



مطالعه تحلیلی و عددی رفتار مکانیکی بافت کبد در بارگذاری فشار تک محوره

زهره متین قهفرخی¹، مهدی مقیمی زند²، مهدی سلمانی تهرانی^{3*}

1- دانشجوی دکترا، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان

2- استادیار، مهندسی مکانیک، پردیس فنی دانشگاه تهران، تهران

3- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان

*اصفهان، صندوق پستی 8415683111، tehrani@cc.iut.ac.ir

چکیده

این مقاله به مطالعه و تدوین مدل ساختاری مناسب برای توصیف رفتار مکانیکی بافت کبد می‌پردازد. برای این منظور تغییر شکل بافت کبد در آزمون فشار تک‌محوره، براساس دو مدل ساختاری هایپر الاستیک و هایپرویسکو الاستیک، به ازای دو نرخ کرنش متفاوت، به صورت تحلیلی و عددی مطالعه و بررسی شده است. مدل‌ها بر پایه تابع انرژی چند جمله‌ای استخراج و ضریب‌های معادله ساختاری با استفاده از برازش نمودار تنش-کرنش حاصل از این دو مدل بر نتایج تجربی موجود، به دست آمده‌اند. همچنین برای تعیین رفتار بافت در شرایط بارگذاری دیگر، مدل‌ها برای بارگذاری کشش تک‌محوره و برش نیز بررسی شده‌اند. شبیه‌سازی‌های عددی با استفاده از نرم‌افزار آباکوس، که هر دو مدل در آن به صورت پیش‌فرض وجود دارند، انجام شده‌اند. به منظور اعتبار سنجی روش‌های نظری، نتایج حل تحلیلی و شبیه‌سازی اجزای محدود با یکدیگر و همچنین با داده‌های تجربی موجود مقایسه شد. بررسی نتایج نشان می‌دهد حل تحلیلی و شبیه‌سازی عددی انجام شده برای پیش‌بینی رفتار بافت کبد، تقریباً بر هم منطبق و به علاوه در مقایسه با نتایج تجربی، از دقت خوبی برخوردار بوده و مدل‌ها دارای پایداری قابل قبولی هستند. آن‌گاه اثر ضریب اصطکاک بین نمونه و صفحه فشارنده بررسی شده است. نتایج نشان می‌دهند با افزایش ضریب اصطکاک، تنش ایجاد شده افزایش می‌یابد. بنابراین پیش‌بینی دقیق‌تر رفتار بافت مستلزم انتخاب صحیح ضریب اصطکاک است. معادله‌های ساختاری انتخاب شده برای پیش‌بینی رفتار کبد، به دلیل غیر صفر بودن تمامی ثابت‌های مادی، در مقایسه با پژوهش‌های مشابه برای بافت‌های دیگر، از لحاظ ریاضی پیچیده‌تر بوده و حل تحلیلی آن چالش و نوآوری اصلی این مقاله به شمار می‌رود.

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 16 خرداد 1395

پذیرش: 17 مرداد 1395

ارائه در سایت: 21 شهریور 1395

کلید واژگان:

بافت نرم کبد

رفتار مکانیکی

حل تحلیلی

شبیه‌سازی اجزای محدود

مدل هایپرویسکو الاستیک

Analytical solution and simulation of the liver tissue behavior under uniaxial compression test

Zahra Matin Ghahfarokhi¹, Mahdi Moghimi Zand², Mehdi Salmani Tehrani^{1*}

1- Department of Mechanical Engineering, Isfahan University of Technology, Isfahan, Iran

2- Department of Mechanical Engineering, College of Engineering, University of Tehran, Tehran, Iran

*P.O.B. 8415683111, Isfahan, Iran, tehrani@cc.iut.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 05 June 2016
Accepted 07 August 2016
Available Online 11 September 2016

Keywords:

Liver soft tissue
mechanical behavior
analytical solution
finite element simulation
hyperviscoelastic model

ABSTRACT

This paper deals with studying and developing a proper constitutive model for liver tissue. For this purpose, deformation of liver in uniaxial compression, for two different strain rates, is analytically and numerically studied based on both hyperelastic and hyperviscoelastic constitutive models. Both of the models are based on a polynomial-form energy function. The stress-strain curves, for uniaxial compression obtained from these models have been fitted to the existing experimental data to determine the model coefficients. Moreover, the models are examined in uniaxial tension and pure shear loadings. ABAQUS commercial software, in which both of the models are available, has been used for numerical simulations. Then, to evaluate the computational analyses, analytical and numerical results have been compared with each other and also with the existing experimental data. The results show that the presented analytical solution and FE simulation are very close together and also both are accurate enough compared with the experimental data, and an acceptable stability is observed. Furthermore, the effect of friction coefficient between the sample and the compressing plate in uniaxial compression test has been investigated. FE simulation results show that the stress will increase with increasing friction coefficient. This implies that friction coefficient must be carefully selected to accurately describe the tissue's response. Compared with previously published researches on other tissues, the constitutive models adopted here to predict liver behavior are mathematically more complex due to non-zero material constants. Analytical solution of these constitutive models is, in fact, the main challenge and innovation of this paper.

مانند کلیه، کبد و طحال از جمله مهمترین عوامل مرگومیر در تصادفات

بررسی‌های انجام شده نشان می‌دهند که آسیب به اندام‌های داخلی بدن وسایل نقلیه هستند [1]. از این رو درک خواص مکانیکی بافت‌های نرم برای

1- مقدمه

Please cite this article using:

Z. Matin Ghahfarokhi, M. Moghimi Zand, M. Salmani Tehrani, Analytical solution and simulation of the liver tissue behavior under uniaxial compression test, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 9, pp. 47-56, 2016 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

تشخیص ضربه به منظور ارزیابی صدمه وارد شده به اندام‌های درونی بدن، شبیه‌سازی کامپیوتری عمل‌های جراحی جهت آموزش، طراحی بهتر ابزار جراحی، تشخیص بیماری‌های کبد و عکس‌العمل بین بافت و ابزار جراحی اهمیت به‌سزایی دارد [2-6].

کبد به‌عنوان یک بافت نرم و یکی از حیاتی‌ترین عضوهای بدن، وظیفه‌ی ذخیره‌سازی گلیکوژن، دفع سموم بدن، نگهداری تعادل آن و تولید صفرا را برعهده دارد [7]. تغییر شکل بافت کبد، به‌دلیل ویژگی لزجت، به سرعت بارگذاری وابسته است [8]. از این‌رو باید از مدل‌هایی برای پیش‌بینی رفتار بافت استفاده کرد که ویژگی‌های لازم مانند لزجت و غیرخطی بودن تغییر شکل در طی بارگذاری را شامل شود. از سوی دیگر پژوهش‌ها نشان می‌دهند بافت نرم در بارگذاری‌های مختلف مانند کشش، فشار و برش، که در هنگام عمل‌های جراحی بر آن وارد می‌شود، رفتار متفاوتی از خود نشان می‌دهد. بنابراین مشخصه‌ها و رفتار بافت نرم در هر یک از حالت تغییر شکل باید در نظر گرفته شود [9,2]. اما هیچ متن و سند استاندارد جهت تعیین ویژگی‌های مکانیکی بافت‌های نرم در دسترس نیست. بر همین اساس پژوهشگران در سال‌های اخیر، به‌منظور مدل‌سازی پاسخ بافت‌های نرم برای توسعه تکنیک‌های جراحی، از روش‌های تجربی مانند آزمون‌های فشار [12-10]، آزمون کشش خالص [13-15]، ورود سوزن [16-18] و اعمال نیرو به‌وسیله ایجاد خلاء¹ [19,4]، به‌همراه شبیه‌سازی عددی اجزای محدود به‌صورت گسترده‌ای استفاده کرده‌اند.

مطالعه پژوهش‌های انجام شده نشان می‌دهد مدل‌سازی رفتار مکانیکی بافت‌های نرم مورد توجه پژوهشگران بسیاری قرار گرفته است. به‌عنوان نمونه می‌توان به فعالیت‌های یارپوزلو و همکارانش [7] اشاره کرد. آن‌ها در انجام آزمایش‌های خود سعی کرده‌اند ارتباط موجود بین خواص مکانیکی و خصوصیات بافت‌شناسی کبد را آشکار کنند. آن‌ها دریافته‌اند که سختی، لزجت و چقرمگی شکست بافت کبد گاو با گذشت زمان بعد از کشتار افزایش می‌یابد. همچنین می‌توان به انجام آزمون فشار تک محوره بر روی 36 نمونه از کبد انسان توسط کمپر و همکارانش [2] اشاره کرد. این نمونه‌ها در 48 ساعت بعد از مرگ تهیه شده و با نرخ‌های کرنش متفاوت تا مرحله شکست بارگذاری شده‌اند. هدف آن‌ها از انجام این آزمایش بررسی وابستگی خواص بافت کبد به نرخ بارگذاری است. آن‌ها دریافته‌اند که تنش شکست با افزایش نرخ بارگذاری به‌شدت افزایش یافته، در حالی که کرنش شکست به‌شدت کاهش می‌یابد.

