مجله مهندسی مکانیک مدرس، آذر 1395، دوره 16، شماره 9، ص‌ص 414-420

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

ارتعاشات نوار گرافنی دولایه دارای حرکت محوری با در نظر گرفتن اثر برش بین‌لایه‌ای

فرشاد یادگاری[1]، اردشیر کرمی‌محمدی[2*]

1- دانشجوی کارشناسی‌ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود

2- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود

* شاهرود، صندوق پستی316، akaramim@shahroodut.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 09 تیر 1395

پذیرش: 29 مرداد 1395

ارائه در سایت: 04 مهر 1395

کلید واژگان:

ارتعاشات

نوار گرافن

حرکت محوری

تئوری غیرموضعی

ناپایداری

چکیده

ویژگی‌های بی‌نظیر گرافن، زمینه را برای استفاده از این ماده در موارد گوناگون از جمله سیستم‌های دارای حرکت محوری در ابعاد نانو فراهم کرده است. وجود حرکت محوری در سیستم‌ها موجب تغییر رفتار دینامیکی و ارتعاشی آن‌ها می‌گردد. در این پژوهش ارتعاشات یک نوار گرافنی دولایه دارای سرعت محوری ثابت با در نظر گرفتن اثر برش بین‌لایه‌ای و از طریق تئوری الاستیسیته غیرموضعی بررسی شده است. بر مبنای این تئوری تنش در یک نقطه تابعی از کرنش در تمام نقاط جسم است. با توجه به ضخامت بسیار پایین لایه‌های گرافن و طول نوار، هر لایه بر اساس تئوری تیر اویلربرنولی مدل شده است. فرض بر این بوده است که جابه‌جایی‌های عرضی و انحنای هر دو لایه با هم برابر بوده و هیچ‌گونه جدایی بین سطوح لایه‌ها هنگام حرکت رخ ندهد. یک مدول برشی برای در نظر گرفتن اثر برش بین‌لایه‌ای ناشی از پیوندهای ضعیف واندروالس در انرژی پتانسیل سیستم وارد شده است. با استفاده از روش همیلتون معادله سیستم به دست آمده و به کمک روش گالرکین حل شده است. نتایجی برای شرایط مرزی یک‌سرگیردار- یک‌سرآزاد به دست آمده و با نتایج سایر مقالات موجود نیز مقایسه و اعتبارسنجی شده است. نتایج کامل‌تر برای شرایط مرزی دوسرمفصل به دست آمده و مشاهده می‌شود افزایش سرعت محوری موجب ایجاد ناپایداری‌های دیورژانس و فلاتر در سیستم می‌شود. هم‌چنین تاثیر تغییرات مدول برشی و پارامتر غیرموضعی بر روی سرعت‌های بحرانی بررسی شده است.

Vibration of axially moving two-layer graphene nonoribbon incorporating interlayer shear effect

Farshad Yadegari, Ardeshir Karami Mohammadi*

Department of Mechanical Engineering, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran

* P.O.B. 316 Shahrood, Iran, akaramim@shahroodut.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 29 June 2016
Accepted 19 August 2016
Available Online 25 September 2016

Keywords:
Vibration
Graphene nonoribbon
Axially moving
Nonlocal theory
Instability

ABSTRACT

Inimitable properties of graphene sheets enable a variety of applications such as axially moving nanodevices. Axial velocity affects dynamical response of systems. In this study linear vibration of an axially moving two-layer graphene nonoribbon with interlayer shear effect is proposed using nonlocal elasticity theory. Based on this theory, stress at a point is a function of strain at all other points of the body. Euler-Bernoulli theory is used to model the system due to nanoribbon thickness and length. It is assumed that the layers have the same transverse displacement and curvature and there is no transverse separation between layers surfaces. A shear modulus is imported in the potential energy expression in order to consider the interlayer shear effect due to weak Van der Waals forces. Governing equations are obtained using Hamilton's principle and are solved by Galerkin approach. Results for clamped-free boundary conditions are presented and compared to other available studies. Results for pinned-pinned boundary conditions are presented and it is observed that increasing axial velocity causes divergence and flutter instabilities in the system. Effects of different shear modulus and nonlocal parameter on critical speeds are also proposed.

1- مقدمه

فن‌آوری نانو دریچه‌ی جدیدی را در بسیاری از زمینه‌های علم از جمله علم مواد، مهندسی، پزشکی و انرژی گشوده است. در میان نانوموادهای گوناگون، نانولوله‌های کربنی[1] و ورق‌های گرافنی[2] به دلیل ویژگی‌های بی‌نظیر مکانیکی، الکترونیکی و گرمایی نگاه‌های بسیاری را به خود معطوف کرده است. به همین دلیل از این دو ماده برای توسعه نسل‌های جدید نانوابزارها در زمینه-های مختلفی چون ردیاب‌ها، ترانزیستورها، سلول‌های خورشیدی، ابرخازن‌ها و نانو کامپوزیت‌های با استحکام بالا استفاده شده است.

گرافن را ماده‌ی جادویی قرن بیست‌ویکم نامیده‌اند. این ماده که گفته می‌شود محکم‌ترین ماده مورد مطالعه تاکنون است، جای‌گزینی قابل برای سیلیکون است. گرافن ماده‌ای تخت و تک لایه متشکل از اتم‌های کربن است که در یک شبکه دوبعدی کندو مانند به هم متصل شده‌اند. این ماده دارای ضخامت یک اتم با ویژگی‌های بی‌نظیر است. گرافن با چگالی بالا، رسانایی نوری بالا، رسانایی الکتریکی و حرارتی بالا و قابل تنظیم و استحکام بی‌نظیر توجه کم‌سابقه‌ای را در تحقیقات بنیادی و کاربردی به خود جلب کرده است.

