



# تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های نانوکامپوزیتی مدرج تابعی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی به روش بدون المان

مهرداد فروتن<sup>1\*</sup>، محمد سجاد خدایاری<sup>2</sup>

1- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه رازی، کرمانشاه

2- کارشناس ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه رازی، کرمانشاه

\* کرمانشاه، صندوق پستی 6734667149، foroutan@razi.ac.ir

## اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 07 اردیبهشت 1395

پذیرش: 26 مرداد 1395

ارائه در سایت: 02 مهر 1395

کلید واژگان:

روش بدون المان

نانوکامپوزیت مدرج تابعی

تحلیل ترموالاستیک

نانولوله‌ی کربنی تک‌جداره

## چکیده

در پژوهش حاضر، تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های توخالی نانوکامپوزیتی مدرج تابعی، تقویت شده با نانولوله‌های کربنی تک‌جداره، تحت بارگذاری حرارتی، به روش بدون المان، انجام شده است. استوانه در شرایط تکیه‌گاهی ساده- ساده فرض شده و توزیع خواص مادی در راستای شعاع استوانه، به صورت یک الگوی یکنواخت و سه الگوی مدرج تابعی در نظر گرفته شده است. خواص مکانیکی نانوکامپوزیت تقویت شده با نانولوله‌های کربنی، با استفاده از مدل میکرومکانیکی اختلاط تعمیم یافته، تخمین زده شده است. معادله‌های حاکم با استفاده از اصل کار مجازی بدست آمده و با استفاده از روش بدون المان گسسته‌سازی و حل شده است. در این روش بدون المان، ضرایب شکل حداقل مربعات متحرک، جهت تقریب میدان جابه‌جایی، به کار رفته است. شرایط مرزی اساسی، با استفاده از روش تبدیل، اعمال گردیده است. توزیع دمایی در پتل، با حل معادلات حرارت به روش عددی تفاضل محدود، محاسبه شده است. جهت سنجش اعتبار این پژوهش، نتایج حاصل از این پژوهش، با نتایج تحقیقات منتشر شده قبلی، مقایسه شده است و انطباق خوب نتایج دیده می‌شود. سپس تأثیر پارامترهای مختلف همانند الگوی پخش و مقدار درصد حجمی نانولوله‌های کربنی و پارامتر هندسی نسبت ارتفاع به شعاع داخلی، بر مؤلفه‌های تنش، مورد بررسی قرار گرفته است.

## Thermo-elastic analysis of functionally graded nanocomposite cylinders reinforced by carbon nanotube by a mesh-free method

Mehrdad Foroutan<sup>\*</sup>, Mohammad Sajad Khodayari

Department of Mechanical Engineering, Razi University, Kermanshah, Iran

\*P.O.B. 6734667149, Kermanshah, Iran, foroutan@razi.ac.ir

## ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 26 April 2016  
Accepted 16 August 2016  
Available Online 23 September 2016

### Keywords:

Mesh-free method  
functionally graded nanocomposite  
Thermo-elastic analysis  
Single walled carbon nanotube

## ABSTRACT

In this paper, thermo-elastic analysis of functionally graded nanocomposite hollow cylinders reinforced by single walled carbon nanotube (SWCNT) subjected to a thermal load was carried out by a mesh-free method. It is assumed that the functionally graded nanocomposite hollow cylinder reinforced by carbon nanotube with finite length is simply supported. A One uniform and three kinds of functionally graded (FG) distributions of carbon nanotubes in the radial direction of cylinder are considered. Nanocomposite mechanical properties are estimated by micro mechanical generalized rule mixture model. Applying the virtual work principle, the governing equations are obtained and are discretized by the mesh-free method. In the mesh-free analysis, moving least squares (MLSs) shape functions are used for approximation of displacement field. The transformation method was used for the imposition of essential boundary conditions. Using finite difference method, temperature distribution was obtained by solving the thermal equation. To validate, the results of this analysis were compared with previous published works and a good agreement was seen between them. Then the effects of various parameters, such as the kind of distribution and the volume fractions of carbon nanotubes and the different geometrical parameter on the components of stress are studied.

## 1- مقدمه

نانوکامپوزیت‌های تقویت شده با نانولوله‌های کربنی، دارای وزن کم و استحکام مکانیکی بالایی می‌باشند و به همین دلیل در صنایع فضایی و حمل و نقل، کاربرد و اهمیت فراوانی دارند. تعدادی از محققان، خواص مکانیکی و حرارتی نانوکامپوزیت‌های تقویت شده با نانولوله‌های کربنی را مورد مطالعه قرار داده‌اند. تأثیر انواع ساختار نانولوله‌ی کربنی بر خواص نانوکامپوزیت‌های تقویت شده با این نانولوله‌ها، توسط گوجینی [1] مورد بررسی قرار گرفت. فیدیلوس [2] خواص مکانیکی و حرارتی نانوکامپوزیت با زمینه اپوکسی و

رشد روزافزون صنایع در چند دهه اخیر، ضرورت دستیابی به مواد چند منظوره با قابلیت‌های مکانیکی و حرارتی بالا و وزن کم را ایجاب نموده که منجر به گسترش تحقیقات در زمینه مواد نانوکامپوزیتی<sup>1</sup> شده است. نانولوله-کربنی<sup>2</sup> دارای خواص مکانیکی و الکتریکی منحصر به فردی است که موجب گردیده، از بهترین مواد تقویت‌کننده‌ی نانوکامپوزیت‌ها، به شمار آید.

<sup>1</sup> Nanocomposite

<sup>2</sup> Carbon nanotube

تقویت شده با نانولوله‌های کربنی تک‌جداره<sup>1</sup> و چندجداره<sup>2</sup> را مورد مطالعه قرار داد.

مواد مدرج تابعی<sup>3</sup> یکی از مواد کامپوزیتی پرکاربرد و چند منظوره در صنایع است. به دلیل تغییر پیوسته خواص مواد مدرج تابعی در راستا دلخواه، این مواد جهت کنترل تنش در سازه‌های تحت گرادیان‌های شدید حرارتی و نیرویی همانند سپرهای حرارتی و تجهیزات فضایی، مورد استفاده قرار می‌گیرد. با استفاده از ایده به کار رفته در مواد مدرج تابعی و توزیع هدفمند نانولوله‌های کربنی در ماده زمینه، نانوکامپوزیت‌های مدرج تابعی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی بوجود آمدند. در این مقاله به دلیل سهولت در نوشتار، به جای عبارت نانوکامپوزیت‌های مدرج تابعی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی تک‌جداره، از عبارت نانوکامپوزیت‌های مدرج، استفاده می‌شود.

تحلیل سازه‌ای نانوکامپوزیتی مدرج، موضوع جذابی برای پژوهش بسیاری از محققان بوده است. تحلیل خمش غیرخطی صفحات نانوکامپوزیتی مدرج، تحت بارهای گسترده یکنواخت و سینوسی، در دماهای محیطی مختلف، توسط شن [3]، بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا<sup>4</sup> و روابط غیرخطی هندسی فون کارمن<sup>5</sup>، انجام شد. خواص نانوکامپوزیت، تابع دمای محیط و در راستای ضخامت صفحه، متغیر فرض و با استفاده از مدل میکرومکانیکی<sup>6</sup> محاسبه گردید. تحلیل استاتیکی و ارتعاشی صفحات نانو-کامپوزیتی مدرج، توسط ژو و لی [4]، بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول<sup>7</sup> و با استفاده از روش المان محدود انجام گردید. لی و همکاران [5]، کمانش صفحه‌ی نانوکامپوزیتی مدرج را تحت بار مکانیکی بررسی کردند. تحلیل بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و با استفاده از توابع بدون المان کی-پی-ریتز<sup>8</sup> جهت تخمین میدان جابه‌جایی، انجام شد. خواص در راستای ضخامت صفحه متغیر در نظر گرفته شد و با استفاده مدل میکرومکانیکی محاسبه اشلی-موری-تاناکا<sup>9</sup> و یا اختلاط تعمیم یافته<sup>10</sup>، محاسبه گردید. مهرابادی و همکاران [6]، با استفاده از تئوری صفحات میندلین<sup>11</sup> و تغییر شکل برشی مرتبه اول، کمانش صفحه مثلثی نانو-کامپوزیتی مدرج را تحت بار مکانیکی، تحلیل کردند. خواص در راستای ضخامت صفحه، متغیر فرض شد و با استفاده از مدل اشلی-موری-تاناکا محاسبه گردید. در پژوهش انجام شده توسط این محققان، تأثیر مقادیر مختلف درصد حجمی پایه و انواع الگوی مدرج توزیع نانولوله‌های کربنی بر فرکانس‌های طبیعی، مورد بررسی قرار گرفت. ارتعاش غیرخطی پوسته‌ی استوانه‌ای نانوکامپوزیتی مدرج، توسط شن و همکاران [15]، بررسی گردید. معادله‌های حاکم، بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا و روش غیرخطی هندسی فون کارمن استخراج گردید و با استفاده از روش اختلال بهبود یافته<sup>17</sup>، حل شد. خواص نانوکامپوزیت، تابع دما و در راستای شعاع پوسته به صورت سه الگوی مدرج تابعی و یک الگوی یکنواخت، متغیر در نظر گرفته شد و مطابق مدل اختلاط تعمیم یافته، تخمین زده شد. در پژوهش دیگری، این محققان، ارتعاش غیرخطی پوسته‌ی استوانه‌ای نانوکامپوزیتی مدرج احاطه شده توسط بستر الاستیک را بررسی کردند [16]. تحلیل ارتعاشی پوسته‌ی استوانه‌ای نانو-کامپوزیتی مدرج، احاطه شده در بستر الاستیک، تحت بارگذاری حرارتی، توسط انصاری و ترابی [17]، انجام شده است. معادله‌های حاکم با استفاده از اصل همپلتون و بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و روابط سندز<sup>18</sup> و دائل<sup>19</sup> بدست آمده و با استفاده از روش تفاضل مربعات تعمیم یافته در راستای طولی و عملگر مشتق‌گیر متناوب در راستای محیطی، گسسته سازی شده است. خواص در طول شعاع متغیر در نظر گرفته شد و با استفاده