یومال و همکارانش [1] در بررسی‌های خود با انجام آزمون کشش بر روی غشای کلیه و آزمون فشار بر روی کلیه و طحال، دریافته‌اند که کلیه در بین بافت‌های آزمایش شده دارای بیشترین سختی و طحال نرم‌ترین بافت است. آن‌ها در طی انجام تحقیقات خود مدول الاستیک هر بافت را برای کرنش‌های کم و زیاد تخمین زده و با استفاده از مماس کردن نمودارهای تجربی و نمودارهای نظری، مدل‌های هایپرالاستیکی برای هر بافت پیشنهاد کرده‌اند. همچنین می‌توان به مدل هایپرویسکووالاستیک شبه‌خطی ارائه شده برای کبد گاو توسط شریفی سده و همکارانش [20] اشاره کرد. آن‌ها با انجام آزمون فشار تک‌محوره بر روی نمونه‌های استوانه‌ای، پاسخ تنش-کرنش نمونه را ثبت کرده‌اند. سپس با برازش نمودار تجربی و نمودار به‌دست آمده از مدل ارائه شده با استفاده از الگوریتم ژنتیک ثابت‌های ماده را تعیین کرده‌اند.

علاوه بر این، میلر [21] به مطالعه تجربی و نظری بافت مغز پرداخت. در

روش پیشنهادی میلر، وجه بالا و پایین نمونه استوانه‌ای به صفحه فشارنده دستگاه چسبانده شده، نمونه تحت فشار تک‌محوره قرار می‌گیرد. اگر چه در این روش تغییر شکل نمونه مانند شرایط مرزی بدون اصطکاک نیست، اما او نشان داده که شکل نمونه بعد از تغییر شکل مستقل از شکل رابطه ساختاری است و تغییر طول عمودی در صفحه تقارن متناسب با 30% تغییر ارتفاع نمونه در هر کرنش است. لکساری و همکارانش [22] نیز بافت مغز گاو را تحت بارگذاری فشاری بررسی کردند. آن‌ها از مدل ساختاری مرکب از دو تابع هایپرالاستیک و تابع کاهشی توانی که رفتار وابسته به زمان دارد، بهره گرفتند. در این مدل، تابع هایپرالاستیک ربولین انتخاب و ضریب‌های آن با استخراج نمودارهای حجم ثابت در پاسخ حالت پایدار ماده تعیین شدند. سپس برای محاسبه ضریب‌های لزجت از برازش کردن کانولوشن به نمودارهای وارهدیگی آزمایشی استفاده شده و برای بررسی تغییر شکل ناشی از تغییر حجم از مدل اکدن دو پارامتری و پنج نرخ بارگذاری استفاده شده است.

اسکوارتز و همکارانش [23] برای شبیه‌سازی یک ابزار جراحی مناسب در درمان کبد، از تانسور جرم الاستیک خطی استفاده کرده‌اند. در این روش علاوه بر محاسبه سریع نیروهای لزجت غیرخطی، تغییر شکل بافت زیستی نیز بررسی می‌شود. این مدل قادر به تعیین رفتار مکانیکی لزجت غیرخطی در سرعت‌های مطابق با کاربرد واقعی است. نتایج ارائه شده توسط این محققان نشان می‌دهند که این مدل قادر به پیش‌بینی بار محوری وارد بر سوزن در طی عمل بیوپسی است.

ونگ و همکارانش [24] با اصلاح مدل جامد خطی استاندارد، یک مدل پنج المانی ارائه کرده‌اند که علاوه بر سادگی ریاضی، با داده‌های تجربی آزمون وارهدیگی بافت کبد مطابقت خوبی دارند. از پژوهش‌های دیگر در زمینه مدل‌سازی رفتار بافت‌های نرم می‌توان به مدل جدیدی که توسط فرنسیس دیویس و همکارانش [25] برای توصیف رفتار وارهدیگی تنش در بافت‌های همسان‌گرد عرضی مانند لیگامنت‌ها و تاندون‌ها پیشنهاد شده، اشاره کرد. در این مدل علاوه بر توصیف رفتار وابسته به کرنش بافت، کرنش‌های محدود و همسان‌گرد عرضی آن نیز بررسی می‌شوند. آن‌ها برای رسیدن به این هدف، داده‌های کشیدگی-تنش محوری را در آزمون‌های وارهدیگی تنش و برای مقادیر مختلف کشیدگی محوری برای دم موش با فرض تراکم‌ناپذیری و تغییر شکل متقارن محوری آن جمع‌آوری کرده‌اند.

جو و همکارانش [13]، 70 نمونه از کبد خوک را تحت بارگذاری‌های فشار، کشش و بارگذاری متناوب فشار-کشش مورد بررسی قرار داده، با رسم نمودارهای تنش-کرنش حاصل از این آزمایش‌ها مدل ساختاری جدیدی ارائه کرده‌اند. این مدل متشکل از دو تابع انرژی کرنشی لگاریتمی و چندجمله‌ای است. آن‌ها با انجام آزمایش و تعیین ضریب پواسون نشان داده‌اند فرض تراکم‌ناپذیری بافت قابل قبول بوده، مدل ارائه شده نیز برای انواع حالت‌های بارگذاری اعمال شده صادق است. علاوه بر این آن‌ها با ترسیم نمودارهای نیرو-جابه‌جایی در دماهای مختلف تأثیر دما را بر رفتار بافت بررسی کرده‌اند. هولزافل و ویزاسکر [26] نیز بر پایه نظریه مکانیک محیط‌های پیوسته غیرخطی، معادله ساختاری دیگری برای مدل‌سازی رفتار بافت‌های نرم پیشنهاد داده‌اند. آن‌ها در مدل پیشنهادی خود تابع انرژی کرنشی را به دو قسمت همسان‌گرد و غیرهمسان‌گرد تجزیه کرده‌اند. سپس ثابت‌های مادی مدل را با استفاده از برازش نمودارهای به‌دست آمده از مدل بر داده‌های تجربی به‌دست آورده‌اند.

¹ Aspiration

می‌شود، با استفاده از نگاشتی به صورت رابطه (1) تعیین می‌شود.

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \quad (1)$$

بر این اساس تانسور گرادیان تغییر شکل، با توجه به نگاشت رابطه (1)، با استفاده از معادله (2) تعیین می‌شود [11].

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \quad (2)$$

در مسئله مورد بررسی، همان گونه که "شکل 1" نشان می‌دهد، بافت نرم به شکل نمونه استوانه‌ای تحت بارگذاری فشاری در راستای محور 3 قرار می‌گیرد. در این شکل محور 3 محور تقارن استوانه بوده و صفحه 1-2 منطبق بر سطح زیرین استوانه است. با انتخاب این دستگاه مختصات، نگاشت (1) به صورت رابطه (3) بیان می‌شود.

$$x_i = \lambda_i(t) X_i, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3)$$

اکنون اگر اصطکاک بین نمونه و صفحه بارگذاری ناچیز در نظر گرفته شود، شکل استوانه‌ای نمونه بعد از تغییر شکل حفظ شده، در نتیجه دستگاه مختصات "شکل 1"، دستگاه مختصات اصلی تانسور گرادیان تغییر شکل خواهد بود. در نتیجه تانسور گرادیان تغییر شکل از رابطه (4) به دست می‌آید.

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad (4)$$

در رابطه (4)، λ_i کشیدگی در جهت محورهای مختصات اصلی هستند و کشیدگی‌های اصلی نامیده می‌شوند. براساس فرض تراکم‌ناپذیری رفتار بافت، رابطه (5) نتیجه می‌شود.

$$J = \det(\mathbf{F}) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1 \quad (5)$$

با نام‌گذاری کشیدگی در راستای محور 3 به صورت

$$\lambda_3 = \lambda \quad (6)$$

و با توجه به تقارن محوری نمونه و در نتیجه برابر بودن کشیدگی‌های اصلی در راستاهای 1 و 2، رابطه (7) نتیجه می‌شود.

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda^{-1/2} \quad (7)$$

تانسور تغییر شکل گرین-کوشی راست مطابق رابطه (8) تعریف می‌شود [11].

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \quad (8)$$

پایه‌های اصلی تانسور $\mathbf{C}$ به صورت زیر به دست می‌آیند [11].

$$\begin{aligned} J_1 &= \text{tr}(\mathbf{C}) = \lambda^2 + 2\lambda^{-1} \\ J_2 &= \lambda^{-2} + 2\lambda \\ J_3 &= 1 \end{aligned} \quad (9)$$

2-2- مدل ساختاری هایپرالاستیک

مدل ساختاری هایپرالاستیک براساس تابع انرژی کرنشی تعریف می‌شود. انرژی کرنشی یک تابع اسکالر از پایه‌های تانسور گرادیان تغییر شکل (و یا پایه‌های تانسور تغییر شکل گرین-کوشی راست) است [27].

$$w = w[J_1(\mathbf{C}), J_2(\mathbf{C}), J_3(\mathbf{C})] \quad (10)$$

با توجه به فرض تراکم‌ناپذیری رفتار نمونه مورد بررسی، مشتق پایای سوم تانسور $\mathbf{C}$ صفر خواهد شد.

