup>-3</sup>	چگالی شفت و دیسکها
4.790 kg	جرم شفت

در جدول 2 مشخصه‌های ابعادی بلبرینگ استفاده شده در این پژوهش که از نوع اس کا اف 6010 ارائه شده است.

که  $d$ ،  $D_p$  و  $\alpha$  به ترتیب قطر ساچمه، تعداد ساچمه ها، قطر پیچ<sup>4</sup> و زاویه تماس است.

### 3- بررسی رفتار دینامیکی سیستم به کمک روش المان محدود

به منظور بررسی رفتار دینامیکی سیستم مذکور و همچنین صحت سنجی نتایج مدلسازی غیر خطی، از روش المان محدود و از نرم افزار انسیس استفاده شده است. مدل شکل 1 با این شرط مرزی که پوسته بیرونی بلبرینگ ها کاملاً مقید است، در نرم افزار مورد تحلیل قرار گرفته است. تحلیل از نوع سازه‌ای گذرا بوده و سرعت دورانی شفت به تدریج افزایش پیدا کرده است. لازم به ذکر است که گزینه‌های حل غیرخطی و اثرات ژیروسکوپی در تنظیمات نرم افزار انتخاب شده است. در شکل 2 نحوه مش زنی سیستم دیده می‌شود. المان مورد استفاده در تحلیل المان محدود از نوع سالید186<sup>5</sup> است که یک المان سه بعدی و 20 گره ایست که هر گره سه درجه آزادی دارد. در شکل 3 نمونه‌ای از نتایج تحلیل در حالتی که جرم نابالانسی با اختلاف فاز 180 درجه‌ای بر روی دو دیسک قرار گرفته است دیده می‌شود که متناظر با دومین رزونانس سیستم در فرکانس دورانی 140Hz است که بیشینه تنش در حدود 40 MPa در شفت ایجاد کرده است (جابجایی‌ها در شکل 3 اغراق آمیز است). نتایج خروجی تحلیل، پدیده رزونانس را در سه فرکانس 54.6Hz، 139.7Hz و 410.45Hz نشان می‌دهد.

### 4- استخراج معادلات غیر خطی سیستم

به منظور استخراج معادلات حاکم بر سیستم از روش همیلتون استفاده می‌شود. بدین منظور انرژیهای جنبشی و پتانسیل اجزای سیستم در ادامه محاسبه می‌گردد.

#### 4-1- انرژی جنبشی روتور

جدول 2 مشخصه‌های ابعادی بلبرینگ اس کا اف 6010

Table 2 dimensional properties of SKF 6010 ball bearing	
$d = 8.73 \text{ mm}$	$Z=14$
$D_p = 65 \text{ mm}$	$\alpha = 0$

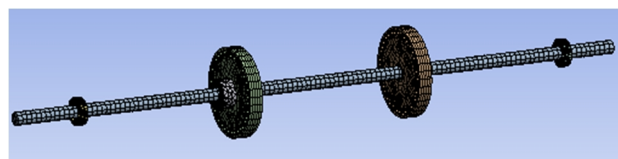


Fig. 2 Meshing quality in ANSYS workbench software

شکل 2 کیفیت مش زنی مدل در نرم افزار انسیس

آزمایشگاهی اثبات شده است. آنها همچنین نشان دادند که با افزایش میزان فنریت تکیه‌گاه، محدوده پاسخ غیر سنکرون سیستم بزرگتر شده است. ژانگ و همکاران [10] به بررسی ارتعاشات سیستم روتور و بلبرینگ پرداخته‌اند. آنها برای بررسی ارتعاشات سیستم از یک مدل پنج درجه آزادی و با در نظر گرفتن تغییرات زاویه تماس و پیش‌بار در بلبرینگ استفاده کردند. آنها نشان دادند که بدون در نظر گرفتن این خصوصیات، ارتعاشات روتور کمتر از حد واقعی استخراج می‌شود. لیو و همکاران [11] به بررسی ارتعاشات بلبرینگ تحت تاثیر شکل موجی<sup>1</sup> سطح بلبرینگ که ناشی از عدم دقت ساخت است، پرداخته‌اند. برای بررسی سیگنال ارتعاشی و تعیین خواص آن از تئوری همبستگی سیگنال<sup>2</sup> استفاده شده است. آنها نشان دادند که این شکل موجی بر روی رفتار ارتعاشی سیستم به خصوص در فرکانس‌های پایین کاملاً موثر است. هی و همکاران [12] به منظور مدلسازی ارتعاشات کوپل شده یک سیستم دوار، شتاب زاویه‌ای را نیز در نظر گرفته و اثرات آن بر روی دامنه ارتعاشات جانبی و پیچشی روتور مطالعه کرده است. چاندر و سگار [13] به منظور شبیه سازی عیوب در سیستمی شبیه به سیستم دوار مقاله حاضر، به مدلسازی خطی سیستم پرداخته و سپس به سیگنالهای خروجی را جهت عیب یابی تحلیل نموده‌اند.

در این مقاله به بررسی رفتار دینامیکی یک سیستم دوار ایستا<sup>3</sup> به صورت مدل روتور- بلبرینگ در دوره‌های متفاوت به دو روش المان محدود و مدلسازی غیر خطی پرداخته می‌شود. این سیستم به منظور شبیه سازی ارتعاشات ماشین آلات دوار طراحی شده است. در روش المان محدود از نرم افزار انسیس بهره گرفته شده است. در مدلسازی غیر خطی از روش همیلتون برای استخراج معادلات استفاده شده و برای کاهش تعداد معادلات، تبدیل مختصات مختلط بکار گرفته می‌شود. پس از اعمال روش جداسازی گالرکین به معادله روتور با سه مود، معادلات به فضای حالت انتقال داده شده و تبدیل به شش معادله مرتبه اول می‌شود. در نهایت با استفاده از روش رانگ-کوتا، معادلات حاصل به صورت عددی حل می‌شود. برای بررسی خواص ارتعاشی سیستم، نمودارهای پاسخ زمانی، مدار دینامیکی، پاسخ فرکانسی و شکل مود ارتعاشات روتور ترسیم می‌شود.

### 2- معرفی سیستم دوار

در شکل 1 شماتیکی از سیستم دوار مورد بحث در این مقاله به همراه ابعاد آن دیده می‌شود. مطابق این شکل، این سیستم از یک روتور (شفت) که تکیه گاه آن دو بلبرینگ است تشکیل شده است. به منظور بالانس سیستم از دو دیسک استفاده شده است که تقارن محوری دارند. این سیستم پس از ساخته شدن به عنوان مجموعه تست، در آزمایشگاه استفاده خواهد شد. مشخصه‌های فیزیکی اجزای سیستم به صورت جدول 1 است.

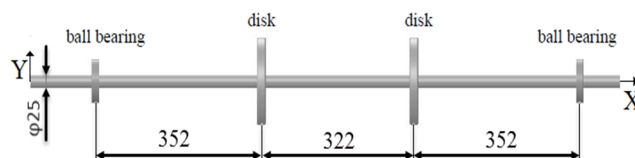


Fig. 1 A schematic view of studied rotating system (all dimensions in mm)

شکل 1 شماتیکی از سیستم دوار مورد مطالعه (همه اندازه ها به میلی متر)

<sup>1</sup> waviness

<sup>2</sup> signal coherence theory

<sup>3</sup> stationary

<sup>4</sup> The bearing pitch diameter

<sup>5</sup> Solid186

#### 2-4- انرژی پتانسیل روتور

انرژی پتانسیل خمشی روتور برابر است با:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l EI_z \left( \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \right) dx \quad (8)$$

#### 3-4- استهلاک در روتور

کار ناپایستار دمپینگ روی روتور برابر است با:

$$\delta W_{nc-rotor} = c_{rotor} \dot{W} \delta W + c_{rotor} \dot{v} \delta v \quad (9)$$

که در این رابطه  $c_{rotor}$  ضریب دمپینگ روتور است.

#### 4-4- انرژی جنبشی دیسکها

دیسک به صورت صلب فرض شده است و بر این اساس توانایی ذخیره انرژی پتانسیل را نخواهد داشت. دیسکها دارای ممان اینرسی قطبی و قطری (خمشی)  $I_{disk1}$  و  $I_{disk2}$  می باشند. با این فرض و از آنجا که دیسکها در نقاط  $(x=x_{di})$  روی روتور نصب شده است، انرژی جنبشی آنها به صورت زیر خواهد بود:

$$T_{disk1} = \left\{ m_{disk1} (\dot{v}^2 + \dot{w}^2) + I_{disk1} \Omega^2 + I_{disk1} (\dot{v}^2 + \dot{w}^2) \right\} \delta(x - x_{d1}), \quad (10-الف)$$

$$T_{disk2} = \left\{ m_{disk2} (\dot{v}^2 + \dot{w}^2) + I_{disk2} \Omega^2 + I_{disk2} (\dot{v}^2 + \dot{w}^2) \right\} \delta(x - x_{d2}), \quad (10-ب)$$

انرژی جنبشی ناشی از نابالانسی های جرمی از رابطه زیر به دست می آید [15]:

$$T_{imd1} = \frac{1}{2} \left\{ m_{disk1} \Omega^2 [e_{yd1}^2 + e_{zd1}^2] - 2m_{disk1} \Omega [\dot{v} e_{zd1}] + \dot{w} e_{yd1} \sin \Omega t + [\dot{v} e_{yd1} - \dot{w} e_{zd1}] \cos \Omega t \right\} \delta(x - x_{d1}) \quad (11-الف)$$

$$T_{imd2} = \frac{1}{2} \left\{ m_{disk2} \Omega^2 [e_{yd2}^2 + e_{zd2}^2] - 2m_{disk2} \Omega [\dot{v} e_{zd2}] + \dot{w} e_{yd2} \sin \Omega t + [\dot{v} e_{yd2} - \dot{w} e_{zd2}] \cos \Omega t \right\} \delta(x - x_{d2}) \quad (11-ب)$$

که در آن  $e_{zd1}$  و  $e_{yd1}$  به ترتیب توزیع جرم خارج از مرکز<sup>3</sup> در جهت محورهای Y و Z دیسکها می باشد. روابط (10) و (11) مجموعاً انرژی جنبشی یک شفت نابالانس را تشکیل می دهند.

