مجله مهندسی مکانیک مدرس، اسفند 1395، دوره 16، شماره 12، ص‌ص 204-214

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

ارتعاشات چرخدنده‌های سیاره‌ای با موقعیت قرارگیری غیرمتقارن سیاره‌ها

علی شهابی[1]، فرهاد شیخ سامانی[2*]

1- کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان

2- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان

* کرمان، 133-76169، farhad.samani@uk.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 18 شهریور 1395

پذیرش: 10 آبان 1395

ارائه در سایت: 21 آذر 1395

کلید واژگان:

چرخدنده سیاره‌ای

فرکانس طبیعی

مد ارتعاشی

موقعیت قرارگیری غیر متقارن سیاره‌ها

چکیده

موقعیت قرارگیری سیاره‌های سیستم‌های چرخدنده‌ای سیاره‌ای به دو صورت سیاره‌ها با موقعیت قرارگیری یکسان و سیاره‌ها با موقعیت قرارگیری غیر یکسان نسبت به یکدیگر می‌باشد. پژوهش حاضر فرکانس‌های طبیعی و مدهای ارتعاشی سیستم سیاره‌ای ساده تک مرحله‌ای را با موقعیت قرارگیری غیر یکسان سیاره‌ها نسبت به یکدیگر بررسی می‌کند. سیستم دینامیکی مجموعه چرخدنده سیاره‌ای این پژوهش به صورت مجموعه‌ای از جرم و فنر مدل‌سازی شده است. هر یک از اجزاء شامل چرخدنده خورشیدی، حمل‌کننده سیاره‌ها، چرخدنده رینگ و سیاره‌ها دارای سه درجه آزادی هستند که به صورت اجسام صلب مدل شده‌اند. سختی یاتاقان‌ها و سختی ناشی از تغییر شکل دندانه چرخدنده‌ها به صورت فنرهای خطی شبیه‌سازی شده‌اند. به طور کلی، سیستم‌های سیاره‌ای دارای پنج مد ارتعاشی سیاره‌ای، دورانی، انتقالی، متمایز و غیر مقید می‌باشند. بر اساس نتایج، مد انتقالی در سیستم‌ها با موقعیت قرارگیری یکسان و غیر یکسان تعداد سیاره‌های زوج نسبت به یکدیگر، متفاوت می‌باشد و مدهای دورانی و سیاره‌ای برای هر دو سیستم دارای ویژگی‌های مشابهی می‌باشند. به‌نحویکه برای سیستم با موقعیت قرارگیری غیر یکسان تعداد سیاره‌های زوج نسبت به یکدیگر، فرکانس‌های طبیعی متناظر با مدهای انتقالی دارای گوناگونی یک می‌باشند. با فرد شدن تعداد سیاره‌ها و غیر یکسان شدن موقعیت قرارگیری آنها نسبت به یکدیگر، مدهای ارتعاشی دورانی و سیاره‌ای در سیستم به‌وجود می‌آیند و فرکانس‌های طبیعی متناظر با مدهای انتقالی در سیستم ظاهر نمی‌شوند. برای مدهای متمایز و غیر مقید موجود در سیستم با موقعیت قرارگیری غیر یکسان سیاره‌ها نسبت به یکدیگر، سیاره‌ها فقط دارای حرکت دورانی می‌باشند.

Vibrations of the Planetary Gear Sets with Unequally Spaced Planets

Ali Shahabi, Farhad Sheykh Samani*

Department of Mechanical Engineering, Shahid Bahonar University of Kerman, Kerman, Iran

* P.O.B. 76169-133, Kerman, Iran, farhad.samani@uk.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 08 September 2016
Accepted 31 October 2016
Available Online 11 December 2016

Keywords:
Planetary Gear
Natural Frequency
Vibration Mode
Unequally Spaced Planets

ABSTRACT

The position of the planets for the planetary gear systems are in two forms of equally and unequally spaced. This paper investigates free vibration of the planetary gear with unequally spaced planets. The planetary gear set of this study is modeled as a set of lumped masses and springs. Each component such as sun gear, carrier, ring gear and planets possesses three degrees of freedom and is considered as rigid body. Bearing and mesh stiffness are modeled in the form of linear springs. Generally, planet, rotational, translational, distinct and degenerate modes are five vibration modes of the planetary gear systems. The results show that the translational mode for the system with numbers of even equally and unequally spaced planets, is different and rotational and translational modes have the same characteristics for both systems. For the system with numbers of even unequally spaced planets, the natural frequencies of the translational modes have a multiplicity one. When the numbers of the planets of the system are odd and the position of them is unequally spaced, the rotational and planet modes are generated and the natural frequencies of the translational modes do not appear. For the distinct and degenerate modes of the system with unequally spaced planets, the planets only have the rotational motion.

1- مقدمه

چرخدنده سیاره‌ای ساده تک مرحله‌ای دارای یک چرخدنده خورشیدی، یک بازو یا حمل‌کننده سیاره‌ها، یک چرخدنده رینگ و چند (معمولاً سه) سیاره می‌باشد. سیاره‌ها در سیستم‌های سیاره‌ای معمولاً دارای موقعیت قرارگیری یکسانی نسبت به یکدیگر می‌باشند[1]. همچنین موقعیت قرارگیری سیاره‌ها می‌تواند نسبت به یکدیگر نیز یکسان نباشد[2]. به دلیل بازدهی نسبتاً بالا، کاهش سرعت‌های زیاد در حجم‌های محدود، انتقال قدرت بالا و حرکت‌های ترکیبی چندگانه، موارد استفاده از گیربکس‌های سیاره‌ای در فضاپیماها، خودروها، توربین‌های بادی و سایر سیستم‌های انتقال در حال افزایش است. در طراحی چرخدنده‌های سیاره‌ای سختی بین چرخدنده‌ها[3]، سختی

[1] Equally Spaced Planets

[2] Unequally Spaced Planets

[3] Mesh Stiffnesses

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:

A. Shahabi, F. Sheykh Samani, Vibrations of the Planetary Gear Sets with Unequally Spaced Planets, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 12, pp. 204-214, 2016 (in Persian)

یاتاقان‌ها[1]، جرم و ممان اینرسی از جمله عوامل تاثیرگذار به شمار می‌آیند.

کهرمان [2،1] پژوهش‌هایی در زمینه‌های گوناگون چرخدنده سیاره‌ای از جمله بررسی فرکانس‌های طبیعی و مدهای ارتعاشی متناظر با هر فرکانس انجام و با ارائه فرمول‌های تئوری سعی در بدست آوردن فرکانس‌های طبیعی چرخدنده سیاره‌ای در حالت دورانی محض داشت [3]. لین و پارکر [4] به بررسی معادلات حرکت، فرکانس‌های طبیعی و انواع مدهای ارتعاشی سیستم‌های سیاره‌ای پرداختند. لین و پارکر همچنین تاثیر پارامترهای مهم مد نظر در طراحی سیستم‌های سیاره‌ای را بر فرکانس‌های طبیعی و مدهای ارتعاشی پژوهش کردند [5]. پارکر و همکاران دینامیک غیر خطی یک جفت چرخدنده ساده را بررسی کردند [6]. تحقیق و بررسی ویژگی‌های ارتعاش سیستم‌های سیاره‌ای مرکب دورانی توسط کهرمان انجام شد [7]. ژرامیتشیوسکی و تراژوسکی متغیر بودن سختی بین چرخدنده‌های موجود در سیستم سیاره‌ای را در مدل خود لحاظ کردند [8]. کهرمان و همکاران تاثیر انعطاف پذیری اعضای چرخدنده سیاره‌ای را بر رفتار دینامیکی سیستم پژوهش کردند [9]. بررسی عوامل غیر خطی‌کننده دینامیک سیستم سیاره‌ای توسط سان و ها انجام شد [10]. صادقی و خسروی [11] به بررسی پارامترها و متغیرهای مختلف فرایند طراحی پارامتری چرخدنده‌های ساده برای مدل‌سازی پرداختند. هوانگ و همکاران دینامیک چرخدنده سیاره‌ای تک مرحله‌ای را با کمک روش المان محدود تحقیق کردند [12]. کیم و همکاران [13] دینامیک غیر خطی چرخدنده سیاره‌ای را با در نظر گرفتن زاویه‌های فشار و ضرایب تماس متغیر با زمان بررسی کردند. ثقفی و همکاران [14] یک سیستم کنترل فعال ارتعاشات چرخدنده-یاتاقان را پیشنهاد دادند و سعی در به حداقل رساندن اثرات نامطلوب اغتشاشات و پارامترهای طراحی ناخواسته بر ارتعاشات سیستم داشتند. سان و همکاران [15] ارتعاشات سیستم سیاره‌ای چند مرحله‌ای را پژوهش کردند. بررسی دینامیک غیر خطی و بهینه‌سازی عملکرد سیستم سیاره‌ای تک مرحله‌ای توسط شاکری و همکاران انجام شد [16]. ثقفی و فرشیدیان‌فر [17] به بررسی کنترل و حذف رفتار آشوبی از طریق آنالیز تحلیلی ملنیکوف پرداختند. لی و همکاران [18] با مدل‌سازی غیر خطی سیستم سیاره‌ای، تاثیر ترک و شکاف‌های موجود در حمل‌کننده سیاره را بر روی رفتار دینامیکی چرخدنده سیاره‌ای تحقیق و پژوهش کردند. بررسی رفتار دینامیکی سیستم چرخدنده موجود در یک توربین بادی را بیائوی و همکاران انجام دادند [19]. ژیانگ و همکاران دینامیک غیر خطی یک جفت چرخدنده ساده را با در نظر گرفتن متغیر بودن سختی بین چرخدنده‌ها با زمان پژوهش کردند [20]. شهابی و شیخ‌سامانی نیز انواع مدهای ارتعاشی موجود در سیستم سیاره‌ای ساده تک مرحله‌ای را بررسی و آنها را به پنج نوع مد مختلف تقسیم‌بندی کردند [21].

در بررسی فرکانس‌های طبیعی و انواع مدهای ارتعاشی سیستم‌های سیاره‌ای مطابق پژوهش‌هایی که تاکنون صورت گرفته است، موقعیت قرارگیری سیاره‌ها نسبت به یکدیگر متقارن در نظر گرفته شده است. در پژوهش حاضر به بررسی کامل ویژگی‌های فرکانس‌های طبیعی و سه مد ارتعاشی دورانی[2]، انتقالی[3] و سیاره‌ای[4] موجود در سیستم سیاره‌ای ساده تک مرحله‌ای با در نظر گرفتن تعداد سیاره‌های زوج و فرد با موقعیت قرارگیری غیر یکسان سیاره‌ها نسبت به یکدیگر (سیستم نامتقارن) پرداخته می‌شود. در این پژوهش همچنین علاوه بر سه مد ارتعاشی ذکر شده، دو مد ارتعاشی متمایز[5] و غیر مقید[6] برای مدل‌های دورانی با تعداد سیاره‌های زوج و فرد با موقعیت قرارگیری یکسان و غیر یکسان سیاره‌ها نسبت به یکدیگر نیز معرفی می‌گردند.