بر این اساس در ادامه محاسبات می‌توان تابع انرژی کرنشی را وابسته به پایه‌های اول و دوم تانسور $\mathbf{C}$ نوشت.

$$w = w[J_1(\mathbf{C}), J_2(\mathbf{C})] \quad (11)$$

در این مقاله برای رفتار هایپرالاستیک از تابع انرژی کرنشی به شکل چندجمله‌ای، مطابق با معادله (12) استفاده شده است [20].

$$w = \sum_{i+j=1}^{\infty} c_{ij} [J_1 - 3]^i \times [J_2 - 3]^j \quad (12)$$

تنش پیولا-کرشلف اول با استفاده از تابع انرژی کرنشی، براساس رابطه

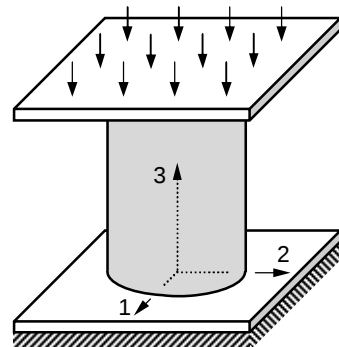


Fig. 1 Schematic representation of the model in the uniaxial compression test

شکل 1 نمایش طرحواره مدل در آزمون فشار تک محوره

با توجه به آن چه در زمینه اهمیت کبد اشاره شد هدف از انجام این پژوهش مطالعه تحلیلی و عددی رفتار بافت کبد تحت بارگذاری تک محوره است. همان گونه که در پژوهش‌های دیگر هم اشاره شده است خاصیت لزجت بافت کبد باعث رفتار غیرخطی آن شده و تحلیل نظری و ریاضی بافت را پیچیده می‌کند. نتایج این مدل‌سازی می‌تواند در بررسی پاسخ بافت نرم تحت بارگذاری‌های پیچیده مانند ورود سوزن یا ابزار جراحی، کارآمدی خود را بهتر نشان دهد. در این مقاله، رفتار بافت کبد گاو به دو روش تحلیلی و عددی مطالعه می‌شود. "شکل 1" طرحواره آزمون فشار تک محوره را که در این مقاله بررسی می‌شود، نشان می‌دهد. در این آزمون با فشردن یک نمونه استوانه‌ای از بافت بین دو صفحه صلب، رفتار بافت در آزمون فشار تک محوره مطالعه شده است.

برای مدل‌سازی رفتار بافت کبد از دو مدل هایپرالاستیک و هایپرویسکووالاستیک در دو نرخ کرنش استفاده شده است. مدل‌های ساختاری پیشنهاد شده مبتنی بر تابع انرژی به شکل چندجمله‌ای هستند، ضرایب مادی در این مدل‌ها با استفاده از برازش نمودار تنش-کرنش به دست آمده از این مدل‌ها بر نتایج تجربی موجود تعیین شده‌اند. به منظور استخراج حل تحلیلی معادله‌های ساختاری پیشنهاد شده از نرم افزار ممتیکا بهره برده شده است. همچنین برای مطالعه عددی رفتار بافت از نرم افزار آباکوس استفاده شده است. سپس نتایج به دست آمده از حل تحلیلی و شبیه‌سازی عددی با داده‌های تجربی موجود مقایسه شده‌اند. همچنین برای تعیین رفتار بافت در شرایط بارگذاری دیگر، مدل‌ها برای بارگذاری کشش تک محوره و برش نیز بررسی شده‌اند. در انتها تأثیر ضریب اصطکاک بین نمونه و صفحه بارگذاری بر پاسخ بافت مورد بررسی قرار می‌گیرد.

2-2- مدل‌سازی ریاضی تغییر شکل بافت نرم

پاسخ غیرخطی بافت نرم با استفاده از مکانیک محیط‌های پیوسته در این قسمت توصیف شده است. در ابتدا به طور کوتاه، سینماتیک مسئله و در ادامه معادله‌های ساختاری هایپرالاستیک و هایپرویسکووالاستیک حاکم بر رفتار بافت بررسی می‌شود. در این مقاله رفتار بافت کبد گاو همگن، همسان گرد و تراکم‌ناپذیر فرض شده است [20].

1-2- سینماتیک تغییر شکل نمونه در آزمون فشار تک محوره

در تحلیل تغییر شکل یک جسم پیوسته اگر $\mathbf{X}$ مختصات یک ذره از توده مادی در هیأت مرجع باشد، موقعیت ذره در زمان t که با $\mathbf{x}$ نشان داده

(13) محاسبه می‌شود [27].

$$T_i = \frac{\partial w}{\partial \lambda_i} \quad (13)$$

برای تعیین ثابت‌های مادی در مدل ساختاری نیاز به رابطه‌ای است که تنش در راستای جهت بارگذاری را تعیین کند. به این منظور با جایگذاری رابطه (12) در رابطه (13)، تنش ایجاد شده در راستای محور 3 به صورت رابطه (14) محاسبه می‌شود.

$$T_3 = 2(\lambda^2 - \lambda^{-1})[c_{10} + c_{01}\lambda^{-1} + 3c_{11}(\lambda^{-2} - 1)(1 - \lambda) + 2c_{20}(\lambda^2 + 2\lambda^{-1} - 3) + 2c_{02}\lambda^{-1}(2\lambda + \lambda^{-2} - 3)] \quad (14)$$

3-2- مدل ساختاری هایپروویسکو الاستیک

مشخصه مهم مواد ویسکو الاستیک، وابستگی رفتار ماده به زمان است. برای بافت‌های بیولوژیک نیز به دلیل داشتن خاصیت لزجت، تابع انرژی وابسته به زمان به کار برده می‌شود. برای رفتار هایپروویسکو الاستیک، از تابع انرژی کرنشی چندجمله‌ای، به شکل رابطه (15)، استفاده شده است [11].

$$w = \int_0^t \sum_{i+j=1}^{\infty} \left[c_{ij} \left(1 - \sum_{k=1}^{\infty} g_k \left(1 - e^{-\frac{(t-\tau)}{\tau_k}} \right) \right) \times \frac{d}{d\tau} [(J_1 - 3)^i \times (J_2 - 3)^j] \right] d\tau \quad (15)$$

اکنون با جایگذاری رابطه (15) در رابطه (13)، تنش در راستای محور بارگذاری از رابطه (16) تعیین می‌شود [11].

$$T_3 = \int_0^t \left\{ \sum_{i+j=1}^{\infty} \left[c_{ij} \left(1 - \sum_{k=1}^{\infty} g_k \left(1 - e^{-\frac{(t-\tau)}{\tau_k}} \right) \right) \times \frac{d}{d\tau} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} (J_1 - 3)^i \times (J_2 - 3)^j \right] \right] \right\} d\tau \quad (16)$$

اگر سرعت بارگذاری در زمان انجام آزمایش ثابت در نظر گرفته شود، آنگاه می‌توان انتگرال (16) را به صورت تحلیلی محاسبه کرد. جواب تحلیلی انتگرال در پیوست ارائه شده است.

3- حل تحلیلی بر پایه مدل ساختاری هایپروویسکو الاستیک

هایپروویسکو الاستیک

اکنون به منظور یافتن پاسخ تحلیلی مدل ساختاری حاکم بر رفتار بافت کبد، پاسخ بافت به بارگذاری فشاری تک محوره با استفاده از دو مدل هایپروویسکو الاستیک و هایپروویسکو الاستیک مورد بررسی قرار می‌گیرد. در ابتدا برای یافتن تابع انرژی کرنشی که مطابقت قابل قبولی با رفتار بافت داشته باشد، مدل هایپروویسکو الاستیک مبتنی بر تابع انرژی کرنشی به شکل چندجمله‌ای مورد بررسی قرار گرفته است (معادله (14)). برای تعیین ثابت‌های موجود در این معادله ساختاری از دستور برازش کردن در نرم‌افزار ممتیکا استفاده شده است. به این منظور نمودار تنش-کرنش حاصل از آزمون تجربی در نرخ کرنش $0.0011s^{-1}$ بر نمودار تنش-کرنش به دست آمده از رابطه (14) برازش شده، ثابت‌های مجهول موجود در این معادله همان گونه که در جدول 1 آمده، تعیین می‌شوند. به منظور مشابهت با شرایط بارگذاری شبه-استاتیک، در برازش کردن نمودارها از آزمون نرخ کم‌تر استفاده شده است. برای توصیف رفتار بافت در نرخ کرنش $0.4167s^{-1}$ نیز از ثابت‌های موجود در جدول 1 استفاده می‌شود. سپس برای بررسی رفتار بافت کبد با استفاده از مدل هایپروویسکو الاستیک معادله (16) با استفاده از نرم‌افزار ممتیکا در دو نرخ

کرنش $0.0011s^{-1}$ و $0.4167s^{-1}$ حل می‌شود. ثابت‌های ماده در این رابطه در جدول 2 بیان شده‌اند [20].

4- مدل سازی اجزای محدود آزمون فشار تک محوره

در این مقاله برای خصوصیت‌های مادی، از نتایج آزمون انجام شده توسط شریفی سده و همکارانش [20] بهره گرفته شده است. آن‌ها با تهیه نمونه‌های استوانه‌ای با قطر 30mm و ارتفاع 20mm آزمون تجربی برای تعیین پاسخ بافت کبد طراحی کرده‌اند. آن‌ها نمونه‌ها را با نرخ‌های بارگذاری $0.0011s^{-1}$ و $0.4167s^{-1}$ تحت فشار تک محوره قرار داده و سپس پاسخ تنش-کرنش مربوط به هر نرخ بارگذاری را به دست آورده‌اند. در ادامه نیز با توجه به این آزمون تجربی، یک نمونه استوانه‌ای شکل با قطر 30mm و ارتفاع 20mm مطابق "شکل 2" در نرم‌افزار آباکوس مدل سازی می‌شود. نمونه به صورت متقارن محوری و تغییر شکل پذیر شبیه سازی شده است.