#### 5-4- مدل سازی غیر خطی بلبرینگ

برای مدل سازی ارتعاشی ساچمه های بلبرینگ و تماس آنها با بدنه، می توان این سیستم را به صورت جرم و فنر در نظر گرفت. تغییر شکل الاستیک بین ساچمه ها و حلقه گردش<sup>4</sup> یک پدیده غیرخطی است و رابطه غیرخطی بین جابجائی (x) و نیرو (F) در این حالت با استفاده از رابطه معروف کرامر به صورت زیر به دست می آید [16]:

$$K_b = \frac{nF}{x_r} \quad (12)$$

که در این رابطه  $n=1.5$  و  $x_r = 1.2 \times 10^{-7} \times d^{-1/3} \times z^{-2/3} \times F^{2/3}$  می باشد. همچنین به کمک مرجع [17] رابطه غیر خطی نیروی فنریت بلبرینگ به صورت زیر استخراج می شود

$$F = K_b [(x \cos \theta_i + y \sin \theta_i) - C_r]^{3/2} \quad (13)$$

که در این رابطه  $C_r$  لقی در محل سطح تماس باتاقان و ساچمه و  $\theta_i$  زاویه

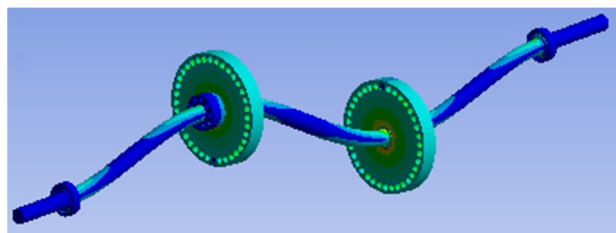


Fig. 3 ANSYS results associated with second system resonance in unbalance phase difference of 180 degrees in two discs

شکل 3 نتایج نرم افزار انسیس متناظر با دومین رزونانس سیستم در حالت اختلاف فاز 180 درجه ای جرمهای نابالانسی در دو دیسک

دستگاه XYZ در شکل 1 دستگاه اینرسی است که محور X در امتداد محور طولی روتور قرار دارد و شفت حول محور X می چرخد. راستای Y و Z، راستای ارتعاشات روتور است که عمود بر هم می باشند. اینرسی دورانی<sup>1</sup> شفت در معادلات در نظر گرفته شده، ولی از تغییر شکل برشی<sup>2</sup> صرف نظر شده است. دستگاه مختصات XYZ متصل به مقطع دلخواه در مقطع x روتور است.

با صرف نظر کردن از ارتعاشات محوری روتور، جابجائی جانبی روتور در دو راستای Y و Z به ترتیب  $v(x,t)$  و  $w(x,t)$  در نظر گرفته شده است. اگر x محل دلخواه یک مقطع بر روی روتور باشد، موقعیت یک ذره در آن مقطع برابر است با:

$$R_{rotor} = x e_x + v e_y + w e_z + y e_2 + z e_3 \quad (1)$$

$$\dot{R}_{rotor} = \dot{v} e_y + \dot{w} e_z + \omega (y e_2 + z e_3) \quad (2)$$

که در این دو رابطه  $e_x$  و  $e_y$  به ترتیب بردارهای یکه در راستای دستگاه XYZ است. همچنین  $e_2$  و  $e_3$  بردارهای یکه در راستای دستگاه xyz است و  $\omega = [\Omega, 0, 0; 0, \partial^2 v / \partial x \partial t, 0; 0, 0, \partial^2 w / \partial x \partial t]$  سرعت زاویه ای دستگاه xyz نسبت به XYZ است. انرژی جنبشی شفت (T) برای یک شفت کاملاً بالانس شده به صورت زیر محاسبه می گردد [14]:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \int_A \rho \dot{R}_{rotor} \dot{R}_{rotor} dA dx \quad (3)$$

$$\dot{R}_{rotor} \dot{R}_{rotor} = (\dot{v}^2 + \dot{w}^2) + \Omega^2 (y^2 + z^2) + \dot{v}^2 z^2 + \dot{w}^2 y^2 - 2yz\dot{v}\dot{w} \quad (4)$$

که  $\rho$  چگالی جرمی، A سطح مقطع و l طول روتور قبل از تغییر شکل می باشد. با فرض یکنواخت و دایره بودن مقطع روتور و با استفاده از روابط (1) الی (4) رابطه (3) به صورت رابطه (5) در خواهد آمد:

$$T_{rotor} = \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ m_r (\dot{v}^2 + \dot{w}^2) + I_1 \Omega^2 + I_2 \dot{v}^2 + I_3 \dot{w}^2 - I_{23} \dot{v} \dot{w} \right\} dx \quad (5)$$

که در این رابطه  $m_r$ ،  $I_1$ ،  $I_2$  و  $I_3$  به ترتیب به صورت زیر است:

$$m_r = \int_A \rho dA, \quad I_1 = \int_A \rho (y^2 + z^2) dA, \quad I_2 = \int_A \rho z^2 dA, \quad I_3 = \int_A \rho y^2 dA, \quad I_{23} = \int_A \rho yz dA \quad (6)$$

در رابطه بالا،  $m_r$  توزیع جرمی شفت،  $I_1$  ممان اینرسی جرمی قطبی،  $I_2$  ممان اینرسی جرمی قطری (خمشی) حول محور y و  $I_3$  ممان اینرسی جرمی قطری (خمشی) حول محور z روتور می باشد. به دلیل تقارن سطح مقطع  $I_2=I_3$  و  $I_{23}=0$  است که در نتیجه رابطه (5) به صورت زیر در می آید:

$$T_{rotor} = \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ m_r (\dot{v}^2 + \dot{w}^2) + I_1 \Omega^2 + I_2 (\dot{v}^2 + \dot{w}^2) \right\} dx \quad (7)$$

<sup>3</sup> eccentricity

<sup>4</sup> raceway

<sup>1</sup> rotary inertia

<sup>2</sup> shear deformation

$$\begin{aligned}
 I_1^* &= \frac{I_1}{m_r l^2}, I_2^* = \frac{I_2}{m_r l^2}, C_r^* = \frac{C_r}{l}, K_{b1}^* = \frac{K_{b1} l^{7/2}}{EI_1 \lambda_1^4}, \\
 K_{b2}^* &= \frac{K_{b2} l^2}{EI_2 \lambda_1^4}, C_{rot}^* = \frac{c_r l^2}{\lambda_1^2 \sqrt{m_r EI_2}}, e_{yd1}^* = \frac{m_{disk1} e_{yd1}}{m_r l^2}, \\
 e_{yd2}^* &= \frac{m_{disk2} e_{yd2}}{m_r l^2}, e_{zd1}^* = \frac{m_{disk1} e_{zd1}}{m_r l^2}, \\
 e_{zd2}^* &= \frac{m_{disk2} e_{zd2}}{m_r l^2}, x_{b1}^* = \frac{x_{b1}}{l}, x_{b2}^* = \frac{x_{b2}}{l}, \\
 x_{d1}^* &= \frac{x_{d1}}{l}, x_{d2}^* = \frac{x_{d2}}{l}
 \end{aligned} \quad (17)$$

که سرانجام معادله بدون بعد سیستم به صورت رابطه (18) درمی آید:

$$\begin{aligned}
 \ddot{z}^* + c_r^* \dot{z}^* + i l_1^* \Omega^* \ddot{z}^* - l_2^* \ddot{z}^* + EI_2^* z^{(IV)} + [m_{disk1}^* \ddot{z}^* - l_{disk1}^* \ddot{z}^* + i l_{disk1}^* \Omega^* \ddot{z}^* - [m_{disk1}^* i \Omega^{*2} (e_{zd1}^* + e_{zd2}^*) \\
 e^{i \Omega^* t}]] \delta(x^* - x_{d1}^*) + [m_{disk2}^* \ddot{z}^* - l_{disk2}^* \ddot{z}^* + i l_{disk2}^* \Omega^* \ddot{z}^* - [m_{disk2}^* i \Omega^{*2} (e_{zd2}^* + e_{zd2}^*) e^{i \Omega^* t}]] \\
 \delta(x^* - x_{d2}^*) + \sum_{i=1}^z K_{b1}^* [\text{imag}(z^* e^{i \theta_i}) - C_r^*]^{\frac{3}{2}} \\
 \text{heaviside}(\text{imag}(z^* e^{i \theta_i}) - C_r^*) \delta(x^* - x_{b1}^*) \\
 + \sum_{i=1}^z K_{b2}^* [\text{imag}(z^* e^{i \theta_i}) - C_r^*]^{\frac{3}{2}} \\
 \text{heaviside}(\text{imag}(z^* e^{i \theta_i}) - C_r^*) \delta(x^* - x_{b2}^*) = 0
 \end{aligned} \quad (18)$$