مکانیکی محاسبه شد. دستجردی و همکاران [10]، تحلیل ارتعاشی صفحه‌ی ساندویچی نانوکامپوزیتی مدرج احاطه شده در بستر الاستیک را بر اساس تئوری تغییر شکل برشی اصلاح شده<sup>13</sup>، انجام دادند. ارتعاش غیرخطی تیر نانوکامپوزیتی مدرج تابعی، توسط کی و یانگ [11] بررسی گردید. خواص در راستای ضخامت تیر، متغیر در نظر گرفته شد و با استفاده از مدل اختلاط عمومی محاسبه گردید. تحلیل ارتعاش آزاد و کمانش تیر تیموشنکو از جنس مواد نانوکامپوزیتی مدرج احاطه شده در بستر الاستیک، توسط یاس و صمدی [12] انجام گرفت و تأثیر انواع الگوهای مدرج تابعی توزیع نانولوله-های کربنی و شرایط مرزی بر تنش، بررسی گردید. معادله‌های حاکم بر مسئله، با استفاده از اصل همپلتون استخراج و به روش دیفرانسیلی کوادراچر تعمیم یافته<sup>14</sup> حل گردید. خواص نانوکامپوزیت مطابق مدل میکرومکانیکی اختلاط، محاسبه شد. در پژوهش دیگری، یاس و حشمتی [13]، تحلیل دینامیکی تیر نانوکامپوزیتی مدرج را انجام دادند. خواص نانوکامپوزیت با استفاده از مدل اشلی-موری-تاناکا تخمین زده شد. معادله‌های حاکم، با استفاده از اصل همپلتون<sup>15</sup> و تئوری تیر تیموشنکو استخراج و با بکارگیری روش المان محدود گسسته‌سازی شد. معادله نهایی نیز به روش عددی نیومارک<sup>16</sup> حل گردید.

سازه‌های استوانه‌ای دارای کاربرد و اهمیت فراوان در صنایع مختلف هستند. مخزن‌های جدار ضخیم و لوله‌ها، از مهمترین اجزای صنعتی اند که به صورت استوانه‌ای ساخته می‌شوند. پژوهش‌های فراوانی بر روی سازه‌های استوانه‌ای نانوکامپوزیتی مدرج، انجام گرفته است. یاس و همکاران [14]، ارتعاش آزاد پل استوانه‌ای نانوکامپوزیتی مدرج را مورد بررسی قرار دادند. این محققان، روش دیفرانسیل کوادراچر تعمیم یافته‌ی دو بعدی را جهت حل معادله‌های حرکت، بکار گرفتند. خواص در راستای شعاع پل، متغیر فرض و با استفاده از مدل میکرومکانیکی اختلاط تعمیم یافته، محاسبه گردید. در تحلیل انجام شده توسط این محققان، تأثیر مقادیر مختلف درصد حجمی پایه و انواع الگوی مدرج توزیع نانولوله‌های کربنی بر فرکانس‌های طبیعی، مورد بررسی قرار گرفت. ارتعاش غیرخطی پوسته‌ی استوانه‌ای نانوکامپوزیتی مدرج، توسط شن و همکاران [15]، بررسی گردید. معادله‌های حاکم، بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا و روش غیرخطی هندسی فون کارمن استخراج گردید و با استفاده از روش اختلال بهبود یافته<sup>17</sup>، حل شد. خواص نانوکامپوزیت، تابع دما و در راستای شعاع پوسته به صورت سه الگوی مدرج تابعی و یک الگوی یکنواخت، متغیر در نظر گرفته شد و مطابق مدل اختلاط تعمیم یافته، تخمین زده شد. در پژوهش دیگری، این محققان، ارتعاش غیرخطی پوسته‌ی استوانه‌ای نانوکامپوزیتی مدرج احاطه شده توسط بستر الاستیک را بررسی کردند [16]. تحلیل ارتعاشی پوسته‌ی استوانه‌ای نانو-کامپوزیتی مدرج، احاطه شده در بستر الاستیک، تحت بارگذاری حرارتی، توسط انصاری و ترابی [17]، انجام شده است. معادله‌های حاکم با استفاده از اصل همپلتون و بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و روابط سندز<sup>18</sup> و دائل<sup>19</sup> بدست آمده و با استفاده از روش تفاضل مربعات تعمیم یافته در راستای طولی و عملگر مشتق‌گیر متناوب در راستای محیطی، گسسته سازی شده است. خواص در طول شعاع متغیر در نظر گرفته شد و با استفاده

<sup>1</sup> Single walled carbon nanotube

<sup>2</sup> Multi walled carbon nanotube

<sup>3</sup> Functionally graded material

<sup>4</sup> Higher-order shear deformation theory

<sup>5</sup> Von Karman

<sup>6</sup> Micromechanical model

<sup>7</sup> First-order shear deformation theory

<sup>8</sup> KP-Ritz

<sup>9</sup> Eshelby-Mori-Tanaka

<sup>10</sup> Generalized role mixture

<sup>11</sup> Mindlin plate theory

<sup>12</sup> Low velocity impact

<sup>13</sup> Refined shear deformation plate theory

<sup>14</sup> Generalized differential quadrature

<sup>15</sup> Hamilton

<sup>16</sup> Newmark

<sup>17</sup> Improved perturbation technique

<sup>18</sup> Sanders

<sup>19</sup> Donnell

تصحیح نتایج روش میکرومکانیکی اختلاط تعمیم یافته برای تخمین خواص مواد، در مقیاس نانو می‌باشد و به طریق مقایسه مقادیر محاسبه شده مدول یانگ نانوکامپوزیت، از دو روش اختلاط تعمیم یافته و روش دینامیک مولکولی بدست می‌آیند. لازم به ذکر است، روش دینامیک مولکولی قادر به محاسبه مدول برشی نیست و بنابراین هیچ مقداری برای  $\eta_3$  قابل محاسبه نمی‌باشد. در کار حاضر فرض شده که  $\eta_3 = 0.7 \eta_2$  است [19].

خواص گرمایی نانوکامپوزیت نیز بر اساس مدل میکرومکانیکی، به صورت روابط (6-4) محاسبه شده است [22,21].

$$\alpha_1 = \frac{V_{cn} E_{11}^{cn} \alpha^{cn} - V_m E_{11}^m \alpha^m}{V_{cn} E_{11}^{cn} - V_m E_{11}^m} \quad (4)$$

$$\alpha_i = (1 + \nu^{cn}) V_{cn} \alpha^{cn} + (1 + \nu^m) V_m \alpha^m - \nu_{12} \alpha_1 \quad (5)$$

$$K_{11} = V_{cn} K^{cn} + V_m K^m \quad (6)$$

$$\frac{1}{K_{ii}} = \frac{V_{cn}}{K^{cn}} + \frac{V_m}{K^m} \quad (7)$$

در این مقاله سه الگوی مدرج تابعی و یک الگوی یکنواخت توزیع نانولوله-ی کربنی مورد بررسی قرار گرفته است. تغییر درصد حجمی محلی نانولوله-ی کربنی در طول شعاع استوانه در این الگوها، در روابط (8-11) و شکل 1 بیان شده است.

$$\text{TYPE 1: } V_{cn} = 2 \frac{(r-R_i)}{(R_o-R_i)} V_{cn}^* \quad (8)$$

$$\text{TYPE 2: } V_{cn} = 2 \frac{(R_o-r)}{(R_o-R_i)} V_{cn}^* \quad (9)$$

$$\text{TYPE 3: } V_{cn} = 4 \left| \frac{r-R_m}{R_o-R_i} \right| V_{cn}^*, R_m = \frac{R_i+R_o}{2} \quad (10)$$

$$\text{TYPE UD: } V_{cn} = V_{cn}^*, V_{cn}^* = \frac{\rho^m}{w^{cn} + (\rho^{cn}/w^{cn}) - \rho^{cn}} \quad (11)$$

در درصد حجمی، چگالی ماده‌ی زمینه، چگالی و درصد وزنی نانولوله‌ی کربنی اند.

### 3- معادلات حاکم اساسی

اصل کار مجازی به صورت رابطه‌ی (12) بیان می‌گردد.

$$\int_{\Omega} \sigma \cdot \delta(\epsilon) dv - \int_{\Gamma} F \cdot \delta U ds = 0 \quad (12)$$

که  $\Gamma, \Omega, U, F, \epsilon, \sigma$  به ترتیب تنش، کرنش، نیروی خارجی سطحی، جابه-جایی، حجم محدوده مسئله و قسمتی از سطح مرز مسئله است که نیروی خارجی بر روی آن، اعمال شده است.