[1]Carbon Nano Tubes
[2]Graphene Sheets

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:

F. Yadegari, A. Karami Mohammadi, Vibration of axially moving two-layer graphene nonoribbon incorporating interlayer shear effect, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 9, pp. 414-420, 2016 (in Persian)

برای بررسی گرافن‌ها از روش‌هایی مانند شبیه‌سازی‌های دینامیک مولکولی، مکانیک مولکولی و مکانیک محیط‌های پیوسته استفاده می‌شود. به دلیل پیچیدگی و هزینه بالای شبیه‌سازی‌های مولکولی و دینامیکی، استفاده از تئوری‌های تحلیلی بیش‌تر مورد توجه محققان قرار گرفته است. در میان روش‌های تحلیلی، استفاده از تئوری غیر موضعی[1] ارینگن [1] به دلیل تطابق مناسب با نتایج آزمایشگاهی و تجربی کاربرد بیشتری پیدا کرده است. بر مبنای این تئوری تنش در یک نقطه تابعی از کرنش در تمام نقاط دیگر جسم است. محققان مختلفی از این روش برای مطالعه ورق‌های گرافنی یک و یا چندلایه استفاده کرده‌اند. در این روش‌ها معمولا هر لایه گرافن به صورت یک تیر غیرموضعی اویلربرنولی یا تیموشنکو و یا ورق غیرموضعی میندلین یا کیرشهف مدل می‌شود. انصاری و همکاران [2] ارتعاشات آزاد یک ورق مستطیلی تک‌لایه گرافن را به کمک روش غیرموضعی بررسی کردند. آن‌ها در این مطالعه از تئوری ورق میندلین برای مدل‌سازی استفاده کردند و فرکانس-های طبیعی را به دست آوردند.

در پاره‌ای از مطالعات، با در نظر گرفتن چند ورق گرافن بر روی هم رفتار ورق دو و یا چندلایه گرافن مورد بررسی قرار گرفته است. در گرافن‌های چندلایه، لایه‌های گرافن به وسیله پیوندهای ضعیف واندروالس به هم متصل شده‌اند. از این رو به راحتی می‌توانند بر روی هم بلغزند و تغییر شکل برشی رخ دهد [3]. پرادهان و همکار [4] به تحلیل ارتعاشات گرافن چندلایه قرار گرفته در یک ماتریس پلیمری پرداختند. ناظم نژاد و همکار [5] ارتعاشات آزاد نانونوارهای گرافنی چندلایه را با در نظر گرفتن اثر برش بین‌لایه‌ای مورد مطالعه قرار دادند.

از گرافن‌ها می‌توان در توسعه و طراحی حس‌گرهای با فن‌آوری پیشرفته استفاده کرد. حس‌گرهایی برای تشخیص زودهنگام بیماری‌های سخت، حس گرهای گاز، حس‌گرهای فشار، حس‌گرهای الکترومغناطیسی و بسیاری از موارد دیگر در دنیای مدرن جایگاه مناسبی را برای گرافن‌ها به وجود آورده اند. مرجع [6] راهنمای بسیار خوبی در مورد استفاده از گرافن در حس-گرهاست. در پژوهشی شن و همکاران [7] رفتار یک ورق تک لایه گرافن را به عنوان یک حس‌گر بررسی کردند. آن‌ها آثار ناشی از قرار گرفتن یک جرم در مرکز ورق غیرموضعی کیرشهف را مورد بررسی قرار دادند. در مطالعه‌ای دیگر ناتسوکی و همکاران [8] تغییرات فرکانس یک ورق مستطیلی دو لایه گرافن را با اجرام متصل مورد بررسی قرار دادند.

اجسام دارای حرکت محوری یک موضوع تحقیقاتی مهم در مهندسی می‌باشد. تاثیر حرکت محوری بر روی رفتارهای دینامیکی و ارتعاشی کابل، تیر، ورق و پوسته در ابعاد ماکرو توسط محققان مختلفی در سال‌های گذشته به طور گسترده مورد مطالعه قرار گرفته است اما در ابعاد میکرو و نانو این مطالعات بسیار محدود می‌باشد. نانولوله‌های کربنی و ورق‌های گرافنی به دلیل نسبت بالای مدول الاستیسیته به چگالی، در سرعت‌های بالا در معرض ناپایداری قرار دارند. لیم و همکاران [9] به بررسی رفتار دینامیکی نانوتیر دارای حرکت محوری با استفاده از روش غیرموضعی الاستیسیته پرداختند. آن‌ها ارتعاشات آزاد نانوتیر را تحت شرایط مرزی مختلف بررسی کردند. کیانی [10] ارتعاشات طولی، عرضی، پیچشی و هم‌چنین پایداری را برای یک نانولوله کربنی تک جداره دارای حرکت محوری بررسی کرد. وی در این مطالعه نانو لوله کربنی را به صورت یک تیر ریلی غیرموضعی مدل کرد. کیانی [11] در مطالعه دیگری ارتعاشات عرضی، طولی و پایداری را برای یک نانوتیر دارای حرکت محوری ساخته شده از مواد تابعی محوری با استفاده از روش غیرموضعی بررسی کرد. رفتار دینامیکی و ارتعاشی یک میکروتیر دارای حرکت محوری با استفاده از روش ماتریس سختی دینامیکی مورد مطالعه موحدیان [12] قرار گرفت.

به دلیل ضخامت فوق العاده پایین، لایه‌های گرافن صلبیت خمشی بسیار پایینی دارند و بنابراین برش بین‌لایه‌ای تاثیر مهمی در رفتار خمشی و ارتعاشی گرافن‌های چندلایه دارد. در این مطالعه، رفتار ارتعاشی و ناپایداری یک نوار گرافنی دولایه دارای حرکت محوری با در نظر گرفتن مدول برشی بین آن‌ها با استفاده از روش غیرموضعی الاستیسیته مورد بررسی قرار گرفته است. از آن‌جا که ضخامت لایه‌های گرافن بسیار کم است از تئوری تیر اویلر-برنولی برای مدل‌سازی سیستم استفاده شده است.

2- مدل‌سازی مسئله و استخراج معادلات سیستم

برای مدل‌سازی نوار گرافنی دولایه، نوار را به صورت دو تیر اویلر برنولی در نظر می‌گیریم که بر روی هم قرارگرفته‌اند و مدول برشی بین آن‌ها وجود دارد که مبین پیوندهای واندروالس است. در شکل 1، نوار گرافنی دولایه به طول l نشان داده شده است که با سرعت ثابت محوری v در حال حرکت می‌باشد.

ازجابه‌جایی طولی تیرها صرف‌نظر شده و فرض می‌شود که جابه‌جایی-های عرضی، w ، و چرخش، θ ، در هر دو تیر بالایی و پایینی با هم برابر باشند و هیچ‌گونه جدایی بین سطوح دو تیر هنگام حرکت و ارتعاش اتفاق نیفتد.

$$w_t(x,t) = w_b(x,t) = w(x,t) \tag{1}$$

$$\theta_t = \theta_b = \theta \tag{2}$$

با توجه به تغییر طول سطوح بالایی و پایینی لایه‌ها، میزان لغزش بین لایه‌ها نیز به صورت رابطه (3) تعریف می‌شود:

$$s = -h\theta = h\frac{\partial w}{\partial x} \tag{3}$$

در رابطه(3)، h ضخامت هر لایه گرافن می‌باشد.