#### 8-4- اعمال روش جداسازی گالرکین

معادله (18) که معادله حرکت روتور مورد بحث است همچنان در فضای مکان و زمان است. برای اعمال روش گالرکین و جداسازی جملات زمان و مکان معادله، از شکل مود استاندارد برای روتور استفاده می شود. برای روتور مورد بحث، از شکل مود تیر دو سر آزاد که در شکل 4 دیده می شود [17,14]، مطابق رابطه (19) استفاده شده است:

$$\begin{aligned}
 \psi_i(x^*) &= \left\{ \cos(\beta_i l x^*) + \cosh(\beta_i l x^*) \right\} \\
 &+ \frac{\cos(\beta_i l) - \cosh(\beta_i l)}{\sinh(\beta_i l) - \sin(\beta_i l)} \cdot \{ \sin(\beta_i l x^*) - \sinh(\beta_i l x^*) \}, \\
 \beta_1 l &= 4.73, \quad \beta_2 l = 7.58, \quad \beta_3 l = 10.99, \quad 0 < x^* < 1
 \end{aligned} \quad (19)$$

جملات زمان و مکان ارتعاشات روتور با استفاده از رابطه (20) مجزا شده و به صورت معادلات دیفرانسیل عادی در می آید.

$$z^*(x^*, t^*) = \sum_{i=1}^n \psi_i(x^*) q_{zi}(t), \quad n \geq 1 \quad (20)$$

در رابطه بالا  $n$  تعداد مودهای انتخاب شده برای اعمال روش گالرکین در معادله روتور است.

#### 9-4- حل معادله حرکت سیستم

پس از اعمال روش گالرکین به معادله روتور با سه مود، معادلات به فضای حالت انتقال داده شده و تبدیل به شش معادله مرتبه اول شده است. با

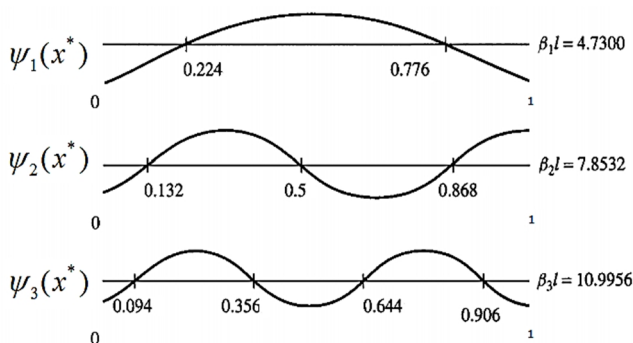


Fig. 4 first three modes of a free-free beam

شکل 4 سه شکل مود اول تیر دو سر آزاد [14]

ساجمه نام نسبت به محور عمود می باشد که به صورت زیر است:

$$\theta_i = \omega_c t + 2\pi i / Z \quad (14)$$

که در این رابطه  $\omega_c$  و  $Z$  به ترتیب سرعت زاویه ای قفسه بلبرینگ و تعداد ساجمه هاست و  $t$  نیز به زمان اشاره دارد.

#### 6-4- استخراج معادلات

با استفاده از ترم های انرژی جنبشی، پتانسیل و استهلاک که در بخش های گذشته استخراج شد و در نظر گرفتن نیروی بلبرینگ ها و با استفاده از اصل همیتون، معادلات ارتعاشات اجزای سیستم به صورت زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned}
 m_r \ddot{v} + c_r \dot{v} - I_1 \Omega \ddot{v}' - I_2 \ddot{v}'' + EI_2 v^{(IV)} + [m_{disk1} \ddot{v} - l_{disk1} \ddot{v}'' \\
 - J_{disk1} \Omega \ddot{v}'] \\
 - [m_{disk1} \Omega^2 (e_{zd1} \cos \Omega t - e_{yd1} \sin \Omega t)] \delta(x - x_{d1}) \\
 + [m_{disk2} \ddot{v} - l_{disk2} \ddot{v}'' - J_{disk2} \Omega \ddot{v}'] \\
 - [m_{disk2} \Omega^2 (e_{zd2} \cos \Omega t - e_{yd2} \sin \Omega t)] \delta(x - x_{d2}) \\
 + \sum_{i=1}^{n_s} K_{b1} [(w \cos \theta_i + v \sin \theta_i) - c_r]^{\frac{3}{2}} \cos \theta_i \delta(x - x_{b1}) \\
 + \sum_{i=1}^{n_s} K_{b2} [(w \cos \theta_i + v \sin \theta_i) - c_r]^{\frac{3}{2}} \cos \theta_i \delta(x - x_{b2}) = 0
 \end{aligned} \quad (15-الف)$$

$$\begin{aligned}
 m_r \ddot{w} + c_r \dot{w} - I_1 \Omega \ddot{w}' - I_2 \ddot{w}'' + EI_2 w^{(IV)} + [m_{disk1} \ddot{w} \\
 - l_{disk1} \ddot{w}'' + J_{disk1} \Omega \ddot{w}'] \\
 - [m_{disk1} \Omega^2 (e_{zd1} \sin \Omega t + e_{yd1} \cos \Omega t)] \delta(x - x_{d1}) \\
 + [m_{disk2} \ddot{w} - l_{disk2} \ddot{w}'' + J_{disk2} \Omega \ddot{w}'] \\
 - [m_{disk2} \Omega^2 (e_{zd2} \sin \Omega t + e_{yd2} \cos \Omega t)] \delta(x - x_{d2}) \\
 + \sum_{i=1}^z K_{b1} [(w \cos \theta_i + v \sin \theta_i) - c_r]^{\frac{3}{2}} \sin \theta_i \delta(x - x_{b1}) \\
 + \sum_{i=1}^z K_{b2} [(w \cos \theta_i + v \sin \theta_i) - c_r]^{\frac{3}{2}} \cos \theta_i \delta(x - x_{b2}) = 0
 \end{aligned} \quad (15-ب)$$

در این رابطه  $x = x_{b1}, x_{b2}$  مکان بلبرینگ هاست. با فرض  $z = v + iw$ ، معادلات به فضای مختلط منتقل شده و به صورت زیر در می آید:

$$\begin{aligned}
 m_r \ddot{z} + c_r \dot{z} - i l_1 \Omega \ddot{z}' - I_2 \ddot{z}'' + EI_2 z^{(IV)} + [m_{disk1} \ddot{z} - l_{disk1} \ddot{z}'' \\
 + i l_{disk1} \Omega \ddot{z}' - [m_{disk1} i \Omega^2 (e_{zd1} + e_{yd1}) e^{i \Omega t}]] \delta(x - x_{d1}) \\
 + [m_{disk2} \ddot{z} - l_{disk2} \ddot{z}'' + i l_{disk2} \Omega \ddot{z}'] \\
 - [m_{disk2} i \Omega^2 (e_{zd2} + e_{yd2}) e^{i \Omega t}] \delta(x - x_{d2}) \\
 + \sum_{i=1}^z K_{b1} [( \text{imag}(z e^{i \theta_i}) - c_r )^{\frac{3}{2}} \text{heaviside}(\text{imag}(z e^{i \theta_i}) \\
 - c_r) \delta(x - x_{b1}) + \\
 \sum_{i=1}^z K_{b2} [( \text{imag}(z e^{i \theta_i}) - c_r )^{\frac{3}{2}} \text{heaviside}(\text{imag}(z e^{i \theta_i}) - c_r) \delta(x \\
 - x_{b2}) = 0
 \end{aligned} \quad (16)$$

#### 7-4- بی بعد سازی معادلات

با استفاده از پارامترهای بدون بعد زیر بی بعد سازی معادله (16) انجام می گیرد.

$$\begin{aligned}
 z^* &= \frac{z}{l}, t^* = \frac{t}{a}, \Omega^* = \Omega a, i = \sqrt{-1}, a = \frac{1}{\lambda_1^2} \sqrt{\frac{m_r l^4}{EI_2}}, \\
 m_{disk1}^* &= \frac{m_{disk1}}{m_r l}, m_{disk2}^* = \frac{m_{disk2}}{m_r l}, l_{disk1}^* = \frac{l_{disk1}}{m_r l^3}, \\
 l_{disk2}^* &= \frac{l_{disk2}}{m_r l^3}, J_{disk1}^* = \frac{J_{disk1}}{m_r l^3}, J_{disk2}^* = \frac{J_{disk2}}{m_r l^3},
 \end{aligned}$$

استفاده از روش حل رانگ کوتا<sup>1</sup>، معادلات حاصل به صورت عددی با استفاده از تابع ode45 در نرم افزار متلب<sup>2</sup> حل می شود. محاسبات عددی بر اساس مشخصات سیستم دوار در فصل 2 و به ازای پارامترهای بدون بعد زیر صورت گرفته است.

$$m_{disk1}^* = m_{disk2}^* = 0.7183, I_{disk1}^* = I_{disk2}^* = 8.215e - 4$$

$$J_{disk1}^* = J_{disk2}^* = 1.6e - 3$$

$$I_1^* = 5e - 5, I_2^* = 2.5e - 5, C_r^* = 1.2e - 5, K_{b1}^* = 19.35,$$

$$K_{b2}^* = 19.35, c_{rotor}^* = 0.1, 0 < e_{zd1}^*, e_{zd1}^* < 2.34e - 5$$

همچنین مقدار نیروی فنریت بلبرینگ از رابطه (11) که همان رابطه کرامر است به دست می آید.