2- مدل‌سازی سیستم چرخدنده‌ای

شکل 1، مدل دو بعدی و مختصات استفاده شده در چرخدنده سیاره‌ای ساده تک مرحله‌ای را نشان می‌دهد. چرخدنده خورشیدی، حمل‌کننده سیاره‌ها، چرخدنده رینگ و سیاره‌ها به صورت صلب فرض شده‌اند. هرکدام از این اجزاء دارای سه درجه آزادی (دو درجه آزادی حرکت انتقالی و یک درجه آزادی حرکت دورانی) هستند، لذا تمام مجموعه سیاره‌ای نیز دارای $3(3+N)$ درجه آزادی خواهد بود که N تعداد کل سیاره‌ها را نشان می‌دهد. سختی انتقالی و سختی دورانی یاتاقان‌ها به صورت فنرهای خطی در جهت‌های انتقالی x، y و جهت محیطی u مدل شده‌اند. مختصات انتقالی چرخدنده خورشیدی (s)، حمل‌کننده سیاره‌ها (c) و چرخدنده رینگ (r) با x_j و y_j نمایش داده می‌شوند که $j=s,c,r$. مختصات انتقالی مرکز سیاره‌ها با مختصات شعاعی و مماسی ξ_n و η_n معرفی شده‌اند که n، شماره سیاره nام است و از 1 تا N متغیر است. مختصات دورانی اجزاء سیستم به صورت $u_j=r_j\theta_j, j=s,c,r,1,\dots,N$ بیان می‌شوند که θ_j زاویه دوران هر جزء است و برای چرخدنده خورشیدی، چرخدنده رینگ و سیاره‌ها r شعاع مبنا این چرخدنده‌ها است. r برای حمل‌کننده سیاره‌ها، شعاع دایره‌ای در نظر گرفته می‌شود که از مرکز سیاره‌ها عبور می‌کند. ψ_n در شکل 1، موقعیت قرارگیری سیاره nام را نشان می‌دهد که مقدارش بستگی به چرخش بردار یکه i دارد، به گونه‌ای که $\psi_1=0$.

شکل 2، مدل دینامیکی چرخدنده خورشیدی و چرخدنده رینگ با سیاره nام که توسط فنرهای خطی مدل شده‌اند را نمایش می‌دهد. همچنین فنرهای مدل شده در راستای خط عمل قرار گرفته‌اند.

در شکل 2، زاویه فشار، خطای انتقال استاتیک و سختی بین چرخدنده خورشیدی و سیاره nام و همچنین زاویه فشار، خطای انتقال استاتیک و سختی بین چرخدنده رینگ و سیاره nام به ترتیب با α_s، e_{sn}، k_{sn} و α_r، e_{rn}، k_{rn} نشان داده شده‌اند. در مدل دینامیکی چرخدنده خورشیدی و

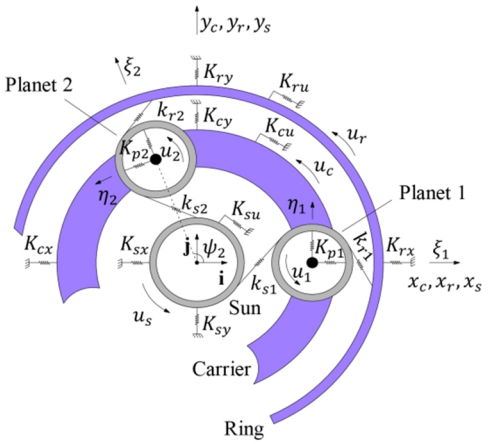


Fig. 1 Lumped parameter 2D model of the single-stage spur planetary gear and system coordinates

شکل 1 مدل دو بعدی چرخدنده سیاره‌ای ساده تک مرحله‌ای و مختصات سیستم

[1] Bearing Stiffnesses
[2] Rotational Mode
[3] Translational Mode
[4] Planet Mode
[5] Distinct Mode
[6] Degenerate Mode

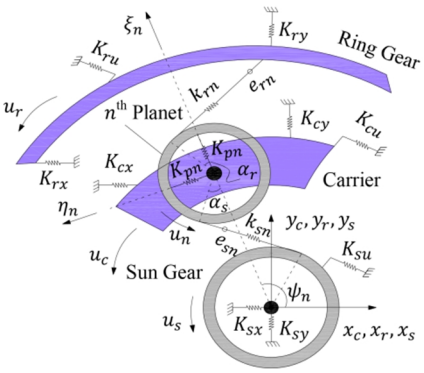


Fig. 2 Mesh of the nth planet, ring and sun gears

شکل 2 شبکه‌بندی سیاره nام، چرخدنده‌های رینگ و خورشیدی

چرخدنده رینگ با سیاره nام (شکل 2)، K_{sx}، K_{sy}، K_{rx}، K_{ry} و K_{cx}، K_{cy} به ترتیب سختی‌های انتقالی یاتاقان‌های خورشیدی، رینگ و حمل‌کننده سیاره‌ها در جهت‌های انتقالی x و y هستند. همچنین، سختی دورانی یاتاقان‌های خورشیدی، رینگ و حمل‌کننده سیاره‌ها در جهت دورانی u به ترتیب با K_{su}، K_{ru} و K_{cu} مشخص شده‌اند. سختی انتقالی یاتاقان سیاره nام در جهت‌های x و y نیز با K_{pn} نمایش داده شده است. معادلات حرکت سیاره nام بدون در نظر گرفتن میرایی در جهت‌های ξ، η و u، مطابق زیر خواهند بود:

$$m_n\ddot{\xi}_n - k_{sn}[\cos\psi_{sn}\, y_s - \sin\psi_{sn}\, x_s - \sin\alpha_s\, \xi_n - \cos\alpha_s\, \eta_n + u_s + u_n + e_{sn}]\sin\alpha_s + k_{rn}[\cos\psi_{rn}\, y_r - \sin\psi_{rn}\, x_r + \sin\alpha_r\, \xi_n - \cos\alpha_r\, \eta_n + u_r - u_n + e_{rn}] \times \sin\alpha_r - K_{pn}[\sin\psi_n\, y_c + \cos\psi_n\, x_c - \xi_n] = 0 \quad (1)$$

$$m_n\ddot{\eta}_n - k_{sn}[\cos\psi_{sn}\, y_s - \sin\psi_{sn}\, x_s - \sin\alpha_s\, \xi_n - \cos\alpha_s\, \eta_n + u_s + u_n + e_{sn}]\cos\alpha_s - k_{rn}[\cos\psi_{rn}\, y_r - \sin\psi_{rn}\, x_r + \sin\alpha_r\, \xi_n - \cos\alpha_r\, \eta_n + u_r - u_n + e_{rn}] \times \cos\alpha_r - K_{pn}[\cos\psi_n\, y_c - \sin\psi_n\, x_c - \eta_n + u_c] = 0 \quad (2)$$

$$\frac{I_n}{r_n^2}\ddot{u}_n + k_{sn}[\cos\psi_{sn}\, y_s - \sin\psi_{sn}\, x_s - \sin\alpha_s\, \xi_n - \cos\alpha_s\, \eta_n + u_s + u_n + e_{sn}] - k_{rn}[\cos\psi_{rn}\, y_r - \sin\psi_{rn}\, x_r + \sin\alpha_r\, \xi_n - \cos\alpha_r\, \eta_n + u_r - u_n + e_{rn}] = 0 \quad (3)$$

به طور مشابه معادلات حرکت حمل‌کننده سیاره‌ها، چرخدنده رینگ و چرخدنده خورشیدی عبارتند از:

حمل‌کننده سیاره‌ها:

$$m_c\ddot{x}_c + \sum_{n=1}^{N} K_{pn}\{[\sin\psi_n\, y_c + \cos\psi_n\, x_c - \xi_n]\cos\psi_n - [\cos\psi_n\, y_c - \sin\psi_n\, x_c - \eta_n + u_c]\sin\psi_n\} + K_{cx}x_c = 0 \quad (4)$$

$$m_c\ddot{y}_c + \sum_{n=1}^{N} K_{pn}\{[\sin\psi_n\, y_c + \cos\psi_n\, x_c - \xi_n]\sin\psi_n - [\cos\psi_n\, y_c - \sin\psi_n\, x_c - \eta_n + u_c]\cos\psi_n\} + K_{cy}y_c = 0 \quad (5)$$

$$\frac{I_c}{r_c^2}\ddot{u}_c + \sum_{n=1}^{N} K_{pn}[\cos\psi_n\, y_c - \sin\psi_n\, x_c - \eta_n + u_c] + K_{cu}u_c = \frac{T_c}{r_c} \quad (6)$$

چرخدنده رینگ:

$$m_r\ddot{x}_r - \sum_{n=1}^{N}\{k_{rn}[\cos\psi_{rn}\, y_r - \sin\psi_{rn}\, x_r + \sin\alpha_r\, \xi_n - \cos\alpha_r\, \eta_n + u_r - u_n + e_{rn}]\sin\psi_{rn}\} + K_{rx}x_r = 0 \quad (7)$$

$$m_r\ddot{y}_r + \sum_{n=1}^{N}\{k_{rn}[\cos\psi_{rn}\, y_r - \sin\psi_{rn}\, x_r + \sin\alpha_r\, \xi_n - \cos\alpha_r\, \eta_n + u_r - u_n + e_{rn}]\cos\psi_{rn}\} + K_{ry}y_r = 0 \quad (8)$$

$$\frac{I_r}{r_r^2}\ddot{u}_r + \sum_{n=1}^{N}\{k_{rn}[\cos\psi_{rn}\, y_r - \sin\psi_{rn}\, x_r + \sin\alpha_r\, \xi_n - \cos\alpha_r\, \eta_n + u_r - u_n + e_{rn}]\} + K_{ru}u_r = \frac{T_r}{r_r} \quad (9)$$

چرخدنده خورشیدی:

$$m_s\ddot{x}_s - \sum_{n=1}^{N}\{k_{sn}[\cos\psi_{sn}\, y_s - \sin\psi_{sn}\, x_s - \sin\alpha_s\, \xi_n - \cos\alpha_s\, \eta_n + u_s + u_n + e_{sn}]\sin\psi_{sn}\} + K_{sx}x_s = 0 \quad (10)$$

$$m_s\ddot{y}_s + \sum_{n=1}^{N}\{k_{sn}[\cos\psi_{sn}\, y_s - \sin\psi_{sn}\, x_s - \sin\alpha_s\, \xi_n - \cos\alpha_s\, \eta_n + u_s + u_n + e_{sn}]\cos\psi_{sn}\} + K_{sy}y_s = 0 \quad (11)$$

$$\frac{I_s}{r_s^2}\ddot{u}_s + \sum_{n=1}^{N}\{k_{sn}[\cos\psi_{sn}\, y_s - \sin\psi_{sn}\, x_s - \sin\alpha_s\, \xi_n - \cos\alpha_s\, \eta_n + u_s + u_n + e_{sn}]\} + K_{su}u_s = \frac{T_s}{r_s} \quad (12)$$

که I و m ممان اینرسی و جرم یاتاقان‌ها را نمایش می‌دهند. همچنین $\psi_{sn} = \psi_n - \alpha_s$ و $\psi_{rn} = \psi_n + \alpha_r$ و T نیز گشتاور اعمالی به شفت‌های ورودی و خروجی سیستم سیاره‌ای را نمایش می‌دهد. معادله حرکت چرخدنده سیاره‌ای با N سیاره به فرم ماتریسی زیر نمایش داده می‌شود:

$$\mathrm{M}\ddot{\mathrm{q}}(t) + [\mathrm{K}_m(t) + \mathrm{K}_b]\mathrm{q}(t) = \mathrm{T}(t) + \mathrm{F}(t) \quad (13)$$