تمامی جابه‌جایی‌ها و کرنش‌ها کوچک فرض می‌شوند، بنابراین معادلات حاکم بر مسئله به صورت خطی در نظر گرفته شده است.

2-1- استخراج معادلات

برای به دست آوردن معادلات سیستم از اصل همیلتون استفاده می‌شود.

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta V - \delta T)dt = 0 \tag{4}$$

در رابطه (4)،V انرژی پتانسیل، T انرژی جنبشی و t نشانگر زمان است. انرژی جنبشی سیستم به صورت رابطه (5) بیان می‌شود.

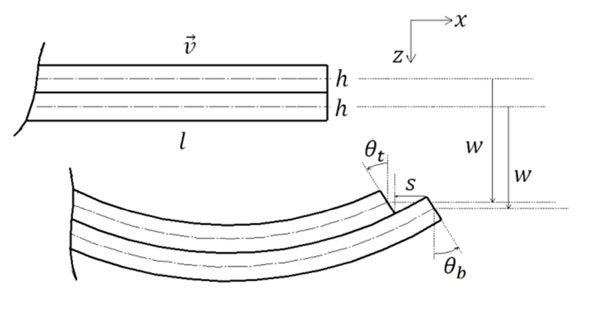

Fig. 1 Schematic of an axially moving two-layer graphene nanoribbon

شکل 1 شماتیک نوار گرافنی دولایه دارای حرکت محوری

[1] Nonlocal Theory

$$T = \int_0^l \rho A(\frac{\partial w}{\partial t} + v\frac{\partial w}{\partial x})^2 dx \tag{5}$$

که در آن، A مساحت سطح مقطع تیر، l طول تیر، ρ چگالی تیر و v سرعت محوری ثابت تیر است.

انرژی پتانسیل سیستم نیز به صورت رابطه (6) به دست می‌آید:

$$V = \frac{1}{2}\int_0^l M_t^{nl}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + M_b^{nl}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + K_{sh}s^2]dx \tag{6}$$

که در آن K_{sh} مدول برش بین‌لایه‌ای وM_t^{nl} و M_b^{nl} به ترتیب گشتاور خمشی غیرموضعی لایه بالایی و پایینی است.

با قرار دادن روابط (5) و (6) در رابطه (4)، معادله حاکم به صورت رابطه (7) حاصل می‌شود.

$$2\rho A\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2v\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t} + v^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + 2\frac{\partial^2 M_x^{nl}}{\partial x^2}$$
$$-h^2 K_{sh}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \tag{7}$$

2-2- تئوری الاستیسیته غیرموضعی

بر مبنای فرم دیفرانسیلی تئوری الاستیسیته غیرموضعی ارینگن رابطه تنش محوری غیر موضعی با تنش محوری موضعی به صورت رابطه (8) به دست می آید [1]:

$$\sigma_x^{nl} - (e_0 a)^2\frac{\partial^2 \sigma_x^{nl}}{\partial x^2} = \sigma_x^l = -Ez\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{8}$$

که در آن e_0 یک ثابت وابسته به ماده است که به‌وسیله آزمایش‌های تجربی تعیین می‌گردد، a نیز یک مشخصه طولی درونی (مانند طول پیوند اتم‌های کربن، پارامتر شبکه و یا فاصله ریزدانه‌ای) است. با ضرب رابطه (8) در z و انتگرال‌گیری روی سطح مقطع تیر، رابطه بین گشتاور خمشی موضعی و غیرموضعی به صورت رابطه (9) به دست می‌آید :

$$M_x^{nl} - (e_0 a)^2\frac{\partial^2 M_x^{nl}}{\partial x^2} = M_x^l = -EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{9}$$

در رابطه (9)، I ممان اینرسی سطح و E مدول الاستیسیته است که مقدار آن برای گرافن در حدود یک تراپاسکال است [5].

با جایگذاری رابطه (9) در معادله (7) معادله حرکت سیستم به صورت رابطه (10) حاصل می‌شود:

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2v\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t} + v^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - h^2 K_{sh}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$
$$-(e_0 a)^2[\rho A\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial t^2} + 2v\frac{\partial^4 w}{\partial x^3\partial t} + v^2\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\right)$$
$$-\frac{h^2}{2}K_{sh}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}] = 0 \tag{10}$$

شرایط مرزی برای حالت دو سر مفصل و یک‌سر گیردار- یک‌سرآزاد به ترتیب توسط رابطه‌های (11) و (12) تعیین می‌گردد.

$$w(0,t) = 0\ ;\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0,t) = 0$$
$$w(l,t) = 0\ ;\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(l,t) = 0 \tag{11}$$

$$w(0,t) = 0\ ;\ \frac{\partial w}{\partial x}(0,t) = 0$$
$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(l,t) = 0\ ;\qquad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(l,t) = 0 \tag{12}$$

به منظور بررسی عمومی‌تر معادله با در نظر گرفتن پارامترهای بی بعد به صورت روابط (13)، فرم بی‌بعد معادله (10) به صورت رابطه (14) حاصل می‌شود که در آن علامت ستاره برای سادگی حذف شده است.

$$\mathrm{w}^* = \frac{w}{l}\ ;\ \xi = \frac{x}{l}\ ;\ \tau = \frac{1}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}t\ ;\ \mu = \frac{e_0 a}{l}\ ;\ \lambda = \frac{l}{r}$$
$$\mathrm{r} = \sqrt{\frac{I}{A}}\ ;\ \eta = \frac{v}{C_L}\ ;C_{\mathrm{L}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}\ ;\ \Upsilon = \frac{h^2 K_{sh} l^2}{EI} \tag{13}$$

که در آن C_{L} سرعت انتشار موج در تیر و r شعاع ژیراسیون سطح مقطع تیر است.

$$\left(\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial\tau^2} + 2\eta\lambda\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial\xi\partial\tau} + (\lambda\eta)^2\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial\xi^2}\right) + \frac{\partial^4 \mathrm{w}}{\partial\xi^4} - \Upsilon\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial\xi^2}$$
$$-\mu^2\left(\frac{\partial^4 \mathrm{w}}{\partial\xi^2\partial\tau^2} + 2\eta\lambda\frac{\partial^4 \mathrm{w}}{\partial\xi^3\partial\tau} + (\lambda\eta)^2\frac{\partial^4 \mathrm{w}}{\partial\xi^4} - \frac{\Upsilon}{2}\frac{\partial^4 \mathrm{w}}{\partial\xi^4}\right) = 0 \tag{14}$$