همچنین برای اعمال یکنواخت نیروی فشاری بر روی نمونه از یک صفحه صلب تحلیلی استفاده می‌شود. ضلع بالایی مدل با این صفحه در تماس است. بافت کبد همگن فرض شده و رفتار آن به طور جداگانه با دو مدل هایپروویسکو الاستیک و هایپروویسکو الاستیک بررسی شده است. برای تعریف رفتار مدل به صورت هایپروویسکو الاستیک لازم است ضریب‌های رابطه ساختاری (رابطه (14)) مطابق جدول 1 در نرم‌افزار وارد شوند. این کار با انتخاب تابع انرژی کرنشی به شکل چندجمله‌ای در تعریف رفتار ماده به صورت هایپروویسکو الاستیک فراهم می‌شود. برای تعریف رفتار هایپروویسکو الاستیک برای ماده نیز باید مشخصات رفتار هایپروویسکو الاستیک و ویسکو الاستیک به صورت جداگانه تعریف و به نمونه نسبت داده شود.

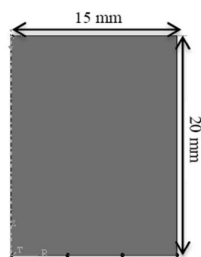


Fig. 2 Geometry, dimensions and B.C.s. of the FE model

شکل 2 هندسه مدل اجزای محدود، اندازه‌ها و شرایط مرزی

جدول 1 ثابت‌های هایپروویسکو الاستیک (برازش در نرخ کرنش $0.0011s^{-1}$)

Table 1 Hyperelastic coefficients (fitting at $\dot{\epsilon}=0.0011s^{-1}$)

نام ثابت هایپروویسکو الاستیک	مقدار ثابت
C_{10}	-1905.25 (Pa)
C_{01}	1917.51 (Pa)
C_{11}	490609 (Pa)
C_{20}	-230017 (Pa)
C_{02}	-249207 (Pa)

جدول 2 خواص مکانیکی بافت کبد برگرفته از مرجع [20]

Table 2 Mechanical properties of the liver tissue [20]

ثابت‌های هایپروویسکو الاستیک	ثابت‌های ویسکو الاستیک
$C_{100}=199.713$ (Pa)	$g_1=0.5$
$C_{010}=354.897$ (Pa)	$g_2=0.22917$
$C_{200}=10524$ (Pa)	$\tau_1=0.24$ (s)
$C_{110}=436.189$ (Pa)	$\tau_2=11.3636$ (s)
$C_{020}=14792$ (Pa)	

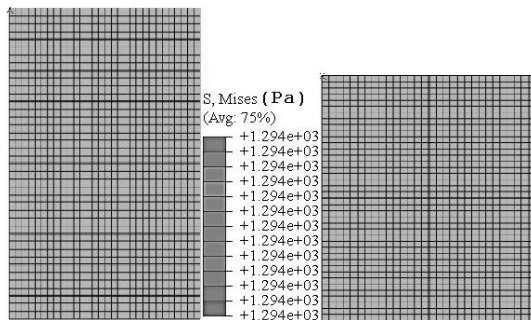


Fig. 3 The contour of normal stress T_3 at $\dot{\epsilon}=0.4167s^{-1}$
 شکل 3 توزیع مؤلفه T_3 تنش (راستای محور عمودی) در نرخ کرنش $0.4167s^{-1}$

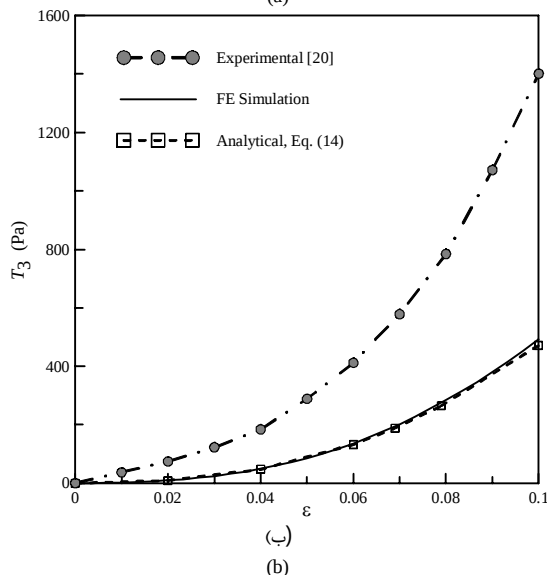
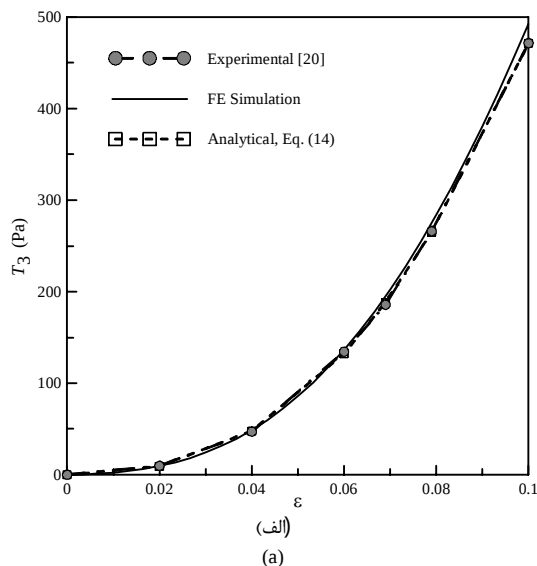


Fig. 4 Experimental, analytical and numerical stress-strain curves (hyperelastic), (a) $\dot{\epsilon}=0.0011s^{-1}$, (b) $\dot{\epsilon}=0.4167s^{-1}$
 شکل 4 نمودارهای تنش-کرنش تجربی، تحلیلی و شبیه‌سازی عددی برای مدل هایپرالاستیک، در نرخ کرنش (الف) $0.0011s^{-1}$ و (ب) $0.4167s^{-1}$

برای هر یک از این دو نوع رفتار می‌توان ضریب‌های رابطه ساختاری مربوط به آن (رابطه (16)) را مطابق جدول 2 در نرم‌افزار وارد کرد. تحلیل به‌وسیله گام ویسکو و با استفاده از حلگر ضمنی انجام می‌شود. به‌دلیل ایجاد تغییرشکل‌های بزرگ در مدل، شبیه‌سازی‌ها به‌صورت غیرخطی انجام می‌شوند. در شبیه‌سازی عددی رفتار بافت، بارگذاری بر روی نمونه با دو نرخ بارگذاری مختلف اعمال می‌شود. زمان حل با توجه به نرخ بارگذاری اعمال شده مشخص می‌شود. زمانی که در هر نرخ بارگذاری برای نرم‌افزار تعریف می‌شود، مدت لازم برای فشردن نمونه به مقدار 0.1 طول اولیه آن و با توجه به نرخ بارگذاری است. در ابتدا تماس بین صفحه صلب و وجه بالایی نمونه بدون اصطکاک در نظر گرفته شده است. در مراحل بعدی شبیه‌سازی، برای بررسی اثر ضریب اصطکاک بر توزیع تنش مدل، برای مدل هایپروویسکوالاستیک رفتار بافت، ضریب اصطکاک تا 0.5 افزایش داده می‌شود. بارگذاری به‌صورت جابه‌جایی در راستای محور 3 به نقطه مرجع صفحه صلب، با دو نرخ $0.0011s^{-1}$ و $0.4167s^{-1}$ وارد می‌شود. نقطه مرجع صفحه صلب تنها قابلیت حرکت در راستای محور 3 را دارد. به‌علاوه درجه آزادی جابه‌جایی قائم وجه پایینی نمونه مقید و نقطه‌های روی این وجه تنها در راستای شعاعی امکان جابه‌جایی دارند. مدل اجزای محدود به‌وسیله 1200 المان پیوسته چهار-گره‌ای CAX4RH شبکه‌بندی شده است. چون رفتار بافت تراکم‌ناپذیر فرض شده است، از المان‌ها با فرمول‌بندی ترکیبی استفاده شده است.

هم‌چنین برای بررسی پایداری مدل ارائه شده، بر پایه پیشنهاد ارائه شده در مرجع [28]، رفتار مکانیکی بافت با استفاده از دو مدل هایپروالاستیک و هایپروویسکوالاستیک در بارگذاری کششی تک‌محوره و برش خالص نیز شبیه‌سازی شد. به این منظور وجه بالایی مدل به صفحه بارگذاری چسبانده شده و بارگذاری کششی و برش در دو شبیه‌سازی به‌طور جداگانه به نقطه مرجع صفحه اعمال شد.