در معادله (13) M، q، K_m و K_b به ترتیب بیانگر ماتریس قطری اینرسی، بردار مختصات عمومی، ماتریس متقارن سختی بین چرخدنده‌ها و ماتریس قطری سختی یاتاقان‌ها هستند. $\mathrm{T}(t)$ و $\mathrm{F}(t)$ نیز بردار گشتاور و بردار نیروی خارجی اعمال شده به سیستم سیاره‌ای را نشان می‌دهند. چرخدنده‌های سیاره‌ای در حالت کلی توسط دو مدل دورانی یا دورانی-انتقالی شبیه‌سازی می‌شوند. در مدل‌های دورانی، از درجه آزادی اجزای سیستم‌ها در راستاهای انتقالی صرف‌نظر می‌شود. در مدل‌های دورانی-انتقالی، درجهٔ آزادی تمام اجزای سیستم‌ها در راستاهای دورانی و انتقالی لحاظ می‌گردد. اساس کار سیستم‌های سیاره‌ای به‌نحوی است که از بین چرخدنده‌های خورشیدی، رینگ و حمل‌کننده سیاره‌ها، ورودی و خروجی سیستم تعیین می‌گردند. در این پژوهش چرخدنده خورشیدی، حمل‌کننده سیاره‌ها و چرخدنده رینگ به ترتیب به عنوان توان ورودی، توان خروجی و ثابت در نظر گرفته شده‌اند.

3- فرکانس‌های طبیعی و مدهای ارتعاشی

به منظور بررسی ارتعاش آزاد چرخدنده سیاره‌ای، ترم‌های $\mathrm{T}(t)$ و $\mathrm{F}(t)$ از معادله (13) حذف می‌شوند و معادله (13) و مساله مقدار ویژه آن به ترتیب به صورت زیر نمایش داده می‌شوند:

$$\mathrm{M}\ddot{\mathrm{q}} + (\mathrm{K}_b + \mathrm{K}_m)\mathrm{q} = 0 \quad (14)$$

$$[-\omega_i^2\mathrm{M} + (\mathrm{K}_b + \mathrm{K}_m)]\varphi_i = 0 \quad (15)$$

در رابطه (15)، $\omega_i, i = 1, \dots, 3(3+N)$ بیانگر فرکانس‌های طبیعی است و $\varphi_i = [\mathrm{P}_c, \mathrm{P}_r, \mathrm{P}_s, \mathrm{P}_1, \dots, \mathrm{P}_N]^{\mathrm{T}}$ بردار مد ارتعاشی متناظر با هر فرکانس طبیعی را نشان می‌دهد به‌نحویکه $\mathrm{P}_j = [x_j, y_j, u_j]^{\mathrm{T}}, j = c, r, s$ و $\mathrm{P}_n = [\xi_n, \eta_n, u_n]^{\mathrm{T}}, n = 1, \dots, N$. با بسط دادن رابطه (15) به $N + 3$ رابطه مربوط به هر یاتاقان سیستم سیاره‌ای می‌رسیم [4]:

$$\left(\mathrm{K}_{cb}+\sum_{n=1}^{N}\mathrm{K}_{c1}^{n}-\omega_i^2\mathrm{M}_c\right)\mathrm{P}_c+\sum_{n=1}^{N}\mathrm{K}_{c2}^{n}\,\mathrm{P}_n=0 \tag{16}$$

$$\left(\mathrm{K}_{rb}+\sum_{n=1}^{N}\mathrm{K}_{r1}^{n}-\omega_i^2\mathrm{M}_r\right)\mathrm{P}_r+\sum_{n=1}^{N}\mathrm{K}_{r2}^{n}\,\mathrm{P}_n=0 \tag{17}$$

$$\left(\mathrm{K}_{sb}+\sum_{n=1}^{N}\mathrm{K}_{s1}^{n}-\omega_i^2\mathrm{M}_s\right)\mathrm{P}_s+\sum_{n=1}^{N}\mathrm{K}_{s2}^{n}\,\mathrm{P}_n=0 \tag{18}$$

$$(\mathrm{K}_{c2}^{n})^{\mathrm{T}}\mathrm{P}_c-(\mathrm{K}_{r2}^{n})^{\mathrm{T}}\mathrm{P}_r+(\mathrm{K}_{s2}^{n})^{\mathrm{T}}\mathrm{P}_s+\left(\mathrm{K}_{pp}-\omega_i^2\mathrm{M}_P\right)\mathrm{P}_n=0 \tag{19}$$

به طور کلی در سیستم‌های سیاره‌ای پنج مد ارتعاشی دورانی، انتقالی، سیاره‌ای، متمایز و غیر مقید ظاهر می‌شوند. در بخش‌های آتی ویژگی‌های این مدهای ارتعاشی بررسی می‌شوند.

3-1- مد سیاره‌ای

برای سیستم سیاره‌ای با موقعیت قرارگیری یکسان تعداد سیاره‌های زوج و فرد نسبت به یکدیگر، مد سیاره‌ای دارای ویژگی‌های زیر می‌باشد [4]:

1- این نوع مد زمانی ظاهر می‌شود که تعداد کل سیاره‌ها بیشتر از سه عدد باشند ($N>3$).

2- سه فرکانس طبیعی متناظر با این مد، $N-3$ بار تکرار می‌شوند.

3- در این مد به جز سیاره‌ها سایر اجزاء سیستم هیچ حرکتی ندارند. بنابراین:

$$\mathrm{P}_j=[0,0,0]^{\mathrm{T}},j=c,r,s \tag{20}$$

لذا بردار مد سیاره‌ای به شکل زیر بدست می‌آید:

$$\varphi_i=[0,0,0,\mathrm{P}_1,\mathrm{P}_1,\dots,w_N\mathrm{P}_1]^{\mathrm{T}},\mathrm{P}_n=w_n\mathrm{P}_1 \tag{21}$$

در رابطه (21)، w_n یک ضریب اسکالر می‌باشد (به عنوان مثال $w_1=1$). لذا می‌توان گفت که در مد سیاره‌ای با وارد شدن یک ضریب اسکالر در شکل حرکت سیاره اول، به شکل حرکت سیارهnام می‌رسیم. با توجه به ماتریس سختی K_{pn} موجود در مرجع [4]، برای سیستم با موقعیت قرارگیری غیر یکسان تعداد سیاره‌های زوج و فرد نسبت به یکدیگر با جایگذاری روابط (20) و (21) در روابط (16-19)، روابط (16-19) را می‌توان به ترتیب به صورت زیر ساده کرد:

$$\sum_{n=1}^{N}K_{pn}\begin{bmatrix}\frac{-\mathrm{s}2\psi_n}{2\mathrm{s}\psi_n} & \mathrm{s}\psi_n & 0\\ -\mathrm{s}\psi_n & \frac{-\mathrm{s}2\psi_n}{2\mathrm{s}\psi_n} & 0\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w_n\xi_1\\ w_n\eta_1\\ w_nu_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \tag{22}$$

$$\sum_{n=1}^{N}k_{rn}\times\begin{bmatrix}-\mathrm{s}\psi_{rn}\mathrm{s}\alpha_r & \mathrm{s}\psi_{rn}\frac{\mathrm{s}2\alpha_r}{2\mathrm{s}\alpha_r} & \mathrm{s}\psi_{rn}\\ \frac{\mathrm{s}2\psi_{rn}}{2\mathrm{s}\psi_{rn}}\mathrm{s}\alpha_r & -\frac{\mathrm{s}2\psi_{rn}}{2\mathrm{s}\psi_{rn}}\frac{\mathrm{s}2\alpha_r}{2\mathrm{s}\alpha_r} & -\frac{\mathrm{s}2\psi_{rn}}{2\mathrm{s}\psi_{rn}}\\ \mathrm{s}\alpha_r & -\frac{\mathrm{s}2\alpha_r}{2\mathrm{s}\alpha_r} & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w_n\xi_1\\ w_n\eta_1\\ w_nu_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\sum_{n=1}^{N}k_{sn}\times\begin{bmatrix}\mathrm{s}\psi_{sn}\mathrm{s}\alpha_s & \mathrm{s}\psi_{sn}\frac{\mathrm{s}2\alpha_s}{2\mathrm{s}\alpha_s} & -\mathrm{s}\psi_{sn}\\ -\frac{\mathrm{s}2\psi_{sn}}{2\mathrm{s}\psi_{sn}}\mathrm{s}\alpha_s & -\frac{\mathrm{s}2\psi_{sn}}{2\mathrm{s}\psi_{sn}}\frac{\mathrm{s}2\alpha_s}{2\mathrm{s}\alpha_s} & \frac{\mathrm{s}2\psi_{sn}}{2\mathrm{s}\psi_{sn}}\\ -\mathrm{s}\alpha_s & -\frac{\mathrm{s}2\alpha_r}{2\mathrm{s}\alpha_r} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w_n\xi_1\\ w_n\eta_1\\ w_nu_1\end{bmatrix} \tag{23}$$

$$=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \tag{24}$$

$$\mathrm{K}_{pp}^{n}-\omega_i^2\begin{bmatrix}m_n & 0 & 0\\ 0 & m_n & 0\\ 0 & 0 & \frac{I_n}{r_n^2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w_n\xi_1\\ w_n\eta_1\\ w_nu_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \tag{25}$$

که s بیانگر سینوس زاویه‌های مربوطه می‌باشد. به عنوان نمونه برای سیستم با تعداد سیاره‌های زوج با موقعیت‌های قرارگیری غیر یکسان (صفر، 80، 180 و 260 درجه) نسبت به یکدیگر، روابط (22-24) همانند سیستم با موقعیت قرارگیری یکسان سیاره‌ها نسبت به یکدیگر مطابق زیر ساده می‌شوند:

$$\sum_{n=1}^{N}w_n\mathrm{s}\psi_n=0,\sum_{n=1}^{N}w_n=0,\sum_{n=1}^{N}w_n\frac{\mathrm{s}2\psi_n}{2\mathrm{s}\psi_n}=0 \tag{26}$$

با توجه به مستقل بودن رابطه (25) از زاویه قرارگیری سیاره‌ها (ψ) و بر اساس روابط (26)، با غیر یکسان شدن موقعیت قرارگیری تعداد زوج و فرد سیاره‌ها همانند سیستم با موقعیت قرارگیری یکسان تعداد زوج و فرد سیاره‌ها نسبت به یکدیگر، مد ارتعاشی سیاره‌ای برای هر دو سیستم یکسان می‌باشد. لذا برای هر یک از سه مساله مقدار ویژه موجود در رابطه (25) یعنی ω_i، $[w_n\xi_1,w_n\eta_1,w_nu_1]^{\mathrm{T}}$، $N-3$ بردار مد سیاره‌ای متمایز بر اساس بردار مد سیاره‌ای موجود در رابطه (21) بدست می‌آید.