شرایط مرزی بر حسب پارامترهای بی‌بعد، برای حالت دوسر مفصل به صورت رابطه (15):

$$\mathrm{w}(0,\tau) = 0\ ;\ \frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial\xi^2}(0,\tau) = 0$$
$$\mathrm{w}(1,\tau) = 0\ ;\ \frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial\xi^2}(1,\tau) = 0 \tag{15}$$

و برای حالت یک‌سر گیردار- یک‌سر آزاد به صورت رابطه (16) بیان می‌شوند:

$$\mathrm{w}(0,\tau) = 0\ ;\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial\xi}(0,\tau) = 0$$
$$\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial\xi^2}(1,\tau) = 0;\qquad \frac{\partial^3 \mathrm{w}}{\partial\xi^3}(1,\tau) = 0 \tag{16}$$

2- 3- روش حل

به منظور حل معادله بی‌بعد از روش گالرکین استفاده شده است، در این روش نیاز است توابع شکل مود مناسبی متناظر با جابه‌جایی‌های عرضی در نظر گرفته شود. از آن جا که با توجه به شرایط مرزی سیستم شکل مودها باید وابسته به سرعت نیز باشند، یافتن توابع ویژه‌ای که دقیقا شرایط مرزی طبیعی سیستم را ارضا نماید بسیار پیچیده است به همین دلیل از توابع شکل مود متناظر استاتیکی استفاده می‌شود. برای حالت دوسر مفصل این توابع به صورت رابطه (17) در نظر گرفته می‌شوند:

$$\phi_i(\xi) = \sqrt{2}\sin(i\pi\xi) \tag{17}$$

و برای شرط مرزی یک‌سرگیردار-یک‌سر آزاد توابعی به صورت رابطه (18) در نظر گرفته می‌شوند.

$$\phi_i(\xi) = \sinh(\beta_n\xi) - \sin(\beta_n\xi) - \pounds(\cosh(\beta_n\xi) - \cos(\beta_n\xi)) \tag{18}$$

که در آن:

$$\pounds = \frac{\sinh(\beta_n l) + \sin(\beta_n l)}{\cosh(\beta_n l) + \cos(\beta_n l)} \tag{19}$$

کاملا مشخص است که توابع فوق شرط تعامد را ارضا می‌کنند.

جابه‌جایی عرضی سیستم را به صورت گسسته رابطه (20) در نظر می‌گیریم:

$$\mathrm{w}(\xi,\tau) = \sum_{i=1}^{N}\phi_i(\xi)\overline{\mathrm{w}}_i(\tau) \tag{20}$$

که در آن N تعداد مودهای در نظر گرفته شده و $\overline{\mathrm{w}}_i(\tau)$ توابع زمانی نامعلوم هستند. با جایگذاری رابطه (20) در معادله بی‌بعد شده و ضرب کردن عبارت حاصل در $\phi_j(\xi)$ و انتگرال‌گیری در فاصله 0 تا 1، فرم ماتریسی معادله به صورت رابطه (21) به دست می‌آید.

$$\mathrm{M}\ddot{\overline{\mathrm{w}}} + \mathrm{G}\dot{\overline{\mathrm{w}}} + \mathrm{K}\overline{\mathrm{w}} = 0 \tag{21}$$

که در آن M ، G وK به ترتیب نشان‌دهنده ماتریس‌های جرم، میرایی و سختی

می‌باشند و به صورت روابط (22) تا (24) به دست می‌آیند.

$$[\mathrm{M}]_{ij} = \int_0^1 \left(\phi_i\phi_j + \mu^2\phi'_i\phi'_j\right)d\xi \tag{22}$$

$$[\mathrm{G}]_{ij} = 2\lambda\eta\int_0^1 \left(-\phi_i\phi'_j + \mu^2\phi''_i\phi'_j\right)d\xi \tag{23}$$

$$[\mathrm{K}]_{ij} = \int_0^1 \left(\left(\Upsilon-(\lambda\eta)^2\right)\phi'_i\phi'_j + \left(1-\mu^2(\lambda\eta)^2\right)d\xi \right. \\ \left. +\frac{\Upsilon\mu^2}{2}\right)\phi''_i\phi''_j \tag{24}$$

در روابط (22) تا (24) علامت $'$ نشان‌دهنده مشتق نسبت به متغیر بی‌بعد مکان می‌باشد.

جابه‌جایی دینامیکی در رابطه (21) را به صورت رابطه (25) در نظر می‌گیریم.

$$\bar{\mathrm{w}}(\tau) = \mathrm{W}e^{\alpha\tau} \tag{25}$$

که در آن W، بردار دامنه امواج انتشار یافته در نوار گرافنی دولایه دارای حرکت محوری و پارامتر α، مقادیر ویژه معادله (21) می‌باشد. از آن جا که معادله سیستم دارای عبارت ژیروسکوپی می‌باشد، مقادیر و بردارهای ویژه به صورت اعداد مختلط ظاهر می‌شوند. قسمت موهومی نشان‌دهنده فرکانس ارتعاشات و قسمت حقیقی بیان‌گر وضعیت پایداری سیستم و نیز میرایی می‌باشد.

$$\alpha = \mathrm{Re}[\alpha] + i\mathrm{Im}[\alpha] \tag{26}$$

برای محاسبه مقادیر ویژه، ماتریس‌ها و بردارهایی به صورت رابطه (27) تعریف می‌شوند.

$$[\mathrm{B}] = \begin{bmatrix} [0] & [\mathrm{M}] \\ [\mathrm{M}] & [G] \end{bmatrix}$$
$$[\mathrm{E}] = \begin{bmatrix} -[\mathrm{M}] & [0] \\ [0] & [\mathrm{K}] \end{bmatrix}$$
$$\{z\} = \begin{Bmatrix} \{\dot{w}\} \\ \{w\} \end{Bmatrix} \tag{27}$$

بنابراین مرتبه معادله (21) به صورت رابطه (28) کاهش می‌یابد.

$$[\mathrm{B}]\{\dot{z}\} + [\mathrm{E}]\{z\} = \{0\} \tag{28}$$

با قرار دادن روابط (27) در رابطه (28) مساله مقدار ویژه (29) حاصل می‌شود:

$$(\alpha[\mathrm{I}] - [\mathrm{Y}])\{\mathrm{W}\} = \{0\} \tag{29}$$

که در آن

$$[\mathrm{Y}] = -[\mathrm{B}]^{-1}[\mathrm{E}] \tag{30}$$

و I ماتریس همانی می‌باشد. با حل مساله مقدار ویژه (29) مقادیر ویژه مختلط سیستم و در نتیجه فرکانس‌های مختلط محاسبه می‌شوند.