#### 10-4 - بررسی رفتارهای دینامیکی سیستم به کمک نتایج عددی

همانطور که قبلا بیان شد، برای بررسی رفتار ارتعاشی روتور و بلبرینگ، معادله (18) که پس از اعمال گالرکین (با سه مود)، تبدیل به شش معادله کوپل شده مرتبه اول شده است، به صورت عددی حل شده است. برای بررسی خواص ارتعاشی سیستم و تعیین خواص تناوبی یا غیر تناوبی بودن آن، نمودارهای پاسخ زمانی، مدار دینامیکی، پاسخ فرکانسی و نمودار آبشاری<sup>3</sup> [18] ارتعاشات روتور ترسیم می شود. برای اینکه نمودارهای رسم شده فقط نشان دهنده پاسخ پایدار سیستم باشد و رفتار گذرا در آن وجود نداشته باشد، زمان تحلیل به اندازه کافی طولانی در نظر گرفته شده است و 100 دوره تناوب آخر مورد بررسی قرار گرفته است.

نمودار کمپل فرکانس طبیعی سیستم روتوری مورد مطالعه برای سه مود اول در شکل 5 رسم شده است. طبق انتظار و بر اساس خاصیت سیستم های روتوری، سه مود پیش گرد<sup>4</sup> و سه مود پس گرد<sup>5</sup> وجود دارد. فرکانس تحریک خارجی که ناشی از نابالانسی بوده و برابر با دور روتور است، در شکل 5 با خط ممتد رسم شده است. فرکانس های پیش گرد طبق انتظار با افزایش دور و در نتیجه افزایش نیروی ژیروسکوپیک، افزایش می کنند. در روتورهای متقارن، نابالانسی فقط می تواند مودهای پیش گرد را تحریک کند [19]. محل تقاطع مودهای پیش گرد با فرکانس تحریک که با دایره قرمز نشان داده شده است، محل رزونانس را نشان می دهد. این رزونانس ها در فرکانس های بدون بعد 0.64، 1.8 و 5 رخ داده است. این موضوع با استفاده از نمودارهای پاسخ فرکانسی در ادامه تایید شده است. نرخ کاهش<sup>6</sup> به ازای دوره های متفاوت در شکل 6 رسم شده است. همانطور که مشخص است به ازای تمامی سرعت ها میزان نرخ کاهش منفی است که نشانه پایداری سیستم است. اگر میزان دمپینگ بدون بعد سازه ای سیستم به جای 0.1 برابر با 0.02 فرض شود (که معمولا در سیستم های فولادی اینگونه فرض می شود)، فرکانس طبیعی مقدار کمی تغییر کرده، و نمودار نرخ کاهش به صورت شکل 7 در می آید. در این حالت نیز نرخ کاهش برای تمامی مودها منفی است و نشانه پایداری کلیه مودها است. البته از آنجا که میزان دمپینگ سازه ای کمتر فرض شده است، مقدار قدر مطلق نرخ کاهش برای تمامی مودها کوچکتر شده است.

به ازای اختلاف فاز 90 درجه نابالانسی روی دو دیسک، پاسخ فرکانسی ارتعاشات روتور بر حسب سرعت دورانی در محل یاتاقان و دیسک به ترتیب در شکل های 8 و 9 نشان داده است. این نمودارها در محدوده بدون بعد سرعت

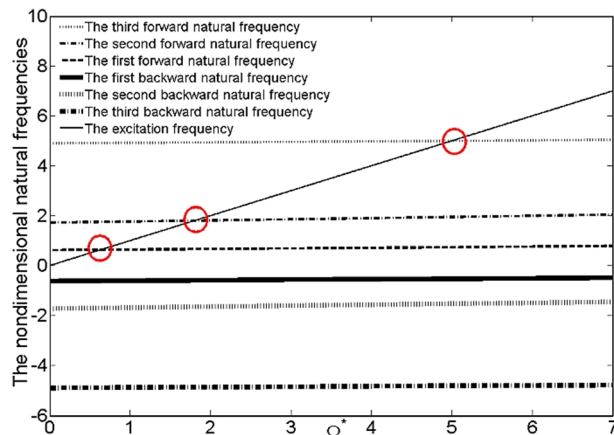


Fig5. Campbell diagram of the rotor for the first three modes

شکل 5 دیاگرام کمپل روتور برای سه مود اول

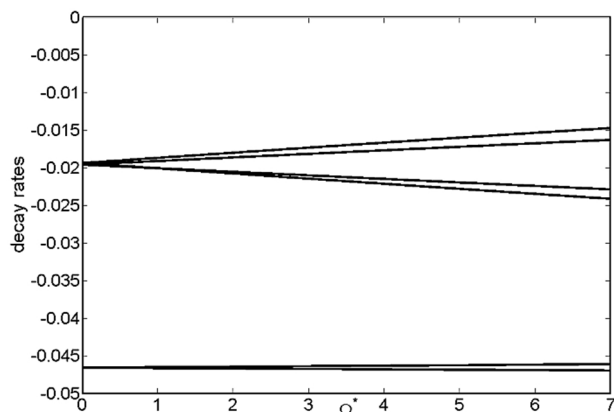


Fig. 6 Campbell diagram (decay rate) of the rotor for the first three modes for  $c_r^* = 0.1$

شکل 6 دیاگرام کمپل (نرخ کاهش) روتور برای سه مود اول به ازای  $c_r^* = 0.1$

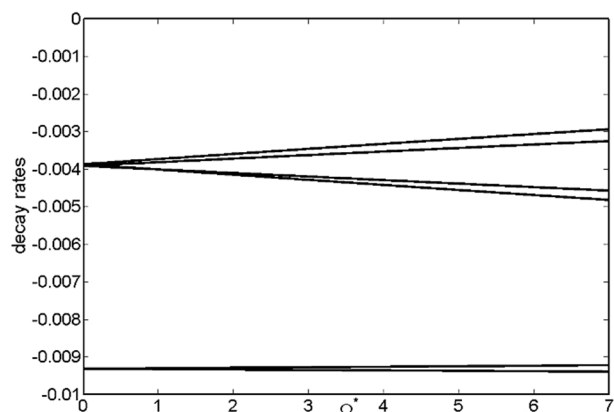


Fig. 7 Campbell diagram (decay rate) of the rotor for the first three modes for  $c_r^* = 0.02$

شکل 7 دیاگرام کمپل (نرخ کاهش) روتور برای سه مود اول به ازای  $c_r^* = 0.02$

<sup>1</sup> Runge Kutta

<sup>2</sup> MATLAB

<sup>3</sup> waterfall

<sup>4</sup> forward

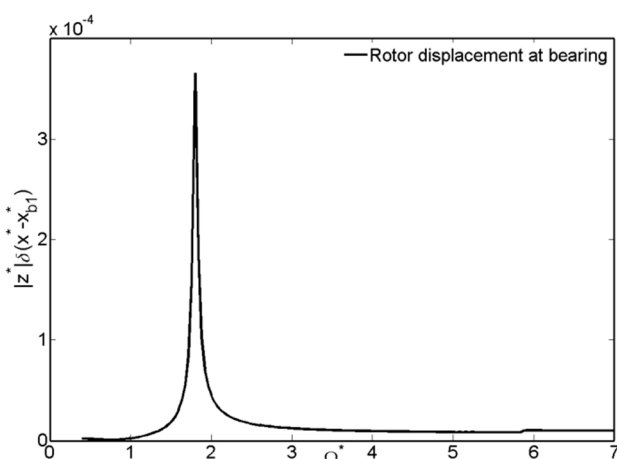
<sup>5</sup> backward

<sup>6</sup> decay rate



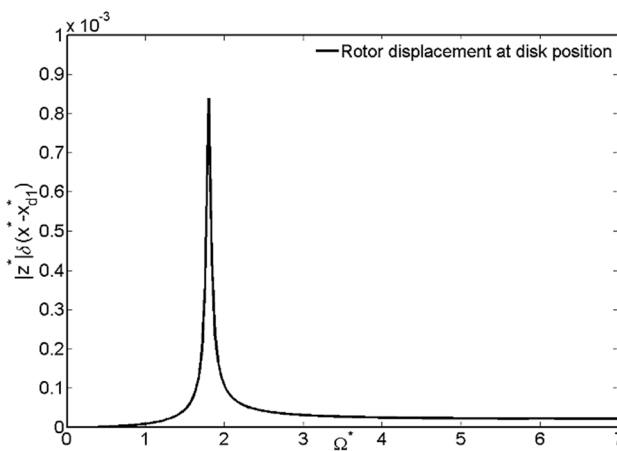
از طرف دیگر در شکل های 8 و 9 اختلاف فاز نابالانسی در دو دیسک 90 درجه فرض شده است. همانطور که مشخص است هر سه مود سیستم در این ناحیه فرکانسی تحریک شده است.