5- نتایج و بحث

در این قسمت نتایج به دست آمده از حل تحلیلی و شبیه‌سازی اجزای محدود ارائه و بررسی می‌شوند. در گام نخست اعتبار هریک از دو مدل ساختاری هایپروالاستیک و هایپروویسکوالاستیک، در پیش‌بینی رفتار بافت کبد بررسی و با یکدیگر مقایسه می‌شوند. برای این منظور نمودارهای تنش-کرنش به‌دست آمده از حل تحلیلی و هم‌چنین شبیه‌سازی اجزای محدود، با نتایج تجربی موجود، برای دو نرخ کرنش متفاوت، مقایسه می‌شوند. با توجه به این‌که حل تحلیلی با فرض تماس بدون اصطکاک صفحه بارگذاری با نمونه انجام شده است، در این مرحله در شبیه‌سازی‌های اجزای محدود نیز تماس صفحه بارگذاری با نمونه بافت بدون اصطکاک منظور شده است. "شکل 3" توزیع تنش عمودی (راستای 3) را در نمونه به‌ازای نرخ کرنش $0.4167s^{-1}$ در حالت بدون اصطکاک نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود به‌دلیل تماس بدون اصطکاک، تنش به‌طور یکنواخت در مدل گسترش یافته است. در این شرایط بافت به‌طور یکنواخت در تمام ارتفاع آن تغییرشکل می‌یابد. کرنش برشی صفر و در نتیجه زاویه‌های عمود در گوشه المان‌ها به‌صورت عمود باقی می‌مانند.

ابتدا نتایج مدل هایپروالاستیک بررسی می‌شوند. ثابت‌های مدل هایپروالاستیک در رابطه (14) با استفاده از دستور برازش در نرم‌افزار ممتیکا بر داده‌های تجربی در نرخ کرنش پایین $0.0011s^{-1}$ محاسبه شده‌اند.

نمودارهای تنش-کرنش تحلیلی و شبیه‌سازی اجزای محدود در کنار نتایج تجربی، برای دو نرخ کرنش $0.0011s^{-1}$ و $0.4167s^{-1}$ در "شکل 4"

رسم شده‌اند. مشاهده می‌شود که در هر دو حالت نتایج تحلیلی و شبیه‌سازی اجزای محدود بر هم منطبق هستند. این موضوع اعتبار حل تحلیلی انجام شده را نشان می‌دهد. از سوی دیگر، نتایج تحلیلی و شبیه‌سازی اجزای محدود در نرخ کرنش 0.0011s^{-1} سازگاری نزدیکی با نتایج تجربی نشان می‌دهند. اما برای نرخ کرنش 0.4167s^{-1} اختلاف قابل توجهی بین نتایج تحلیلی و اجزای محدود با نتایج تجربی مشاهده می‌شود.

این موضوع به دلیل آن است که ثابت‌های مدل هایپرالاستیک با استفاده از برازش بر نتایج تجربی در نرخ کرنش 0.0011s^{-1} محاسبه شده‌اند. از این رو، به دلیل منظور نشدن اثر لزجت و وابستگی رفتار به سرعت بارگذاری در مدل هایپرالاستیک، اختلاف قابل توجهی بین پیش‌بینی‌های نظری با نتایج تجربی در نرخ کرنش متفاوت 0.4167s^{-1} مشاهده می‌شود. نمودارهای "شکل 4" به روشنی نشان می‌دهند مدل هایپرالاستیک برای پیش‌بینی رفتار بافت کبد به ازای نرخ‌های کرنش مختلف، مدل قابل اطمینان و قابل تأییدی نیست.

برای جبران این کاستی در مدل هایپرالاستیک، اکنون نتایج مدل هایپرویسکووالاستیک بررسی می‌شوند. مدل هایپرویسکووالاستیک در این مقاله بر پایه تابع انرژی رابطه (15) استخراج شده است. نتیجه این مدل به صورت معادله ساختاری رابطه (16) برای تنش T_3 در قالب انتگرال کانولوشن با ضریب‌های به شکل سری نمایی، به دست آمده است.

بر اساس جستجوی نگارندگان، حل تحلیلی معادله ساختاری هایپرویسکووالاستیک بر پایه تابع انرژی (15)، برای بافت کبد، در پژوهش‌های پیشین انجام نشده است. تأکید بر نوع بافت در اینجا از آن جهت انجام می‌شود که در مقایسه با بافت‌های دیگر مانند مغز، به دلیل غیر صفر بودن همه ثابت‌های مادی برای بافت کبد، حل تحلیلی معادله ساختاری (16) به مراتب پیچیده‌تر است. جزییات حل تحلیلی معادله ساختاری (16) در پیوست مقاله ارائه شده است. در "شکل 5" نمودارهای تنش-کرنش به دست آمده از حل تحلیلی ارائه شده در این مقاله و همچنین شبیه‌سازی اجزای محدود، با نتایج تجربی مرجع [20]، برای دو نرخ کرنش 0.0011s^{-1} و 0.4167s^{-1} مقایسه شده‌اند. در شبیه‌سازی اجزای محدود، همانند پژوهش‌های دیگر، تنش در هر لحظه به صورت نیروی عمودی وارد به صفحه فشارنده تقسیم بر سطح اولیه نمونه محاسبه شده است. کرنش نیز به صورت تقسیم جابه‌جایی صفحه فشارنده بر طول اولیه نمونه به دست آمده است [11]. همان‌گونه که نمودارهای "شکل 5" نشان می‌دهند، حل تحلیلی ارائه شده با شبیه‌سازی اجزای محدود، سازگاری کامل با یکدیگر دارند. این موضوع اعتبار نتایج شبیه‌سازی اجزای محدود را نشان می‌دهد. به علاوه، نتایج تحلیلی و عددی، در هر دو نرخ کرنش 0.0011s^{-1} و 0.4167s^{-1} ، نزدیکی بسیار خوبی با نتایج تجربی دارند. بنابراین آنچه به عنوان نقص اصلی در مدل هایپرالاستیک مشاهده شد، در مدل هایپرویسکووالاستیک دیگر مشاهده نمی‌شود.

مقایسه نمودارهای "شکل 4 و 5" به روشنی نشان می‌دهند بر خلاف پیشنهاد برخی پژوهش‌ها، مدل هایپرالاستیک برای پیش‌بینی رفتار بافت نرم، نمی‌تواند مناسب باشد. در مقابل، معادله هایپرویسکووالاستیک (16) پیشنهادی این مقاله که حل تحلیلی آن نیز ارائه شده، می‌تواند مدل قابل اطمینانی برای پیش‌بینی رفتار بافت کبد، در نرخ‌های کرنش مختلف باشد.

پس از مقایسه مدل‌های ساختاری و انتخاب مدل مناسب، نکته دیگری که در آزمون فشار تک‌محوره می‌تواند مورد توجه قرار گیرد، اصطکاک بین صفحه فشارنده و نمونه است. با توجه به این که مدل تحلیلی بر پایه تماس بدون اصطکاک بین صفحه و نمونه ارائه شده، اثر اصطکاک با استفاده از

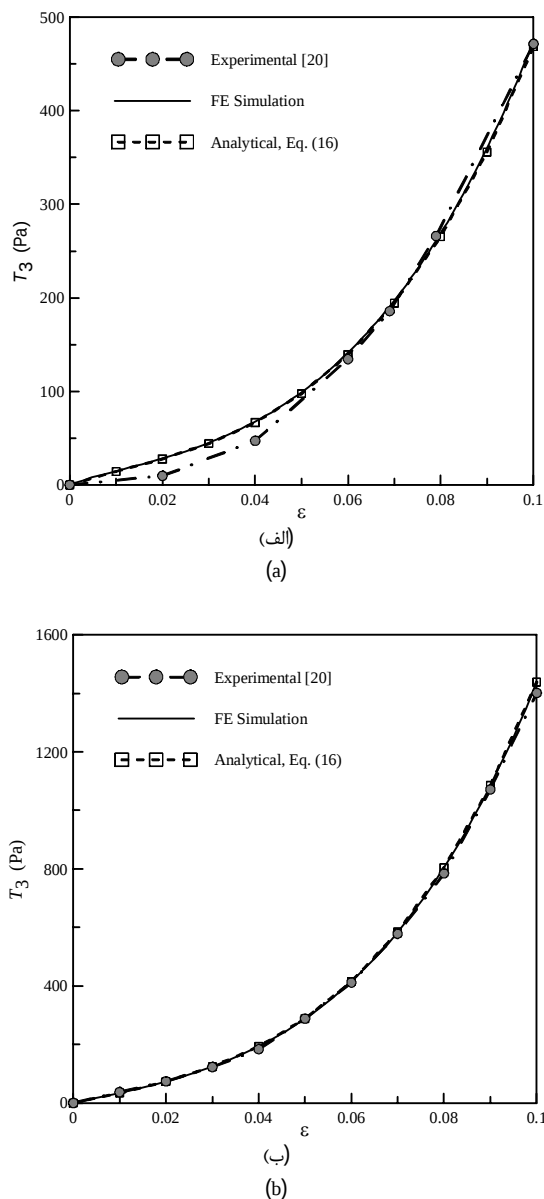


Fig. 5 Experimental, analytical and numerical stress-strain curves (hyper-viscoelastic), (a) $\dot{\epsilon}=0.0011\text{s}^{-1}$, (b) $\dot{\epsilon}=0.4167\text{s}^{-1}$