در مسائل متقارن محوری می‌توان تنش و کرنش را به صورت روابط (13) و (14) نوشت.

$$\sigma = [\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{rz}] \quad (13)$$

$$\epsilon = [\epsilon_r, \epsilon_\theta, \epsilon_z, \gamma_{rz}] \quad (14)$$

بردار کرنش شامل دو کرنش الاستیک و حرارتی است. رابطه‌ی (15) بیانگر این مفهوم می‌باشد. این دو کرنش در روابط (16) و (17) ارائه شده اند.

$$\epsilon = \epsilon^\sigma + \epsilon^T \quad (15)$$

$$\epsilon^T = [\alpha_r \Delta T, \alpha_\theta \Delta T, \alpha_z \Delta T, 0] \quad (16)$$

$$\epsilon^\sigma = [\epsilon_r^\sigma, \epsilon_\theta^\sigma, \epsilon_z^\sigma, \gamma_{rz}^\sigma] \quad (17)$$

قانون هوک که بیانگر رابطه بردار تنش و کرنش الاستیک است، در مواد ارتوتروپیک<sup>7</sup> به صورت رابطه‌ی (18) بیان می‌گردد.

$$\sigma = D \epsilon, [D] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & D_{23} & 0 \\ D_{13} & D_{23} & D_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{44} \end{bmatrix} \quad (18)$$

که  $D$  ماتریس سختی است و مؤلفه‌های آن مطابق رابطه‌ی (19) محاسبه می-

مدل اختلاط تعمیم یافته، محاسبه گردید. دستجردی و همکاران [18,19]، تحلیل دینامیکی و استاتیکی استوانه‌ی نانوکامپوزیتی مدرج را انجام دادند. معادله‌های حاکم بر اساس تئوری الاستیسیته استخراج و به روش بدون المان و تخمین میدان جابه‌جایی با استفاده از توابع شکل حداقل مربعات متحرک<sup>1</sup>، حل گردید. خواص نیز با استفاده از مدل میکرومکانیکی اختلاط تعمیم یافته، محاسبه شد. تأثیر انواع الگوی توزیع مدرج و مقادیر مختلف درصد حجمی نانولوله‌ی کربنی بر روی تنش و جابه‌جایی، توسط این پژوهشگران مورد بررسی قرار گرفت. در پژوهش انجام شده دیگری توسط دستجردی و همکاران [20]، تأثیر جهت‌گیری نانولوله‌ی کربنی در ماده زمینه بر فرکانس طبیعی ارتعاش استوانه‌ی نانوکامپوزیتی مدرج، بررسی شد.

در پژوهش حاضر، رفتار ترموالاستیکی استوانه‌های توخالی نانوکامپوزیتی مدرج تقویت شده با نانولوله‌های کربنی تک‌جداره که تحت بار مکانیکی و شرایط مرزی دمایی پایدار قرار داشته، بررسی شده است. معادله‌ی تعادل بر اساس اصل کار مجازی و تئوری ترموالاستیسیته<sup>2</sup> استخراج شده است. این معادله با استفاده از روش بدون المان و توابع شکل حداقل مربعات متحرک خطا جهت تخمین میدان جابه‌جایی، گسسته سازی شده است. توزیع دمایی در استوانه، با حل معادلات گرمایی به روش تفاضل محدود مرکزی<sup>3</sup>، به دست آمده است. شرایط مرزی اساسی با استفاده از روش تبدیل<sup>4</sup>، اعمال شده است. خواص، تابع دما و در طول شعاع استوانه، متغیر فرض و مطابق مدل میکرو-مکانیکی اختلاط تعمیم یافته، محاسبه شده است. جهت اصلاح نتایج روش مدل میکرومکانیکی اختلاط تعمیم یافته برای مواد در مقیاس نانو، از پارامترهای کارایی نانولوله‌ی کربنی<sup>5</sup> استفاده شده است. پارامترهای کارایی نانولوله‌ی کربنی از طریق مقایسه مقادیر مدول یانگ حاصله از دو روش میکرومکانیکی و دینامیک مولکولی<sup>6</sup>، بدست آمده است. در این تحلیل، تأثیر چند الگوی متداول مدرج توزیع و مقادیر مختلف درصد حجمی نانولوله‌ی-کربنی و همچنین پارامتر هندسی نسبت ارتفاع به شعاع داخلی، بر مؤلفه‌های تنش بررسی شده است.

### 2- خواص مکانیکی و حرارتی نانوکامپوزیت مدرج تابعی تقویت شده با نانولوله‌ی کربنی تک‌جداره:

برای تخمین خواص مواد نانوکامپوزیتی، مدل‌های مختلفی ارائه شده است. مدل‌های میکرومکانیکی ایشلی-موری-تاناکا و اختلاط تعمیم یافته، بیشتر از مدل‌های دیگر استفاده شده‌اند. در این تحلیل، جهت تخمین خواص مکانیکی نانوکامپوزیت، مدل میکرومکانیکی اختلاط تعمیم یافته، استفاده شده است. مطابق این مدل، خواص مکانیکی به صورت روابط (1-3) محاسبه می‌شوند [19].

$$E_{11} = \eta_1 V_{cn} E_{11}^{cn} + V_m E^m \quad (1)$$

$$\frac{\eta_2}{E_{22}} = \frac{V_{cn}}{E_{22}^{cn}} + \frac{V_m}{E_m} \quad (2)$$

$$\frac{\eta_3}{G_{12}} = \frac{V_{cn}}{G_{12}^{cn}} + \frac{V_m}{G_m} \quad (3)$$

در روابط (1-3)،  $G_{12}^{cn}, E_{22}^{cn}, E_{11}^{cn}, V_{cn}, G_m, E_m, V_m$  به ترتیب بیانگر درصد حجمی، مدول یانگ و برشی ماده زمینه و نانولوله‌ی کربنی‌اند. این پارامترهای کارایی نانولوله‌ی کربنی اند. این پارامترها جهت

<sup>1</sup> Motion least square

<sup>2</sup> Thermo elasticity

<sup>3</sup> Central finite difference method

<sup>4</sup> Transformation method

<sup>5</sup> Carbon nanotube efficiency parameter

<sup>6</sup> Molecular Dynamic

<sup>7</sup> Orthotropic

شوند.

در این تحلیل، تابع وزن اسپیلان مرتبه دوم و بردار پایه بیان شده در رابطه‌ی (23)، به کار رفته است. فرم برداری دو بعدی رابطه‌ی (30) به صورت رابطه‌ی (31) می‌باشد.

$$u = [u_r, u_z] = \Phi \hat{u} \quad (31)$$

که  $\hat{u}$  و  $\Phi$  به ترتیب بردار جابه‌جایی مجازی و ماتریس توابع شکل حداقل مربعات متحرک می‌باشند و به صورت روابط (32) و (33) می‌باشند.

$$\hat{u} = [(\hat{u}_r)_1, (\hat{u}_z)_1, (\hat{u}_r)_2, (\hat{u}_z)_2, \dots, (\hat{u}_r)_n, (\hat{u}_z)_n]^T \quad (32)$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_1 & 0 & \Phi_2 & 0 & \dots & \Phi_n & 0 \\ 0 & \Phi_1 & 0 & \Phi_2 & \dots & 0 & \Phi_n \end{bmatrix} \quad (33)$$

با قراردادن رابطه‌ی (31) در رابطه‌ی (21)، بردار کرنش مطابق رابطه‌ی (34) از بردار جابه‌جایی مجازی، استخراج می‌شود.

$$\varepsilon = B \hat{u} \quad (34)$$

که  $B$  به صورت رابطه‌ی (35) است.

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} & 0 & \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} & 0 & \dots & \frac{\partial \Phi_n}{\partial r} & 0 \\ \frac{\Phi_1}{r} & 0 & \frac{\Phi_2}{r} & 0 & \dots & \frac{\Phi_n}{r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} & 0 & \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} & \dots & 0 & \frac{\partial \Phi_n}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} & \dots & \frac{\partial \Phi_n}{\partial z} & \frac{\partial \Phi_n}{\partial r} \end{bmatrix} \quad (35)$$

با جایگذاری روابط (20) و (34) در رابطه‌ی (12) که فرم ضعیف معادله تعادل است، رابطه‌ی (36) بدست می‌آید، که می‌توان آن را به شکل رابطه‌ی (37) نیز نوشت.

$$\left[ \int_{\Omega} B^T D B dv \right] \hat{u} = - \left[ \int_{\Omega} B^T D (-\varepsilon^T) dv \right] + \int_{\Gamma} \phi^T F ds \quad (36)$$

$$\bar{K} \hat{u} = \bar{F} \quad (37)$$

که  $\bar{K}$ ،  $\bar{F}$ ،  $\hat{u}$  در رابطه‌ی (37) به ترتیب ماتریس سختی و بردارهای نیرو و جابه‌جایی مجازی‌اند و به صورت روابط (38-40) بیان می‌شوند.  $N$  نیز تعداد گره‌ها در حوزه مسئله است.

$$\bar{K} = \int_{\Omega} B^T D B dv \quad (38)$$

$$\bar{F} = \int_{\Omega} B^T D (\varepsilon^T) dv + \int_{\Gamma} \phi^T F ds \quad (39)$$

$$\hat{u} = [(\hat{u}_r)_1, (\hat{u}_z)_1, (\hat{u}_r)_2, (\hat{u}_z)_2, \dots, (\hat{u}_r)_N, (\hat{u}_z)_N]^T \quad (40)$$

انتگرال‌گیری در روابط (38) و (39) به صورت عددی و با استفاده از روش عددی گوس دو نقطه بر روی سلول‌های سطح مسئله و خطوط مرزی مسئله انجام شده است.