پاسخ فرکانسی ارتعاشات روتور بر حسب سرعت دورانی در محل یاتاقان و دیسک برای اختلاف فاز نابالانسی 180 درجه در دو دیسک به ترتیب در شکل های 10 و 11 نشان داده شده است. همانطور که مشخص است فقط مود دوم در این حالت تحریک شده است و مود اول و سوم تحریک نشده اند. این موضوع با توجه به اینکه در شکل مود اول و سوم جابجایی دو دیسک با توجه به تقارن قرارگیری شان مساوی و در مود دوم قرینه است و همچنین در اختلاف فاز 180 درجه نیروی نابالانسی دو دیسک کاملاً مساوی و در جهت متفاوت است، قابل توجیه است. در واقع به طور کلی در یک سیستم روتوری متقارن اگر دو نابالانسی اختلاف فاز 180 درجه داشته باشند و مکانشان متقارن باشد، فقط مودهای زوج تحریک می شوند. از طرف دیگر بر همین اساس اگر اختلاف فاز بین نابالانسی روی دو دیسک متقارن نصب شده روی روتور برابر با صفر باشد و به عبارتی هم جهت باشند، فقط مودهای فرد



**Fig. 10** Frequency response of vibration amplitude in bearing position versus rotor rotational speed for unbalance phase difference of 180 degrees in two discs

شکل 10 پاسخ فرکانسی دامنه ارتعاشات روتور در محل یاتاقان بر حسب سرعت دورانی روتور به ازای 180 درجه اختلاف فاز نابالانسی در دو دیسک



**Fig. 11** Frequency response of vibration amplitude in disc position versus rotor rotational speed for unbalance phase difference of 180 degrees in two discs

شکل 11 پاسخ فرکانسی دامنه ارتعاشات روتور در محل دیسک بر حسب سرعت دورانی روتور به ازای 180 درجه اختلاف فاز نابالانسی در دو دیسک

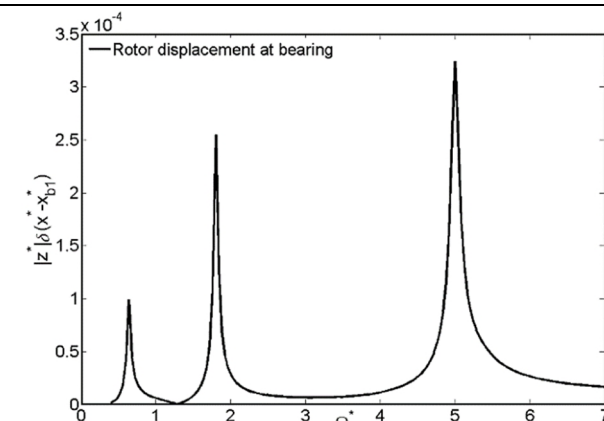
132.58 و 368.3 هرتز و یا 2830، 7955 و 22098 دور بر دقیقه است. در جدول 3 فرکانسهای به دست آمده از نرم افزار انسیس که در فصل 3 به آن اشاره شد، با فرکانسهای رزونانس به دست آمده از مدل سازی غیر خطی مقایسه شده است. نزدیکی فرکانسهای به دست آمده از این دو روش به خصوص دو مود اول که در محدوده کاری سیستم مورد نظر قرار دارد، نشان دهنده دقت مناسب مدل سازی غیر خطی است.

با دقت در شکل های 8 و 9 مشاهده می شود که بیشترین دامنه ارتعاشات در محل یاتاقان و روتور، به ترتیب در مود سوم و دوم رخ میدهد. این اتفاق با توجه به شکل مودهای سیستم در شکل 4 و دامنه یاتاقان و دیسک در هر مود قابل توجیه است.

**جدول 3** مقایسه فرکانسهای رزونانس به دست آمده از مدل سازی غیر خطی و نرم افزار انسیس

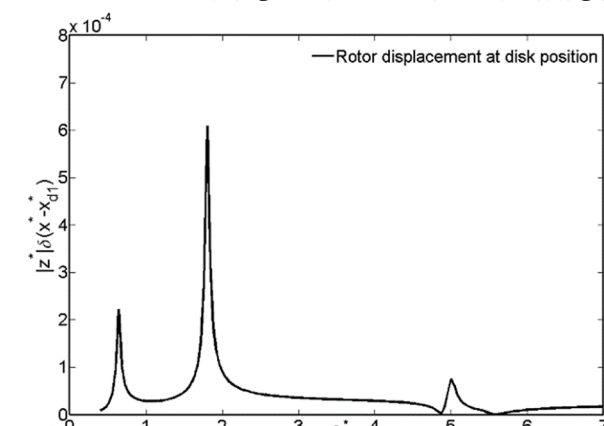
**Table 3** Comparison of resonance frequencies obtained from nonlinear modeling and ANSYS software

فرکانسهای رزونانس در مدل سازی غیر خطی	فرکانسهای رزونانس در افزار انسیس	اختلاف (%)
47.14	54.6	13.6
132.58	139.7	5.1
368.3	410.45	10.27



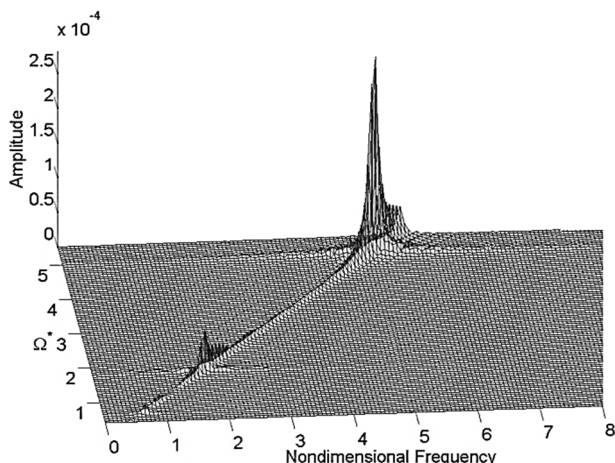
**Fig. 8** Frequency response of vibration amplitude in bearing position versus rotor rotational speed for unbalance phase difference of 90 degrees in two discs

شکل 8 پاسخ فرکانسی دامنه ارتعاشات روتور در محل یاتاقان بر حسب سرعت دورانی روتور به ازای 90 درجه اختلاف فاز نابالانسی در دو دیسک



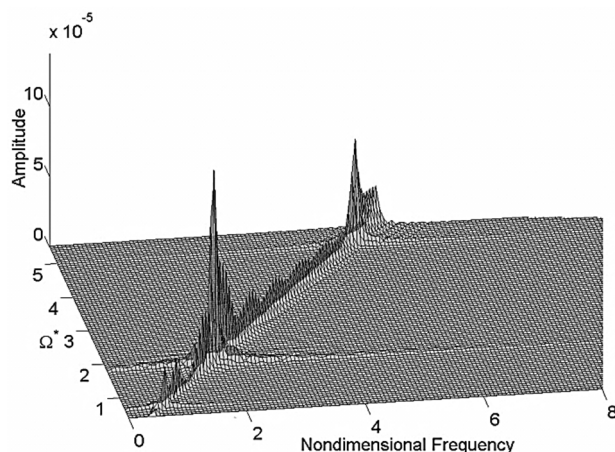
**Fig. 9** Frequency response of vibration amplitude in disc position versus rotor rotational speed for unbalance phase difference of 90 degrees in two discs

شکل 9 پاسخ فرکانسی دامنه ارتعاشات روتور در محل دیسک بر حسب سرعت دورانی روتور به ازای 90 درجه اختلاف فاز نابالانسی در دو دیسک



**Fig. 14** waterfall plot of vibration amplitude in bearing position versus rotor rotational speed for unbalance phase difference of 90 degrees in two discs

شکل 14 نمودار آبخاری دامنه ارتعاشات روتور در محل یاتاقان بر حسب سرعت دورانی روتور به ازای 90 درجه اختلاف فاز نابالانسی در دو دیسک

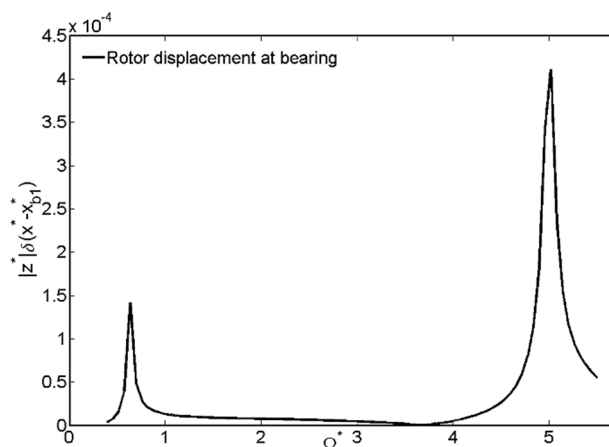


**Fig. 15** waterfall plot of vibration amplitude in disc position versus rotor rotational speed for unbalance phase difference of 90 degrees in two discs

شکل 15 نمودار آبخاری دامنه ارتعاشات روتور در محل دیسک بر حسب سرعت دورانی روتور به ازای 90 درجه اختلاف فاز نابالانسی در دو دیسک