شکل 5 نمودارهای تنش-کرنش تجربی، تحلیلی و شبیه‌سازی عددی برای مدل هایپرویسکووالاستیک، در نرخ کرنش (الف) 0.0011s^{-1} و (ب) 0.4167s^{-1}

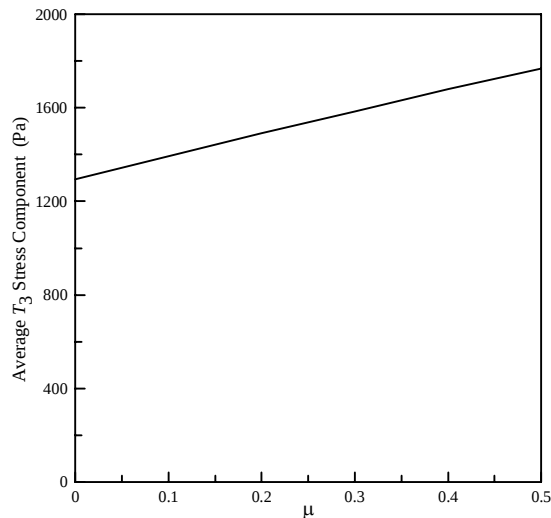


Fig. 8 Average T_3 stress on top surface of the sample, versus friction coefficient at $\dot{\epsilon} = 0.4167s^{-1}$

شکل 8 نمودار تنش عمودی میانگین روی وجه بالایی برحسب ضریب اصطکاک در نرخ کرنش $0.4167s^{-1}$

با افزایش ضریب اصطکاک، اندازه تنش عمودی میانگین روی وجه بالایی نیز افزایش می‌یابد. برای آزمایش مورد بررسی در این مقاله، این افزایش تقریباً به صورت خطی دیده می‌شود. این موضوع، همان‌طور که اشاره شد، به دلیل آن است که با افزایش ضریب اصطکاک، حالت بشکه‌ای نمونه بیشتر می‌شود. بنابراین اندازه سطح وجه بالایی در هر لحظه و به ازای یک ضریب اصطکاک مشخص، در مقایسه با لحظه مشابه و به ازای ضریب اصطکاک کمتر، کوچکتر خواهد بود. در نتیجه تنش واقعی میانگین در آن لحظه بیشتر خواهد شد.

این موضوع به‌ویژه در شبیه‌سازی فرآیند ورود سوزن به بافت یا همان عمل بیوپسی، می‌تواند مهم باشد. به‌گونه‌ای که اگر شرایط تماس اصطکاکی سوزن با بافت به صورت مناسب و نزدیک به واقعیت انتخاب نشود، تنش پیش‌بینی شده به وسیله شبیه‌سازی با آن چه در واقعیت رخ می‌دهد، متفاوت خواهد بود. در نتیجه نمی‌توان انتظار داشت پیش‌بینی واقع‌بینانه‌ای از رفتار بافت از شبیه‌سازی به‌دست آید.

در نهایت، همان‌گونه که در "شکل 9 و 10" نشان داده شده است، نمودار تنش-کرنش مربوط به بارگذاری کشش تک‌محوره و برش خالص با استفاده از دو مدل هایپرالاستیک و هایپرولاستیک به صورت صعودی است. این مطلب نشان‌دهنده پایداری دو مدل در شرایط بارگذاری مختلف است.

6- نتیجه‌گیری

در این مقاله رفتار بافت نرم کبد، در آزمون فشار تک‌محوره، تحت تغییرشکل‌های بزرگ، به دو روش تحلیلی و عددی مورد بررسی قرار گرفت. مطالعه‌های نظری با به‌کارگیری دو مدل ساختاری هایپرالاستیک و هایپرولاستیک انجام شد. برای ارزیابی و مقایسه مدل‌های ساختاری، نتایج به‌دست آمده از هر دو مدل، به ازای دو نرخ کرنش متفاوت، با نتایج تجربی موجود مقایسه شد. پس از آن که نشان داده شد مدل ساختاری هایپرولاستیک ارائه شده می‌تواند مدل مناسبی برای پیش‌بینی رفتار بافت کبد باشد، با استفاده از شبیه‌سازی اجزای محدود، اثر ضریب اصطکاک

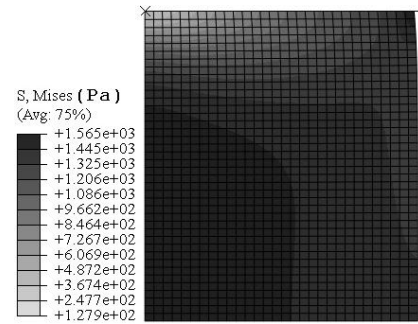


Fig. 6 Von Mises stress contour, for $\mu=0.2$ and $\dot{\epsilon} = 0.4167s^{-1}$

شکل 6 توزیع تنش معادل ون‌میزز برای $\mu=0.2$ و نرخ کرنش $0.4167s^{-1}$

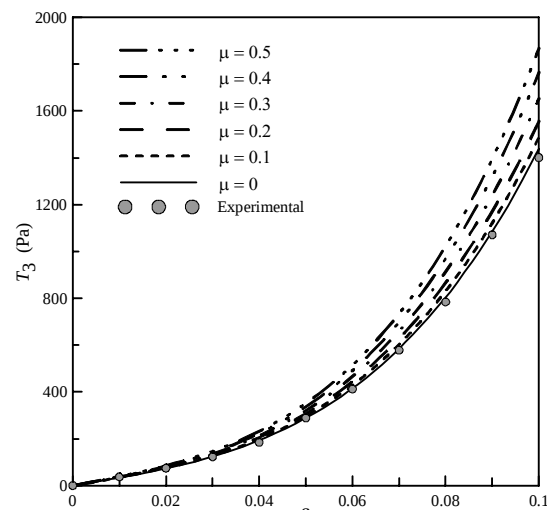


Fig. 7 Stress-strain curves for different friction coefficients and $\dot{\epsilon} = 0.4167s^{-1}$

شکل 7 نمودارهای تنش-کرنش به ازای مقدارهای مختلف ضریب اصطکاک، در نرخ کرنش $0.4167s^{-1}$

تنش به صورت نیروی عمودی وارد شده تقسیم بر سطح مقطع اولیه نمونه و کرنش نیز به صورت تقسیم جابه‌جایی صفحه صلب به طول اولیه نمونه محاسبه شده است. هم‌چنان‌که نتایج "شکل 7" نشان می‌دهند، انتخاب ضریب اصطکاک می‌تواند اثر قابل توجهی در پیش‌بینی رفتار بافت در آزمون فشار تک‌محوره داشته باشد. برای آزمایش مورد مطالعه در این مقاله، براساس "شکل 7"، می‌توان دریافت که نتایج تجربی با نتایج شبیه‌سازی در حالت بدون اصطکاک ($\mu=0$) بسیار نزدیک است که البته مورد انتظار نیز هست. به علاوه باید توجه داشت که در اثر تماس اصطکاکی صفحه فشارنده با بافت، همان‌گونه که در "شکل 6" نیز مشاهده می‌شود، نمونه در هنگام تغییرشکل حالت بشکه‌ای پیدا می‌کند. بنابراین، به دلیل غیریکنواختی سطح مقطع نمونه در راستای عمودی، تنش عمودی واقعی در هر لحظه، در مقطع‌های مختلف نمونه، متفاوت خواهد بود.

این موضوع را می‌توان با بررسی اثر ضریب اصطکاک بر تنش عمودی واقعی روی وجه بالایی بررسی کرد. "شکل 8" نمودار تنش عمودی واقعی میانگین، روی وجه بالایی نمونه را برحسب ضریب اصطکاک تماس نشان می‌دهد. نتایج "شکل 8" براساس محاسبه میانگین مؤلفه تنش در همه گره‌های وجه بالایی، محاسبه شده است. نمودار "شکل 8" نشان می‌دهد

بیوپسی، نیز قابل اطمینان باشد.

3- نتایج شبیه‌سازی اجزای محدود نشان می‌دهد در نظر گرفتن ضریب اصطکاک صحیح در پیش‌بینی تنش به وجود آمده در بافت اثرگذار است.