3-2- مد دورانی

مد دورانی سیستم‌های سیاره‌ای با موقعیت قرارگیری یکسان تعداد سیاره‌های زوج و فرد نسبت به یکدیگر دارای ویژگی‌های زیر می‌باشد [4]:

1- اگر M گوناگونی فرکانس‌های طبیعی سیستم سیاره‌ای را نشان دهد، فرکانس‌های طبیعی متناظر با این مد فقط یک بار ظاهر می‌شوند ($M=1$). به عبارت دیگر این فرکانس‌ها متمایز هستند و دارای تکرار نمی‌باشند.

2- در این مد جابجایی حمل‌کننده سیاره‌ها، چرخدنده رینگ و چرخدنده خورشیدی در جهت‌های انتقالی x و y به سمت صفر میل می‌کند:

$$\mathrm{P}_j=[0,0,u_j]^{\mathrm{T}},j=c,r,s \tag{27}$$

3- همچنین در این مد تمامی سیاره‌ها نیز به یک شکل حرکت می‌کنند:

$$\mathrm{P}_1=\mathrm{P}_2\dots=\mathrm{P}_N=[\xi_1,\eta_1,u_1]^{\mathrm{T}} \tag{28}$$

بنابراین بردار مد دورانی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\varphi_i=[\mathrm{P}_c,\mathrm{P}_r,\mathrm{P}_s,\mathrm{P}_1,\dots,\mathrm{P}_1]^{\mathrm{T}},\ \mathrm{P}_n=\mathrm{P}_1 \tag{29}$$

موقعیت قرارگیری سیاره‌های مورد بحث این پژوهش برای سیستم با موقعیت قرارگیری غیریکسان تعداد سیاره‌های زوج و فرد با فرض $\psi_1=0$، به صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند:

$$\psi_1=0,\psi_{n+N/2}=\psi_n+\pi\rightarrow$$

تعداد سیاره‌های زوج

$$\sum_{n=1}^{N}\mathrm{s}\psi_n=0 \tag{30-الف}$$

تعداد سیاره‌های فرد

$$\psi_1=0,\sum_{n=1}^{N}\mathrm{s}\psi_n=0 \tag{30-ب}$$

با جایگذاری روابط (27) و (28) در رابطه (16) و بر اساس روابط (30)، رابطه (16) به شکل زیر ساده می‌شود:

$$\begin{bmatrix}\sum_{n=1}^{N}K_{pn}+K_{cx} & 0 & 0\\ 0 & \sum_{n=1}^{N}K_{pn}+K_{cy} & 0\\ 0 & 0 & \sum_{n=1}^{N}K_{pn}+K_{cu}\end{bmatrix} -\omega_i^2\begin{bmatrix}m_c & 0 & 0\\ 0 & m_c & 0\\ 0 & 0 & \frac{I_c}{r_c^2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\u_c\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & -\sum_{n=1}^{N}k_{pn} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1\\ \eta_1\\ u_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \tag{31}$$

با توجه به رابطه (31)، فقط یک رابطه مستقل از زاویه قرارگیری سیاره‌ها نسبت به یکدیگر، از رابطه (16) باقی می‌ماند. همچنین با جایگذاری روابط (27) و (28) در روابط (17-19) و بر اساس روابط (30)، روابط (17-19) مربوط به سیستم با موقعیت غیر یکسان سیاره‌ها نسبت به یکدیگر نیز همانند سیستم با موقعیت یکسان سیاره‌ها نسبت به یکدیگر ساده می‌شوند. به‌نحویکه از هر کدام از روابط (17) و (18)، یک رابطه و از رابطه (19) سه رابطه باقی می‌مانند. بنابراین برای سیستم سیاره‌ای با موقعیت قرارگیری غیر یکسان تعداد سیاره‌های زوج و فرد نسبت به یکدیگر همانند سیستم با موقعیت قرارگیری یکسان تعداد سیاره‌های زوج و فرد نسبت به یکدیگر، روابط (16-19) نیز به شش مساله مقدار ویژه مستقل از زاویه قرارگیری سیاره‌ها نسبت به یکدیگر کاهش پیدا می‌کنند. حل این شش مساله مقدار ویژه، شش جواب ویژه $\omega_i, [u_c, u_r, u_s, \xi_1, \eta_1, u_1]^{\mathrm{T}}$ را به وجود می‌آورند. این شش جواب ویژه، شش بردار مد دورانی φ_i را براساس رابطه (29) نتیجه می‌دهند. لازم به ذکر است که در سیستم‌های سیاره‌ای اگر موقعیت قرارگیری غیر یکسان سیاره‌های زوج و فرد نسبت به یکدیگر به‌نحوی باشد که روابط (30) را برقرار نکند، آنگاه مد دورانی به‌وجود نمی‌آید.

3-3- مد انتقالی

ویژگی‌های مد انتقالی سیستم سیاره‌ای با موقعیت یکسان تعداد سیاره‌های زوج و فرد نسبت به یکدیگر به صورت زیر می‌باشند [4]:

1- فرکانس‌های طبیعی متناظر با این مد، غیر مقید هستند و دو بار تکرار می‌شوند ($M = 2$). بنابراین دو بردار مد ارتعاشی متناظر با هر فرکانس طبیعی ω_i وجود دارد:

$$\overline{\varphi}_i = [\overline{\mathrm{P}}_c, \overline{\mathrm{P}}_r, \overline{\mathrm{P}}_s, \overline{\mathrm{P}}_1, \dots, \overline{\mathrm{P}}_N]^{\mathrm{T}}, \varphi_i = [\mathrm{P}_c, \mathrm{P}_r, \mathrm{P}_s, \mathrm{P}_1, \dots, \mathrm{P}_N]^{\mathrm{T}}$$

2- حمل‌کننده سیاره‌ها، چرخدنده رینگ و چرخدنده خورشیدی در این مد بدون دوران هستند و فقط در راستاهای انتقالی x و y جابجا می‌شوند:

$$\overline{\mathrm{P}}_j = [-y_j, x_j, 0]^{\mathrm{T}}, \mathrm{P}_j = [x_j, y_j, 0]^{\mathrm{T}}, j = c, r, s \tag{32}$$

3- جابجایی سیاره‌ها در این مد به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{bmatrix}\mathrm{P}_n\\ \overline{\mathrm{P}}_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\psi_n \mathrm{I} & \sin\psi_n \mathrm{I}\\ -\sin\psi_n \mathrm{I} & \cos\psi_n \mathrm{I}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{P}_1\\ \overline{\mathrm{P}}_1\end{bmatrix},$$
$$\mathrm{P}_n = [\xi_n, \eta_n, u_n]^{\mathrm{T}}, \overline{\mathrm{P}}_n = [\overline{\xi}_n, \overline{\eta}_n, \overline{u}_n]^{\mathrm{T}} \tag{33}$$

در سیستم با تعداد سیاره‌های زوج با موقعیت قرارگیری غیر یکسان نسبت به یکدیگر، برای سه سیاره دلخواه n', n'' و n'''ام رابطه (33) را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\boldsymbol{\varphi}_i = [\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{P}_1, w_2\mathbf{P}_2, \dots, w_N\mathbf{P}_1]^T,$$
$$\begin{bmatrix}\xi_{n'}\\ \eta_{n'}\\ u_{n'}\end{bmatrix} = \frac{\mathrm{s}2\psi_{n'}}{2\mathrm{s}\psi_{n'}}\begin{bmatrix}\xi_1\\ \eta_1\\ u_1\end{bmatrix} + \sin\psi_{n'}\begin{bmatrix}\overline{\xi}_1\\ \overline{\eta}_1\\ \overline{u}_1\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}\xi_{n''}\\ \eta_{n''}\\ u_{n''}\end{bmatrix} = \frac{\mathrm{s}2\psi_{n''}}{2\mathrm{s}\psi_{n''}}\begin{bmatrix}\xi_1\\ \eta_1\\ u_1\end{bmatrix} + \sin\psi_{n''}\begin{bmatrix}\overline{\xi}_1\\ \overline{\eta}_1\\ \overline{u}_1\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}\xi_{n'''}\\ \eta_{n'''}\\ u_{n'''}\end{bmatrix} = \frac{\mathrm{s}2\psi_{n'''}}{2\mathrm{s}\psi_{n'''}}\begin{bmatrix}\xi_1\\ \eta_1\\ u_1\end{bmatrix} + \sin\psi_{n'''}\begin{bmatrix}\overline{\xi}_1\\ \overline{\eta}_1\\ \overline{u}_1\end{bmatrix} \tag{34}$$

با حذف $[\xi_1, \eta_1, u_1]^{\mathrm{T}}$ و $[\overline{\xi}_1, \overline{\eta}_1, \overline{u}_1]^{\mathrm{T}}$ از روابط (34)، رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\sin(\psi_{n''} - \psi_{n'''})\begin{bmatrix}\xi_{n'}\\ \eta_{n'}\\ u_{n'}\end{bmatrix} + \sin(\psi_{n'''} - \psi_{n'})\begin{bmatrix}\xi_{n''}\\ \eta_{n''}\\ u_{n''}\end{bmatrix} + \sin(\psi_{n'} - \psi_{n''})\begin{bmatrix}\xi_{n'''}\\ \eta_{n'''}\\ u_{n'''}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}, n', n'', n''' = 1, \dots, N \tag{35}$$

جابجایی سیاره nام می‌تواند به صورت ترکیب خطی از جابجایی‌های دو سیاره دلخواه بیان شود. به عنوان نمونه بر اساس جابجایی‌های سیاره‌های اول و دوم، جابجایی سیاره‌های سیستم در وضعیتی که سیاره‌های زوج نسبت به یکدیگر موقعیت قرارگیری غیر یکسانی داشته باشند، به صورت زیر می‌باشند:

$$\begin{bmatrix}\xi_n\\ \eta_n\\ u_n\end{bmatrix} = [\sin(\psi_2 - \psi_n)\begin{bmatrix}\xi_1\\ \eta_1\\ u_1\end{bmatrix} + \sin\psi_n\begin{bmatrix}\xi_2\\ \eta_2\\ u_2\end{bmatrix}]/\sin\psi_2 \tag{36}$$

مختصات ξ_n، η_n و u_n برای $n = 1, \dots, N$ به شش مختصه مستقل u_1، η_1، ξ_1 و u_2، η_2، ξ_2 بر اساس رابطه (36) تبدیل می‌شوند. با توجه به اینکه مدهای انتقالی و دورانی در سیستم‌های سیاره‌ای با موقعیت قرارگیری یکسان سیاره‌ها نسبت به یکدیگر مستقل از هم نیستند [4]، لذا با جایگذاری روابط (36) و (32) برای $n = 1$ و $n = 2$ در رابطه (16) و با توجه به رابطه (30- الف)، رابطه (16) به شکل زیر ساده می‌شود:

$$\begin{bmatrix}\sum_{n=1}^{N}K_{pn}+K_{cx} & 0 & 0\\ 0 & \sum_{n=1}^{N}K_{pn}+K_{cy} & 0\\ 0 & 0 & \sum_{n=1}^{N}K_{pn}+K_{cu}\end{bmatrix} -\omega_i^2\begin{bmatrix}m_c & 0 & 0\\ 0 & m_c & 0\\ 0 & 0 & \frac{I_c}{r_c^2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_c\\ y_c\\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{\mathrm{s}2\psi_1}{2\mathrm{s}\psi_1} & 0 & 0\\ 0 & \frac{\mathrm{s}2\psi_1}{2\mathrm{s}\psi_1} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1\\ \eta_1\\ u_1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\sin\psi_2 & 0 & 0\\ 0 & -\sin\psi_2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_2\\ \eta_2\\ u_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \tag{37}$$

