



بررسی رفتار دینامیکی میکروسکوپ نیروی اتمی براساس تئوری گرادیان کرنشی

محمد علی محمدی¹، عقیل یوسفی کما^{2*}، احسان معانی میانداوب³، مراد کریم پور⁴

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه تهران، تهران

2- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه تهران، تهران

3- استادیار، علوم مهندسی، دانشگاه تهران، تهران

4- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه تهران، تهران

* تهران، صندوق پستی 11155-4563، aykoma@ut.ac.ir

چکیده

در این مقاله، رفتار دینامیکی میکروسکوپ نیروی اتمی بر اساس تئوری غیر کلاسیک گرادیان کرنشی مورد مطالعه قرار می‌گیرد. برای این منظور، میکروتیر میکروسکوپ نیروی اتمی و سوزن متصل به انتهای آن به صورت یک جرم متمرکز مدلسازی شده است. میکروتیر از طریق یک المان پیزوالکتریک متصل به انتهای گیردار تحریک شده و معادله مشتقات جزئی غیرخطی حاکم بر سیستم براساس تئوری اویلر-برنولی استخراج شده است با اعمال روش‌های جداسازی و گلرکین، به یک معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌شود. در بسیاری از مطالعات تجربی مشاهده شده است هنگامی که ابعاد سازه تا ناحیه میکرون و زیر میکرون کاهش یابد، اثر اندازه در رفتار دینامیکی این میکرو ساختارها نقش پیدا می‌کند. تئوری کانتینیوم کلاسیک به خاطر چشم پوشی از اثر اندازه، دارای دقت پایینی در پیش‌بینی رفتار مکانیکی ابزارهای نانو می‌باشد، به همین دلیل دو تئوری کلاسیک و غیر کلاسیک در تحلیل رفتار دینامیکی میکروتیر دیدگاه متفاوتی دارند. در این مقاله، ناحیه پایداری میکروتیر به صورت تحلیلی و عددی به دست آمده و با مقایسه نتایج مشخص گردید که این دو روش با هم تطابق دارند. تفاوت بین تحلیل‌های ارائه شده در رفتار دینامیکی میکروتیر توسط دو تئوری کلاسیک و غیر کلاسیک با رسم نمودارهای گوناگونی نشان داده شده است. مشخص می‌شود که در نظر گرفتن اثر اندازه، ماهیت مسئله دینامیکی را به کلی تغییر می‌دهد و ممکن است در حالیکه تئوری کلاسیک رفتاری پایدار برای میکروتیر میکروسکوپ پیش‌بینی می‌کند، اثر اندازه باعث وقوع پایداری دوگانه شود. نتایج به دست آمده در این مقاله برای طراحی و تحلیل میکروسکوپ-های نیروی اتمی بسیار کارا می‌باشند.

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 02 خرداد 1395

پذیرش: 04 مرداد 1395

ارائه در سایت: 24 شهریور 1395

کلید واژگان:

میکروتیر

سوزن

پیزوالکتریک

اویلر-برنولی

گلرکین

گرادیان کرنشی

Dynamic Behavior Analysis of Atomic Force Microscope Based on Gradient Theory

Mohammad Ali Mohammadi¹, Aghil Yousefi-Koma^{1*}, Ehsan Maani Miandoab², Morad Karimpour¹

1- Department of Mechanical Engineering, University of Tehran, Tehran, Iran

2- Department of Engineering Science, University of Tehran, Tehran, Iran

* P.O.B. 11155-4563, Tehran, Iran, aykoma@ut.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper

Received 22 May 2016

Accepted 25 July 2016

Available Online 14 September 2016

Keywords:

Micro-beam

Tip

Piezoelectric

Euler-Bernoulli

Galerkin

Strain gradient

ABSTRACT

In this paper, the dynamic behavior of atomic force microscope (AFM) based on non-classical strain gradient theory was analyzed. For this aim atomic force microscope micro-beam with attached tip has been modeled as a lumped mass. Micro-beam, stimulated via a piezoelectric element attached to the end of clamped and non-linear partial differential equation of the system has been extracted based on Euler-Bernoulli theory and converted into ordinary differential equation by using Galerkin and separation method. The classic continuum theory, because not taking size effect into consideration, has little accuracy in predicting the mechanical behavior of Nano devices. In this study, the stability region of micro-beam is determined analytically and validated by comparison with numerical results. Difference between presented analysis in dynamic behavior of micro-beam by classic and non-classic theories has been shown with a variety of diagrams. It is clear that considering the size effect changes the dynamical behavior of the problem completely and it is possible, and while classical theory predicts stable behavior for microscope the size effect is caused bi-stability. The results in this paper are very useful for the design and analysis of atomic force microscope.

1- مقدمه

کند و برخلاف اکثر روش‌های بررسی خواص سطوح، در این روش غالباً محدودیت اساسی بر روی نوع سطح از جمله رسانا، عایق، نرم یا سخت، منسجم یا پودری، آلی و غیرآلی و همچنین روی محیط آن وجود ندارد.

میکروسکوپ نیروی اتمی برای بررسی خواص و ساختار سطحی مواد در ابعاد نانو بکار می‌رود. این میکروسکوپ می‌تواند در محیط خلاء، هوا و مایع عمل

Please cite this article using:

M. A. Mohammadi, A. Yousefi-Koma, E. Maani Miandoab, M. Karimpour, Dynamic Behavior Analysis of Atomic Force Microscope Based on Gradient Theory, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 9, pp. 155-164, 2016 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

تیرهای استفاده شده در سیستم‌های میکرو و نانو الکترومکانیکال⁷ از جمله در میکروسکوپ نیروی اتمی، دارای ابعادی در حوزه میکرون و کمتر از آن می باشند که تغییر شکل و رفتارهای نوسانی وابسته به اندازه در مقیاس‌های میکرو و نانو به طور تجربی و آزمایشگاهی صحت‌گذاری شده است. برای مثال وو⁸ [16] اثر طول سوزن، فنریت مجانبی و عمودی را بر روی پاسخ نوسانی میکروسکوپ نیروی اتمی دارای میکروتیر مستطیلی بررسی کرد. در آزمایش میکرو پیچشی⁹ روی سیم‌های نازک مسی، فلک [17] مشاهده کرد که کاهش در قطر سیم‌ها منجر به افزایش قابل ملاحظه‌ی سفتی پیچشی سیم‌ها می‌شود. استولکن یک افزایش قابل توجهی از سخت شدن کار پلاستیک که توسط کاهش ضخامت تیر در آزمایش میکرو خمشی روی تیرهای نازک نیکل ایجاد شده بود را گزارش کرد [18]. در طول آزمایش میکرو خمشی روی تیرهای ساخته شده از اپوکسی پلیمرها، چانگ افزایش زیادی از صلبیت خمشی¹⁰ ناشی از کاهش ضخامت تیر را مشاهده کرد [19]. طبق این نتایج آزمایشگاهی، رفتار وابسته به اندازه یک خاصیت ذاتی مواد می‌باشد و هنگامی دارای اثرات قابل توجهی است که اندازه مشخصه سازه تفاوت زیادی با مقیاس طولی ماده داخلی ندارد. تئوری مکانیک کلاسیک نمی‌تواند رفتارهای وابسته به اندازه را که در سازه‌هایی با ابعاد میکرون و زیر میکرون اتفاق می‌افتد، پیش بینی و تشریح کند.

تئوری‌های غیرکلاسیک مانند تئوری الاستیسیته غیرمحل¹¹، تئوری گرادیان کرنشی و تئوری تنش کوپل بهبود یافته¹² به طور خوبی قادر به تفسیر رفتارهای وابسته به اندازه می‌باشند. به عنوان نمونه، ارینگن، پدیسون و ردی از تئوری الاستیسیته غیرمحل¹³ برای آنالیز رفتار مکانیکی نانوسازه‌ها¹³ استفاده کرده‌اند [20-22]. میندلین، اثرات تنش کوپل در الاستیسیته خطی را بررسی کرده همچنین توپین، مواد الاستیک را با تئوری تنش کوپل مدل‌سازی کرده است [23, 24] فتحعلی‌لو از تئوری گرادیان کرنشی در مدل‌سازی میکروتیر استفاده کرده است و معانی با تئوری گرادیان کرنشی رفتار دینامیکی میکروتیر را بررسی کرده است [25, 26]. کهروبائی‌ان با استفاده از تئوری تنش کوپل بهبود یافته رفتارهای دینامیکی میکروتیر میکروسکوپ اتمی را بررسی کرده است [27].