7- پیوست

به دلیل محاسبات گسترده‌ای که برای تعیین تنش اول پیولا-کرشلف در راستای محور 3 لازم است می‌توان تنش را به سه قسمت تقسیم کرد: جمله مستقل از زمان (T_0) ، جمله وابسته به زمان با مشخصه زمانی τ_1 (T_1) و جمله وابسته به زمان با مشخصه زمانی τ_2 (T_2) . نتیجه حاصل به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$T_3 = T_0 + T_1 + T_2 \quad (1-پ)$$

جمله‌های T_0 و T_1 به ترتیب از رابطه‌های (پ-2) و (پ-3) محاسبه می‌شوند.

$$T_0 = (-1 + g_1 + g_2) \times [c_{100}(2\lambda - 2\lambda^{-2}) + c_{010}(2 - 2\lambda^{-3}) + 6c_{110}(\lambda^2 - \lambda^{-4} + \lambda^{-3} - 1 - \lambda + \lambda^{-2}) + 2c_{200}(2\lambda^3 - 4\lambda^{-3} + 2 - 6\lambda + 6\lambda^{-2}) + 2c_{020}(-2\lambda^{-5} - 2\lambda^{-2} + 4\lambda + 6\lambda^{-3} - 6)] \quad (2-پ)$$

$$T_1 = g_1 \times \left\{ \frac{1}{\beta^3 \tau_1^3} \left\{ c_{100} \left\{ e^{\frac{\lambda}{\beta \tau_1}} \text{ExpIntegralEi} \left[\frac{-1}{\beta \tau_1} \right] (-2\beta \tau_1) + e^{\frac{\lambda}{\beta \tau_1}} \text{ExpIntegralEi} \left[\frac{-\lambda}{\beta \tau_1} \right] (2\nu \tau_1) + e^{\frac{(-1+\lambda)}{\beta \tau_1}} \beta \tau_1 (-2\beta \tau_1 + 2\beta^2 \tau_1^2 + 2\beta^3 \tau_1^3) - \frac{1}{\lambda^3} (\beta \tau_1 (2\beta^3 \tau_1^3 \lambda^3 + \lambda^2 (-2\beta \tau_1) + \beta \tau_1 \lambda (2\beta \tau_1))) + c_{010} \left\{ e^{\frac{\lambda}{\beta \tau_1}} \text{ExpIntegralEi} \left[\frac{-1}{\beta \tau_1} \right] + e^{\frac{\lambda}{\beta \tau_1}} \text{ExpIntegralEi} \left[\frac{-\lambda}{\beta \tau_1} \right] (-1) + e^{\frac{(-1+\lambda)}{\beta \tau_1}} \beta \tau_1 (1 - \beta \tau_1 + 2\beta^2 \tau_1^2) - \frac{1}{\lambda^2} (\beta \tau_1 (2\beta^2 \tau_1^2 + \lambda^2 - \beta \tau_1 \lambda)) \right\} + c_{110} \left\{ \left(\frac{e^{\frac{\lambda}{\beta \tau_1}}}{\beta \tau_1} \left(\text{ExpIntegralEi} \left[\frac{-1}{\beta \tau_1} \right] (-1 - 3\beta \tau_1 + 6\beta^2 \tau_1^2) \right) - \text{ExpIntegralEi} \left[\frac{-\lambda}{\beta \tau_1} \right] (-1 - 3\beta \tau_1 + 6\beta^2 \tau_1^2) \right) \right\} + e^{\frac{-1+\lambda}{\beta \tau_1}} (-1 - 2\beta \tau_1 + 7\beta^2 \tau_1^2 - 6\beta^3 \tau_1^3 + 6\beta^4 \tau_1^4 + 12\beta^5 \tau_1^5) + \frac{1}{\lambda^4} [\lambda^3 (1 + 3\beta \tau_1 - 6\beta^2 \tau_1^2) + \lambda^4 (-12\beta^5 \tau_1^5 + 6\beta^4 \tau_1^4) + \lambda^2 (-\beta \tau_1 + 6\beta^3 \tau_1^3 - 3\beta^2 \tau_1^2) + \lambda (6\beta^3 \tau_1^3 + 2\beta^2 \tau_1^2) - 12\beta^4 \tau_1^4 \lambda^5 - 6\beta^3 \tau_1^3] \right\} + \frac{1}{6\beta^5 \tau_1^5} \left\{ c_{200} \left\{ e^{\frac{\lambda}{\beta \tau_1}} \text{ExpIntegralEi} \left[\frac{-1}{\beta \tau_1} \right] (24\beta^2 \tau_1^2 + 72\beta^3 \tau_1^3) - e^{\frac{\lambda}{\beta \tau_1}} \text{ExpIntegralEi} \left[\frac{-\lambda}{\beta \tau_1} \right] (24\beta^2 \tau_1^2 + 72\beta^3 \tau_1^3) + e^{\frac{(-1+\lambda)}{\beta \tau_1}} \beta \tau_1 (24\beta^2 \tau_1^2 + 48\beta^3 \tau_1^3 - 24\beta^4 \tau_1^4 + 144\beta^6 \tau_1^6 + 144\beta^7 \tau_1^7) - \frac{1}{\lambda^5} [\tau_1 \beta (24\tau_1^2 \beta^2 \lambda^4 + 144\tau_1^7 \beta^7 \lambda^5 - 72\tau_1^5 \beta^5 \lambda^5 + 72\tau_1^5 \beta^5 \lambda^7 + 144\tau_1^6 \beta^6 \lambda^6 + 48\tau_1^4 \beta^4 \lambda^2 - 72\tau_1^4 \beta^4 \lambda^3 - 24\tau_1^3 \beta^3 \lambda^3 + 72\tau_1^3 \beta^3 \lambda^4) + c_{020} \left\{ e^{\frac{\lambda}{\beta \tau_1}} \text{ExpIntegralEi} \left[\frac{-1}{\beta \tau_1} \right] (1 - 36\beta^2 \tau_1^2 - 24\beta^3 \tau_1^3) - e^{\frac{\lambda}{\beta \tau_1}} \text{ExpIntegralEi} \left[\frac{-\lambda}{\beta \tau_1} \right] (1 - 36\beta^2 \tau_1^2 - 24\beta^3 \tau_1^3) + e^{\frac{(-1+\lambda)}{\beta \tau_1}} \beta \tau_1 (1 - \beta \tau_1 - 34\beta^2 \tau_1^2 + 6\beta^3 \tau_1^3 - 24\beta^4 \tau_1^4 + 48\beta^5 \tau_1^5) - \frac{1}{\lambda^5} (\beta \tau_1 (-\beta \tau_1 \lambda^3 + \lambda^4 + 48\tau_1^5 \beta^5 \lambda^5 + 2\tau_1^2 \beta^2 \lambda^2 - 36\tau_1^2 \beta^2 \lambda^4 + 24\tau_1^4 \beta^4 - 72\tau_1^4 \beta^4 \lambda^2 + 24\tau_1^4 \beta^4 \lambda^3 - 6\tau_1^3 \beta^3 \lambda - 24\tau_1^3 \beta^3 \lambda^4 + 36\tau_1^3 \beta^3 \lambda^3)) \right\} \right\} \right\} \quad (3-پ)$$

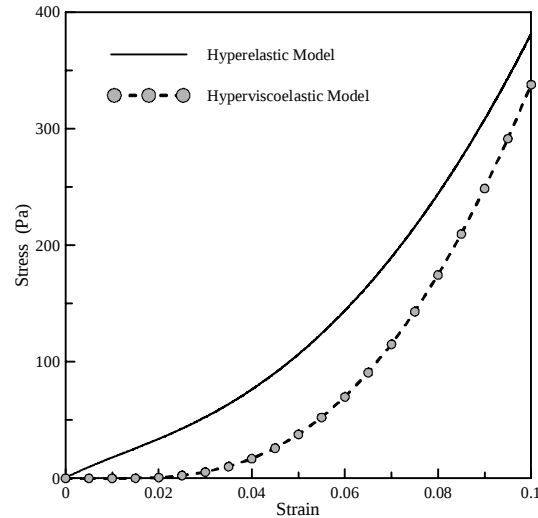


Fig. 9 Investigation of the stability for the presented models in simple tension at $\dot{\epsilon} = 0.0011s^{-1}$

شکل 9 بررسی پایداری مدل‌های ارائه شده در بارگذاری کشش تک‌محوره در نرخ کرنش $0.0011s^{-1}$

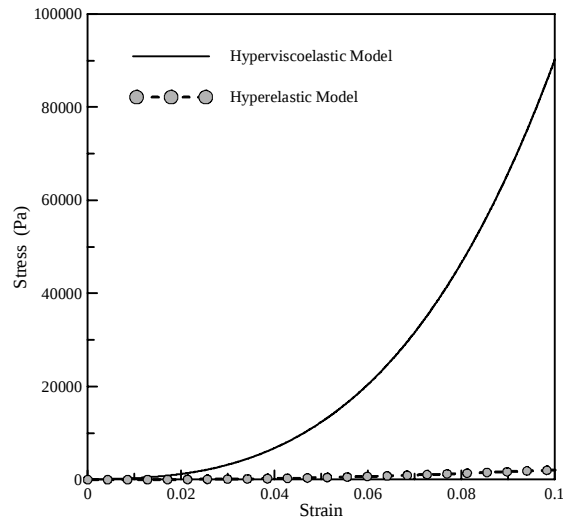


Fig. 10 investigation of the stability for the presented models in pure shear at $\dot{\epsilon} = 0.4167s^{-1}$

شکل 10 بررسی پایداری مدل‌های ارائه شده در بارگذاری برش ساده در نرخ کرنش $0.4167s^{-1}$

تماس بین صفحه فشارنده با بافت، بر نتایج نمودار تنش-کرنش بررسی شد. مهم‌ترین نتیجه‌های به دست آمده از این مقاله را می‌توان به صورت زیر برشمرد.