با توجه به رابطه (37)، فقط دو معادله مستقل از هم و وابسته به زاویه قرارگیری سیاره‌ها نسبت به یکدیگر از رابطه (16) باقی می‌مانند. به طور مشابه با جایگذاری روابط (36) و (32) در روابط (17-19) و با توجه به رابطه (30- الف)، دو معادله از هر کدام از روابط (17) و (18) و شش معادله نیز از رابطه (19) باقی می‌مانند. این دوازده معادله مستقل از یکدیگر و وابسته به زاویه قرارگیری سیاره‌ها نسبت به یکدیگر، مساله مقدار ویژه با بردار ویژه $\varphi_i = [x_c, y_c, x_r, y_r, x_s, y_s, \xi_1, \eta_1, u_1, \xi_2, \eta_2, u_2]^{\mathrm{T}}$ را برای فرکانس طبیعی ω_i به وجود می‌آورند. بنابراین دوازده فرکانس طبیعی متمایز (با

گوناگونی یک ($M = 1$)) در سیستم سیاره‌ای ساده تک مرحله‌ای برای تعداد زوج سیاره‌های متفاوت ($N \geq 3$) با موقعیت قرارگیری غیر یکسان نسبت به یکدیگر وجود دارند. مدهای ارتعاشی متناظر با این دوازده فرکانس از نوع انتقالی می‌باشند که با مدهای ارتعاشی سیستم با موقعیت قرارگیری یکسان تعدا زوج سیاره‌ها نسبت به یکدیگر [4] متفاوت می‌باشند. با فرد شدن تعداد سیاره‌ها و با توجه به موقعیت قرارگیری غیر یکسان آنها نسبت به یکدیگر (رابطه (30- ب))، مجموع کسینوس زاویه‌های قرارگیری غیر یکسان سیاره‌ها نسبت به یکدیگر مخالف صفر می‌شود:

$$\psi_1 = 0, \sum_{n=1}^{N} \sin\psi_n = 0 \rightarrow \sum_{n=1}^{N} \cos\psi_n = \frac{\sin 2\psi_n}{2\sin\psi_n} \neq 0 \tag{38}$$

بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که مد انتقالی در سیستم با تعداد سیاره‌های فرد با موقعیت قرارگیری غیر یکسان نسبت به یکدیگر ظاهر نمی‌شود.

3-4- مد متمایز و مد غیر مقید

در مدل‌های دورانی سیستم‌های ساده تک مرحله‌ای دو مد ارتعاشی متمایز و غیر مقید نیز می‌توانند در سیستم‌ها با موقعیت قرارگیری یکسان و غیر یکسان تعداد سیاره‌های زوج و فرد نسبت به یکدیگر ظاهر شوند. در مد متمایز تمام اجزاء سیستم دارای دوران هستند و هیچ حرکت انتقالی ندارند. لذا بردار مد ارتعاشی متمایز مطابق زیر می‌باشد:

$$\mathrm{P}_j = [0, 0, u_j]^{\mathrm{T}}, j = c, r, s, 1, \dots, N \tag{39}$$

در مد ارتعاشی غیر مقید فقط سیاره‌های سیستم دارای حرکت دورانی می‌باشند و سایر اجزاء سیستم هیچ حرکتی ندارند. بنابراین بردار مد غیر مقید نیز مطابق زیر می‌باشد:

$$\mathrm{P}_j = [0, 0, u_j]^{\mathrm{T}}, j = 1, \dots, N \tag{40}$$

4- اعتبارسنجی

نتایج اعتبارسنجی فرکانس‌های طبیعی سیستم سیاره‌ای با مرجع [4] در جدول 1 آورده شده‌اند. به منظور اعتبارسنجی، سیستم سیاره‌ای با چهار سیاره (21 درجه آزادی) با موقعیت قرارگیری غیر یکسان (صفر، 80، 180 و 260 درجه) نسبت به یکدیگر انتخاب شده است. با توجه به متفاوت بودن فرکانس‌های طبیعی متناظر با مدهای انتقالی برای دو سیستم با موقعیت قرارگیری یکسان و غیر یکسان تعداد سیاره‌های زوج نسبت به یکدیگر، اعتبارسنجی فرکانس‌های طبیعی متناظر با مدهای انتقالی در جدول 1 آورده نشده‌اند. همچنین، پارامترهای هندسی و انواع سختی‌های سیستم با موقعیت قرارگیری غیر یکسان سیاره‌ها نسبت به یکدیگر نیز مشابه مرجع [4] و مطابق جدول 2 در نظر گرفته شده‌اند.

5- نتایج عددی

به منظور بررسی فرکانس‌های طبیعی و انواع مدهای ارتعاشی متناظر با هر فرکانس طبیعی، سیستم سیاره‌ای ساده تک مرحله‌ای، دارای مدل دورانی با چهار سیاره (21 درجه آزادی) با موقعیت قرارگیری غیر یکسان صفر، 80، 180 و 260 درجه نسبت به یکدیگر انتخاب شده است. با استفاده از پارامترهای هندسی جدول 2، برای سیستم با موقعیت قرارگیری یکسان [4] و غیر یکسان سیاره‌ها نسبت به یکدیگر، نتایج مطابق جدول 3 می‌باشند.

مطابق جدول 3، نه فرکانس طبیعی مشابه برای سیستم سیاره‌ای با موقعیت یکسان و غیر یکسان سیاره‌ها نسبت به یکدیگر وجود دارند که مد ارتعاشی متناظر با این نه فرکانس از نوع دورانی و سیاره‌ای می‌باشند. به‌نحویکه شش فرکانس طبیعی دارای گوناگونی یک و سه فرکانس طبیعی دارای گوناگونی $N - 3$ به ترتیب دارای مد دورانی و سیاره‌ای می‌باشند. برای سیستم با موقعیت قرارگیری یکسان سیاره‌ها نسبت به یکدیگر، شش فرکانس طبیعی غیر مقید با گوناگونی دو ظاهر می‌شوند که مد متناظر با این دوازده فرکانس از نوع انتقالی می‌باشد. با توجه به نتایج جدول 3، با غیر یکسان شدن موقعیت قرارگیری چهار سیاره نسبت به یکدیگر، دوازده فرکانس طبیعی متمایز با گوناگونی یک ظاهر می‌شوند که دارای مد انتقالی می‌باشند و این دوازده فرکانس با دوازده فرکانس طبیعی سیستم با موقعیت یکسان سیاره‌ها نسبت به یکدیگر متفاوت می‌باشند. در واقع با غیر یکسان شدن موقعیت قرارگیری تعداد سیاره‌های زوج نسبت به یکدیگر، متفاوت شدن فرکانس‌هایی نتیجه می‌شود که مد متناظر با آن فرکانس‌ها از نوع انتقالی می‌باشد.

در شکل‌های 3 و 4، مدهای ارتعاشی برای دو سیستم با موقعیت قرارگیری یکسان و غیر یکسان چهار سیاره نسبت به یکدیگر آورده شده‌اند که خط چین‌ها وضعیت اولیه و خطوط توپر وضعیت نهایی را نمایش می‌دهند. همچنین به منظور واضح‌تر شدن شکل‌های 3 و 4، جابجایی‌های حمل‌کننده سیاره‌ها و چرخدنده رینگ نمایش داده نشده‌اند. مطابق شکل‌های 3 و 4، مدهای ارتعاشی دورانی (شکل‌های 3(a) و 4(a)) و سیاره‌ای (شکل‌های 3(b) و 4(b)) برای سیستم‌ها با موقعیت یکسان و غیر یکسان سیاره‌ها نسبت به یکدیگر مشابه می‌باشند. همچنین مدهای ارتعاشی انتقالی برای دو سیستم با موقعیت یکسان و غیر یکسان سیاره‌ها نسبت به یکدیگر متفاوت می‌باشند (شکل‌های 3(c)، 3(d)، 4(c) و 4(d)). همانطور که در شکل‌های 3(c) و 3(d) ملاحظه می‌شود برای سیستم با موقعیت یکسان سیاره‌ها نسبت به یکدیگر، فرکانس طبیعی دوم ($\omega_2 = 727$ Hz) دارای گوناگونی دو می‌باشد و دو مد انتقالی متناظر با آن متفاوت می‌باشند. با غیریکسان شدن موقعیت قرارگیری چهار سیاره نسبت به یکدیگر بر خلاف سیستم با موقعیت یکسان آنها نسبت به یکدیگر، فرکانس‌های طبیعی متناظر با مدهای ارتعاشی انتقالی دارای گوناگونی یک می‌شوند. به‌نحویکه مد انتقالی متناظر با هر فرکانس طبیعی نیز متفاوت می‌شود (شکل‌های 4(c) و 4(d)).

در شکل 5، نحوه تغییر فرکانس‌های طبیعی و انواع مدهای ارتعاشی سیستم با موقعیت قرارگیری غیر یکسان چهار سیاره (21 درجه آزادی) با توجه به نتایج جدول 3 آورده شده‌اند. مطابق شکل 5 و جدول 3،

جدول 1 فرکانس‌های طبیعی این پژوهش و مرجع [4]

Table 1 Natural frequencies of this study and Ref. [4]

فرکانس طبیعی (Hz)	این پژوهش	مرجع [4]	خطا (%)	نوع مد ارتعاشی
اول	$\omega_1 = 0$	$\omega_1 = 0$	0	دورانی
ششم	$\omega_6 = 1537.3$	$\omega_6 = 1536.6$	0.04	دورانی
هفتم	$\omega_7 = 1809$	$\omega_7 = 1808.2$	0.04	سیاره‌ای
دهم	$\omega_{10} = 1971.5$	$\omega_{10} = 1970.6$	0.04	دورانی
سیزدهم	$\omega_{13} = 2626.9$	$\omega_{13} = 2625.7$	0.04	دورانی
چهاردهم	$\omega_{14} = 5966.7$	$\omega_{14} = 5963.8$	0.04	سیاره‌ای
پانزدهم	$\omega_{15} = 6985.2$	$\omega_{15} = 6981.7$	0.05	سیاره‌ای
هجدهم	$\omega_{18} = 7777.4$	$\omega_{18} = 7773.6$	0.04	دورانی
بیست و یکم	$\omega_{21} = 13077.7$	$\omega_{21} = 13071.1$	0.05	دورانی

جدول 2 پارامترهای هندسی سیستم چرخدنده ساده تک مرحله‌ای

Table 2 Numerical parameters of the single-stage spur planetary gear

	سیاره mام	چرخدنده خورشیدی	چرخدنده رینگ	حمل‌کننده سیاره‌ها
I/r^2 (kg)	0.61	0.39	3	6.29
جرم (kg)	0.66	0.4	2.35	5.43
قطر پایه (mm)	100.3	77.4	275	176.8
سختی انتقالی یاتاقان‌ها (N/m)	10^8	10^8	10^8	10^8
سختی دورانی یاتاقان‌ها (N/m)	—	0	10^9	0
	بین چرخدنده خورشیدی و سیاره mام		بین چرخدنده رینگ و سیاره mام	
سختی (N/m)	5×10^8		5×10^8	
زاویه فشار (درجه)	24.6		24.6	