تئوری گرادیان کرنشی بهبود یافته توسط لم [28] معرفی شد. در این تئوری سه پارامتر مقیاس طولی که عبارتند از: گرادیان چرخشی، گرادیان اتساع و گرادیان کششی مربوط به میکروسازه‌ها در نظر گرفته می‌شود. کنگ [29] با استفاده از تئوری گرادیان کرنشی، رفتار استاتیکی و دینامیکی میکروتیرهای اولیفر-برنولی را بررسی کرد. ونگ رفتار ارتعاشی میکروتیرهای مدل تیموشنکو را براساس تئوری گرادیان کرنشی مورد بررسی قرار داد [30]. عباسی [31] فرکانس تشدید و حساسیت میکروتیر میکروسکوپ نیروی اتمی را براساس تئوری گرادیان کرنشی بهبود یافته تحلیل کرده و نشان داده است که اگر سفتی تماسی زیاد باشد و ضخامت میکروتیر نزدیک پارامتر مقیاس طولی¹⁴ باشند آنگاه استفاده از تئوری گرادیان کرنشی برای تحلیل رفتار دینامیکی میکروتیر لازم می‌باشد. همچنین عباسی در [32] رفتار ارتعاشی یک نوع میکروتیری که توسط دایا در [33] برای میکروسکوپ نیروی اتمی پیشنهاد شده بود را براساس تئوری گرادیان کرنشی بررسی کرده است و

همچنین می‌توان از این دستگاه برای اندازه‌گیری ویژگی‌های هندسی سطح، توزیع چسبندگی، اصطکاک و ناخالصی سطحی استفاده کرد. میکروسکوپ‌های اتمی برای تهیه تصاویر با وضوح بالا از سطح ساختارهای نمونه‌های عایق و رسانا در محیط‌های هوا و مایع اختراع شده است [1, 2]. این میکروسکوپ‌ها شامل یک میکروتیر می‌باشند که یک سوزن به فرم‌های هرمی یا مخروطی تیز و یا کروی، به انتهای آن متصل شده است. این دستگاه شامل چند مود کاری می‌باشد که یکی از آن‌ها مد تماسی¹ است. در این مود کاری سوزن با سطح در تماس است و آن را روبش می‌کند و نیروی بین نوک سوزن و سطح بصورت دافعه می‌باشد و براساس انحنای میکروتیر که ناشی از نیروی بین نوک سوزن و سطح نمونه می‌باشد، توپوگرافی سطح بدست می‌آید. مود تماسی به علت آسیب زدن به سطح نمونه‌های نرم قابل استفاده نبود و در سال 1987 مود غیرتماسی² برای تهیه تصویر از سطح نمونه‌های نرم توسعه یافت. مود شبه تماسی³ از مدهای کاری دیگر این دستگاه است و در سال 1993 معرفی شد [3]. در این شیوه، نوک سوزن می‌تواند بالای سطح نمونه شناور باشد در صورتی که میکروتیر در حال ارتعاش در دامنه‌های خیلی بزرگ‌تر از اندازه دامنه در مود غیرتماسی است. رفتار دینامیکی میکروتیر تأثیر قابل توجهی بر کیفیت تصویر سطح دارد. همیشه چالش‌های گوناگونی برای میکروسکوپ نیروی اتمی در مورد دقت، رزولوشن و عمق ویژگی‌های تصویر وجود داشته است و به این منظور برای مطالعه سیستم میکروسکوپ نیروی اتمی و بهبود بخشیدن به کیفیت تصویر حاصله، به یک مدل جامع از میکروتیر نیاز است.

اولین مدل پیشنهادی، مدل پارامترهای متمرکز است که برای نمونه در کار آشاب، باسو و مارتین دیده می‌شود [4-6]. اما این مدل نمی‌تواند به اندازه کافی برای نوسان در فرکانس‌های بالا هنگامی که مدهای بالاتر تحریک می‌شوند، دقیق باشد. سانگ و واکوئز از تیر اولیفر-برنولی برای مدل‌سازی میکروتیر استفاده کرده‌اند که در مقایسه با مدل پارامترهای متمرکز بهتر می‌باشد [7, 8]. بعضی از محققان برای میکروتیر با در نظر گرفتن نیروهای مختلف بین نوک سوزن و سطح نمونه، چندین مدل ارائه کرده‌اند [7-10]. برای مدهای کاری مختلف این میکروسکوپ، نیروی متقابل بین سوزن و سطح نمونه به صورت یکی از این مدل‌ها بیان شده است: مدل تماسی هرتز⁴ [7, 11]. مدل تکه‌ای خطی تماسی [12] و مدل درجاگوین-مولر-توپورو⁵ [13]. مدل درجاگوین-مولر-توپورو، یکی از روش‌های شبیه‌سازی نیروهای مکانیکی تماسی می‌باشد که در آن دو نوع نیرو در نظر گرفته می‌شود، یکی نیروی چسبندگی که خارج از ناحیه تماس عمل می‌کند و دیگری نیروی دافعه که ناشی از دافعه یون‌ها می‌باشد و در طی تماس سوزن با سطح اعمال می‌شود، مدل درجاگوین-لاندا-وروی-وربیک⁶ [14] که ترکیبی از نیروهای جاذبه واندروالس و دافعه الکترواستاتیک بین نوک سوزن و سطح نمونه در محیط مایع می‌باشد. اسلامی از تئوری تیر تیموشنکو برای مدل‌سازی میکروتیر استفاده کرده است و میکروتیر توسط پیزوالکتریک متصل به ابتدای تیر تحریک می‌شود. المان پیزو با یک دامنه و فرکانس مشخصی نوسان می‌کند، همچنین برآیند نیروهای دافعه و جاذبه بین نوک سوزن و سطح نمونه را به صورت مجموعی از توان‌های منفی و مثبت در نظر گرفته است [15].

⁷ Mems/Nems⁸ Wu⁹ Micro torsion¹⁰ Flexural rigidity¹¹ Non-local Elasticity¹² Modified couple stress¹³ Nano-structure¹⁴ Length scale parameter¹ Contact mode² Non-Contact³ Tapping mode⁴ Hertz⁵ DMT⁶ DLVO

سیستم دارای دمپینگ ویسکوز⁴ می‌باشد.

- از تئوری‌های تیر اویلر-برنولی و گرادیان کرنشی استفاده شده است. در نهایت معادله حرکت و شرایط مرزی با استفاده از اصل همپلتون استخراج می‌گردد.

انرژی جنبشی تیر به صورت زیر می‌باشد:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l (\dot{h} + \dot{W})^2 dx + \frac{1}{2} m_t (\dot{h} + \dot{W}(l, t))^2$$

$$h(t) = h_b \sin(\omega_b t + \psi) \quad (1)$$

در راستای محور z طول تیر، جابجایی سرگردار که به صورت هارمونیک از طریق پیزوالکتریک به تیر اعمال می‌شود، جرم سوزن، دامنه، فرکانس تحریک و اختلاف فاز می‌باشند.

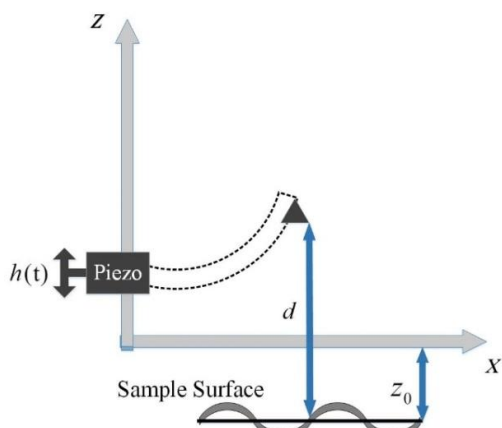


Fig. 1 schematic of micro beam of atomic force microscope

شکل 1 میکروتیر میکروسکوپ نیروی اتمی

جدول 1 مشخصات هندسی و مکانیکی میکروتیر

Table 1 Geometrical and mechanical characteristic of micro beam

واحد	مقدار	نماد	
μm	25	b_0	عرض میکروتیر
Nsm^{-2}	0.05	C	ثابت دمپینگ
μm	0.1	Cl	پارامتر مقیاس طولی
MPa	156	E	مدول الاستیسیته
μm	5	h_0	ضخامت میکروتیر
J	2.96×10^{-19}	H	ثابت هاماکر
nm	0.18	h_b	دامنه تحریک
μm	100	l_0	طول میکروتیر
nm	10	R	شعاع سوزن
nm	30	z_0	میانگین فاصله محور طولی تا ناهمواری سطح نمونه
Pa	—	μ	مدول برشی
—	0.23	ν	ضریب پواسون
kgm^{-3}	2330	ρ	چگالی
rad	$\pi/3$	ψ	فاز
rad/s	—	ω_b	فرکانس تحریک

⁴ Viscose damping

نشان داده است که فرکانس تشدید و حساسیت این میکروتیر پیشنهاد شده بسیار به اندازه وابسته است بخصوص زمانی که سفتی تماسی خیلی زیاد یا خیلی کم باشد. ژائو [34] تغییر شکل غیرخطی استاتیکی خمشی، مسئله پس‌کمانش و ارتعاش آزاد غیرخطی را برای میکروتیر دو سر مفصل که تحت نیروی عرضی قرار گرفته براساس تئوری گرادیان کرنشی تحلیل کرده است که اثر اندازه¹ هنگامی که نسبت ضخامت به پارامترهای مقیاس طولی ماده داخلی به طور تقریبی برابر یک یا دو باشد، قابل توجه می‌باشد و با افزایش این نسبت، اثر اندازه خیلی قابل ملاحظه نخواهد بود. وطنخواه [35] ارتعاشات اجباری غیرخطی یک میکروتیر دو سر مفصل را با در نظر گرفتن اثر کشیدگی صفحه میانی، براساس تئوری گرادیان کرنشی مدل‌سازی کرده و پدیده‌های تشدید اصلی، فوق هارمونیک و زیر هارمونیک را بررسی کرده است. اخیراً معانی [37,36] نشان داده است که تحلیل تئوری گرادیان کرنشی نسبت به تئوری غیرمحلی، در تطابق بهتری با نتایج تجربی می‌باشد. همچنین در سیستم‌های میکروالکترومکانیکال، در بحث پایداری اثبات کرده است که تبدیل ناحیه پایداری به پایداری دوگانه² در تئوری غیرکلاسیک به ازای ولتاژهای بزرگتری نسبت به تئوری کلاسیک اتفاق می‌افتد [26].