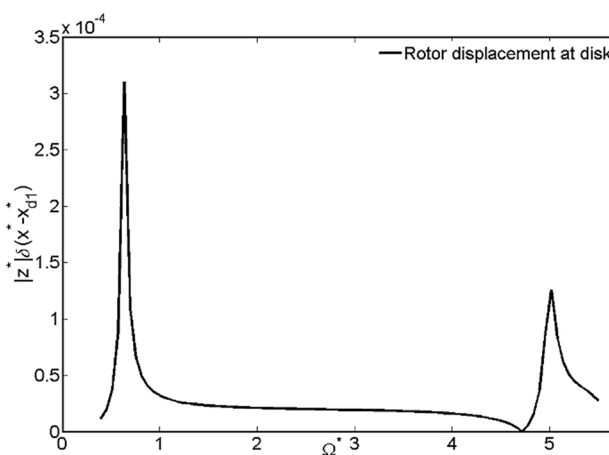
دورانی بدون بعد 0.64 روتور (فرکانس رزونانس اول) و شکل مود سیستم، در محل یاتاقان و دیسک به ترتیب در شکلهای 16 و 17 نشان داده شده است. از نمودارهای a، b و c در این دو شکل مشخص است که سیستم دارای پاسخ متناوب با فرکانس دورانی روتور 0.64 است. همچنین در نمودار d از این دو شکل، مود ارتعاشی سیستم در این حالت نشان داده شده است و همانطور که مشخص است شبیه به مود اول سیستم در حالت دو سر آزاد در شکل 4 است. البته این مود ترکیبی از سه مود ذکر شده در شکل 5 است و سهم این سه مود به ترتیب برابر با  $3.26 \times 10^{-4}$ ،  $3.07 \times 10^{-6}$  و  $7.36 \times 10^{-6}$  است. این مقادیر در واقع دامنه هر مود در پاسخ سیستم است که در حل عددی معادلات سیستم به دست می آیند.

نمودارهای پاسخ زمانی، مدار دینامیکی، پاسخ فرکانسی ارتعاشات روتور در سرعت های دورانی بدون بعد 1.8 و 5 روتور (فرکانس رزونانس دوم و سوم) و شکل مود سیستم در این حالتها، در محل یاتاقان و دیسک به ترتیب در شکلهای 18 الی 21 نشان داده شده است. همانند مود اول، در این نمودارها



**Fig. 12** Frequency response of vibration amplitude in bearing position versus rotor rotational speed for unbalance phase difference of zero in two discs

شکل 12 پاسخ فرکانسی دامنه ارتعاشات روتور در محل یاتاقان بر حسب سرعت دورانی روتور به ازای اختلاف فاز نابالانسی صفر (هم فاز) در دو دیسک



**Fig. 13** Frequency response of vibration amplitude in disc position versus rotor rotational speed for unbalance phase difference of zero in two discs

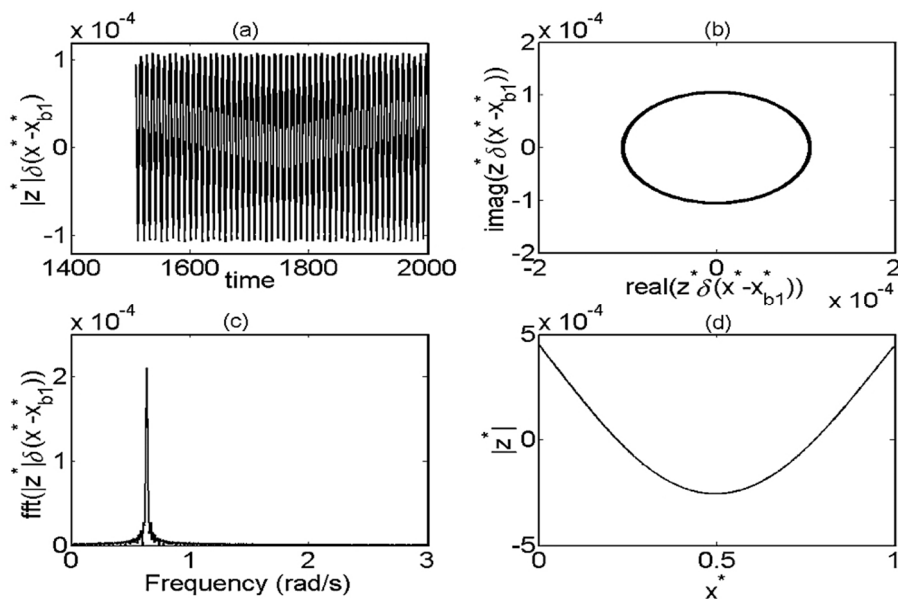
شکل 13 پاسخ فرکانسی دامنه ارتعاشات روتور در محل دیسک بر حسب سرعت دورانی روتور به ازای اختلاف فاز نابالانسی صفر (هم فاز) در دو دیسک

تحریک شده که این موضوع در شکلهای 12 و 13 دیده می شود. همچنین در استاندارد ای پی آی [20] بیان شده است که برای تحریک یک توربین گاز باید دو نابالانسی مختلف جهت در نزدیکی یاتاقان ها و یک نابالانسی دیگر در وسط توربین با 90 درجه اختلاف قرار دارد که ریشه در مسائل بیان شده در بالا دارد.

نمودار آبخاری ارتعاشات سیستم در محل یاتاقان و دیسک به ازای پارامترهای سیستم و اختلاف فاز 90 درجه نابالانسی روی دو دیسک، به ترتیب در شکلهای 14 و 15 نشان داده شده است. این نمودارها در محدوده بدون بعد سرعت  $0 < \Omega^* < 5.5$  رسم شده اند. همانطور که از این نمودارها مشخص است، در تمامی سرعت ها ارتعاشات سنکرون در سیستم وجود دارد و فرکانس غالب ارتعاشات، فرکانس سرعت دورانی روتور است. همانطور که در شکل 8 مشخص است، در دورهای بدون بعد 0.64، 1.8 و 5 رزونانس رخ می دهد.

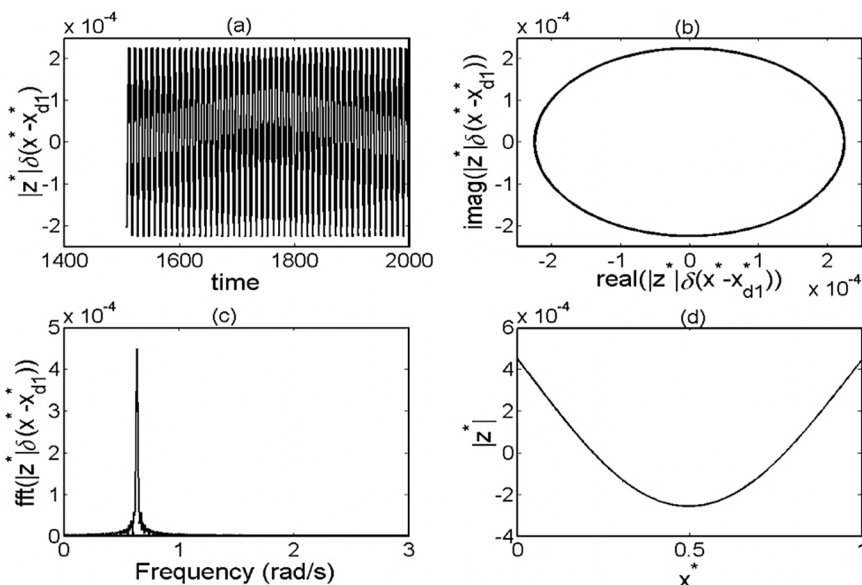
از طرف دیگر نمودارهای پاسخ زمانی، مدار دینامیکی، پاسخ فرکانسی ارتعاشات روتور با 90 درجه اختلاف فاز نابالانسی در دو دیسک و در سرعت





**Fig. 16** a) time response b) dynamic orbit c) frequency response d) mode shape, associated with rotor vibration in bearing position for unbalance phase difference of 90 degrees in two discs and in non-dimensional rotational speed of 0.64 (first resonance frequency)

شکل 16 (a) پاسخ زمانی (b) مدار دینامیکی (c) پاسخ فرکانسی (d) شکل مود متناظر با ارتعاشات روتور در محل یاتاقان به ازای 90 درجه اختلاف فاز نابالانسی در دو دیسک و در سرعت دورانی بدون بعد 0.64 (فرکانس رزونانس اول)



**Fig. 17** a) time response b) dynamic orbit c) frequency response d) mode shape, associated with rotor vibration in disc position for unbalance phase difference of 90 degrees in two discs and in non-dimensional rotational speed of 0.64 (first resonance frequency)