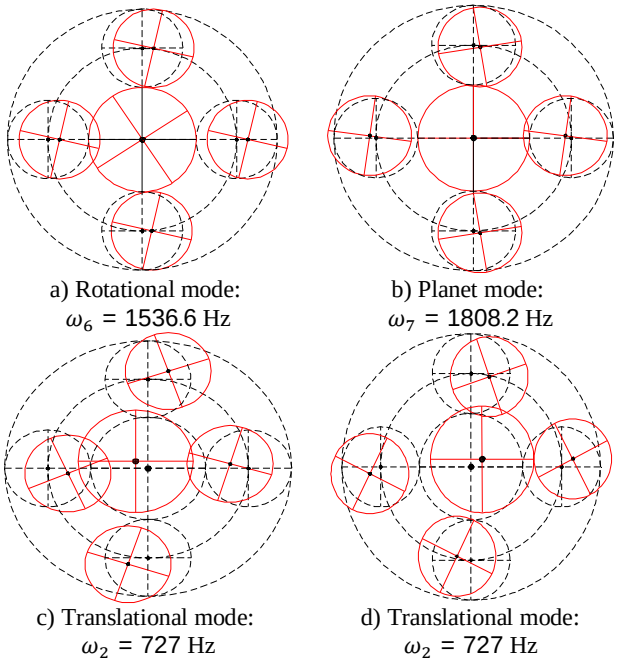


Fig. 3 Types of vibration modes of the system with four equally spaced planets

شکل 3 انواع مدهای ارتعاشی سیستم با موقعیت قرارگیری یکسان چهار سیاره نسبت به یکدیگر

فرکانس‌های طبیعی متناظر با مدهای انتقالی متفاوت می‌باشند (دوازده فرکانس طبیعی متمایز). همچنین شش فرکانس طبیعی متمایز وجود دارند که مد ارتعاشی متناظر با هر کدام از این شش فرکانس از نوع دورانی می‌باشد و سه فرکانس طبیعی با گوناگونی یک نیز دارای مد سیاره‌ای می‌باشند.

برای سیستم دورانی با موقعیت قرارگیری غیر یکسان شش سیاره نسبت به یکدیگر (صفر، 80، 120، 180، 260 و 300 درجه، 27 درجه آزادی) نتایج فرکانس‌های طبیعی و مدهای ارتعاشی متناظر با هر فرکانس بر اساس پارامترهای هندسی موجود در جدول 2، در جدول 4 آورده شده‌اند. شکل 6 نیز نحوه تغییر فرکانس‌های طبیعی و انواع مدهای ارتعاشی سیستم با موقعیت قرارگیری غیر یکسان شش سیاره نسبت یکدیگر را نمایش می‌دهد.

جدول 3 فرکانس‌های طبیعی و مدهای ارتعاشی سیستم با موقعیت قرارگیری یکسان و غیر یکسان چهار سیاره نسبت به یکدیگر

Table 3 Natural frequencies and vibration modes of the system with four equally and unequally spaced planets

	سیستم دارای چهار سیاره با موقعیت قرارگیری غیریکسان سیاره‌ها نسبت به یکدیگر	سیستم دارای چهار سیاره با موقعیت قرارگیری یکسان نسبت به یکدیگر [4]	نوع مد ارتعاشی
فرکانس‌های طبیعی متمایز [Hz] با گوناگونی یک (M = 1)	0	0	دورانی
	1537.3	1536.6	دورانی
	1971.5	1970.6	دورانی
	2626.9	2625.7	دورانی
	7777.4	7773.6	دورانی
	13077.7	13071.1	دورانی
فرکانس‌های طبیعی غیر مقید [Hz] با گوناگونی دو (M = 2)	—	727	انتقالی
	—	1091	انتقالی
	—	1892.8	انتقالی
	—	2342.5	انتقالی
	—	7189.9	انتقالی
	—	10437.6	انتقالی
فرکانس‌های طبیعی [Hz] با گوناگونی $M = N - 3$	1809	1808.2	سیاره‌ای
	5966.7	5963.8	سیاره‌ای
	6985.2	6981.7	سیاره‌ای
فرکانس‌های طبیعی متمایز [Hz] با گوناگونی یک (M = 1)	713.3, 739	—	انتقالی
	1085.5, 1095.3	—	انتقالی
	1859.2, 1937	—	انتقالی
	2330.6, 2357.6	—	انتقالی
	7053.6, 7328.2	—	انتقالی
	9900.5, 10958.6	—	انتقالی

مطابق جدول 4 و شکل 6، فرکانس‌های طبیعی متناظر با مدهای انتقالی متفاوت و دارای گوناگونی یک (دوازده فرکانس طبیعی متمایز) می‌باشند. همچنین، شش فرکانس طبیعی متمایز با گوناگونی یک وجود دارند که مد ارتعاشی متناظر با هر کدام از این شش فرکانس طبیعی از نوع دورانی می‌باشد. با توجه به جدول 4 و شکل 6، سه فرکانس طبیعی دارای گوناگونی سه در سیستم ظاهر می‌شود که مد ارتعاشی متناظر با هر کدام از این نه فرکانس طبیعی از نوع سیاره‌ای می‌باشد. به عبارت دیگر در سیستم سیاره‌ای با موقعیت قرارگیری غیر یکسان تعداد سیاره‌های زوج نسبت به یکدیگر، زیاد شدن تعداد سیاره‌ها تعداد فرکانس‌هایی را افزایش می‌دهد که مد ارتعاشی متناظر با این فرکانس‌ها از نوع سیاره‌ای می‌باشد.

براساس جدول 5، با غیر یکسان شدن موقعیت قرارگیری تعداد فرد سیارها (سه عدد و 18 درجه آزادی) نسبت به یکدیگر و با توجه به موقعیت قرارگیری غیر یکسان تعداد فرد سیاره‌ها نسبت به یکدیگر با توجه به روابط (30- ب) و (38)، فرکانس‌های طبیعی متناظر با مدهای انتقالی در سیستم ظاهر نمی‌شوند. همچنین با توجه به اینکه مد سیاره‌ای برای سیستم با تعداد سیاره‌های بیشتر از سه عدد ظاهر می‌شود، لذا برای سیستم‌های موجود در جدول 5 مد سیاره‌ای به‌وجود نمی‌آید. بنابراین برای تعداد سه سیاره با موقعیت قرارگیری غیر یکسان نسبت به یکدیگر، در سیستم تنها فرکانس‌های

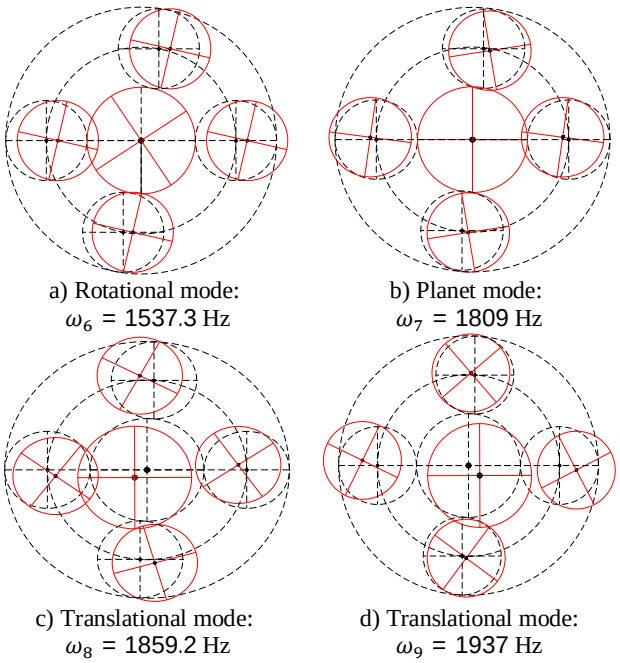


Fig. 4 Types of vibration modes of the system with four unequally spaced planets

شکل 4 انواع مدهای ارتعاشی سیستم با موقعیت قرارگیری غیر یکسان چهار سیاره نسبت به یکدیگر

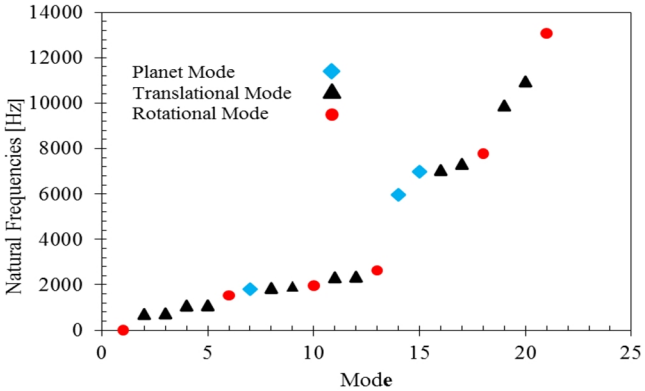


Fig. 5 Variation of the vibration modes of the system with four unequally spaced planets

شکل 5 نحوه تغییر مدهای ارتعاشی سیستم با موقعیت قرارگیری غیر یکسان چهار سیاره نسبت به یکدیگر

متناظر با مدهای دورانی ظاهر می‌شوند. این در حالی است که برای سیستم با تعداد سه سیاره با موقعیت قرارگیری یکسان نسبت به یکدیگر، سیستم علاوه فرکانس‌های طبیعی متناظر با مدهای دورانی، فرکانس‌های متناظر با مدهای انتقالی را هم دارا می‌باشد. در شکل‌های 7 و 8، مدهای ارتعاشی برای دو سیستم با موقعیت قرارگیری یکسان و غیر یکسان سه سیاره نسبت به یکدیگر آورده شده‌اند.

در شکل 7 با توجه به حداقل بودن تعداد سیاره‌ها (سه عدد) مد ارتعاشی سیاره‌ای متناظر با هیچ فرکانسی در سیستم ظاهر نمی‌شود و در سیستم فرکانس‌هایی ظاهر می‌شوند که دارای مدهای انتقالی و دورانی می‌باشند. مطابق شکل 8 با غیر یکسان شدن موقعیت قرارگیری سه سیاره نسبت به یکدیگر علاوه بر فرکانس‌های متناظر با مد سیاره‌ای، فرکانس‌های متناظر با مد انتقالی نیز از سیستم حذف و تنها فرکانس‌های طبیعی متناظر با مد دورانی در سیستم ظاهر می‌شوند. به‌نحویکه شکل 9 نحوه تغییر فرکانس‌های طبیعی متناظر با مدهای ارتعاشی دورانی سیستم با موقعیت قرارگیری غیر یکسان سه سیاره نسبت یکدیگر را نمایش می‌دهد.

با زیاد شدن تعداد سیاره‌های فرد با موقعیت قرارگیری غیر یکسان نسبت به یکدیگر علاوه بر فرکانس‌های متناظر با مدهای دورانی، فرکانس‌های متناظر با مدهای سیاره‌ای نیز در سیستم ظاهر می‌شوند. به عنوان نمونه نتایج برای سیستم دورانی با تعداد پنج سیاره (24 درجه آزادی) با موقعیت قرارگیری غیر یکسان (صفر، 72، 144، 252 و 324 درجه با توجه به رابطه (30- ب)) و موقعیت قرارگیری یکسان نسبت به یکدیگر با استفاده از پارامترهای هندسی جدول 2، در جدول 6 آورده شده‌اند.