در مقاله حاضر میکروتیری با مقطع مستطیلی و سوزن متصل در انتهای آزاد آن به صورت کروی در نظر گرفته شده است. پس از استخراج معادله حرکت و شرایط مرزی براساس تئوری‌های اویلر-برنولی و گرادیان کرنشی، مدل یک درجه آزادی میکروتیر به دست آمده است. معادله غیرخطی حاصل با روش عددی رانگ-کوتا³ مرتبه 6 و همچنین روش تحلیلی برای تعیین ناحیه پایداری سیستم، برحسب پارامتری وابسته به هندسه میکروتیر، استفاده شده است. پارامتر وابسته به هندسه میکروتیر، بی بعد بوده و در مقاله با η نشان داده شده است. نمودارهای پاسخ زمانی و سرعت برحسب جابجایی، به ازای دو مقدار از پارامتر بی بعد η رسم شده است. تغییرات پارامتر η براساس کاهش ابعاد میکروتیر، برای تئوری‌های کلاسیک و گرادیان کرنشی نشان داده شده و ناحیه تعادل ارائه شده توسط دو تئوری کلاسیک و غیرکلاسیک برحسب تغییرات فاصله محور افقی تا سطح نمونه به ازای دو مقدار از ضخامت میکروتیر مقایسه شده است. همچنین نسبت فاصله محور افقی تا سطح نمونه در تئوری کلاسیک به گرادیان کرنشی برحسب تغییرات ضخامت میکروتیر نشان داده شده است. سرانجام اثر اندازه، به وسیله کاهش ابعاد هندسی که روی نقاط تعادل سیستم تأثیر می‌گذارد، از دیدگاه دو تئوری کلاسیک و گرادیان کرنشی با هم مقایسه شده است.

2- مدل‌سازی ریاضی

شکل 1 میکروتیر مورد نظر را نشان می‌دهد همچنین جدول 1 مشخصات هندسی و مکانیکی آن را بیان می‌کند. در این قسمت برای استخراج مدل میکروتیر شکل 1، فرضیات زیر در نظر گرفته شده است.

- حالت کاری میکروسکوپ، غیرتماسی است و با دامنه ثابت سطح را روبش می‌کند.
- المان پیزو به سرگردار میکروتیر متصل است و به صورت هارمونیک و دامنه ثابت میکروتیر را تحریک می‌کند.
- در انتهای آزاد تیر، سوزن به صورت کروی شکل بوده و محیط کاری میکروتیر، هوا در نظر گرفته می‌شود.
- بین نوک سوزن و سطح نمونه نیروی واندروالس وجود دارد و

¹ Size effect

² Bi-stability

³ Runge kutta

با جایگذاری روابط (5-7) در (4)، معادله سیستم به صورت رابطه (8) حاصل خواهد شد.

$$-K \frac{\partial^6 W}{\partial x^6} + S \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + C \frac{\partial W}{\partial t} + \rho A \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = F_{ts} \delta(l-x) - \rho A \ddot{h} \quad (8)$$

شرایط مرزی عبارتند از:

$$\begin{aligned} -K \frac{\partial^5 W(l,t)}{\partial x^5} + S \frac{\partial^3 W(l,t)}{\partial x^3} - m_t \frac{\partial^2 W(l,t)}{\partial t^2} + m_t h_b \omega_b^2 \sin(\omega_b t + \psi) &= 0 \\ W(0,t) = 0; \quad \frac{\partial W(0,t)}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial^3 W(0,t)}{\partial x^3} = 0 \\ \frac{\partial^2 W(l,t)}{\partial x^2} = 0; \quad K \frac{\partial^4 W(l,t)}{\partial x^4} - S \frac{\partial^2 W(l,t)}{\partial x^2} &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

پارامترهای بی بعد به صورت رابطه (10) تعریف می‌شوند.

$$\hat{x} = \frac{x}{l}; \quad \hat{W} = \frac{W}{z_0}; \quad \hat{t} = \frac{t}{T} \quad (10)$$

روابط (8) و (9) براساس رابطه (10) بی بعد خواهند شد. معادله بی بعد

شده عبارت است از:

$$\begin{aligned} \alpha_0 \frac{\partial^6 \hat{W}}{\partial \hat{x}^6} + \frac{\partial^4 \hat{W}}{\partial \hat{x}^4} + c \frac{\partial \hat{W}}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial^2 \hat{W}}{\partial \hat{t}^2} &= \frac{-A_0 \delta(l - \hat{x})}{\left[z_0 + \left(z_0 \hat{W}(1, \hat{t}) + h(\hat{t}) \right) \right]^2} \\ &+ H_0 \sin(\Omega_b \hat{t} + \psi) \\ \alpha_0 = \frac{-K}{S l^2}; \quad c = \frac{C l^4}{S T} \\ A_0 = \frac{H R l^4}{6 S z_0}; \quad \Omega_b = T \omega_b; \quad T = \sqrt{\frac{\rho A l^4}{S}}; \quad H_0 = \frac{\Omega_b^2 h_b}{z_0} \end{aligned} \quad (11)$$

شرایط مرزی بی بعد شده عبارت است از:

$$\begin{aligned} \alpha_0 \frac{\partial^5 \hat{W}(1, \hat{t})}{\partial \hat{x}^5} + \frac{\partial^3 \hat{W}(1, \hat{t})}{\partial \hat{x}^3} &+ \frac{m_t h_b l^3 \omega_b^2}{S z_0} \sin(\Omega_b \hat{t} + \psi) \\ &= \frac{m_t l^3 \partial^2 \hat{W}(1, \hat{t})}{S T^2 \frac{\partial \hat{t}^2}{\partial \hat{x}^2}} \\ \hat{W}(0, \hat{t}) = 0; \quad \frac{\partial \hat{W}(0, \hat{t})}{\partial \hat{x}} = 0; \quad \frac{\partial^3 \hat{W}(0, \hat{t})}{\partial \hat{x}^3} = 0 \\ \frac{\partial^2 \hat{W}(1, \hat{t})}{\partial \hat{x}^2} = 0; \quad \alpha_0 \frac{\partial^4 \hat{W}(1, \hat{t})}{\partial \hat{x}^4} + \frac{\partial^2 \hat{W}(1, \hat{t})}{\partial \hat{x}^2} &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

با اعمال روش جداسازی و گلرکین روی رابطه (11)، مدل یک درجه آزادی سیستم حاصل خواهد شد. به دلیل غالب بودن شکل مود اول، تابع

جواب با در نظر گرفتن یک شکل مود به صورت (13) خواهد شد.

$$\hat{W}(\hat{x}, \hat{t}) = \varphi_i(\hat{x}) u_i(\hat{t}) \quad (13)$$

با جایگذاری (13) در معادله رابطه (11) و اعمال گلرکین، مدل یک

درجه آزادی سیستم به صورت رابطه (14) حاصل خواهد شد.

$$\begin{aligned} \ddot{u} + c \dot{u} + \alpha u &= \frac{-\eta_0}{\left[z_0 + \left(z_0 \varphi(1) u(\hat{t}) + h(\hat{t}) \right) \right]^2} \\ &+ \kappa_0 \sin(\Omega_b \hat{t} + \psi) \\ \alpha &= \int_0^1 \left\{ \alpha_0 \frac{d^6 \varphi}{d \hat{x}^6} + \frac{d^4 \varphi}{d \hat{x}^4} \right\} \varphi d \hat{x} \\ \eta_0 &= A_0 \frac{\varphi(1)}{l} \\ \kappa_0 &= H_0 \int_0^1 \varphi d \hat{x} \end{aligned} \quad (14)$$

تغییر متغیر $z_0 \zeta(\hat{t}) = z_0 \varphi(1) u(\hat{t}) + h(\hat{t})$ روی رابطه (14) اعمال

می‌شود، بنابراین رابطه (14) به صورت زیر بازنویسی خواهد شد:

انرژی پتانسیل میکروتیر براساس تئوری گرادیان کرنشی به صورت رابطه (2) می‌باشد.

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ S \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 + K \left(\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} \right)^2 \right\} dx \\ K &= \mu l \left(2l_0^2 + \frac{4}{5} l_1^2 \right) \\ S &= EI + \mu A \left(2l_0^2 + \frac{8}{15} l_1^2 + l_2^2 \right) \end{aligned} \quad (2)$$

پارامترهای A, I, G, E و l_0, l_1, l_2 به ترتیب مدول ینگ، مدول برشی، ممان اینرسی و مساحت مقطع میکروتیر می‌باشند، همچنین پارامترهای l_0, l_1, l_2 پارامترهای مقیاس طولی هستند. در تئوری کلاسیک پارامترهای مقیاس طولی صفر می‌باشند. کار نیروی ناپایستار نیز به صورت زیر محاسبه خواهد شد:

$$\begin{aligned} w^{n.c} &= F_{ts} W(l, t) - \int_0^l C \frac{\partial W}{\partial t} W dx \\ F_{ts} &= \frac{-HR}{6d^2} \\ d &= z_0 + (W(l, t) + h(t)) \end{aligned} \quad (3)$$

در روابط (3) پارامترهای d, R, H, C, F_{ts} و z_0 به ترتیب نیروی بین نوک سوزن و سطح نمونه، ثابت دمپینگ، ثابت هاماکر¹، شعاع سوزن، فاصله محور افقی تا میانگین ناهمواری‌های سطح نمونه، فاصله بین محور افقی تا میانگین ناهمواری‌های سطح نمونه می‌باشند. علت در نظر گرفتن منفی برای نیروی واندروالس جاذبه بودن آن است که به نوک سوزن در جهت منفی محور z اعمال می‌شود. رابطه (4) اصل همیلتون را نشان می‌دهد:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U + w^{n.c}) dt = 0 \quad (4)$$

طبق رابطه (4)، جزء تغییرات و انتگرال گیری روی روابط (3-1) اعمال خواهد شد.