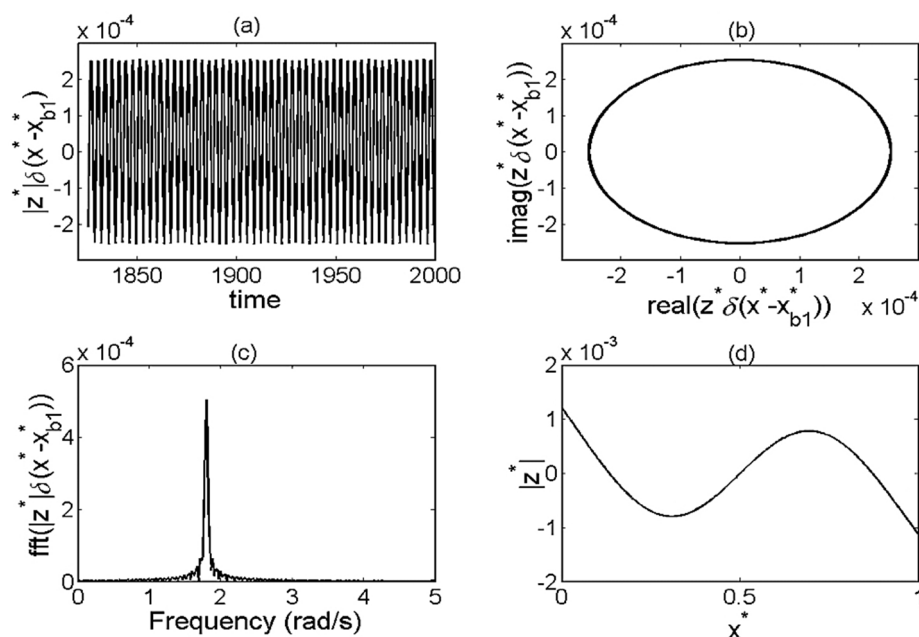
شکل 17 (a) پاسخ زمانی (b) مدار دینامیکی (c) پاسخ فرکانسی (d) شکل مود، ارتعاشات روتور در محل دیسک به ازای 90 درجه اختلاف فاز نابالانسی در دو دیسک و در سرعت دورانی بدون بعد 0.64 (فرکانس رزونانس اول)

برای استخراج معادلات استفاده شده و برای کاهش تعداد معادلات، تبدیل مختصات مختلط بکار گرفته می شود. پس از اعمال روش جداسازی گالرکین به معادله روتور با سه مود، معادلات به فضای حالت انتقال داده شده و تبدیل به شش معادله مرتبه اول می شود. در نهایت با استفاده از روش رانگ-کوتا، معادلات حاصل به صورت عددی حل شده است. برای بررسی خواص ارتعاشی سیستم، نمودارهای پاسخ زمانی، مدار دینامیکی، شکل مود و پاسخ فرکانسی ارتعاشات روتور ترسیم شده است. همچنین به منظور صحت سنجی روش مدل سازی غیر خطی، سیستم مذکور در نرم افزار انسیس مورد تحلیل قرار گرفته است. مقایسه نتایج تحلیل در نرم افزار انسیس و نتایج حاصل از

نیز مشخص است که سیستم دارای حرکت متناوب و با فرکانس دورانی روتور است. همچنین شکل مود دوم و سوم رزونانسی سیستم به ترتیب شبیه به شکل مود دوم و سوم سیستم در حالت دو سر آزاد در شکل 4 هستند. البته این دو مود نیز ترکیبی از سه مود ذکر شده در شکل 4 است و سهم این سه مود به ترتیب برای مود دوم برابر با  $2.54 \times 10^{-5}$ ،  $8.88 \times 10^{-4}$  و  $4.63 \times 10^{-6}$  و برای مود سوم  $1.62 \times 10^{-4}$ ،  $2.44 \times 10^{-5}$  و  $5.2 \times 10^{-4}$  است.

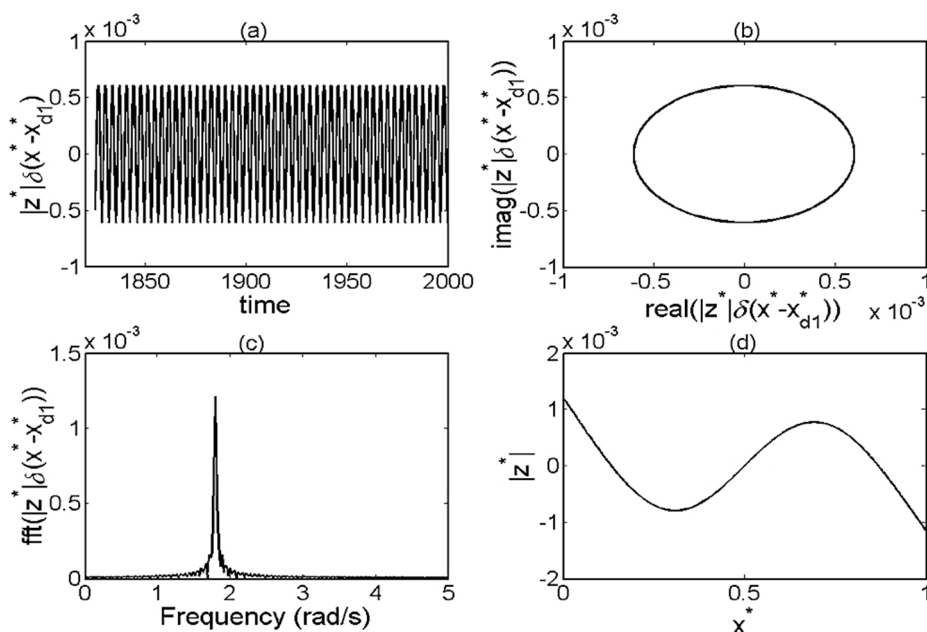
### 5- نتیجه گیری

در این مقاله به مدل سازی غیرخطی یک سیستم دوار به صورت مدل روتور-بلبرینگ و دیسک در دوره های متفاوت پرداخته شده است. از روش همیلتون



**Fig. 18** a) time response b) dynamic orbit c) frequency response d) mode shape, associated with rotor vibration in bearing position for unbalance phase difference of 90 degrees in two discs and in non-dimensional rotational speed of 1.8 (second resonance frequency)

شکل 18 (a) پاسخ زمانی (b) مدار دینامیکی (c) پاسخ فرکانسی (d) شکل مود ارتعاشات روتور در محل یاتاقان به ازای 90 درجه اختلاف فاز نابالاسی در دو دیسک و در سرعت دورانی بدون بعد 1.8 (فرکانس رزونانس دوم)



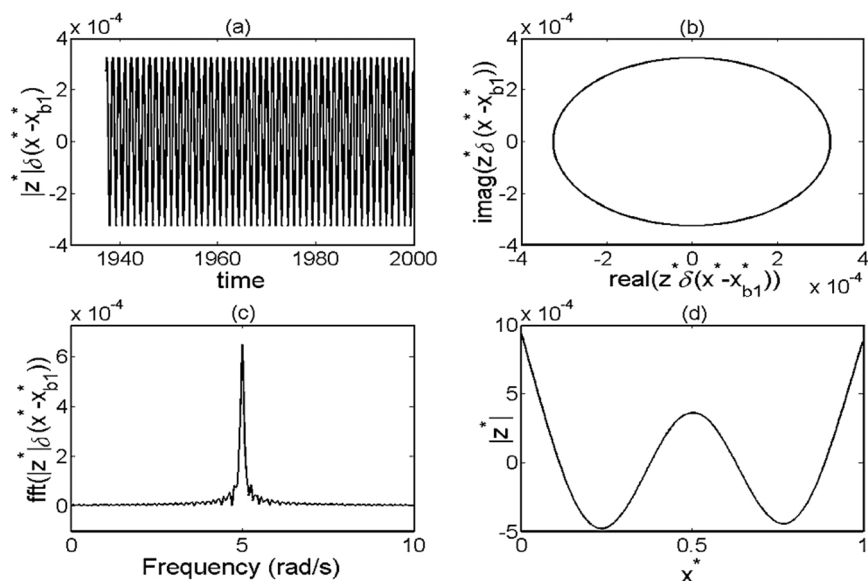
**Fig. 19** a) time response b) dynamic orbit c) frequency response d) mode shape, associated with rotor vibration in disc position for unbalance phase difference of 90 degrees in two discs and in non-dimensional rotational speed of 1.8 (second resonance frequency)

شکل 19 (a) پاسخ زمانی (b) مدار دینامیکی (c) پاسخ فرکانسی (d) شکل مود ارتعاشات روتور در محل دیسک به ازای 90 درجه اختلاف فاز نابالاسی در دو دیسک و در سرعت دورانی بدون بعد 1.8 (فرکانس رزونانس دوم)

سرعت دورانی روتور است. همچنین بیشینه دامنه ارتعاشات در یاتاقان و روتور، به ترتیب در مود سوم و دوم رخ می‌دهد. در اختلاف فاز نابالاسی 90 درجه در دو دیسک، هر سه مود سیستم در ناحیه فرکانسی مورد مطالعه تحریک شده است و به ازای اختلاف فازهای نابالاسی 0 و 180 درجه در دو دیسک، به ترتیب فقط مودهای فرد (اول و سوم) و زوج (دوم) تحریک شده‌اند.