شکل 10 نیز نحوه تغییر فرکانس‌های طبیعی و انواع مدهای ارتعاشی سیستم با موقعیت قرارگیری غیر یکسان پنج سیاره نسبت یکدیگر را نمایش می‌دهد. مطابق شکل 10 با توجه به فرد بودن تعداد سیاره‌ها و غیر یکسان

جدول 4 فرکانس‌های طبیعی و مدهای ارتعاشی سیستم با موقعیت قرارگیری غیر یکسان شش سیاره نسبت به یکدیگر

Table 4 Natural frequencies and vibration modes of the system with six unequally spaced planets

	سیستم دارای شش سیاره با موقعیت قرارگیری غیریکسان سیاره‌ها نسبت به یکدیگر		نوع مد ارتعاشی
فرکانس‌های	1581.3	0	دورانی
طبیعی متمایز	2625.6	2033.6	دورانی
با گوناگونی [Hz] یک (M = 1)	15353.8	8346.9	دورانی
فرکانس‌های	1809		سیاره‌ای
طبیعی [Hz] با	5966.7		سیاره‌ای
گوناگونی $M = N - 3$	6985.2		سیاره‌ای
	706.5	675.3	انتقالی
فرکانس‌های	1069.3	1027.8	انتقالی
طبیعی متمایز	1943.9	1840.9	انتقالی
با گوناگونی [Hz]	2535	2496	انتقالی
یک (M = 1)	7814.4	7316.3	انتقالی
	12750.7	10913.1	انتقالی

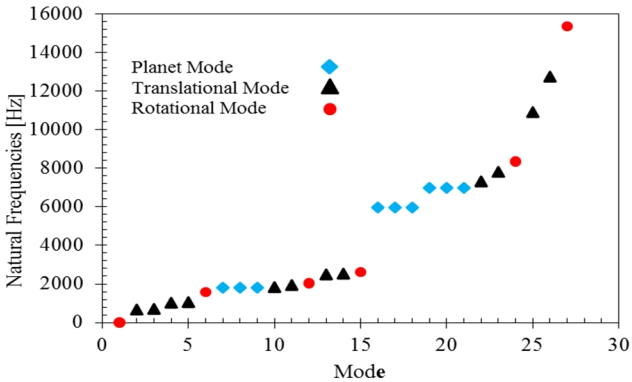


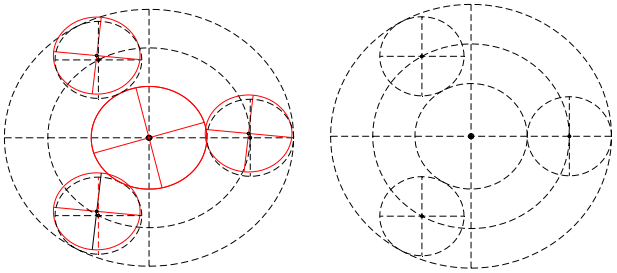
Fig. 6 Variation of the vibration modes of the system with six unequally spaced planets

شکل 6 نحوه تغییر مدهای ارتعاشی سیستم با موقعیت قرارگیری غیر یکسان شش سیاره نسبت به یکدیگر

جدول 5 فرکانس‌های طبیعی و مدهای ارتعاشی سیستم با موقعیت قرارگیری یکسان و غیر یکسان سه سیاره نسبت به یکدیگر

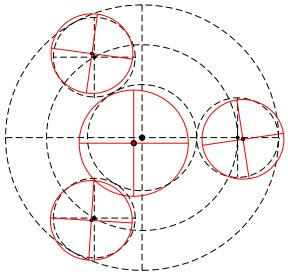
Table 5 Natural frequencies and vibration modes of the system with three equally and unequally spaced planets

	سیستم دارای سه سیاره با موقعیت قرارگیری غیریکسان سیاره‌ها نسبت به یکدیگر	سیستم دارای سه سیاره با موقعیت قرارگیری یکسان سیاره‌ها نسبت به یکدیگر [4]	نوع مد ارتعاشی
	0	0	دورانی
فرکانس‌های	1476.7	1475.7	دورانی
طبیعی متمایز	1931.2	1930.3	دورانی
[Hz] با گوناگونی	2659.7	2658.3	دورانی
یک ($M = 1$)	7464.5	7462.8	دورانی
	11778.1	11775.2	دورانی
	—	743.2	انتقالی
فرکانس‌های	—	1102.4	انتقالی
طبیعی متمایز	—	1896.0	انتقالی
[Hz] با گوناگونی	—	2276.4	انتقالی
دو ($M = 2$)	—	6986.3	انتقالی
	—	9647.9	انتقالی
فرکانس‌های طبیعی [Hz] با گوناگونی $M = N - 3$	—	—	سیاره‌ای



a) Rotational mode: ω_6 = 2658.3 Hz

b) Planet mode: ω = —

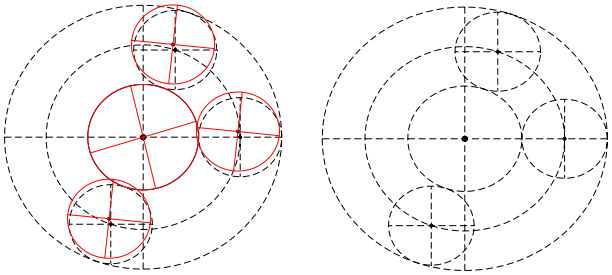


c) Translational mode: ω_2 = 1896 Hz

Fig. 7 Types of vibration modes of the system with three equally spaced planets

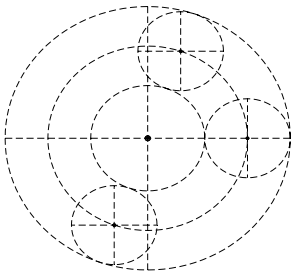
شکل 7 انواع مدهای ارتعاشی سیستم با موقعیت قرارگیری یکسان سه سیاره نسبت به یکدیگر

بودن موقعیت قرارگیری آنها نسبت به یکدیگر، فرکانس‌های طبیعی متناظر با مدهای انتقالی در سیستم ظاهر نمی‌شوند.



a) Rotational mode: ω_6 = 2659.7 Hz

b) Planet mode: ω = —



c) Translational mode: ω = —

Fig. 8 Types of vibration modes of the system with three unequally spaced planets

شکل8 انواع مدهای ارتعاشی سیستم با موقعیت قرارگیری غیر یکسان سه سیاره نسبت به یکدیگر

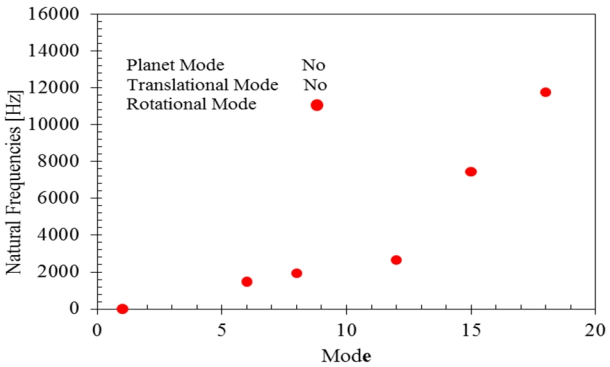


Fig. 9 Variation of the vibration modes of the system with three unequally spaced planets

شکل 9 نحوه تغییر مدهای ارتعاشی سیستم با موقعیت قرارگیری غیر یکسان سه سیاره نسبت به یکدیگر

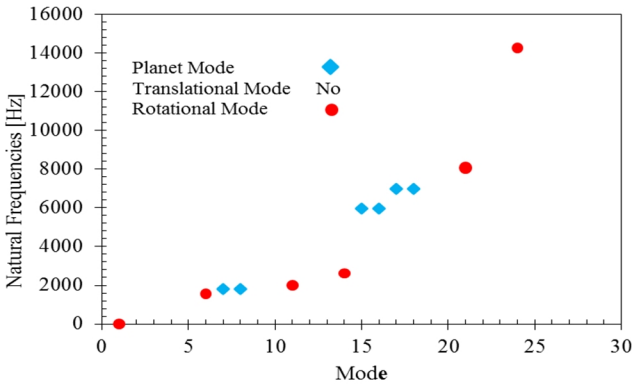


Fig. 10 Variation of the vibration modes of the system with five unequally spaced planets

شکل 10 نحوه تغییر مدهای ارتعاشی سیستم با موقعیت قرارگیری غیر یکسان پنج سیاره نسبت به یکدیگر

جدول 6 فرکانس‌های طبیعی و مدهای ارتعاشی سیستم با موقعیت قرارگیری یکسان و غیر یکسان پنج سیاره نسبت به یکدیگر

Table 6 Natural frequencies and vibration modes of the system with five equally and unequally spaced planets

	سیستم دارای پنج سیاره با موقعیت قرارگیری غیریکسان سیاره‌ها نسبت به یکدیگر	سیستم دارای پنج سیاره با موقعیت قرارگیری یکسان سیاره‌ها نسبت به یکدیگر [4]	نوع مد ارتعاشی
	0	0	دورانی
فرکانس‌های طبیعی متمایز [Hz] با گوناگونی یک ($M = 1$)	1568.1	1567.4	دورانی
	2007.8	2006.1	دورانی
	2615.4	2614.8	دورانی
	8070.5	8065.4	دورانی
	14260.8	14253.1	دورانی
فرکانس‌های طبیعی غیر مقید [Hz] با گوناگونی دو ($M = 2$)	—	710.0	انتقالی
	—	1072.0	انتقالی
	—	1888.1	انتقالی
	—	2425.3	انتقالی
	—	7382.4	انتقالی
	—	11172.3	انتقالی
فرکانس‌های طبیعی [Hz] با گوناگونی $M = N - 3$	1809.0	1808.2	سیاره‌ای
	5966.7	5963.8	سیاره‌ای
	6985.2	6981.7	سیاره‌ای
فرکانس‌های طبیعی متمایز [Hz] با گوناگونی یک ($M = 1$)	—	—	انتقالی

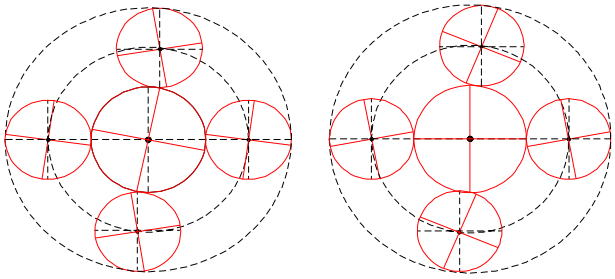
در مدل‌های دورانی سیستم‌های سیاره‌ای تک مرحله‌ای هنگامیکه خروجی سیستم (حمل‌کننده سیاره‌ها) به سمت ثابت شدن تغییر رفتار می‌دهد، مدهای متناظر با فرکانس‌های متمایز و غیر مقید، متمایز و غیر مقید نیز می‌توانند باشند. با ثابت شدن خروجی سیستم (این امر با میل دادن سختی دورانی خروجی به سمت بی‌نهایت انجام می‌شود)، سیستم دچار ارتعاش و قفل‌شوندگی می‌شود. برای سیستم دارای مدل دورانی با پارامترهای موجود در جدول 2، با افزایش سختی دورانی حمل‌کننده از صفر تا 10^{10} (N/m)، برخی از فرکانس‌های طبیعی برای سیستم با تعداد سه و چهار سیاره به ترتیب با موقعیت قرارگیری یکسان و غیر یکسان سیاره‌ها نسبت به یکدیگر در جدول 7 آورده شده‌اند.