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} T dt &= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^l -\frac{\partial}{\partial t} [\rho A (\dot{W} + \dot{h})] \delta W dx \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial t} [m_t (\dot{h} + \dot{W}(l, t))] \delta W(l, t) \right\} dt \end{aligned} \quad (5)$$

انتگرال جزء تغییرات انرژی پتانسیل نیز به صورت زیر محاسبه خواهد شد:

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} U dt &= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ K \frac{\partial^3 W(l, t)}{\partial x^3} \delta \left(\frac{\partial^2 W(l, t)}{\partial x^2} \right) \right. \\ &\quad \left. - K \frac{\partial^3 W(0, t)}{\partial x^3} \delta \left(\frac{\partial^2 W(0, t)}{\partial x^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(S \frac{\partial^2 W(l, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial^3 W(l, t)}{\partial x^3} \right) \right) \delta \left(\frac{\partial W(l, t)}{\partial x} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(S \frac{\partial^2 W(0, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial^3 W(0, t)}{\partial x^3} \right) \right) \delta \left(\frac{\partial W(0, t)}{\partial x} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(-\frac{\partial}{\partial x} \left(S \frac{\partial^2 W(l, t)}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(K \frac{\partial^3 W(l, t)}{\partial x^3} \right) \right) \delta W(l, t) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(S \frac{\partial^2 W(0, t)}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(K \frac{\partial^3 W(0, t)}{\partial x^3} \right) \right) \delta W(0, t) \right. \\ &\quad \left. + \int_0^l \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} S \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left(K \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} \right) \right\} \delta W dx \right\} dt \end{aligned} \quad (6)$$

انتگرال کار مجازی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

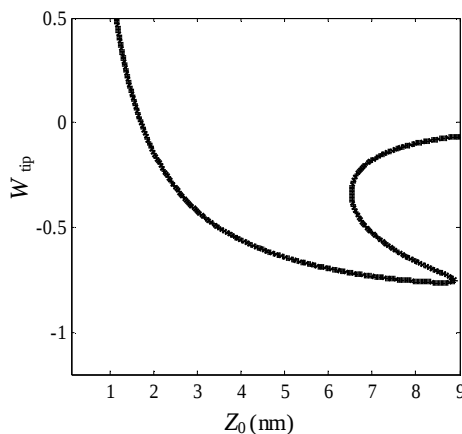
$$\delta \int_{t_1}^{t_2} w^{n.c} dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \left\{ F_{ts} \delta(l-x) - C \frac{\partial W}{\partial t} \right\} \delta W dx dt \quad (7)$$

¹ Hamaker constant

جدول 2 بررسی حالت‌های پایداری سیستم
 Table 2 Study of system stability states

حالت پایداری	نقاط تعادل تابع پتانسیل	ریشه‌های تابع f	η
ناپایدار	یک نقطه مینیمم	یک ریشه حقیقی ساده و دو ریشه مختلط	$\eta > a$
پایدار	یک نقطه مینیمم	یک ریشه تکراری منفی حقیقی	$\eta = a$
پایداری دوگانه	دو نقطه مینیمم و یک ماکزیمم	سه ریشه حقیقی؛ یک ریشه مثبت و دو ریشه منفی	$\eta < a$

$$a = 0.1488$$


 Fig. 2 Static behavior of tip of micro-beam according to z_0

 شکل 2 نمودار رفتار استاتیکی سوزن میکروتیر برحسب پارامتر z_0

$$\zeta'' + \beta\zeta' + \zeta = \left(\frac{Rl^3\phi^2(1)}{6Sz_0^3\alpha} \right) \left\{ \frac{A_1}{30z_0^6(1+\zeta)^8} - \frac{A_2}{(1+\zeta)^2} \right\} + \chi \sin(\Omega\tau + \hat{\psi}) \quad (21)$$

معادله استاتیکی سیستم بصورت رابطه (22) خواهد شد:

$$\zeta = \left(\frac{Rl^3\phi^2(1)}{6Sz_0^3\alpha} \right) \left\{ \frac{A_1}{30z_0^6(1+\zeta)^8} - \frac{A_2}{(1+\zeta)^2} \right\} \quad (22)$$

4- بحث و بررسی

4-1- چندشاخگی ناحیه تعادل

برای تعیین ناحیه پایداری به صورت عددی، نمودار نقاط تعادل برحسب

جدول 3 پارامترهای میکروتیر برای اعتبار سنجی

Table 3 Parameters of micro-beam for validation

واحد	مقدار	نماد	ضخامت
μm	1.7	h	
μm	46	b	عرض
μm	449	l	طول
nm	150	R	شعاع سوزن
J m^6	1.3596×10^{-70}	A_1	-
J	1.865×10^{-19}	A_2	-

$$\begin{aligned} \ddot{\zeta} + c\dot{\zeta} + \alpha\zeta &= \frac{-\eta_0}{z_0^2(1+\zeta)^2} \\ &+ \sqrt{p^2 + q^2} \sin(\Omega_b \hat{t} + \hat{\psi}) \\ p &= \varphi(1)\kappa_0 + (\alpha - \Omega_b^2) \frac{h_b}{z_0}; \quad q = \frac{ch_b\Omega_b}{z_0} \\ \theta &= \tan^{-1}\left(\frac{q}{p}\right); \quad \hat{\psi} = \psi + \theta \end{aligned} \quad (15)$$

 تغییرمتغیری به صورت $\tau = \sqrt{\alpha} \hat{t}$ روی معادله (15) اعمال می‌شود.

$$\begin{aligned} \zeta'' + \beta\zeta' + \zeta &= \frac{-\eta}{(1+\zeta)^2} + \chi \sin(\Omega\tau + \hat{\psi}) \\ \beta &= \frac{c}{\sqrt{\alpha}}; \quad \eta = \frac{\eta_0\varphi(1)}{z_0^2\alpha}; \quad \chi = \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{\alpha}; \quad \Omega = \frac{\Omega_b}{\sqrt{\alpha}} \end{aligned} \quad (16)$$

برای تعیین ناحیه پایداری، ترم‌های وابسته به زمان، شتاب و سرعت از معادله (16) حذف شده و رابطه (17) حاصل خواهد شد.

$$-\frac{\eta}{(1+\zeta)^2} - \zeta = 0 \rightarrow \zeta^3 + 2\zeta^2 + \zeta + \eta = 0 \quad (17)$$

 رابطه (17) تابعی از متغیرهای ζ, η می‌باشد، این رابطه به صورت تابع تعادلی (18) در نظر گرفته می‌شود.

$$f = \zeta^3 + 2\zeta^2 + \zeta + \eta \quad (18)$$

 با اعمال تغییرمتغیر $\zeta \rightarrow \zeta - \frac{2}{3}$ روی (18)، تابع f به صورت رابطه (19) خواهد شد.

$$\begin{aligned} f &= \zeta^3 + p\zeta + q \\ p &= -\frac{1}{3}; \quad q = -\frac{2}{27} + \eta \end{aligned} \quad (19)$$

دلتای معادله (19) به صورت زیر خواهد شد:

$$\Delta = 27\eta^2 - 4\eta \quad (20)$$

رابطه (20) در جدول 2 تعیین علامت شده است.

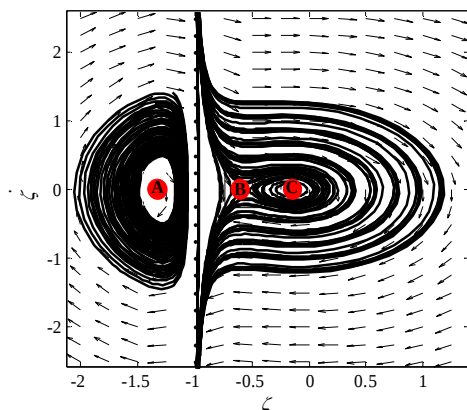
شیار¹ نشان داده است که نسبت بین طول‌های مشخصه، پاسخ برخی از مسائل را می‌تواند تغییر دهد [38] در تعیین این پارامترها با استفاده از نتایج تجربی یک فرض رایج در مقالات، هر سه پارامتر مقیاس طولی را یکسان در نظر می‌گیرند [39,37,28]. بنابراین برای بحث و مقایسه در رفتارهای دینامیکی و استاتیکی میکرو و نانو تیرها براساس تئوری گرادیان کرنشی، به - طور معمول فرض بر این است که پارامترهای مقیاس طولی برابر باشند و معادل پارامتری مثل cl در نظر گرفته شود [40,34, 28].

3- اعتبارسنجی معادله حرکت بدست آمده از روش گلرکین

برای صحت‌گذاری مدل یک درجه آزادی بدست آمده از روش گلرکین که معادله رابطه (16) می‌باشد، رفتار استاتیکی سوزن میکروتیر برحسب فاصله z_0 با توجه به پارامترهای معین جدول 3 که از مقادیر موجود در جدول یونس [41] اتخاذ شده، در شکل 2 نشان داده شده است و سپس با رفتار استاتیکی نشان داده شده در [41] مقایسه شده است. شکل 2 رفتار سوزن میکروتیر برحسب فاصله z_0 را نشان می‌دهد. مقایسه رفتار استاتیکی سوزن در [41] با شکل 2، مشخص می‌کند که این دو شکل تطابق مناسبی با یکدیگر دارند به عبارت دیگر مدل‌سازی انجام شده براساس روش گلرکین دارای اعتبار بوده و لذا می‌توان برای قسمت‌های بعدی مقاله از این مدل استفاده کرد.

برای این منظور ترم دافعه موجود در نیروی واندروالس نیز در نظر گرفته می‌شود [15] بنابراین معادله جرم متمرکز موجود در رابطه (16) به صورت رابطه (21) بازنویسی خواهد شد.