3- نتایج

در یک سیستم پایستار، تنها ناپایداری دیورژانس اتفاق می‌افتد، در حالی که در سیستم‌های ناپایستار، بسته به میزان ناپایستاری سیستم ناپایداری‌های دیورژانس و فلاتر می‌توانند رخ دهند. برای یک سیستم پایستار فرکانس‌ها به صورت حقیقی و یا موهومی محض ظاهر می‌شوند. هنگامی که پایین‌ترین فرکانس از صفر عبور کند، سیستم ناپایدار می‌شود. در سیستم‌های ناپایستار فرکانس‌های سیستم می‌توانند به صورت حقیقی و یا مختلط ظاهر شوند. همانند سیستم های پایستار هنگامی که پایین‌ترین فرکانس از مبدا عبور کند و یا دو فرکانس مختلف بر هم منطبق شوند، ناپایداری رخ می‌دهد [13].

در شبیه سازی، مقادیر عددی برای پارامترهای لایه‌های گرافن به صورت b=2 nm (عرض تیر)، h=0.335 nm ،E=1TPa ،l=16 nm ، ρ=2260 kg/m^3، e_0a= 1.44 nm و تعداد مودها N=12 در نظر گرفته شده‌است.

ابتدا فرکانس‌های طبیعی برای نوار گرافن دولایه بدون حرکت محوری و با شرط مرزی یک‌سرگیردار- یک‌سرآزاد با طول‌های مختلف و سه مقدار مختلف مدول برشی، مطابق جدول 1 محاسبه شده و به منظور اعتبارسنجی حل، با نتایج مرجع [5] نیز که از روش شبیه‌سازی مولکولی به‌دست‌آمده مقایسه شده است که انطباق قابل قبولی را نشان می‌دهد. توضیحات بیشتری برای مقادیر در نظر گرفته شده برای مدول برشی در بخش 3-1 ارائه شده است. مشاهده می‌شود که با افزایش طول نوار، سختی سیستم کاهش یافته و در نتیجه فرکانس طبیعی سیستم کاهش می‌یابد. هم‌چنین افزایش مقدار مدول برشی موجب کاهش فرکانس طبیعی سیستم می‌شود.

همان‌طور که انتظار می‌رود برای سیستم با سرعت محوری، مقادیر ویژه به‌دست آمده تابعی از سرعت خواهند بود. در شکل‌های 2 و 3 نمودار تغییرات قسمت موهومی و حقیقی مقادیر ویژه برای مودهای اول و دوم با شرط مرزی یک‌سر گیردار- یک‌سر آزاد بر حسب پارامتر بی‌بعد سرعت رسم شده است. مشاهده می‌شود که مقادیر قسمت حقیقی همواره منفی بوده و سیستم با این مشخصات، در این سرعت‌ها ناپایدار نمی‌شود. تا قبل از سرعت η=0.012 هر دو مود سیستم ارتعاشی و میراست. در η=0.012 قسمت موهومی برای مود اول به صفر رسیده و نمودار قسمت حقیقی دو شاخه می‌شود. از سرعت η=0.012 تا η=0.037 مود اول فوق میرا و غیر ارتعاشی شده اما مود دوم هم‌چنان ارتعاشی و میراست. از سرعت η=0.037 تا η=0.084 نیز هر دو مود سیستم، ارتعاشی و میرا هستند. از سرعت η=0.084 تا انتهای محدوده رسم شده، مود اول هم‌چنان ارتعاشی و میراست اما مود دوم فوق میرا و غیر ارتعاشی می باشد.

جدول 1 فرکانس‌های طبیعی اول و دوم برای شرط مرزی یک‌سرگیردار-یک‌سر آزاد برای مقادیر مختلف مدول برشی

Table 1 1st and 2nd natural frequencies for clamped-free boundary condition and different shear modulus

طول (nm)	مطالعه حاضر (نوار دولایه یک‌سر گیردار-یک‌سر آزاد) K_{sh} = 4.6 GPa فرکانس اول (GHz)	K_{sh} = 4.6 GPa فرکانس دوم (GHz)	K_{sh} = 3.01 GPa فرکانس اول (GHz)	K_{sh} = 3.01 GPa فرکانس دوم (GHz)	K_{sh} = 0.25 GPa فرکانس اول (GHz)	K_{sh} = 0.25 GPa فرکانس دوم (GHz)	تیر ساندویچی سه لایه یک‌سر گیردار-یک‌سر آزاد [5] فرکانس اول (GHz)	تیر ساندویچی سه لایه یک‌سر گیردار-یک‌سر آزاد [5] فرکانس دوم (GHz)
12	6.92	52.08	7.20	48.87	7.88	45.56	11.23	45.53
13	5.68	44.19	6.00	42.50	6.69	39.34	9.81	40.84
14	4.74	38.93	5.06	37.32	5.75	34.30	8.66	36.94
15	3.98	34.61	4.30	33.06	5.00	30.16	7.71	33.63
16	3.37	31.00	3.68	29.52	4.38	26.71	6.92	30.81

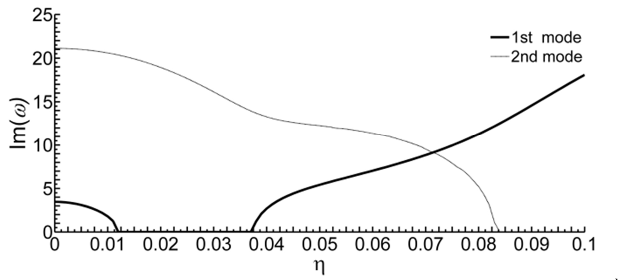

Fig. 2 Variation of the imaginary part of eigenvalues for the 1st and 2nd mode as a function of dimensionless axial velocity for clamped-free boundary condition

شکل 2 تغییرات قسمت موهومی مقادیر ویژه برای مود اول و دوم به صورت تابعی از سرعت محوری بی‌بعد برای شرط مرزی یک‌سر گیردار- یک‌سر آزاد