روش بدون المان دارای مزایا و معایبی است. ضرایب شکل پیوسته و همگرایی سریع، دقت بالا در محاسبه تنش، عدم محدودیت کاربرد در تغییر شکل‌های بزرگ و رشد ترک، از مزایای روش بدون المان نسبت به المان محدود است.

همچنین دشواری اعمال شرایط مرزی اساسی در روش بدون المان عمده‌ترین عیب این روش می‌باشد. جهت اعمال شرایط مرزی در روش بدون المان چندین روش وجود دارد که از مهمترین آنها می‌توان به روش‌های ضرایب

$$\begin{aligned} D_{11} &= \frac{1 - \nu_{\theta z} \nu_{z\theta}}{E_{\theta} E_z \Delta}, \quad D_{22} = \frac{1 - \nu_{rz} \nu_{zr}}{E_r E_z \Delta} \\ D_{33} &= \frac{1 - \nu_{r\theta} \nu_{\theta r}}{E_r E_{\theta} \Delta}, \quad D_{44} = G_{r\theta} \\ D_{12} &= \frac{\nu_{\theta r} - \nu_{zr} \nu_{\theta z}}{E_{\theta} E_z \Delta}, \quad D_{23} = \frac{\nu_{z\theta} - \nu_{r\theta} \nu_{zr}}{E_r E_z \Delta} \\ D_{13} &= \frac{\nu_{zr} - \nu_{\theta r} \nu_{z\theta}}{E_r E_{\theta} \Delta} \Delta \\ &= \frac{1 - \nu_{\theta r} \nu_{r\theta} - \nu_{\theta z} \nu_{z\theta} - \nu_{rz} \nu_{zr} - 2\nu_{z\theta} \nu_{\theta r} \nu_{rz}}{E_r E_{\theta} E_z} \end{aligned} \quad (19)$$

که  $c = r, \theta, z$  و  $v_{ij}$   $i, j = r, \theta, z$  به ترتیب بیانگر نسبت پواسون و مدول الاستیسیته است.

با جایگذاری رابطه‌ی (15) در قانون هوک، رابطه‌ی (20) به دست می‌آید.

$$\sigma = D(\varepsilon - \varepsilon^T) = D\varepsilon - D\varepsilon^T \quad (20)$$

همچنین مؤلفه‌های کرنش نیز بر طبق رابطه‌ی (21)، از مؤلفه‌های جابه‌جایی استخراج می‌شوند

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \varepsilon_{\theta} = \frac{u_r}{r}, \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \varepsilon_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \quad (21)$$

#### 4- تحلیل عددی به روش بدون المان

در این تحلیل، میدان جابه‌جایی با استفاده از توابع شکل حداقل مربعات متحرک خطا، تخمین زده شده است. این تخمین اولین بار توسط لانکاستر و همکاران [23] مورد استفاده قرار گرفت. تخمین میدان جابه‌جایی با استفاده از توابع شکل حداقل مربعات متحرک خطا، در رابطه‌ی (22) نشان داده شده است.

$$u(X) = \sum_{i=1}^m P_i(X) a_i = P^T(X) a(X) \quad (22)$$

که  $P(X)$  بردار پایه است و  $m$  اندازه این بردار می‌باشد. دو بردار پایه متداول در مسائل متقارن محوری به صورت روابط (23) و (24) می‌باشند.

$$P(X) = [1 \quad r \quad z]^T \quad (23)$$

$$P(X) = [1 \quad r \quad z \quad rz \quad r^2 \quad z^2]^T \quad (24)$$

برداری  $a(X)$  در رابطه‌ی (22)، بردار ضرایب مجهول نامیده می‌شود و به طریق مینیمم کردن مقدار خطای وزنی نرمال، محاسبه می‌گردد. مقدار خطای وزنی نرمال مطابق رابطه‌ی (25) محاسبه می‌شود.

$$j = \sum_{i=1}^n w(X - X_i) [P^T(X_i) a(X) - \hat{u}_i]^2 \quad (25)$$

که  $w, j$  به ترتیب خطای وزنی نرمال و تابع وزن هستند.  $n$  نیز تعداد گره‌های داخل حوزه اثر نقطه  $X(r, z)$  است. با مینیمم قرار دادن  $j$ ، می‌توان  $a(X)$  را از رابطه‌ی (26) محاسبه کرد.

$$a(X) = [M(X)]^{-1} \cdot B(X) \cdot \hat{u} \quad (26)$$

که  $M(X)$  و  $B(X)$  به صورت روابط (27) و (28) تعریف می‌شوند.

$$M(X) = \sum_{i=1}^n w(X - X_i) P(X_i) P^T(X_i) \quad (27)$$

$$B(X) = [w(X - X_1) P(X_1), \dots, w(X - X_n) P(X_n)] \quad (28)$$

برداری  $\hat{u}$  در رابطه‌ی (26) بردار جابه‌جایی مجازی است.

با قراردادن رابطه‌ی (26) در رابطه‌ی (22)، رابطه‌ی (29) بدست می‌آید.

$$u(X) = \sum \Phi_i \hat{u}_i \quad (29)$$

که  $\Phi_i$  تابع شکل حداقل مربعات متحرک است و از رابطه‌ی (30) محاسبه می‌شود.

$$\Phi_i = P^T(X) [M(X)]^{-1} w(X - X_i) P(X_i) \quad (30)$$

جدول 1 خواص ماده پلی متیل متاکریلیت و نانولوله کربنی تک‌جداره (10-10)

Table 1 Properties of Poly Methyl Methacrylate and (10-10) SWCNT <sup>4</sup>			
خواص	پلی متیل متاکریلیت	نانولوله کربنی تک جداره (10-10)	
مدول یانگ شعاعی (Pa)	$2.5 \times 10^9$	$5.6466 \times 10^{12}$	
مدول یانگ محوری (Pa)	$2.5 \times 10^9$	$7.0800 \times 10^{12}$	
مدول برشی (Pa)	$2.5 \times 10^9$	$1.9445 \times 10^{12}$	
نسبت پواسون	0.34	0.175	
ضریب انبساط حرارتی محوری (1/K)	$60 \times 10^{-6}$	$-0.27 \times 10^{-6}$	
ضریب انبساط حرارتی شعاعی (1/K)	$60 \times 10^{-6}$	$-0.2 \times 10^{-6}$	
ضریب رسانش حرارتی شعاعی (W/m.K)	0.2	1.64	
ضریب رسانش حرارتی محوری (W/m.K)	0.2	6600	

مقادیر پارامترهای کارایی نانولوله‌ی کربنی برای نانوکامپوزیت پلیمری پلی‌متا-کریلیت تقویت شده با نانولوله‌ی کربنی تک‌جداره (10-10) برای مقادیر مختلف درصد حجمی نانولوله‌ی کربنی، در جدول 2، ارائه شده است.

### 6-1- اعتبارسنجی نتایج

برای صحت‌گذاری بر نتایج این پژوهش، مسئله مطرح شده توسط درابشه<sup>5</sup> [28]، با روش حاضر، تحلیل و نتایج حاصله با نتایج موجود، مقایسه شده است. شرایط مرزی مسئله تحلیل شده در روابط (49-51) بیان شده است.

$$r = R_i \quad \sigma_r = P \sin(\pi z/H), T = \sin(\pi z/H) + T_{\infty} \quad (49)$$

$$r = R_o \quad \sigma_r = 0, T = T_{\infty}, \tau_{rz} = 0, \quad (50)$$

$$h = 0, H \quad u_z = 0, T = T_{\infty} \quad (51)$$

استوانه از جنس ماده مدرج تابعی سرامیکی ZrO<sub>2</sub> تقویت شده با فلز - Ti 4V - 6Al در نظر گرفته شده که درصد حجمی فلز، در طول شعاع و محور استوانه به طور پیوسته مطابق رابطه‌ی (52)، تغییر کرده است. درصد حجمی سرامیک نیز با استفاده از رابطه‌ی (53) محاسبه شده است.

$$V_m = \left( \frac{R-1}{R_o-1} \right)^{n_r} \left( \frac{Z}{L} \right)^{n_z} \quad (52)$$

$$V_c + V_m = 1 \quad (53)$$

در روابط (54,53) به ترتیب ضرایب تغییرات نمایی شعاعی و محوری، درصد حجمی فلز و سرامیک می‌باشد. خواص، تابع دما فرض و با استفاده از قانون اختلاط محاسبه شده است. در شکل‌های 1 و 2، منحنی‌های تنش شعاعی و محوری نقاط میانی در امتداد محور استوانه، بدست آمده از دو روش بدون المان و المان محدود، با هم مقایسه شده است. همان‌طور که در شکل‌های 1 و 2 دیده می‌شود، نتایج حاصل از دو روش دارای تطابق خوبی اند که حاکی از اعتبار روش ارائه شده در این تحلیل است.

جدول 2 مقایسه مدول یانگ نانوکامپوزیت با زمینه پلی‌متیل متاکریلیت تقویت‌شده با نانولوله‌ی کربنی تک‌جداره (10-10) در 300 K [19].