¹ Sciarra

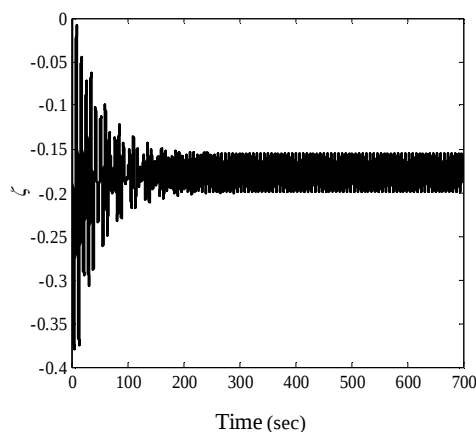

 Fig. 5 Phase plane diagram for $\eta = 0.11$

شکل 5 صفحه فاز به ازای پارامتر $\eta = 0.11$

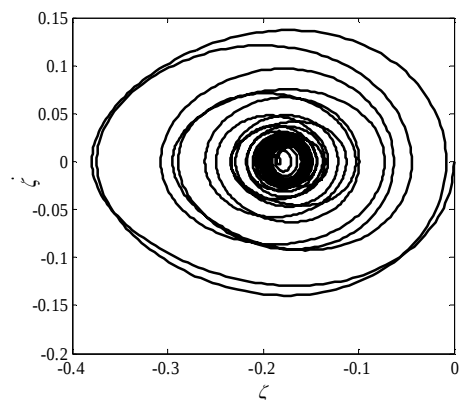
ناپایدار است و در نهایت C نقطه مارپیچ پایدار است. همچنین به ازای دو مقدار از η ، نمودارهای پاسخ زمانی و سرعت برحسب جابه‌جایی سیستم به ازای یک شرایط اولیه معین در شکل‌های 6 و 7 رسم شده است.

همان‌طور که شکل 6 الف نشان می‌دهد، نقطه تعادل سیستم به ازای $\eta = 0.12$ برابر -0.1773 است که در شکل 2 نیز به ازای $\eta = 0.12$ همین نقطه تعادل را مشخص می‌کند.

4-1-1 پاسخ زمانی، صفحه فاز و فضای فاز سیستم به ازای $\eta = 0.12$


 Fig. 6a Time history diagram for $\eta = 0.12$

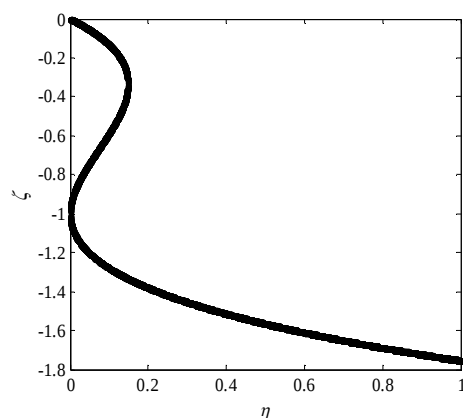
شکل 6 الف پاسخ زمانی به ازای پارامتر $\eta = 0.12$


 Fig. 6b Phase plane diagram for $\eta = 0.12$

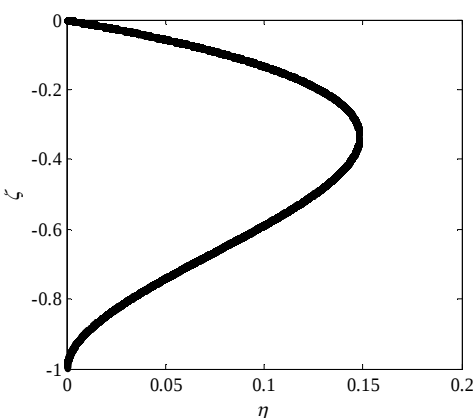
شکل 6 ب صفحه فاز به ازای پارامتر $\eta = 0.12$

تغییرات دامنه ζ برحسب η در شکل 3 نمایش داده شده است. با توجه به بی‌بعد کردن دامنه، مقدار بزرگتر از یک مفهوم فیزیکی نداشته و بنابراین این ناحیه ناپایدار در شکل 3 حذف شده و نتیجه در شکل 4 نمایش داده شده است. با توجه به اینکه رابطه (18) یک معادله بی‌بعد است برای حالت‌های کلاسیک و غیرکلاسیک یکسان می‌باشد در حالی که برای پارامترهای فیزیکی یکسان، مقدار پارامتر بی بعد η براساس دو تئوری متفاوت می‌باشد.

مقایسه شکل 3 و جدول 2 تطابق خوبی را برای روش تحلیلی و عددی نشان می‌دهند. همچنین مقدار بحرانی ارئه شده در نمودار و جدول یکسان می‌باشند. درواقع $\eta_{cr} = a$ می‌باشد و با توجه به شکل 3 به ازای $\eta < \eta_{cr}$ سیستم حول نقطه تعادل پایدار متناظر به آن نوسان می‌کند. برای نشان دادن حالت کلی دینامیک سیستم با توجه به شکل 3، به ازای یک دسته از شرایط اولیه و پارامتر $\eta = 0.11$ ، نمودار صفحه فازی سیستم در شکل 5 رسم شده است. با توجه به شکل 5 سیستم سه نقطه تعادل دارد که با توجه به میدان برداری رفتار سیستم حول این نقاط نشان داده شده است. نقطه A از نوع نقطه مارپیچ پایدار است که مسیرهای جواب با نرخ جبری به این نقطه می‌رسند، به همین دلیل به آرامی جذب این نقطه می‌شوند و با توجه به اینکه در دامنه بزرگتر از این نقطه مفهوم فیزیکی ندارد، نقطه B نقطه‌ای زینی¹ و


 Fig. 3 Bifurcation diagram of equilibrium points according to η

شکل 3 نمودار چندشاخگی نقاط تعادل برحسب پارامتر η


 Fig. 4 Correct bifurcation diagram of equilibrium points according to η

شکل 4 نمودار تصحیح شده چندشاخگی نقاط تعادل برحسب پارامتر η

¹ Saddle

است که برای این سیستم به ازای $\eta = 0.16$ هیچ نقطه تعادلی وجود ندارد. بنابراین شکل‌های 3، 7 الف و 7 ب این مفهوم را می‌رسانند که سیستم به ازای $\eta > 0.1488$ ناپایدار می‌باشد.

2-4- نمودار تغییرات پارامتر η برحسب نسبت ابعادی برای حالت‌های کلاسیک و غیرکلاسیک

پارامتر نسبت ابعادی عبارتست از ضخامت اولیه به ضخامت ثانویه، نسبت ابعادی روی تمام پارامترهای هندسی تأثیر می‌گذارد و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$k = \frac{h_0}{h} \quad (23)$$

روند تغییرات پارامتر η در هریک از تئوری‌های کلاسیک و غیرکلاسیک برحسب نسبت ابعادی در شکل 8 نشان داده شده است.

با توجه به این شکل با افزایش نسبت ابعادی، پارامتر η در هردو تئوری افزایش می‌یابد اما سرعت افزایش این پارامتر در تئوری کلاسیک نسبت به تئوری غیرکلاسیک خیلی بیشتر می‌باشد. به گونه‌ای که طبق شکل 8 در تئوری کلاسیک این پارامتر η به طور تقریبی در نسبت ابعادی معادل 31.7 به مقدار بحرانی η_{cr} می‌رسد ولی در تئوری غیرکلاسیک پارامتر η به طور تقریبی در نسبت ابعادی 84.27 به مقدار بحرانی η_{cr} خواهد رسید. به عبارت دیگر با کاهش همزمان ابعاد میکروتیر و فاصله محور افقی تا سطح نمونه، تئوری کلاسیک نسبت به غیرکلاسیک زودتر به مقدار بحرانی خواهد رسید و درواقع طبق شکل‌های 3 و 8، تئوری کلاسیک اعلام می‌کند که اگر نسبت ابعادی از مقدار 31.7 بیشتر شود سیستم ناپایدار می‌شود اما از دیدگاه تئوری غیرکلاسیک اگر تمامی ابعاد طولی مذکور تا نسبت ابعادی 84.27 کاهش یابند سیستم هنوز در ناحیه پایدار قرار دارد.

3-4- نمودار نقاط تعادل برحسب فاصله محور افقی تا سطح نمونه

نقاط تعادل برحسب فاصله محور افقی تا سطح نمونه برای حالت‌های کلاسیک و غیرکلاسیک به ازای مقادیر ضخامت‌های $h = 1, 0.1 \mu\text{m}$ در شکل‌های 9 و 10 نشان داده شده است.