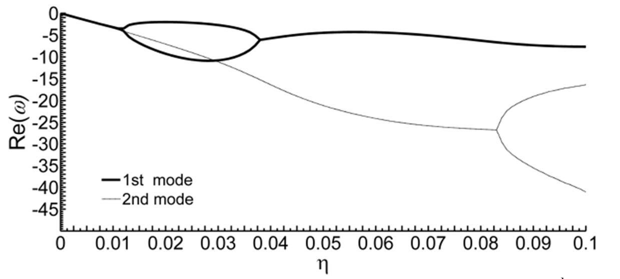

Fig. 3 Variation of the real part of eigenvalues for the 1st and 2nd mode as a function of dimensionless axial velocity for clamped-free boundary condition

شکل 3 تغییرات قسمت حقیقی مقادیر ویژه برای مود اول و دوم به صورت تابعی از سرعت محوری بی‌بعد برای شرط مرزی یک‌سر گیردار- یک‌سر آزاد

در شکل‌های 4 و 5 نمودار قسمت موهومی و حقیقی مقادیر ویژه برای مود-های اول و دوم برای شرط مرزی دو سر مفصل رسم شده است. مشاهده می شود که تا قبل از سرعت $\eta=0.024$ هر دو مود سیستم ارتعاشی و میرا هستند. در سرعت‌های بین $\eta=0.024$ تا $\eta=0.041$ قسمت موهومی برای مود اول صفر است و نمودار قسمت حقیقی دو شاخه و دارای مقادیر ویژه حقیقی با علامت‌های مخالف است. وجود یک مقدار ویژه مثبت نشان‌دهنده وجود ناپایداری دیورژانس در سیستم است. مود اول ناپایدار استاتیکی (غیر ارتعاشی) شده و تیر دچار کمانش می شود. البته مود دوم ارتعاشی و میراست اما ارتعاش روی حالت کمانش یافته رخ می‌دهد نه حول نقطه تعادل. از سرعت $\eta=0.041$ تا $\eta=0.0415$ نیز هر دو مود سیستم ارتعاشی و میرا هستند، اما از سرعت $\eta=0.0415$ تا انتهای محدوده رسم شده نمودار قسمت‌های موهومی و حقیقی برای مودهای اول و دوم بر هم منطبق می‌شوند. در واقع سیستم در این ناحیه دارای دو جفت مقدار ویژه مختلط مزدوج یکسان با قسمت‌های حقیقی مختلف‌العلامت است. این مبین ناپایداری فلاتر برای سیستم است که هر دو مود ناپایدار بوده و دست‌خوش ارتعاش واگرا حول حالت تعادل ناپایدار هستند [14].

3-1- بررسی تاثیر برش بین لایه‌ای

در گرافن‌های چندلایه، لایه‌های گرافن به‌وسیله پیوندهای ضعیف واندروالس به هم متصل شده‌اند. بنابراین اگر نیروی برشی وارد شده به لایه‌های گرافن بر این نیروی پیوندی غلبه کند، لایه‌ها بر روی هم می‌لغزند و انرژی کرنشی بین آن‌ها آزاد می‌شود. این موضوع می‌تواند موجب تغییر در رفتار حرکتی سیستم گردد. به همین دلیل در نظر گرفتن اثر برش بین‌لایه‌ای برای بررسی رفتار

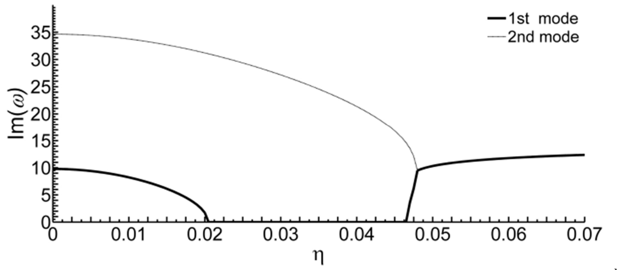

Fig. 4 Variation of the imaginary part of eigenvalues for the 1st and 2nd mode as a function of dimensionless axial velocity for pinned-pinned boundary condition

شکل 4 تغییرات قسمت موهومی مقادیر ویژه برای مود اول و دوم به صورت تابعی از سرعت محوری بی‌بعد برای شرط مرزی دوسرمفصل

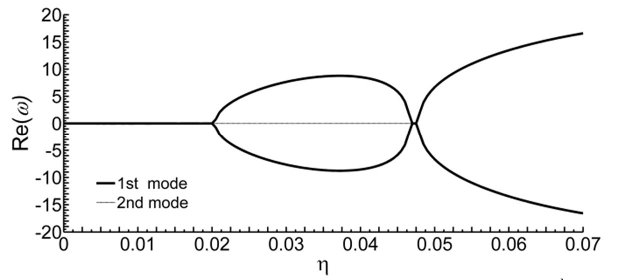

Fig. 5 Variation of the real part of eigenvalues for the 1st and 2nd mode as a function of dimensionless axial velocity for pinned-pinned boundary condition

شکل 5 تغییرات قسمت حقیقی مقادیر ویژه برای مود اول و دوم به صورت تابعی از سرعت محوری بی‌بعد برای شرط مرزی دوسرمفصل

گرافن‌های چندلایه اهمیت بالایی دارد. مدول برش بین لایه‌ای، K_{sh}، در واقع معیاری برای اندازه‌گیری میزان مقاومت لایه‌های گرافن در برابر لغزش بین سطوح می‌باشد. آزمایش‌های تجربی و شبیه‌سازی‌های مولکولی بسیاری برای بررسی رفتار برشی بین لایه‌ها انجام شده است. در این مطالعات تاثیر پارامترهای مختلفی هم‌چون الگوی چینش اتم‌ها [15]، دما [16]، تعداد لایه‌ها [17] و حفره‌های اتمی در تعیین این مدول برشی بررسی شده است. همان-طور که پیش‌تر اشاره شد برای گرافن‌های دولایه این مقدار از 0.25GPa تا 4.6GPa گزارش شده است [19,18,3]. باید توجه داشت که مدول برشی بین-لایه‌ای از لحاظ فیزیکی با مدول برشی خود گرافن متفاوت است و مقدار بسیار کم‌تری نسبت به آن دارد [3]. در شکل‌های 6 و 7 نمودار قسمت موهومی و حقیقی مقادیر ویژه مود اول برای مقادیر مختلف مدول برشی رسم شده است.