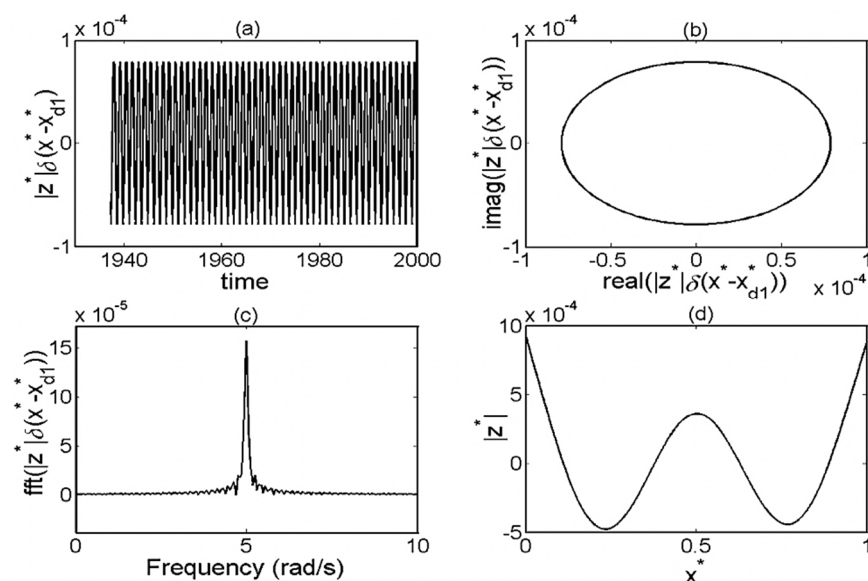
مدلسازی غیر خطی نشان از انطباق قابل قبول مقادیر فرکانس‌های رزونانس سیستم در این دو تحلیل دارد که خود تاییدی است بر اعتبار مدل‌سازی غیر خطی در این مقاله.

نتایج مدل‌سازی غیرخطی نشان می‌دهد که نرخ کاهش برای تمامی مودها منفی است که بیانگر پایداری کلیه مودها است. در تمامی سرعت‌ها ارتعاشات سنکرون در سیستم وجود دارد و فرکانس غالب ارتعاشات، فرکانس



**Fig. 20** a) time response b) dynamic orbit c) frequency response d) mode shape, associated with rotor vibration in bearing position for unbalance phase difference of 90 degrees in two discs and in non-dimensional rotational speed of 5 (third resonance frequency)

شکل 20 (a) پاسخ زمانی (b) مدار دینامیکی (c) پاسخ فرکانسی (d) شکل مود ارتعاشات روتور در محل یاتاقان به ازای 90 درجه اختلاف فاز نابالاسی در دو دیسک و در سرعت دورانی بدون بعد 5 (فرکانس رزونانس سوم)



**Fig. 21** a) time response b) dynamic orbit c) frequency response d) mode shape, associated with rotor vibration in disc position for unbalance phase difference of 90 degrees in two discs and in non-dimensional rotational speed of 5 (third resonance frequency)

شکل 21 (a) پاسخ زمانی (b) مدار دینامیکی (c) پاسخ فرکانسی (d) شکل مود ارتعاشات روتور در محل دیسک به ازای 90 درجه اختلاف فاز نابالاسی در دو دیسک و در سرعت دورانی بدون بعد 5 (فرکانس رزونانس سوم)

ممان اینرسی جرمی قطبی	$I_1$	6- فهرست علائم	
ممان اینرسی جرمی قطری (خمشی) حول محور $y$	$I_2$	$A$	سطح مقطع
ممان اینرسی جرمی قطری (خمشی) حول محور $z$	$I_3$	$a$	زمان بی بعد
ممان اینرسی قطری (خمشی)	$I_{disk}$	$G_{rotor}$	ضریب دمپینگ روتور
ممان اینرسی قطبی	$J_{disk}$	$C_r$	لقی بین ساچمه و حلقه های بلبرینگ
نیروی فنریت بلبرینگ	$K_b$	$e_z, e_y, e_x$	بردارهای یکه در راستای دستگاه XYZ
طول روتور قبل از تغییر شکل	$l$	$e_3, e_2, e_1$	بردارهای یکه در راستای دستگاه xyz
توزیع جرمی شفت	$m_r$	$e_{zdi}, e_{ydi}$	توزیع جرم خارج از مرکز در جهت محورهای $y$ و $z$
جمله زمان شکل مود تیر	$q$	$F$	نیروی فنریت بلبرینگ

- absorber, *Global Design to Gain a Competitive Edge*, pp. 691-697, London: Springer, 2008.
- [7] M. S. Patil, Jose Mathew, P. K. Rajendrakumar, Sandeep Desai, A theoretical model to predict the effect of localized defect on vibrations associated with ball bearing, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 52, No. 9, pp.1193-1201, 2010.
- [8] C. Bai, H. Zhang, Q. Xu, Subharmonic resonance of a symmetric ball bearing-rotor system, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 59, No. April, pp.1-10, 2013.
- [9] H. Zhou, Gu.Luo, G. Chen, F. Wang, Analysis of the nonlinear dynamic response of a rotor supported on ball bearings with floating-ring squeeze film dampers, *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 59, pp.65-77, 2013.
- [10] X. Zhang, Q. Han, Z. Peng, F. Chu, A new nonlinear dynamic model of the rotor-bearing system considering preload and varying contact angle of the bearing, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 22, No. 1, pp. 821-841, 2015
- [11] W. Liu, Y. Zhang, Z. J. Feng, J. S. Zhao, D. Wang, A study on waviness induced vibration of ball bearings based on signal coherence theory, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 333, pp.6107-6120, 2014.
- [12] Q. He, H. Peng, P. Zhai, Y. Zhen, The effects of unbalance orientation angle on the stability of the lateral torsion coupling vibration of an accelerated rotor with a transverse breathing crack. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol.75, pp. 330-344, 2016.
- [13] N. H. Chandra, A. S. Sekhar, , Fault detection in rotor bearing systems using time frequency techniques, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 72, pp. 105-133, 2016.
- [14] S. S. Rao, *Vibration of Continuous Systems*, pp. 331-333, New Jersey: John Wiley & Sons, 2007.
- [15] S. E. Khadem, M. Shahgholi, S. A. A. Hosseini, , Primary resonances of a nonlinear in-extensional rotating shaft, *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 45, No. 8, pp. 1067-1081, 2010.
- [16] D. Mourad, N. E. Titouche, M. Djaoui, O. mohammad, The calculation of ball bearing nonlinear stiffness theoretical and experimental study with comparisons, *Journal of engineering and applied sciences*, Vol. 3, No. 11, pp. 872-883, 2008.
- [17] M. Ansari, E. Esmailzadeh, D. Younesian, Internal-external resonance of beams on non-linear viscoelastic foundation traversed by moving load, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 61, pp. 163-182, 2010.
- [18] A. H. Nayfeh, B. Balachandran, *Applied Nonlinear Dynamics*, pp. 68-269, New York: John Wiley & Sons, 2004.
- [19] D. J. Ewins, *Modal Testing: Theory, Practice and Application*, Second Edition, pp. 85-95, , London: Research Studies Press, 2000.
- [20] Standard Paragraphs AP. Publication 684, Tutorial on the API Standard Paragraphs Covering Rotor Dynamics and Balancing: An Introduction to Lateral Critical and Train Torsional Analysis and Rotor Balancing, *American Petroleum Institute*, February 1996, Copyright (c). 2014.

موقعیت یک ذره در یک مقطع از روتور	$R_{\text{rotor}}$
زمان	$t$
انرژی جنبشی	$T$
انرژی پتانسیل خمشی روتور	$V$
جابجائی جانبی روتور در راستای Y	$v(x, t)$
جابجائی جانبی روتور در راستای Z	$w(x, t)$
کار ناپایستار دمپینگ روی روتور	$w_{nc-\text{rotor}}$
محل دیسک روی روتور	$x_{di}$
مکان بلبرینگ‌ها	$x_{b1}, x_{b2}$
مکان دیسک	$x_d$
تعداد ساچمه بلبرینگ	$Z$
علائم یونانی	
چگالی جرمی	$\rho$
سرعت زاویه‌ای دستگاه xyz نسبت به XYZ	$\omega$
سرعت زاویه‌ای در راستای محور روتور	$\Omega$
زاویه ساچمه ام نسبت به محور عمود	$\theta_i$
سرعت زاویه‌ای قفسه بلبرینگ	$\omega_c$
جمله مکان شکل مود تیر	$\psi$

#### 7- مراجع

- [1] S. K. Sinha, Dynamic characteristics of a flexible bladed-rotor with Coulomb damping due to tip-rub, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 273, No. 4, pp.875-919, 2004.
- [2] N. Lesaffre, J. J. Sinou, F. Thouverez, Model and stability analysis of a flexible bladed rotor, *International Journal of Rotating Machinery*, Vol. 293, Article ID 63756, pp. 409-416, 2006.
- [3] Y. Ishiadi, T. Inoue, T. Kagawa, M. Ueda, Nonlinear analysis and experiments on torsional vibration of a rotor with a centrifugal pendulum vibration absorber, *Journal of system and dynamics*, Vol. 2, No. 3, pp.715-726, 2008.
- [4] I. Yukio, I. Tsuyoshi, Vibration control of nonlinear rotor systems using dynamic absorber, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers*, Vol. 68, No. 671, pp. 1972-1979, 2002.
- [5] Y. Ishida, New passive control methods for reducing vibrations of rotors: Discontinuous spring characteristics and ball balancers, *IUTAM Symposium on Emerging Trends in Rotor Dynamics IUTAM Bookseries*, pp.387-403, 2011.
- [6] C. Bai, F. Song, A natural frequency variable magnetic dynamic