با توجه به شکل 9 برای میکروتیر به ضخامت $h = 1 \mu\text{m}$ در حالت کلاسیک حداقل فاصله z_0 به طور تقریبی باید معادل 1.4878nm باشد تا

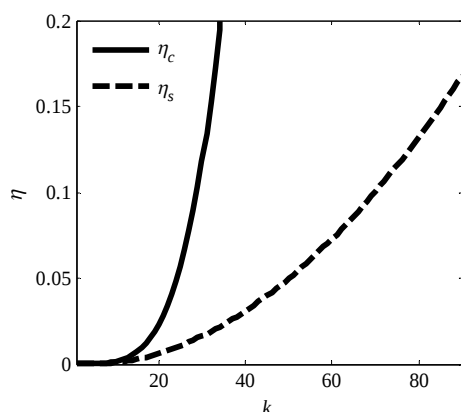


Fig.8 The parameter changes η according to aspects ratio in classic and non-classic theories

شکل 8 تغییرات پارامتر η برحسب نسبت ابعادی از دیدگاه تئوری‌های کلاسیک و غیرکلاسیک

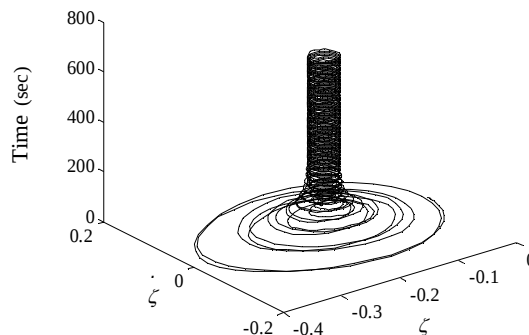


Fig. 6g Phase space diagram for $\eta = 0.12$

شکل 6 ج فضای فاز به ازای پارامتر $\eta = 0.12$

2-1-4 پاسخ زمانی و صفحه فاز سیستم به ازای $\eta = 0.16$

مطابق شکل 7 الف، سیستم به ازای مقدار $\eta = 0.16$ از حالت نوسانی خارج شده و پایداری خود را از دست می‌دهد. در شکل 7 ب نیز نشان داده شده

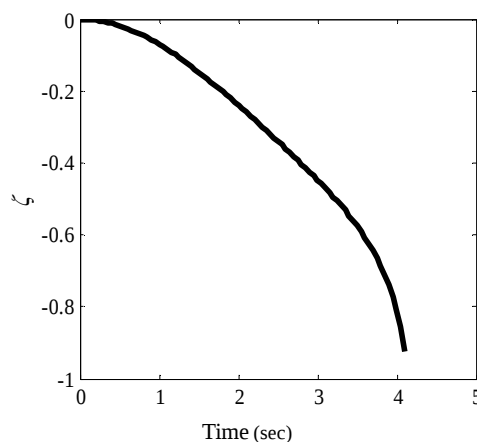


Fig. 7a Time history diagram for $\eta = 0.16$

شکل 7 الف پاسخ زمانی به ازای پارامتر $\eta = 0.16$

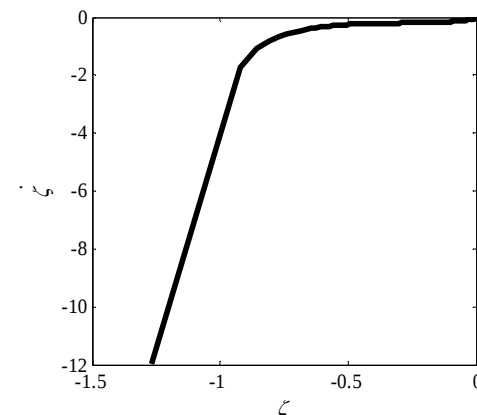


Fig. 7b Phase Portrait diagram for $\eta = 0.16$

شکل 7 ب صفحه فاز به ازای پارامتر $\eta = 0.16$

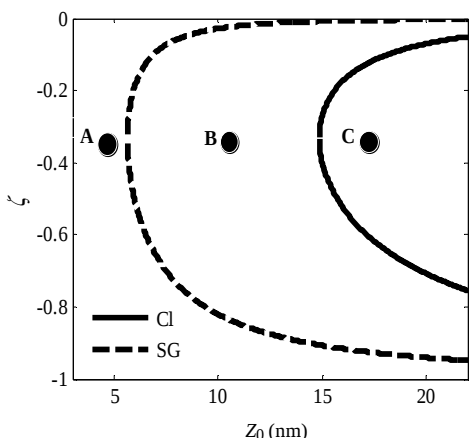


Fig. 10 System stable points as a function of z_0 for $h = 0.1\mu\text{m}$ based on two classic and non-classic theories

شکل 10 نمودار نقاط تعادل برحسب فاصله محور افقی تا سطح نمونه به ازای ضخامت $h = 0.1\mu\text{m}$ در تئوری‌های کلاسیک و غیرکلاسیک

فاصله‌های بحرانی ارائه شده توسط تئوری کلاسیک به طور تقریبی 1.4878nm و توسط تئوری غیرکلاسیک 1.41nm می‌باشد ولی برای همان میکروتیر اگر ضخامت به $h = 0.1\mu\text{m}$ کاهش یابد، فواصل بحرانی ارائه شده در تئوری‌های کلاسیک و غیرکلاسیک به ترتیب حدود 5.65, 14.87nm می‌باشند. بنابراین اگر ضخامت میکروتیر کاهش یابد، از دیدگاه دو تئوری کلاسیک و غیرکلاسیک حداقل فاصله z_0 برای اینکه سیستم پایدار باشد، باید افزایش یابد.

با توجه به فواصل بحرانی ارائه شده توسط دو تئوری در ضخامت‌های $1, 0.1\mu\text{m}$ دیده می‌شود که با کاهش ضخامت میکروتیر، فواصل بحرانی دو تئوری کلاسیک و غیرکلاسیک، اختلاف بیشتری پیدا می‌کنند به گونه‌ای که در ضخامت $1\mu\text{m}$ اختلاف فواصل بحرانی دو تئوری به طور تقریبی معادل 0.077nm می‌باشد و هنگامی که ضخامت به $0.1\mu\text{m}$ کاهش می‌یابد این اختلاف برابر 9.22nm می‌شود. بنابراین با کاهش ضخامت میکروتیر دیدگاه دو تئوری در ارائه فاصله بحرانی با هم تفاوت زیادی پیدا می‌کنند. همچنین فاصله بحرانی را که تئوری کلاسیک ارائه می‌کند بزرگتر از فاصله بحرانی تئوری غیرکلاسیک می‌باشد؛ نظریه کلاسیک برای اینکه سیستم در حالت پایدار قرار داشته باشد نسبت به تئوری غیرکلاسیک محتاطانه‌تر عمل می‌کند. در واقع به دلیل در نظر نگرفتن اثرات اندازه در مقیاس‌های کوچک برای پایدار ماندن سیستم، فاصله بیشتری را نسبت به تئوری غیرکلاسیک پیشنهاد می‌کند.

4-4- نمودار نسبت فاصله z_0 تئوری غیرکلاسیک به کلاسیک به ازای پارامتر η یکسان برحسب تغییرات ضخامت

برای میکروتیر با طول و عرض مشخص، نمودار تغییرات نسبت z_0 تا سطح نمونه در تئوری غیرکلاسیک به کلاسیک به ازای پارامتر یکسانی از η برحسب افزایش ضخامت میکروتیر مطابق شکل 11 می‌باشد. با توجه به شکل 11، مشاهده می‌شود در ضخامت‌های پایین به طور مثال 1nm، نسبت فاصله ارائه شده در حالت غیرکلاسیک به فاصله کلاسیک، به صفر نزدیک می‌شود و با افزایش ضخامت تا $1\mu\text{m}$ فواصل ارائه شده در هر دو تئوری به طور تقریبی برابر خواهند شد و درواقع شکل 11 تصدیق کننده شکل‌های 9

برای $\eta < \eta_{cr}$ شود و درواقع سیستم در ناحیه پایداری قرار بگیرد، به عبارت دیگر از دیدگاه تئوری کلاسیک فاصله بحرانی برابر 1.4878nm می‌باشد که اگر فاصله z_0 از این مقدار کمتر شود آنگاه $\eta > \eta_{cr}$ و سیستم ناپایدار می‌شود. اما برای حالت غیرکلاسیک حداقل فاصله z_0 به طور تقریبی 1.41nm می‌باشد تا $\eta < \eta_{cr}$ شود و در واقع سیستم در ناحیه پایداری قرار بگیرد. به عبارت دیگر تئوری غیرکلاسیک فاصله بحرانی را 1.41nm اعلام می‌کند و اگر فاصله از این مقدار کمتر شود سیستم ناپایدار خواهد شد. تحلیل نمودار شکل 9 به طریق دیگر این گونه است که نقطه A از دیدگاه هر دو تئوری ناپایدار است، نقطه B از دیدگاه تئوری کلاسیک ناپایدار ولی از دیدگاه تئوری غیرکلاسیک پایدار است و نقطه C از نظر هر دو تئوری در محدوده پایداری قرار دارد.

شکل 10 برای میکروتیر به ضخامت $h = 0.1\mu\text{m}$ رسم شده است که

در این شکل، تئوری کلاسیک حداقل فاصله را به طور تقریبی برابر 14.87nm بیان می‌کند تا $\eta < \eta_{cr}$ شود و سیستم درون ناحیه پایدار قرار بگیرد. به عبارت دیگر طبق تئوری کلاسیک اگر فاصله z_0 از این مقدار بحرانی کمتر شود آنگاه $\eta > \eta_{cr}$ شده و سیستم ناپایدار می‌شود. اما تئوری غیرکلاسیک فاصله بحرانی را به طور تقریبی حدود 5.65nm محاسبه می‌کند تا $\eta < \eta_{cr}$ و سیستم درون ناحیه پایدار قرار بگیرد. از دیدگاه تئوری غیرکلاسیک اگر فاصله z_0 از این مقدار بحرانی کمتر شود آنگاه $\eta > \eta_{cr}$ شده و سیستم دچار ناپایداری می‌شود. تحلیل شکل 9 به این صورت می‌باشد که نقطه A از دید هر دو تئوری در ناحیه ناپایداری قرار دارد و نقطه B از دیدگاه تئوری کلاسیک ناپایدار و از دیدگاه تئوری غیرکلاسیک پایدار است و در نهایت نقطه C از نظر هر دو تئوری پایدار می‌باشد.