Table 2 Comparisons of Young's moduli for Polymer/CNT <sup>6</sup> composites reinforced by (10,10) SWCN at $T = 300K$ [19].						
درصد پایه	مدل دینامیک	قانون اختلاط	پارامتر کارایی	درصد پایه	مدل دینامیک	قانون اختلاط
حجمی	مولکولی	تعمیم یافته	نانولوله‌ی کربنی	حجمی	مولکولی	تعمیم یافته
$\eta_1$	$\eta_1$	$E_{11}(\text{GPa})$	$E_{11}(\text{GPa})$	$\eta_1$	$\eta_1$	$E_{11}(\text{GPa})$
0.11	94.8	2.2	94.57	0.149	0.934	2.2
0.14	120.2	2.3	120.9	0.150	0.941	2.3
0.17	145.6	3.5	145.08	0.149	1.381	3.5

<sup>4</sup> Single walled carbon nanotube

<sup>5</sup> Darabseh

<sup>6</sup> Carbon nanotube

لاگرانژ و ضریب پینالتی<sup>1</sup> و ماتریس تبدیل، اشاره نمود. در این پژوهش، شرایط مرزی اساسی با استفاده از روش تبدیل اعمال شده است. در این روش، ابتدا ماتریس تبدیل که ارتباط بردار جابه‌جایی واقعی و بردار جابه‌جایی مجازی گره‌ها را فراهم می‌کند، تشکیل می‌گردد. فرم ریاضی این ارتباط به صورت رابطه‌ی (41) است.

$$u = T \hat{u} \quad (41)$$

که  $T$  ماتریس تبدیل است و به صورت رابطه‌ی (42) محاسبه می‌شود.

$$T = \begin{bmatrix} \phi_1(x_1) & 0 & \dots & \phi_N(x_1) & 0 \\ 0 & \phi_1(x_1) & \dots & 0 & \phi_N(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \phi_1(x_N) & 0 & \dots & \phi_N(x_N) & 0 \\ 0 & \phi_1(x_N) & \dots & 0 & \phi_N(x_N) \end{bmatrix} \quad (42)$$

با قرار دادن رابطه‌ی (41) در روابط (38,39)، روابط (44,43) به دست می‌آیند. سپس شرایط مرزی اساسی، همانند روش اجزا محدود در روابط (43) و (44) اعمال شده است.

$$K = T^{-1T} \hat{K} T^{-1} \quad (43)$$

$$F = T^{-1T} \hat{F} \quad (44)$$

### 5- حل معادلات حرارت و محاسبه توزیع دمایی

معادله حرارت در حالت پایدار<sup>2</sup> در مسائل متقارن محوری به صورت رابطه‌ی (45) می‌باشد.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( k(r, T) r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( k(r, T) \frac{\partial T}{\partial z} \right) = 0 \quad (45)$$

که  $T$  و  $k$  به ترتیب بیانگر دما و ضریب انتقال رسانش است. در تحلیل حاضر، معادله حرارت با استفاده از روش عددی تفاضل محدود حل شده است. با توجه به وابستگی دمایی ضریب رسانش حرارت در رابطه‌ی (45) باید از روش تکرار مراحل و اصلاح ضریب رسانش، استفاده نمود.

### 6- بحث و نتایج عددی

در تحلیل حاضر، استوانه نانوکامپوزیتی مدرج تابعی تقویت شده با نانولوله‌ی کربنی تک‌جداره که تحت بار حرارتی پایدار قرار دارد، تحلیل شده است. فرض شده که این استوانه در سطح درونی در معرض بار حرارتی پایدار بوده که موجب ایجاد شرایط دمایی مرزی پایدار، گردیده است. شرایط مرزی نیرویی و دمایی، در روابط (46-48) ارائه شده است.

$$r = R_i \quad \sigma_r = 0, T = 150^\circ \text{C} \quad (46)$$

$$r = R_o \quad \sigma_r = 0, T = 30^\circ \text{C} \quad (47)$$

$$z = 0, H \quad u_i = 0 \quad i = r, \theta, z, T = 30^\circ \quad (48)$$

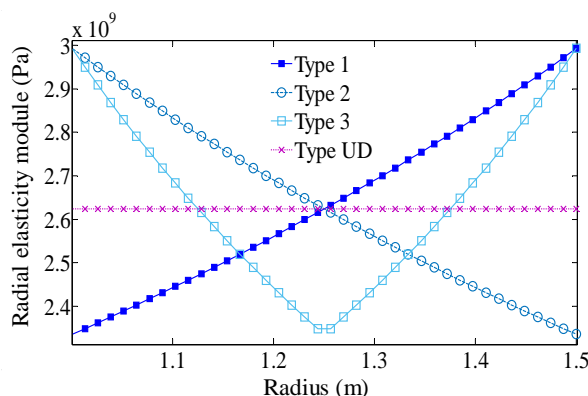
زمینه نانوکامپوزیت، از جنس ماده ایزوتروپیک پلی‌متیل متاکریلیت<sup>3</sup> در نظر گرفته شده که توسط نانولوله‌ی کربنی تک‌جداره (10-10) تقویت گردیده است نانولوله‌ی کربنی ماده‌ای غیر ایزوتروپیک است که خواص آن به دما و سائز و نوع ساختارش، وابسته است. در جدول 1، خواص مکانیکی و حرارتی پلی-متیل متاکریلیت و نانولوله‌ی کربنی تک‌جداره (10-10) لیست شده است [27-24,19]. در این تحلیل، خواص مکانیکی و حرارتی ماده پلیمری و نانولوله-کربنی تک‌جداره، مستقل از دما فرض شده است.

<sup>1</sup> Asymptotic modeling theorems

<sup>2</sup> Steady state

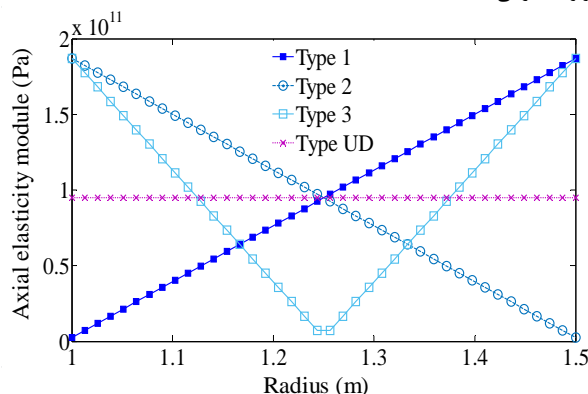
<sup>3</sup> Poly methyl methacrylate

در این قسمت به بررسی تأثیر پارامترهای مختلف همانند مقدار درصد حجمی و الگوی مدرج توزیع نانولوله‌ی کربنی و پارامتر هندسی نسبت ارتفاع به شعاع داخلی، بر مؤلفه‌های تنش، پرداخته شده است. در این تحلیل به جز در قسمتی که به بررسی نسبت هندسی ارتفاع به شعاع داخلی پرداخته می‌شود در کلیه بخش‌ها ارتفاع، شعاع داخلی و خارجی به ترتیب برابر 1، 1 و 1.5 متر، در نظر گرفته شده است. در بخشی که به بررسی تأثیر نسبت هندسی پرداخته می‌شود نیز، ابعاد برابر قبل و فقط ارتفاع متغیر در نظر گرفته شده است. در اشکال 4 و 5، منحنی مقادیر مدول الاستیسیته شعاعی و محوری در نقاط با ارتفاع میانی و فواصل شعاعی مختلف استوانه‌ی نانوکامپوزیتی مدرج با الگوهای مختلف توزیع مدرج نشان داده شده است. همان‌طور که در اشکال 4-5 دیده می‌شود، مقادیر مدول الاستیسیته شعاعی و محوری، با میزان درصد حجمی محلی نانولوله‌کربنی، رابطه مستقیم دارد و افزایش درصد حجمی محلی نانولوله‌کربنی موجب افزایش مدول الاستیسیته محوری و شعاعی نانو-کامپوزیت می‌گردد. در شکل 6، توزیع دمایی استوانه نانوکامپوزیتی مدرج با الگوی توزیع یکنواخت و 12% حجمی نانولوله‌ی کربنی، ارائه گردیده است. تأثیر مقادیر مختلف درصد حجمی نانولوله‌ی کربنی بر مؤلفه‌های تنش نقاط با



**Fig. 4** The variation of radial elasticity module in radial direction, located at middle height, of CNTRC cylinder for the different FG type of CNT distribution

شکل 4 تغییر مدول الاستیسیته شعاعی در راستای شعاعی، در ارتفاع میانی استوانه نانوکامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌ی کربنی برای الگوهای متفاوت مدرج توزیع نانولوله‌ی کربنی



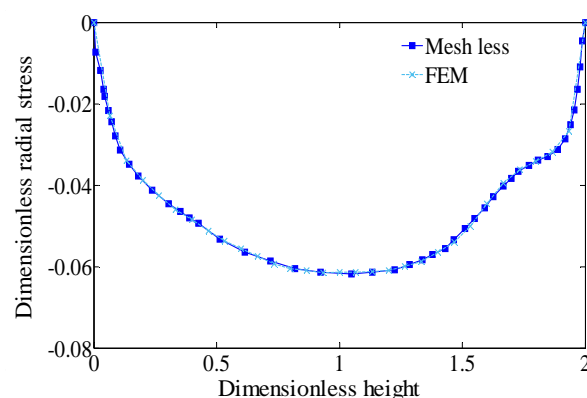
**Fig. 5** The variation of axial elasticity module in radial direction, located at middle height, of CNTRC cylinder for the different FG type of CNT distribution

شکل 5 تغییر مدول الاستیسیته محوری در راستای شعاعی، در ارتفاع میانی استوانه نانوکامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌ی کربنی برای الگوهای متفاوت مدرج توزیع نانولوله‌ی کربنی

## 2-6- بررسی همگرایی پاسخ

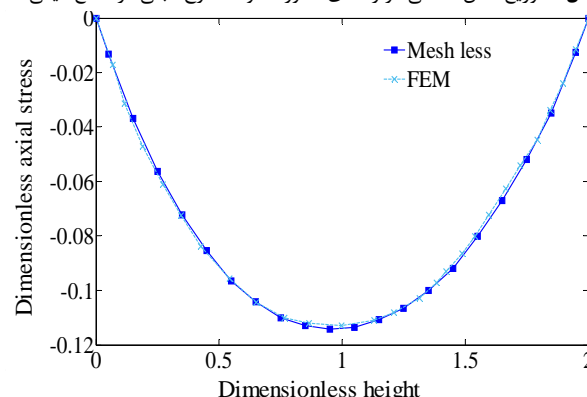
با افزایش تعداد گره‌ها در محدوده مسئله، گره‌های بیشتری در حوزه اثر هر نقطه قرار می‌گیرند و توابع شکل دقیقتری بدست می‌آیند که موجب افزایش دقت محاسبات می‌شود. بدیهی است که افزودن تعداد گره‌ها باعث افزایش حجم محاسبات نیز می‌گردد. بنابراین، روند افزایش تعداد گره‌ها تا همگرایی نتایج ادامه پیدا می‌کند. در شکل 3 تأثیر افزایش گره‌ها بر مقدار تنش شعاعی در استوانه‌ای با ابعاد دلخواه، در شعاع و ارتفاع میانی، نشان داده شده است.