- 1- سازگاری بسیار خوب بین نتایج تحلیلی و شبیه‌سازی اجزای محدود، برای هر دو مدل هایپر الاستیک و هایپروویسکو الاستیک، ضمن آن‌که تأییدی بر حل تحلیلی انجام شده است، اعتبار نتایج شبیه‌سازی اجزای محدود را نیز نشان می‌دهد.
- 2- مقایسه با نتایج تجربی نشان داد مدل هایپر الاستیک نمی‌تواند مدل ساختاری قابل اطمینانی برای بافت نرم کبد در نرخ‌های کرنش مختلف باشد. اما در مقابل مدل هایپروویسکو الاستیک ارائه شده می‌تواند مدل ساختاری مناسبی برای کبد و به‌ازای نرخ‌های کرنش متفاوت باشد. این مدل می‌تواند برای شبیه‌سازی رفتار کبد در بارگذاری‌های پیچیده‌تر، مانند

- piece holding method with surgical glue, *Proceedings of International Symposium on Surgery Simulation and Soft Tissue Modeling*, Juan-Les-Pins: Springer, pp. 41-67, 2003.
- [7] B. Yarpuzlu, M. Ayyildiz, O. Enis Tok, R. Gulhan Aktas, C. Basdogan, Correlation between the mechanical and histological properties of liver tissue, *Journal of The Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, Vol. 29, No. 1, pp. 403-416, 2014.
- [8] Y. Kobayashi, H. Watanabe, T. Hoshi, K. Kawamura, M. G. Fujie, *Viscoelastic and nonlinear liver modeling for needle insertion simulation*, Y. Payan (Ed), *Soft Tissue Biomechanical Modeling for Computer Assisted Surgery, Studies in Mechanobiology, Tissue Engineering and Biomaterials Volume 11*, pp. 41-67, Berlin: Springer-Verlag, 2012.
- [9] Z. Gao, J. Desai, Estimating zero-strain states of very soft tissue under gravity loading using digital image correlation, *Medical Image Analysis*, Vol. 14, No. 2, pp. 126-137, 2010.
- [10] K. Miller, K. Chinzei, Constitutive modeling of brain tissue: Experimental and theory, *Journal of Biomechanics*, Vol. 30, No. 11-12, pp. 1115-1121, 1997.
- [11] K. Miller, Constitutive model of brain tissue suitable for finite element analysis of surgical procedures, *Journal of Biomechanics*, Vol. 32, No. 5, pp. 531-537, 1999.
- [12] E. Roan, K. Vemaganti, The nonlinear material properties of liver tissue determined from non-slip uniaxial compression experiments, *Journal of Biomechanical Engineering*, Vol. 129, No. 3, pp. 450-456, 2007.
- [13] C. Chui, E. Kobayashi, X. Chen, T. Hisada, I. Sakuma, Combined compression and elongation experiments and non-linear modeling of liver tissue for surgical simulation, *Medical and Biological Engineering and Computing*, Vol. 42, No. 6, pp. 787-798, 2004.
- [14] C. Chui, E. Kobayashi, X. Chen, T. Hisada, I. Sakuma, Transversely isotropic properties of porcine liver tissue: experiments and constitutive modelling, *Medical and Biological Engineering and Computing*, Vol. 45, No. 1, pp. 99-106, 2007.
- [15] K. Miller, K. Chinzei, Mechanical properties of brain tissue in tension, *Journal of Biomechanics*, Vol. 35, No. 4, pp. 483-490, 2002.
- [16] T. Hu, A. C. Lau, J. P. Desai, Instrumentation for testing soft-tissue undergoing large deformation: Ex vivo and in vivo studies, *Journal of Medical Devices*, Vol. 2, No. 4, pp. 1-6, 2008.
- [17] J. D. Brown, J. Rosen, M. N. Sinaman, B. Hannaford, In vivo and postmortem compressive properties of porcine abdominal organs, *Proceedings of The 6th International conference on Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention*, Montréal: Springer, pp. 238-245, 2003.
- [18] P. J. Davies, F. J. Carter, A. Cuschieri, Mathematical modeling for keyhole surgery simulations: a biomechanical model for spleen tissue, *IMA Journal of Applied Mathematics*, Vol. 67, No. 1, pp. 41-67, 2002.
- [19] A. Nava, E. Mazza, M. Furrer, P. Villiger, W. Reinhart, In vivo mechanical characterization of human liver, *Medical Image Analysis*, Vol. 12, No. 2, pp. 203-216, 2008.
- [20] R. Sharifi Sedeh, M. T. Ahnadian, F. Janabi-Sharifi, Modeling, simulation, and optimal initiation planning for needle insertion into the liver, *Journal of Biomechanical Engineering*, Vol. 132, No. 4, pp. 1-11, 2010.
- [21] K. Miller, Method of testing very soft biological tissues in compression, *Journal of Biomechanics*, Vol. 38, No. 1, pp. 153-158, 2005.
- [22] K. Laksari, M. Shafieian, K. Darvish, Constitutive model for brain tissue under finite compression, *Journal of Biomechanics*, Vol. 45, No. 4, pp. 642-646, 2012.
- [23] J. M. Schwartz, M. Denninger, D. Rancourt, C. Moisan, D. Laurendeau, Modelling liver tissue properties using a nonlinear viscoelastic model for surgery simulation, *Medical Image Analysis*, Vol. 9, No. 2, pp. 103-112, 2005.
- [24] X. Wang, J. A. Schoen, M. E. Rentschler, A quantitative comparison of soft tissue compressive viscoelastic model accuracy, *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, Vol. 20, No. 1, pp. 126-136, 2013.
- [25] F. M. Davis, R. De Vita, A nonlinear constitutive model for stress relaxation in ligaments and tendons, *Annals of Biomedical Engineering*, Vol. 40, No. 12, pp. 2541-2550, 2012.

در محاسبه انتگرال (پ-3) از تغییر متغیر (پ-4) استفاده شده است.

$$\lambda = 1 - \beta t \quad (\text{پ-4})$$

در رابطه (پ-3) رابطه‌های (پ-5) برای β و λ برقرار است.

$$\beta = \frac{V}{L_0} \quad (\text{پ-5})$$

$$\lambda = \frac{L}{L_0}$$

یادآوری می‌شود λ در رابطه‌های بالا کشیدگی در راستای محور 3 است

که در رابطه (6) معرفی شد. جمله T_2 نیز مانند T_1 محاسبه می‌شود. با این تفاوت که برای محاسبه T_2 در رابطه (پ-3)، g_2 جایگزین g_1 و τ_2 جایگزین τ_1 می‌شود.

8- فهرست علائم

C	تانسور تغییرشکل گرین-کوشی راست
c_{ij}	ثابت ماده (Pa)
e	عدد نپر
ExpIntegral	تابع انتگرال نمایی
g	ضریب آسایش
J_1, J_2, J_3	پایاهای اصلی تانسور تغییرشکل گرین-کوشی راست
L	طول ثانویه نمونه استوانه‌ای (m)
L_0	طول اولیه نمونه استوانه‌ای (m)
T	تانسور تنش اول پیولا-کرشهف (Pa)
V	سرعت حرکت صفحه فشارنده (m/s)
w	تابع انرژی پتانسیل کرنشی (J/m^3)

علائم یونانی

ε	کرنش در راستای محوری استوانه
λ	نسبت کشیدگی در راستای محوری استوانه
μ	ضریب اصطکاک
τ	زمان مشخصه (s)

بالانویس‌ها و زیرنویس‌ها

i	شمارنده
j	شمارنده

9- مراجع

- [1] S. Umale, C. Deck, N. Bourdet, P. Dhumane, L. Soler, J. Marescaux, R. Willinger, Experimental mechanical characterization of abdominal organs: liver, kidney & spleen, *Journal of The Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, Vol. 17, No. 1, pp. 22-33, 2013.
- [2] A. R. Kemper, A. C. Santago, J. D. Stitzel, J. L. Sparks, S. M. Duma, Effect of strain rate on the material properties of human liver parenchyma in unconfined compression, *Journal of Biomechanical Engineering*, Vol. 135, No. 10, pp. 1-8, 2013.
- [3] Z. Gao, K. Lister, J. P. Desai, Constitutive modeling of liver tissue: Experiment and theory, *Annals of Biomedical Engineering*, Vol. 38, No. 2, pp. 505-516, 2010.
- [4] Y. B. Fu, C. K. Chiu, C. L. Teo, Liver tissue characterization from uniaxial stress-strain data using probabilistic and inverse finite element methods, *Journal of The Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, Vol. 20, No. 1, pp. 105-112, 2013.
- [5] Y. B. Fu, C. K. Chiu, Modelling and simulation of porcine liver tissue indentation using finite element method and uniaxial stress-strain data, *Journal of Biomechanics*, Vol. 47, No. 10, pp. 2430-2435, 2014.
- [6] I. Sakuma, Y. Nishimura, C. Chui, E. Kobayashi, H. Inada, X. Chen, T. Hisada, In vitro measurement of mechanical properties of liver tissue under compression and elongation using a new test

- [28] M. Hosseinizadeh, M. Ghoreishi, K. Narooei, Investigation of hyperelastic models for nonlinear elastic behavior of demineralized and deproteinized bovine cortical femur bone, *Journal of The Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, Vol. 59, No. 1, pp. 393-403, 2016.
- [26] G. A. Holzapfel, H. W. Weizsäcker, Biomechanical behavior of the arterial wall and its numerical characterization, *Computers in biology and medicine*, Vol. 28, No. 4, pp. 377-392, 1998.
- [27] G. A. Holzapfel, *Nonlinear Solid Mechanics*, pp. 205-235, New York: John Wiley & Sons, 2000.