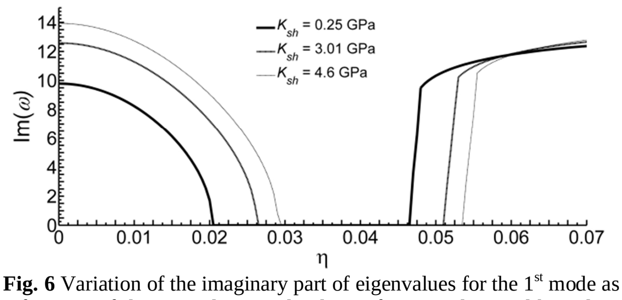

Fig. 6 Variation of the imaginary part of eigenvalues for the 1st mode as a function of dimensionless axial velocity for pinned-pinned boundary condition and different shear modulus

شکل 6 تغییرات قسمت موهومی مقادیر ویژه برای مود اول به صورت تابعی از سرعت محوری بی‌بعد برای شرط مرزی دوسر مفصل و مقادیر مختلف مدول برشی

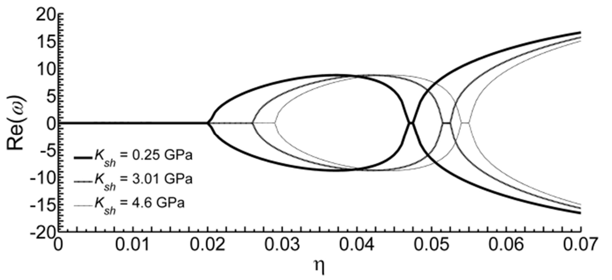

Fig. 7 Variation of the real part of eigenvalues for the 1st mode as a function of dimensionless axial velocity for pinned-pinned boundary condition and different shear modulus

شکل 7 تغییرات قسمت حقیقی مقادیر ویژه برای مود اول به صورت تابعی از سرعت محوری بی‌بعد برای شرط مرزی دوسر مفصل و مقادیر مختلف مدول برشی

همان‌طور که مشخص است با افزایش مدول برشی ناپایداری‌های دیورژانس و فلاتر مود اول در سرعت‌های بالاتری رخ می‌دهد. هم‌چنین افزایش مدول برشی موجب افزایش فرکانس طبیعی سیستم شده است. باید توجه داشت که شرایط مرزی تاثیر زیادی بر ارتعاشات و پایداری سیستم‌های پیوسته دارند، طبیعی است که با در نظر گرفتن شرایط مرزی یک‌سر گیردار-یک‌سر آزاد لایه‌ها امکان لغزش بیشتری بر روی هم نسبت به حالت دو سر مفصل دارند.

3-2- بررسی تاثیر پارامتر غیرموضعی

تئوری الاستیسیته غیرموضعی به منظور در نظر گرفتن آثار ریز مقیاس ارائه شد. این تئوری تنش در یک نقطه را تابعی از کرنش در تمام نقاط جسم در نظر می‌گیرد و پیوندی مناسب بین مدل اتمی دینامیک شبکه و آزمایش‌های تجربی برقرار می‌کند. در بررسی یک نقطه هنگامی که از اثر کرنش سایر نقاط چشم‌پوشی شود، همان مدل کلاسیک الاستیسیته به دست می‌آید. این کار معادل با صفر قرار دادن پارامتر غیرموضعی در معادلات می‌باشد. مقدار عددی پارامتر غیرموضعی توسط آزمایش‌های تجربی، شبیه‌سازی‌های مولکولی و یا به وسیله انطباق منحنی‌های انتشار موج با مدل اتمی دینامیک شبکه به دست می‌آید [20]. در گرافن‌های چندلایه برای پارامتر غیرموضعی با توجه به تعداد لایه‌ها مقادیر متفاوتی ارائه شده است [5].

در شکل‌های 8 و 9 نمودار قسمت‌های موهومی و حقیقی مقادیر ویژه مود اول به ازای سه مقدار مختلف برای پارامتر غیرموضعی رسم شده است. مشخص است با کاهش پارامتر غیرموضعی از 1.44 به 1 و سپس به 0 مود اول سیستم در سرعت‌های پایین‌تری ناپایدار می‌شود. هم‌چنین هنگامی که سیستم ساکن است، در نظر گرفتن پارامتر غیرموضعی موجب کاهش فرکانس بی‌بعد اول شده، در حالی که در سرعت‌های بالاتر تئوری کلاسیک الاستیسیته فرکانس کم‌تری را پیش‌بینی می‌کند.

همان‌طور که در شکل 9 مشخص است کاهش پارامتر غیرموضعی، موجب کاهش سرعت بحرانی ناپایداری‌های دیورژانس و فلاتر می‌گردد، اما تاثیر این موضوع بر روی سرعت بحرانی مربوط به ناپایداری فلاتر بسیار بیش-تر است. به عنوان مثال به ازای سرعت η =0.04 با در نظر گرفتن مقدار 1.44 برای پارامتر غیرموضعی سیستم دارای ناپایداری دیورژانس است، اما به ازای مقدار صفر ناپایداری سیستم از نوع فلاتر خواهد بود.

4- نتیجه‌گیری

در این مطالعه، به بررسی رفتار دینامیکی و ارتعاشی یک نوار گرافنی دولایه دارای حرکت محوری پرداخته شده است. لایه گرافن به صورت دو تیر اویلر-

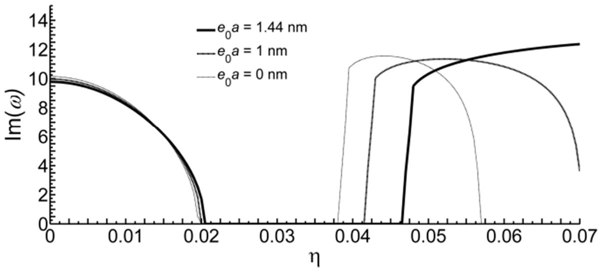

Fig. 8 Variation of the imaginary part of eigenvalues for the 1st mode as a function of dimensionless axial velocity for pinned-pinned boundary condition and different nonlocal parameter

شکل 8 تغییرات قسمت موهومی مقادیر ویژه برای مود اول به صورت تابعی از سرعت محوری بی‌بعد برای شرط مرزی دوسرمفصل و مقادیر مختلف پارامتر غیرموضعی

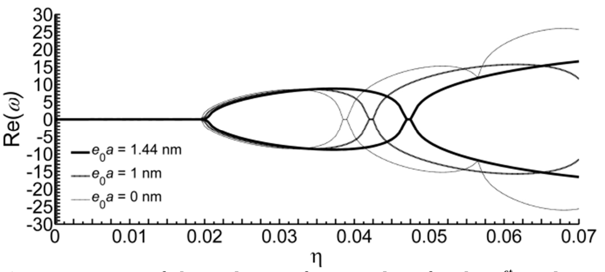

Fig. 9 Variation of the real part of eigenvalues for the 1st mode as a function of dimensionless axial velocity for pinned-pinned boundary condition and different nonlocal parameter