## 3-6- تأثیر پارامترهای مختلف بر مؤلفه‌های تنش



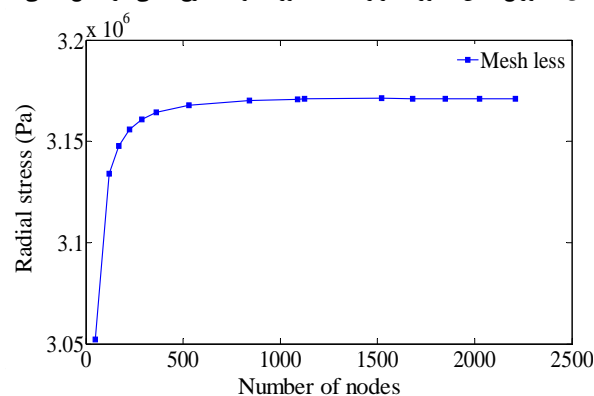
**Fig. 1** Radial stress distribution in the axial direction of functionally graded cylinder in middle radius.

شکل 1 توزیع تنش شعاعی در راستای محور استوانه مدرج تابعی در شعاع میانی



**Fig. 2** axial stress distribution in the axial direction of functionally graded cylinder in middle radius.

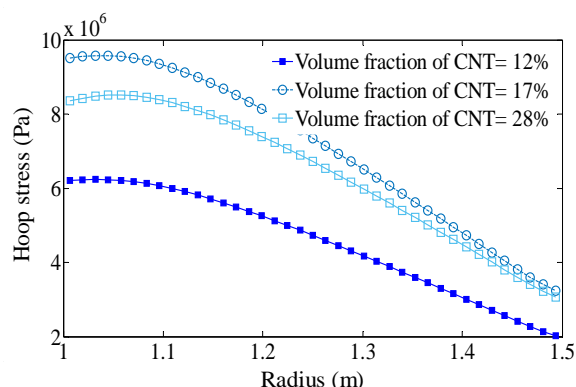
شکل 2 توزیع تنش محوری در راستای محور استوانه مدرج تابعی در شعاع میانی



**Fig. 3** Convergence of radial stress for different number of node arrangement

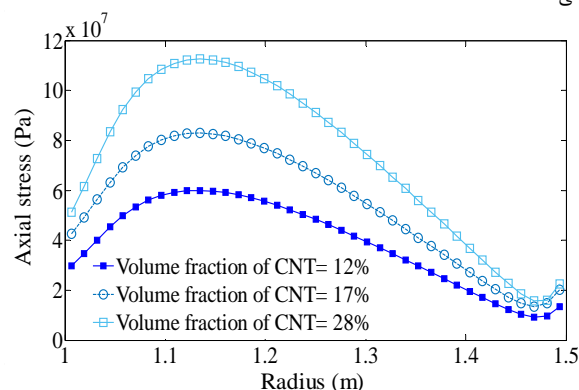
شکل 3 همگرایی مقادیر تنش شعاعی برای شبکه‌بندی گره‌های متفاوت

شعاعی مختلف، نشان داده شده است. با توجه به شکل‌های 15-18 می‌توان گفت که افزایش این پارامتر، موجب افزایش تنش شعاعی، محیطی و فون میزس و کاهش تنش محوری شده است.



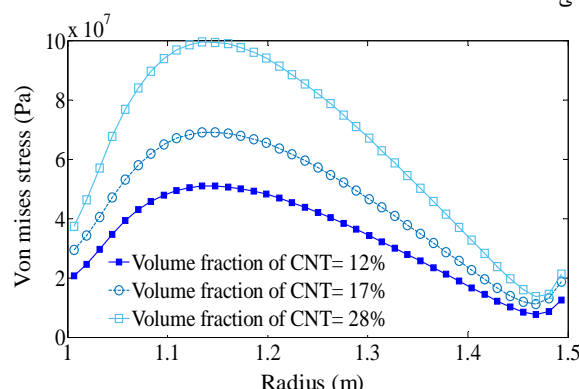
**Fig. 8** The variation of hoop stress in radial direction, located at middle height, of CNTRC cylinder for the different values of CNT volume fraction

شکل 8 تغییر تنش محیطی در راستای شعاعی، در ارتفاع میانی استوانه‌ی نانو-کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌ی کربنی، با مقادیر متفاوت درصد حجمی نانولوله‌ی کربنی



**Fig. 9** The variation of axial stress in radial direction, located at middle height, of CNTRC cylinder for the different values of CNT volume fraction

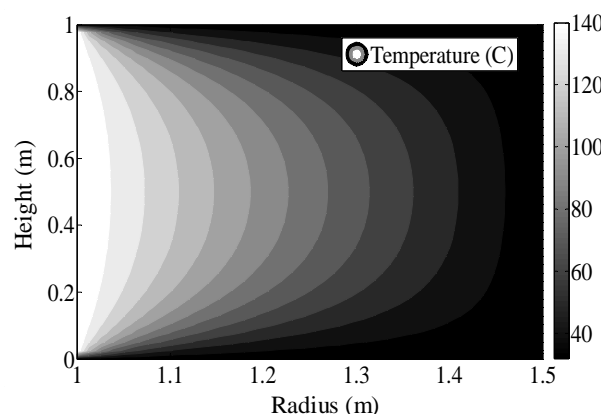
شکل 9 تغییر تنش محیطی در راستای شعاعی، در ارتفاع میانی استوانه‌ی نانو-کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌ی کربنی، با مقادیر متفاوت درصد حجمی نانولوله‌ی کربنی



**Fig. 10** The variation of axial stress in radial direction, located at middle height, of CNTRC cylinder for the different values of CNT volume fraction

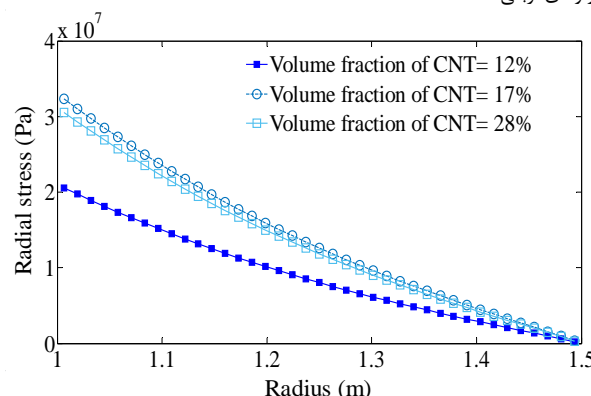
شکل 10 تغییر تنش فون میزس در راستای شعاعی، در ارتفاع میانی استوانه‌ی نانو-کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌ی کربنی، با مقادیر متفاوت درصد حجمی نانولوله‌ی کربنی

ارتفاع میانی و مقادیر شعاعی مختلف در استوانه نانوکامپوزیتی با توزیع یکنواخت نانولوله‌ی کربنی، در شکل‌های 7-10 بررسی شده است. همان‌طور که در شکل‌های 7 و 8 دیده می‌شود، بیشترین و کمترین تنش شعاعی و محیطی در مقادیر حجمی 12% و 17% نانولوله‌ی کربنی روی می‌دهد. برطبق اشکال 9 و 10 می‌توان گفت که افزایش درصد حجمی موجب افزایش تنش محوری و فون میزس می‌شود. در شکل‌های 11-13 منحنی مقادیر مؤلفه‌های تنش در نقاط با ارتفاع میانی و مقادیر شعاعی مختلف در استوانه‌های نانوکامپوزیتی با 12% حجمی نانولوله‌ی کربنی، برای سه الگوی مدرج تابعی و یک الگوی یکنواخت توزیع نانولوله‌های کربنی نشان شده است. با دقت در شکل‌های 14-11 می‌توان گفت، بیشترین میزان مؤلفه‌های تنش متعلق به الگوی دوم است و مقادیر تنش در دیگر الگوها به هم نزدیک می‌باشند. شکستگی موجود در نمودارهای الگوی سوم را می‌توان با توجه به شکستگی منحنی خواص این الگو در شکل 8 و 9 توجیه کرد. در انتها نیز به بررسی تأثیر پارامتر هندسی نسبت ارتفاع به شعاع داخلی، بر مؤلفه‌های تنش پرداخته شده است. بدین جهت، مقادیر شعاع داخلی و خارجی ثابت و ارتفاع استوانه متغیر در نظر گرفته شده است. همچنین توزیع و میزان نانولوله‌ی کربنی به صورت الگوی یکنواخت و 12% حجمی فرض شده است. در شکل‌های 15-18 تأثیر این پارامتر هندسی بر مؤلفه‌های تنش در نقاط با ارتفاع میانی و مقادیر