مشاهده می‌شود هنگامی که مقدار ضخامت میکروتیر $h = 1\mu\text{m}$ است هر کدام از دو تئوری کلاسیک و غیرکلاسیک مقدار فاصله بحرانی مشخصی را بیان کردند، یعنی حداقل مقدار فاصله برای اینکه سیستم در حوزه پایداری قرار بگیرد را پیشنهاد دادند. وقتی مقدار ضخامت میکروتیر به $h = 0.1\mu\text{m}$ کاهش پیدا می‌کند، فاصله‌های بحرانی پیشنهاد شده توسط دو تئوری، در مقایسه با فواصل بحرانی ارائه شده برای میکروتیر با ضخامت $h = 1\mu\text{m}$ ، بزرگتر می‌شوند. به گونه‌ای که برای میکروتیری با ضخامت $h = 1\mu\text{m}$

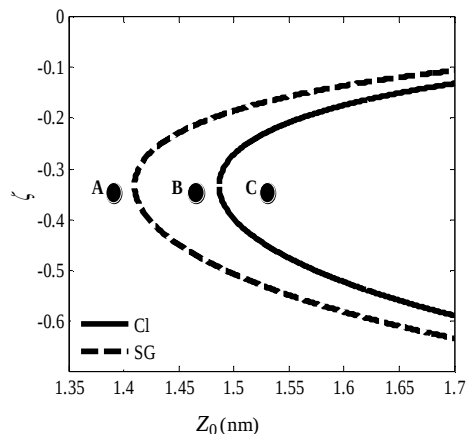


Fig. 9 System stable points as a function of z_0 for $h = 1\mu\text{m}$ based on two classic and non-classic theories

شکل 9 نمودار نقاط تعادل برحسب فاصله محور افقی تا سطح نمونه به ازای ضخامت $h = 1\mu\text{m}$ در تئوری‌های کلاسیک و غیرکلاسیک

و تئوری غیرکلاسیک بیشترین نسبت ابعادی را تقریباً معادل $k_s = 84.27$ پیشنهاد می‌کند. به عبارت دیگر برای اینکه ابعاد میکروتیر و فاصله محور x تا سطح نمونه به طور همزمان، حداکثر کاهش را داشته باشند و سیستم پایدار باشد، از دیدگاه تئوری کلاسیک این کاهش متناظر با نسبت ابعادی $k_c = 31.7$ و از دیدگاه تئوری غیرکلاسیک این کاهش متناظر با $k_s = 84.27$ می‌باشد.

تحلیل به این صورت نیز می‌تواند باشد که اگر $k > 31.7$ شود آنگاه طبق شکل 8 براساس نمودار تئوری کلاسیک $\eta > \eta_{cr}$ شده و در نهایت سیستم ناپایدار می‌شود و در همان شکل براساس نمودار غیرکلاسیک اگر $k > 84.27$ شود آنگاه $\eta > \eta_{cr}$ شده و سیستم در ناحیه ناپایداری قرار می‌گیرد. تفاوت بین دیدگاه‌های دو تئوری در نسبت‌های ابعادی بالا، ناشی از در نظر نگرفتن اثرات اندازه توسط تئوری کلاسیک می‌باشد.

5- نتیجه گیری

در این مطالعه، میکروتیری که به انتهای آزاد آن سوزن و در انتهای دیگر یک پیژوالکتریک متصل شده است به‌صورت هارمونیک تحریک می‌شود. نیروی بین نوک سوزن و سطح نمونه از نوع واندروالس می‌باشد. در گام اول این میکروتیر به روش تیر اویلر-برنولی و گرادیان کرنشی مدلسازی شده و سپس در گام دوم روش گلرکین برای استخراج مدل متمرکز به کار برده شده است. در گام سوم براساس تئوری‌های کلاسیک و غیرکلاسیک تحلیل پایداری و اثرات اندازه روی رفتار دینامیکی میکرونانونتیر بررسی شده است. سرانجام نتایج زیر حاصل شد:

1. پارامتر η (که یک پارامتر متناسب با ابعاد میکروسکوپ است) مدل متمرکز سیستم برحسب نسبت ابعادی، براساس تئوری‌های کلاسیک و غیرکلاسیک بررسی و مقایسه شدند که با افزایش نسبت ابعادی، تئوری کلاسیک روند سریع‌تری را نسبت به تئوری غیرکلاسیک نشان داد.
2. اگر ابعاد هندسی میکروتیر ثابت باشد و فقط ضخامت میکروتیر کاهش یابد فاصله بحرانی ارائه شده توسط دو تئوری برای پایدار ماندن سیستم، افزایش می‌یابد.
3. با ثابت بودن طول و عرض میکروتیر و کاهش ضخامت آن، فاصله بحرانی که تئوری غیرکلاسیک پیشنهاد می‌دهد نسبت به فاصله بحرانی تئوری کلاسیک اختلاف زیادی پیدا می‌کند و درواقع دیدگاه دو تئوری تفاوت زیادی نسبت به هم پیدا می‌کنند و بالعکس با افزایش ضخامت، فواصل ارائه شده توسط دو تئوری به یکدیگر همگرا می‌شوند. به عبارت دیگر هنگامی که ابعاد سازه در مقیاس‌های میکرون و کمتر از میکرون باشد، اندازه ابعاد در رفتار دینامیکی سازه نقش ایفا می‌کند. وقتی ضخامت میکروتیر خیلی کوچک شود، به دلیل در نظر نگرفتن اثرات اندازه توسط تئوری کلاسیک، فواصل پیشنهاد شده تئوری کلاسیک و غیرکلاسیک تفاوت زیادی نسبت به هم پیدا می‌کنند.
4. همواره برای میکروتیری با هر ضخامتی، فاصله بحرانی ارائه شده توسط تئوری کلاسیک بزرگتر از فاصله بحرانی تئوری غیرکلاسیک می‌باشد؛ که به نظر می‌رسد نظریه کلاسیک برای اینکه سیستم در حالت پایدار قرار داشته باشد نسبت به تئوری غیرکلاسیک محتاطانه‌تر عمل می‌کند. تئوری کلاسیک به دلیل در نظر نگرفتن اثرات اندازه در مقیاس‌های کوچک با توجه به ارائه فاصله بحرانی بزرگتر برای پایدار ماندن سیستم، ناحیه پایداری کوچکتری را پیشنهاد می‌کند.

و 10 می‌باشد. در واقع هنگامی که ابعاد سازه در مقیاس‌های میکرون و کمتر از میکرون باشد، اثرات اندازه در رفتار دینامیکی سازه نقش پیدا می‌کنند و به دلیل در نظر نگرفتن اثرات اندازه توسط تئوری کلاسیک، وقتی ضخامت میکروتیر خیلی کوچک می‌شود، فواصل پیشنهاد شده توسط تئوری‌های کلاسیک و غیرکلاسیک تفاوت زیادی نسبت به هم پیدا می‌کنند.

4-5- نمودار نقاط تعادل برحسب نسبت ابعادی برای حالت‌های کلاسیک و غیرکلاسیک

اگر همه مقادیر طولی تعریف شده برای میکروتیر به نسبت یکسان کاهش یابند آنگاه نمودار نقاط تعادل میکروتیر برحسب نسبت ابعادی شکل 12 می‌باشد. با توجه به شکل 12، با افزایش نسبت ابعادی تا یک مقدار مشخصی برای هر تئوری، اختلاف نقاط تعادل سیستم کاهش می‌یابد و همچنین ناحیه پایداری ارائه شده توسط هر تئوری افزایش می‌یابد. برای این میکروتیر، تئوری کلاسیک بیشترین نسبت ابعادی را به طور تقریبی معادل $k_c = 31.7$ تئوری

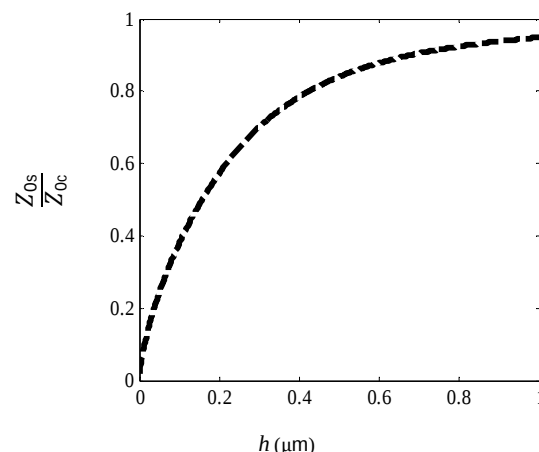


Fig. 11 Non-classic to classic critical z_0 as a function of beam thickness 1nm to 1 μ m

شکل 11 نمودار نسبت فاصله تئوری غیرکلاسیک به کلاسیک برحسب تغییرات ضخامت از 1nm تا 1 μ m

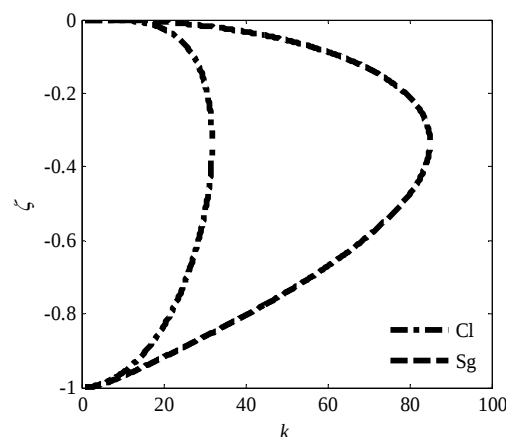


Fig. 12 System stable points as a function of aspect ratio based on two classic and non-classic theories