شکل 9 تغییرات قسمت حقیقی مقادیر ویژه برای مود اول به صورت تابعی از سرعت محوری بی‌بعد برای شرط مرزی دوسرمفصل و مقادیر مختلف پارامتر غیرموضعی

برنولی در نظر گرفته شده که بر روی هم قرار گرفته‌اند و جابه‌جایی عرضی نسبی آن‌ها صفر است. مدول برشی بین‌لایه‌ای برای مدل‌سازی پیوندهای واندروالس بین لایه‌ها در معادلات در نظر گرفته شده است. معادلات به کمک تئوری الاستیسیته غیرموضعی به دست آمده و از طریق روش گالرکین حل شده‌اند. برای شرط مرزی یک‌سرگیردار- یک‌سر آزاد نتایج با مقالات موجود مقایسه شده است. مشاهده می‌شود در حالتی که مدول برشی در حدود 0.25 گیگاپاسکال باشد نتایج نزدیک‌تری به دست می‌آید و با افزایش مدول برشی این اختلاف بیش‌تر می‌شود. هم‌چنین برای حالت دو سر مفصل نمودارهای تغییرات فرکانس‌های بی‌بعد به صورت تابعی از سرعت محوری بی‌بعد رسم شده و تاثیر تغییرات پارامتر غیرموضعی و مدول برشی بررسی شده است. این نتیجه حاصل می‌شود که با افزایش طول سختی سیستم و در نتیجه مقدار فرکانس طبیعی سیستم کاهش می‌یابد. برای شرط مرزی دو سر مفصل افزایش مدول برشی موجب افزایش فرکانس بی‌بعد سیستم و ناپایدار شدن سیستم در سرعت‌های بالاتر می‌شود. مشاهده می‌شود در حالتی که سیستم ساکن است، کاهش پارامتر غیرموضعی موجب افزایش فرکانس بی‌بعد سیستم می‌گردد، هم‌چنین کاهش پارامتر غیرموضعی موجب می‌شود سیستم در سرعت‌های پایین‌تری وارد ناپایداری گردد.

5- مراجع

[1] A. C. Eringen, On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves, *Journal of applied physics*, Vol. 54, No. 9, pp. 4703-4710, 1983.

[2] R. Ansari, S. Sahmani, B. Arash, Nonlocal plate model for free vibrations of single-layered graphene sheets, *Physics Letters A*, Vol. 375, No. 1, pp. 53-62, 2010.

[3] H. Rokni, W. Lu, A continuum model for the static pull in behavior of graphene of nanoribbon electrostatic actuators with interlayer

shear and surface energy effects, *Journal of applied physics*, Vol. 113, No. 15, pp. 153512, 2013.

[4] S. C. Pradhan, J. K. Phadikar, Small scale effect on vibration of embedded multilayered graphene sheets based on nonlocal continuum models, *Physics Letters A*, Vol. 373, No. 11, pp. 1062-1069, 2009.

[5] R. Nazemnezhad, S. Hosseini-Hashemi, Free vibration analysis of multi-layer grapheme nanoribbons incorporating shear effect via molecular dynamics simulations and nonlocal elasticity, *Physics Letters A*, Vol. 378, No. 44, pp. 3225-3232, 2014.

[6] Q. Wang, B. Arash, A review on applications of carbon nanotubes and graphenes as nano-resonator sensors, *Computational Materials Science*, Vol. 82, pp. 350-360, 2014.

[7] Z. B. Shen, H. L. Tang, D. K. Li, G. J. Tang, Vibration of single-layered graphene sheet-based nanomechanical sensor via nonlocal Kirchhoff plate theory, *Computational Materials Science*, Vol. 61, pp. 200-205, 2012.

[8] T. Natsuki, J. X. Shi, Q. Q. Ni, Vibration analysis of nano mechanical mass sensor using double-layered graphene sheets resonators, *Journal of Applied Physics*, Vol. 114, No. 9, pp. 73-78, 2013.

[9] C. W. Lim, C. Li, J. L. Yu, Dynamic behavior of axially moving nanobeams based on nonlocal elasticity approach, *Acta Mechanica Sinica*, Vol. 26, No. 5, pp. 755-765, 2010.

[10] K. Kiani, Longitudinal, transverse and torsional vibrations and stabilities of axially moving single-walled carbon nanotubes, *Current Applied Physics*, Vol. 13, No. 8, pp. 1650-1661, 2013.

[11] K. Kiani, Longitudinal and transverse instabilities of moving nanoscale beam-like structures made of functionally graded materials, *Composite Structures*, Vol. 107, pp. 610-619, 2014.

[12] K. Movahedian, Dynamic stiffness matrix method for axially moving micro-beam, *Interaction and Multiscale Mechanics*, Vol. 5, No. 4, pp. 385-397, 2012.

[13] Q. H. Zuo, H. L .Schreyer, Flutter and divergence instability of nonconservative beams and plates, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 33, No. 9, pp. 1355-1367, 1996.

[14] P. Hagedorn, A. Dasgupta, *Vibration and waves in continuous mechanical systems*, pp. 126,168, England: John Wiley, 2007.

[15] G. Savini, Y. J .Dappe, S. Öberg, J. C. Charlier, M. I. Katsnelson, A. Fasolino, Bending modes, elastic constants and mechanical stability of graphitic systems, *Carbon*, Vol. 49, No. 1, pp. 62-69, 2011.

[16] H. Conley, N. V. Lavrik, D. Prasai, K. I .Bolotin, Graphene bimetallic-like cantilevers: probing graphene/substrate interactions, *Nano letters*, Vol. 11, No. 11, pp. 4748-4752, 2011.

[17] J. B. Ma, L. Jiang, S. F . Asokanthan, Influence of surface effects on the pull-in instability of NEMS electrostatic switches, *Nanotechnology*, Vol. 21, No. 50, pp. 505708, 2010.

[18] Y. Liu, Z. Xu, Q . Zheng, The interlayer shear effect on graphene multilayer resonators, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 59, No. 8, pp. 1913-1622, 2011.

[19] Y. K. Shen, H. A. Wu, Interlayer shear effect on multilayer graphene subjected to bending, *Applied Physics Letters*, Vol. 100, No. 10, pp. 101909, 2012.

[20] Q. Wang, Wave propagation in carbon nanotubes via nonlocal continuum mechanics, *Journal of Applied Physics*, Vol. 98, No. 12, pp .124301, 2005.