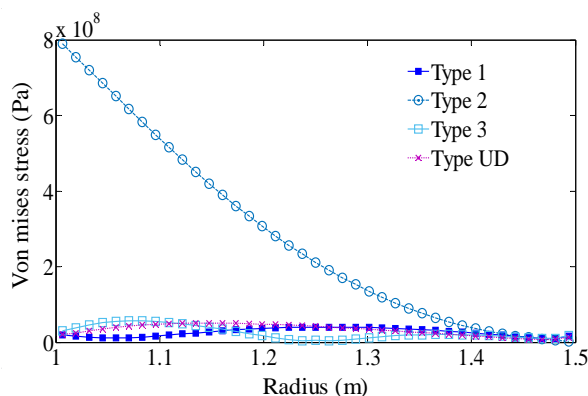
**Fig. 6** Thermal distribution of functionally graded hollow cylinder reinforced by carbon Nanotube

شکل 6 توزیع دمایی در استوانه توخالی نانوکامپوزیتی مدرج تابعی تقویت شده با نانولوله‌ی کربنی



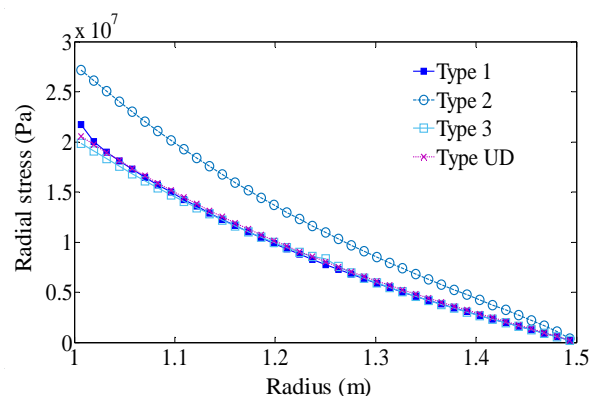
**Fig. 7** The variation of radial stress in radial direction, located at middle height, of CNTRC cylinder for the different values of CNT volume fraction

شکل 7 تغییر تنش شعاعی در راستای شعاعی، در ارتفاع میانی استوانه‌ی نانو-کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌ی کربنی، با مقادیر متفاوت درصد حجمی نانولوله‌ی کربنی



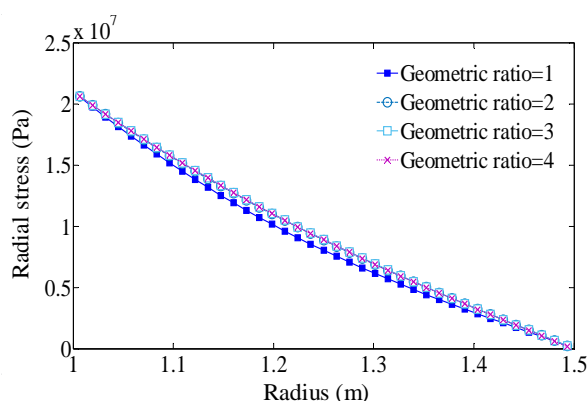
**Fig. 14** The variation of von mises stress located middle height in radial direction of CNTRC cylinder for the different FG types of CNT distribution

شکل 14 تغییر تنش فون میزس در راستای شعاعی، در ارتفاع میانی استوانه‌ی نانو- کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌ی کربنی برای الگوهای متفاوت توزیع مدرج تابعی نانولوله‌ی کربنی



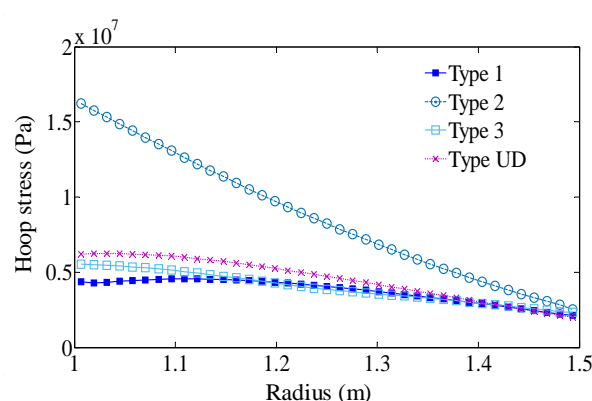
**Fig. 11** The variation of radial stress located middle height in radial direction of CNTRC cylinder for the different FG types of CNT distribution

شکل 11 تغییر تنش شعاعی در راستای شعاعی، در ارتفاع میانی استوانه‌ی نانو- کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌ی کربنی برای الگوهای متفاوت توزیع مدرج تابعی نانولوله‌ی کربنی



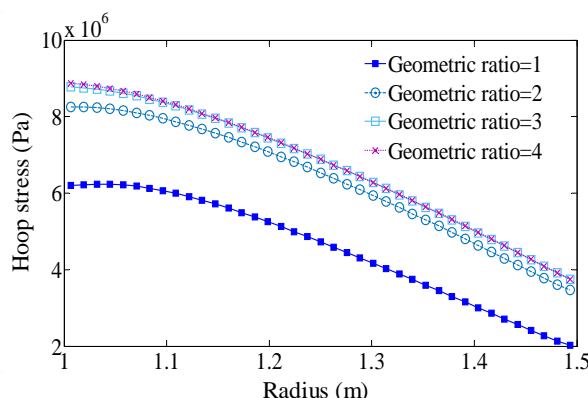
**Fig. 15** The variation of radial stress in radial direction, located at middle height, of CNTRC cylinder for the different value of geometrical parameter  $H/R_i$

شکل 15 تغییر تنش شعاعی در راستای شعاعی، در ارتفاع میانی استوانه‌ی نانو- کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌ی کربنی برای مقادیر متفاوت پارامتر هندسی نسبت ارتفاع به شعاع داخلی



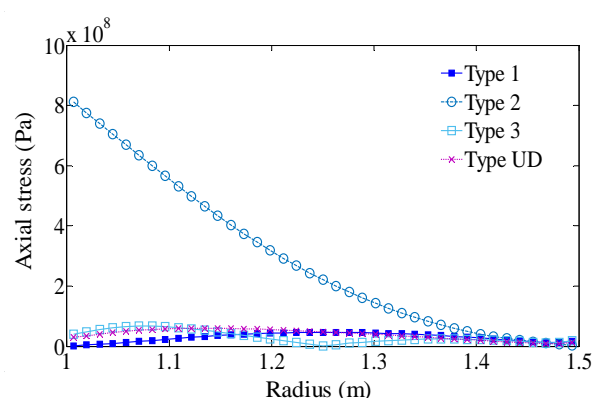
**Fig. 12** The variation of hoop stress located middle height in radial direction of CNTRC cylinder for the different FG types of CNT distribution

شکل 12 تغییر تنش محیطی در راستای شعاعی، در ارتفاع میانی استوانه‌ی نانو- کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌ی کربنی برای الگوهای متفاوت توزیع مدرج تابعی نانولوله‌ی کربنی



**Fig. 16** The variation of axial stress in radial direction, located at middle height, of CNTRC cylinder for the different value of geometrical parameter  $H/R_i$

شکل 16 تغییر تنش محوری در راستای شعاعی، در ارتفاع میانی استوانه‌ی نانو- کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌ی کربنی برای مقادیر متفاوت پارامتر هندسی نسبت ارتفاع به شعاع داخلی



**Fig. 13** The variation of axial stress located middle height in radial direction of CNTRC cylinder for the different FG types of CNT distribution

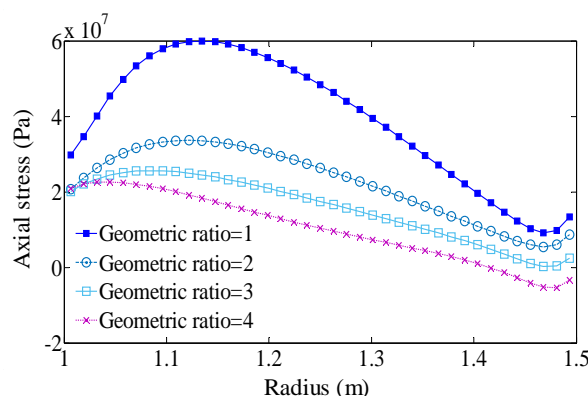
شکل 13 تغییر تنش محوری در راستای شعاعی، در ارتفاع میانی استوانه‌ی نانو- کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌ی کربنی برای الگوهای متفاوت توزیع مدرج تابعی نانولوله‌ی کربنی



- افزایش پارامتر هندسی نسبت ارتفاع به شعاع داخلی، موجب افزایش تنش‌های شعاعی، محیطی و فون میزس می‌گردد.
- افزایش پارامتر هندسی، نسبت ارتفاع به شعاع داخلی، موجب کاهش تنش محوری می‌گردد.