شکل 12 نمودار نقاط تعادل برحسب نسبت ابعادی برای تئوری‌های کلاسیک و غیرکلاسیک

- length scale, *Acta Materialia*, Vol. 46, No. 14, pp. 5109-5115, 1998.
- [19] A. Chong, D. C. Lam, Strain gradient plasticity effect in indentation hardness of polymers, *Journal of Materials Research*, Vol. 14, No. 10, pp. 4103-4110, 1999.
- [20] A. C. Eringen, D. Edelen, On nonlocal elasticity, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 10, No. 3, pp. 233-248, 1972.
- [21] J. Peddieson, G. R. Buchanan, R. P. McNitt, Application of nonlocal continuum models to nanotechnology, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 41, No. 3, pp. 305-312, 2003.
- [22] J. Reddy, Nonlocal theories for bending, buckling and vibration of beams, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 45, No. 2, pp. 288-307, 2007.
- [23] Y. Martin, C. Williams, H. K. Wickramasinghe, Atomic force microscope-force mapping and profiling on a sub 100-Å scale, *Journal of Applied Physics*, Vol. 61, No. 10, pp. 4723-4729, 1987.
- [24] R. A. Toupin, Elastic materials with couple-stresses, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol. 11, No. 1, pp. 385-414, 1962.
- [25] M. Fathallou, M. Sadeghi, G. Rezazadeh, Nonlinear behavior of capacitive micro-beams based on strain gradient theory, *Journal of Mechanical Science and Technology*, Vol. 28, No. 4, pp. 1141-1151, 2014.
- [26] E. M. Miandoab, A. Yousefi-Koma, H. N. Pishkenari, M. Fathi, Nano-resonator frequency response based on strain gradient theory, *Journal of Physics D: Applied Physics*, Vol. 47, No. 36, pp. 312-323, 2014.
- [27] M. Kahrobaiyan, M. Asghari, M. Rahaeifard, M. Ahmadian, Investigation of the size-dependent dynamic characteristics of atomic force microscope microcantilevers based on the modified couple stress theory, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 48, No. 12, pp. 1985-1994, 2010.
- [28] D. Lam, F. Yang, A. Chong, J. Wang, P. Tong, Experiments and theory in strain gradient elasticity, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 51, No. 8, pp. 1477-1508, 2003.
- [29] S. Kong, S. Zhou, Z. Nie, K. Wang, Static and dynamic analysis of micro beams based on strain gradient elasticity theory, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 47, No. 4, pp. 487-498, 2009.
- [30] B. Wang, J. Zhao, S. Zhou, A micro scale Timoshenko beam model based on strain gradient elasticity theory, *European Journal of Mechanics-A/Solids*, Vol. 29, No. 4, pp. 591-599, 2010.
- [31] M. Abbasi, A. K. Mohammadi, Study of the sensitivity and resonant frequency of the flexural modes of an atomic force microscopy microcantilever modeled by strain gradient elasticity theory, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, pp. 572-584, 2013.
- [32] M. Abbasi, Size dependent vibration behavior of an AFM with sidewall and top-surface probes based on the strain gradient elasticity Theory, *International Journal of Applied Mechanics*, Vol. 7, No. 3, pp. 236-253, 2015.
- [33] G. Dai, H. Wolff, T. Weimann, M. Xu, F. Pohlentz, H.-U. Danzebrink, Nanoscale surface measurements at sidewalls of nano- and micro-structures, *Measurement science and Technology*, Vol. 18, No. 2, pp. 3123-3134, 2007.
- [34] J. Zhao, S. Zhou, B. Wang, X. Wang, Nonlinear microbeam model based on strain gradient theory, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 36, No. 6, pp. 2674-2686, 2012.
- [35] R. Vatankhah, M. Kahrobaiyan, A. Alasty, M. Ahmadian, Nonlinear forced vibration of strain gradient microbeams, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 37, No. 18, pp. 8363-8382, 2013.
- [36] E. M. Miandoab, H. N. Pishkenari, A. Yousefi-Koma, H. Hoorzad, Polysilicon nano-beam model based on modified couple stress, Eringen's nonlocal elasticity theories, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, Vol. 63, pp. 223-228, 2014.
- [37] E. M. Miandoab, A. Yousefi-Koma, H. N. Pishkenari, Nonlocal and strain gradient based model for electrostatically actuated silicon nano-beams, *Microsystem Technologies*, Vol. 21, No. 2, pp. 457-464, 2014.
- [38] G. Sciarra, S. Vidoli, Asymptotic fracture modes in strain-gradient elasticity: Size effects and characteristic lengths for isotropic materials, *Journal of Elasticity*, Vol. 113, No. 1, pp. 27-53, 2013.
- [39] B. Wang, S. Zhou, J. Zhao, X. Chen, Size-dependent pull-in instability of electrostatically actuated microbeam-based MEMS, *Journal of Micromechanics and microengineering*, Vol. 21, No. 2, pp. 2352-2363, 2011.
- [40] B. Akgöz, Ö. Civalek, Analysis of micro-sized beams for various boundary conditions based on the strain gradient elasticity theory, *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 82, No. 3, pp. 423-443, 2012.
- [41] M. I. Younis, *MEMS linear and nonlinear statics and dynamics*, pp. 330-334, Berlin: Springer, 2011.

5. تفاوت بین دیدگاه‌های دو تئوری، ناشی از در نظر نگرفتن اثرات اندازه توسط تئوری کلاسیک، هنگامی که نسبت ابعادی افزایش یابد، می‌باشد. برای میکروتنری با این مشخصات، نمی‌توان همه پارامترهای طولی را به طور همزمان تا مقیاس نانو کاهش داد.

6- تشکر و قدردانی

نگارندگان از " صندوق حمایت از پژوهشگران و فناوران کشور" به دلیل حمایت مالی در راستای به ثمر رسیدن این مقاله کمال تشکر را دارند. (شماره طرح : 94000927)

7- مراجع

- [1] R. Garcia, R. Perez, Dynamic atomic force microscopy methods, *Surface Science Reports*, Vol. 47, No. 6-8, pp. 197-301, 2002.
- [2] P. E. Mazeran, J. L. Loubet, Normal and lateral modulation with a scanning force microscope, an analysis: Implication in quantitative elastic and friction imaging, *Tribology Letters*, Vol. 7, No. 4, pp. 199-212, 1999.
- [3] Q. Zhong, D. Inniss, K. Kjoller, V. Elings, Fractured polymer/silica fiber surface studied by tapping mode atomic force microscopy, *Surface Science Letters*, Vol. 290, No. 1-2, pp. L688-L692, 1993.
- [4] M. Ashhab, M. Salapaka, M. Dahleh, I. Mezić, Control of chaos in atomic force microscopes, *American Control Conference (ACC) IEEE*, pp. 196-202, 1997.
- [5] M. Basso, L. Giarre, M. Dahleh, Numerical analysis of complex dynamics in atomic force microscopes, *Control Applications IEEE International*, pp. 1026-1030, 1998.
- [6] M. J. Martin, H. K. Fathy, B. H. Houston, Dynamic simulation of atomic force microscope cantilevers oscillating in liquid, *Journal of Applied Physics* Vol. 104, No. 4, pp. 107-125, 2008.
- [7] Y. Song, B. Bhushan, Modeling of tip-cantilever dynamics in atomic force microscopy, S. Kawata (Eds), *Applied Scanning Probe Methods V*, pp. 149-223, Berlin: Springer, 2007.
- [8] R. Vázquez, F. J. Rubio-Sierra, R. W. Stark, Multimodal analysis of force spectroscopy based on a transfer function study of micro-cantilevers, *Nanotechnology*, Vol. 18, No. 18, pp. 185-198, 2007.
- [9] J. R. Claeysen, The Timoshenko beam model in vibrating AFM cantilevers, *9th Brazilian Conference on Dynamics, Control and Their Applications*, pp. 1027-1036, 2010.
- [10] J. C. Hsu, H. L. Lee, W. J. Chang, Flexural vibration frequency of atomic force microscope cantilevers using the Timoshenko beam model, *Nanotechnology*, Vol. 18, No. 28, pp. 285-303, 2007.
- [11] H.-J. Butt, B. Cappella, M. Kappl, Force measurements with the atomic force microscope: Technique, interpretation and applications, *Surface Science Reports*, Vol. 59, No. 1, pp. 1-152, 2005.
- [12] A. Sebastian, A. Gannepalli, M. V. Salapaka, A review of the systems approach to the analysis of dynamic-mode atomic force microscopy, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol. 15, No. 5, pp. 952-959, 2007.
- [13] B. V. Derjaguin, V. M. Muller, Y. P. Toporov, Effect of contact deformations on the adhesion of particles, *Journal of Colloid and Interface Science*, Vol. 53, No. 2, pp. 314-326, 1975.
- [14] S. Basak, A. Raman, Dynamics of tapping mode atomic force microscopy in liquids: Theory and experiments, *Applied Physics Letters*, Vol. 91, No. 6, pp. 421-436, 2007.
- [15] S. Eslami, N. Jalili, A comprehensive modeling and vibration analysis of AFM microcantilevers subjected to nonlinear tip-sample interaction forces, *Ultramicroscopy*, Vol. 117, pp. 31-45, 2012.
- [16] T. S. Wu, W. J. Chang, J. C. Hsu, Effect of tip length and normal and lateral contact stiffness on the flexural vibration responses of atomic force microscope cantilevers, *Microelectronic Engineering*, Vol. 71, No. 1, pp. 15-20, 2004.
- [17] N. Fleck, G. Muller, M. Ashby, J. Hutchinson, Strain gradient plasticity: Theory and experiment, *Acta Metallurgica et Materialia*, Vol. 42, No. 2, pp. 475-487, 1994.
- [18] J. Stölken, A. Evans, A microbend test method for measuring the plasticity