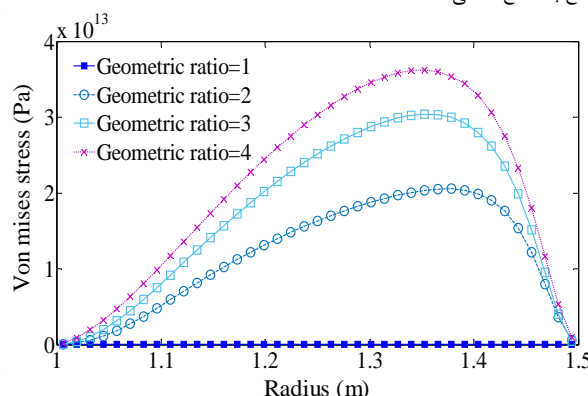
### 8-مراجع

- [1] F. H. Gojny, M. H. G. Wichmann, B. Fiedler, K. Schulte, Influence of different carbon Nanotubes on the mechanical properties of epoxy matrix composites—a comparative study, *Composite Science Technology*, Vol. 65, No. 20, pp. 2300–2313, 2005.
- [2] J. D. Fidelus, E. Wiesel, F. H. Gojny, K. Schulte, H. D. Wagner, Thermo mechanical properties of randomly oriented carbon/epoxy Nano composites, *Composite Part A*, Vol. 36, No. 11, pp. 1555–1561, 2005.
- [3] H. S. Shen, Nonlinear bending of functionally graded carbon Nano tube reinforced composite plates in thermal environments, *Composite Structures*, Vol. 91, No. 1, pp. 9-19, 2009.
- [4] P. Zhu, Z. X. Lei, K. M. Liew, Static and free vibration analyses of carbon Nano tube reinforced composite plates using finite element method with first order shear deformation plate theory, *Composite Structure*, Vol. 94, No. 4, pp. 1450–1460, 2012.
- [5] Z. X. Lei, K. M. Liew, J. L. Yu, Buckling analysis of functionally graded carbon nanotube reinforced composite plates using the element-free kp-ritz method, *Composite Structures*, Vol. 98, No. 1, pp. 160-168, 2013.
- [6] S. J. Mehrabadi, B. S. Aragh, V. Khoshkharesh, A. Taherpour, Mechanical buckling of Nano composite rectangular plate reinforced by aligned and straight single walled carbon Nano tubes, *Composites Part B*, Vol. 43, No. 4, pp. 2031-2040, 2012.
- [7] J. E. Jam, Y. Kiani, Low velocity impact response of functionally graded carbon Nanotube reinforced composite beams in thermal environment, *Composite Structures*, Vol. 132, No. 1, pp. 35-43, 2015.
- [8] H. S. Shen, C. L. Zhang, Thermal buckling and post buckling behavior of functionally graded carbon Nanotube reinforced composite plates, *Material Design*, Vol. 31, No. 7, pp. 3403–3411, 2010.
- [9] H. S. Shen, Z. H. Zhu, Buckling and post buckling behavior of functionally graded carbon Nanotube reinforced composite plates in thermal environments, *CMC-Computer Material and Continua*, Vol. 18, No. 2, pp. 155-182, 2010.
- [10] R. Moradi Dastjerdi, G. Payganeh, H. Malek Mohammadi, Free vibration analyses of functionally graded CNT reinforced Nano composite Sandwich plates resting on elastic foundation, *Solid Mechanics*, Vol. 7, No. 2, pp. 158-172, 2015.
- [11] L. L. Ke, J. Yang, S. Kitipornchai, Nonlinear free vibration of functionally graded carbon Nanotube reinforced composite beams, *Composite Structure*, Vol. 92, No. 3, pp. 676–683, 2010.
- [12] M. H. Yas, N. Samadi, Free vibrations and buckling analysis of Carbon Nano tube reinforced composite Timoshenko beams on elastic foundation, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 98, No. 1, pp. 119-128, 2012.
- [13] M. H. Yas, M. Heshmati, Dynamic analysis of functionally graded Nano composite beams reinforced by randomly oriented carbon nanotube under the action of moving load, *Applied Mathematical Modeling*, Vol. 36, No. 4, pp. 1371-1394, 2012.
- [14] M. H. Yas, A. Pourasghar, S. Kamarian, M. Heshmatian, Three-dimensional free vibration analysis of functionally graded Nano composite cylindrical panels reinforced by carbon nanotube, *Material Design*, Vol. 49, No. 1, pp. 583–590, 2013.
- [15] H. S. Shen, Y. Xiang, Nonlinear vibration of nanotube reinforced composite cylindrical shell in thermal environments, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 213–216, No. 1, pp. 196–205, 2012.
- [16] S. Shen, Y. Xiang, Nonlinear vibration of Nano tube reinforced composite cylindrical panels resting on elastic foundations in thermal environments, *Composite Structures*, Vol. 111, No. 1, pp. 291-300, 2014.
- [17] R. Ansari, J. Torabi, Free vibration analysis of FG-CNTRC cylindrical shells surrounded by elastic foundation subjected to thermal loading, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 3, pp. 271-282, 2015. (in Persian)



**Fig. 17** The variation of axial stress in radial direction, located at middle height, of CNTRC cylinder for the different value of geometrical parameter  $H/R_i$

شکل 17 تغییر تنش محوری در راستای شعاعی، در ارتفاع میانی استوانه‌ی نانو- کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌ی کربنی برای مقادیر متفاوت پارامتر هندسی نسبت ارتفاع به شعاع داخلی



**Fig. 18** The variation of von mises stress in radial direction, located at middle height, of CNTRC cylinder for the different value of geometrical parameter  $H/R_i$

شکل 18 تغییر تنش فون میزس در راستای شعاعی، در ارتفاع میانی استوانه‌ی نانو- کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌ی کربنی برای مقادیر متفاوت پارامتر هندسی نسبت ارتفاع به شعاع داخلی

### 7- نتیجه‌گیری

در این مقاله تحلیل ترموالاستیکی استوانه‌های توخالی، از جنس مواد مدرج تابعی تقویت شده با نانولوله‌ی کربنی تک‌جداره که در سطح داخلی در معرض بار حرارتی پایدار است، به روش بدون المان با استفاده از تقریب حداقل مربعات متحرک خطا، انجام شده است. با توجه به نتایج این پژوهش، اصول زیر استنباط می‌شود:

- روش بدون المان دارای تطابق خوبی با روش المان محدود می‌باشد.
- افزایش درصد حجمی محلی نانولوله‌ی کربنی، موجب افزایش مدول الاستیسیته محوری و شعاعی می‌گردد.
- با کاهش میزان درصد حجمی نانولوله‌ی کربنی، تنش محوری و فون میزس در استوانه‌ی نانو کامپوزیتی کاهش می‌یابد.
- تنش شعاعی و محیطی در استوانه نانوکامپوزیتی با 17% حجمی نانولوله‌ی کربنی بیشتر از درصدهای حجمی دیگر می‌باشد.
- کمترین تنش حرارتی در استوانه کامپوزیتی با 12% نانولوله‌ی کربنی ایجاد می‌شود.
- تنش حرارتی ایجاد شده در الگوی مدرج تابعی دوم، بسیار بیشتر از الگو- های دیگر است و در دیگر الگوها دارای تفاوت چندانی نیستند.

- forced cylindrical panels, *Mechanical Sciences*, Vol. 52, No. 8, pp. 1047–1063, 2010.
- [23] P. Lancaster, K. Salkauskas, Surface generated by moving least squares methods, *Math Comput*, Vol. 37, No. 155, pp. 141-58, 1981.
- [24] H. Jiang, B. Liu, Y. Huang, Thermal expansion of single walled carbon Nanotubes, *Journal of Engineering Materials and Technology*, Vol. 126, No. 3, pp. 265-270, 2004.
- [25] S. Berber, Y. Kyun Kwon, D. Tom anek, Unusually high thermal conductivity of carbon Nanotubes, *Physical Review Letters*, Vol. 84, No. 20, pp. 4613-16, 2000.
- [26] M. Koleva, Poly methyl methacrylate, *Injection Moulding Material*, Vol. 2, No. 1, pp. 1-5, 2014.
- [27] S. Sinha, S. Barjami, G. Iannacchione, A. Schwab, G. Muench, Off axis thermal properties of carbon Nanotube films, *Journal of Nanoparticle Research*, Vol. 7, No. 6, PP. 651–657, 2005.
- [28] T. Darabseh, B. Alshaer, Thermo elastic analysis of 2D FGM hollow circular cylinder with finite length by finite element method. *International Journal Computer Applications in Technology*, Vol. 46, No. 2, pp. 175-178, 2013.
- [18] R. Moradi Dastjerdi, M. Foroutan, A. Pourasghar, R. Sotoudeh Bahreini, Static analysis of functionally graded Carbon Nano tube reinforced composite cylinders by a mesh free method, *Reinforced Plastics and Composites*, Vol. 32, No. 9, pp. 593-601, 2013.
- [19] R. Moradi Dastjerdi, M. Foroutan, A. Pourasghar, Dynamic analysis of functionally graded Nano composite cylinders reinforced by Carbon Nano tube by a mesh free method, *Materials and Design*, Vol. 44, No. 1, pp. 256–266, 2013.
- [20] R. Moradi Dastjerdi, A. Pourasghar, M. Foroutan, The effects of carbon Nano tube orientation and aggregation on vibrational behavior of functionally graded Nano composite cylinders by a mesh free method, *Acta Mechanica*. Vol. 224, No. 11, pp. 2817–2832, 2013.
- [21] A. R. Ghasemi, M. M. Mohamadi, M. Moradi, Investigation of mechanical and thermal properties of polymer composite reinforced by multi walled carbon Nanotube for reduction of residual stress, *Iranian Journal of polymer science and technology*, Vol. 27, NO. 3, pp. 213-230, 2014. (in Persian فارسی)
- [22] B. Sobhani Aragh n, M. H. Yas, Three dimensional analysis of thermal stresses in four parameter continuous grading fiber rein