به عنوان نمونه مطابق جدول 7، فرکانس طبیعی اول برای سیستم دارای چهار سیاره با موقعیت قرارگیری غیر یکسان سیاره‌ها نسبت به یکدیگر با ثابت‌شدن خروجی به مقدار 713.3 هرتز می‌رسد و مد متناظر با فرکانس طبیعی اول به مد متمایز تبدیل می‌شود. همچنین با افزایش صلبیت حمل‌کننده سیاره‌ها و تغییر رفتار آن از دوران آزاد به سمت ثابت شدن، فرکانس طبیعی چهارم به مقدار 1085.5 هرتز می‌رسد و مد متناظر با چهارمین فرکانس طبیعی به مد غیر مقید تبدیل می‌شود. برای سیستم با تعداد سه سیاره با موقعیت قرارگیری یکسان سیاره‌ها نسبت به یکدیگر نیز به عنوان نمونه فرکانس طبیعی اول دارای مد غیر مقید و فرکانس طبیعی سوم دارای مد متمایز می‌باشند. در شکل‌های 11 و 12 مدهای متمایز و غیر مقید به ترتیب برای سیستم‌ها با تعداد چهار سیاره غیر متقارن و سه سیاره متقارن موجود در جدول 7 آورده شده‌اند. برای وضوح شکل‌های 11 و 12، جابه‌جایی حمل‌کننده سیاره‌ها و چرخدنده رینگ نمایش داده نشده‌اند. گفتنی است از منظر کاربردی سه فرکانس طبیعی اول نسبت به سایر فرکانس‌ها اهمیت بیشتری دارند.

جدول 7 فرکانس‌های طبیعی سیستم‌های دورانی در حالت خروجی (حمل‌کننده سیاره‌ها) ثابت

Table 7 Natural frequencies of the rotational systems for the fixed output (carrier)

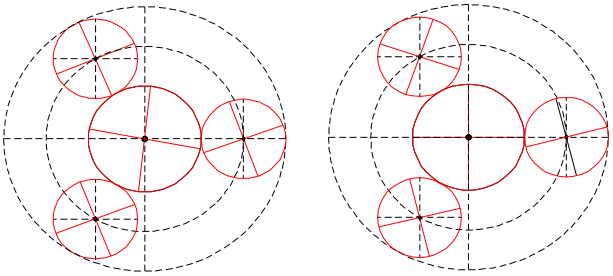
فرکانس طبیعی (Hz)	سیستم دارای سه سیاره با موقعیت قرارگیری یکسان سیاره‌ها نسبت به یکدیگر	سیستم دارای چهار سیاره با موقعیت قرارگیری غیر یکسان سیاره‌ها نسبت به یکدیگر
اول	743.5	713.3
دوم	743.5	739
سوم	1002	988.2
چهارم	1102.9	1085.5
پنجم	1102.9	1085.5
ششم	1845.9	1809
هفتم	1896.9	1839.3
هشتم	1896.9	1859.6
نهم	2277.5	1937
دهم	2277.5	1937



a) Distinct mode: ω_1 = 713.3 Hz b) Degenerate mode: ω_4 = 1085.5 Hz

Fig. 11 Distinct and degenerate modes of the system with four unequally spaced planets

شکل 11 مد متمایز و غیر مقید سیستم با موقعیت قرارگیری غیر یکسان چهار سیاره نسبت به یکدیگر



a) Distinct mode: ω_3 = 1002 Hz b) Degenerate mode: ω_1 = 743.5 Hz

Fig. 12 Distinct and degenerate modes of the system with three equally spaced planets

شکل 12 مد متمایز و غیر مقید سیستم با موقعیت قرارگیری یکسان سه سیاره نسبت به یکدیگر

6- نتیجه‌گیری

در چرخدنده‌های سیاره‌ای ساده تک مرحله‌ای با داشتن تعداد سیاره‌های زوج و فرد با موقعیت قرارگیری یکسان و غیر یکسان نسبت به یکدیگر پنج مد ارتعاشی دورانی، سیاره‌ای، انتقالی، متمایز و غیر مقید در سیستم ظاهر می‌شوند. فرکانس‌های طبیعی متناظر با مدهای دورانی و سیاره‌ای برای سیستم با موقعیت قرارگیری یکسان و غیر یکسان تعداد سیاره‌های زوج نسبت به یکدیگر، مشابه و دارای گوناگونی یکسانی می‌باشند. در سیستم‌های سیاره‌ای ساده تک مرحله‌ای، فرکانس‌های طبیعی متناظر با مدهای انتقالی برای دو سیستم با موقعیت یکسان و غیر یکسان تعداد سیاره‌های زوج نسبت به یکدیگر متفاوت و دارای گوناگونی متفاوتی نیز می‌باشند. به‌نحویکه با غیر یکسان شدن موقعیت قرارگیری تعداد سیاره‌های زوج نسبت به یکدیگر، فرکانس‌های طبیعی متناظر با مدهای انتقالی از گوناگونی دو در سیستم با موقعیت یکسان تعداد سیاره‌های زوج نسبت به یکدیگر، به فرکانس‌هایی متفاوت با گوناگونی یک تبدیل می‌شوند. با فرد شدن تعداد سیاره‌های سیستم و غیر یکسان شدن موقعیت قرارگیری آنها نسبت به یکدیگر، فرکانس‌های طبیعی متناظر با مدهای انتقالی در سیستم ظاهر نمی‌شوند. همچنین فرکانس‌های طبیعی متناظر با مدهای دورانی و سیاره‌ای برای دو سیستم با موقعیت قرارگیری یکسان و غیر یکسان تعداد سیاره‌های فرد مشابه و دارای گوناگونی یکسانی نیز می‌باشند. برای هر دو سیستم با تعداد سیاره‌های زوج و فرد با موقعیت قرارگیری غیر یکسان نسبت به یکدیگر نیز زیاد شدن تعداد سیاره‌ها تعداد فرکانس‌هایی را افزایش می‌دهد که مد ارتعاشی متناظر با آن فرکانس‌ها از نوع سیاره‌ای می‌باشد. برای مدل‌های دورانی سیستم‌های سیاره‌ای ساده تک مرحله‌ای با داشتن تعداد سیاره‌های زوج و فرد با موقعیت قرارگیری یکسان و غیر یکسان نسبت به یکدیگر، دو مد متمایز و غیر مقید نیز می‌توانند در سیستم ظاهر شوند. در مد متمایز تمامی اجزاء سیستم دارای حرکت دورانی می‌باشند. در مد غیر مقید فقط سیاره‌های سیستم دارای حرکت دورانی می‌باشند و سایر اجزاء سیستم هیچ حرکتی را دارا نمی‌باشند.

7- فهرست علایم

$e(t)$	خطای انتقال استاتیک
I	ممان اینرسی ($kg.m^2$)
k	سختی ناشی از تغییر شکل دندانه چرخدنده‌ها (N/m)
K	سختی یاتاقان‌ها (N/m)
K	ماتریس سختی
m	جرم (kg)
M	ماتریس اینرسی
N	تعداد کل سیاره‌ها
q	بردار مختصات عمومی
r	شعاع پایه (m)
T	گشتاور (N.m)
u	مختصه دورانی
x, y	مختصات انتقالی

علایم یونانی

α	زاویه فشار (degree)
η	مختصه مماسی (m)
θ	زاویه دوران هر یاتاقان (Rad)
ξ	مختصه شعاعی (m)
ψ	موقعیت قرارگیری سیاره‌ها (degree)
ω	فرکانس طبیعی (Hz)

زیرنویس‌ها

b	یاتاقان
c	حمل‌کننده سیاره‌ها
m	سختی ناشی از تغییر شکل دندانه چرخدنده‌ها
n	محدوده تغییر N
p	سیاره
r	چرخدنده رینگ
s	چرخدنده خورشیدی
u	راستای دورانی
x, y	راستاهای انتقالی

8- مراجع

[1] A. Kahraman, Planetary gear train dynamics, *Journal of Mechanical Design*, Vol. 116, No. 3, pp. 713–720, 1994.
[2] A. Kahraman, Load sharing characteristics of planetary transmissions, *Journal of Mechanism and Machine Theory*, Vol. 29, No. 8, pp. 1151–1165, 1994.
[3] A. Kahraman, Natural modes of planetary gear trains, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 173, No. 1, pp. 125-130, 1994.
[4] J. Lin, R.G. Parker, Analytical characterization of the unique properties of planetary gear free vibration, *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 121, No. 3, pp. 316-321, 1999.
[5] J. Lin, R.G. Parker, Sensitivity of planetary gear natural frequencies and vibration modes to model parameters, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 228, No. 1, pp. 109-128, 1999.
[6] R.G. Parker, S.M. Vijayakar, T. Imajo, Non–linear dynamic response of a spur gear pair: modeling and experimental comparisons, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 273, No. 3, pp. 435-455, 2000.
[7] A. Kahraman, Free torsional vibration characteristics of compound planetray gear sests, *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 36, No. 8, pp. 953-971, 2001.
[8] T. Geramitcioski, L. Trajcevski, Theoretical improvement of the planetary gear dynamic model, *International Design Conference–Design, Dubrovnik*, May 14 - 17, 2002.
[9] A. Kahraman, A.A. Kharazi, M. Umrani, A deformable body dynamic analysis of planetary gears with thin rims, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 262, No. 3, pp. 752-768, 2003.
[10] T. Sun, H. Y. Hu, Nonlinear dynamics of a planetary gear system with multiple clearances, *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 38, No. 12, pp. 1371-1390, 2003.
[11] M. H. Sadeghi, A. Khosravi, Parametric design and manufacturing of precision forging dies of idler gear of peugeot 405 using cad/cam, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 8, No. 1, pp. 115-127, 2008. (in Persian فارسی).
[12] K. J. Huang, S. R. Zhang, J. T. Tseng, Dynamic analysis of single-stage planetary gearings by the FE approach, *Chung Hua Journal of Science and Engineering*, Vol. 7, No. 2, pp. 27-33, 2009.
[13] W. Kim, J. Y. Lee, J. Chung, Dynamic analysis for a planetary gear with time-varing pressure angles and contact ratios, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 331, No. 4, pp. 883-901, 2012.
[14] A. Saghafi, A. Farshidianfar, A. Akbari, Vibrations control of gear- bearing dynamic system, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 6, pp. 135-143, 2014. (in Persian فارسی).
[15] W. Sun, X. Ding, J. Wei, X. Hu, Q, Wang, An analyzing method of coupled modes in multi-stage planetary gear system, *International Journal of Precision Engineering and Manufacturing*, Vol. 15, No. 11, pp. 2357-2366, 2014.
[16] F. Shakeri Aski, M. Mirparizi, F. Sheykh Samani, M. A. Hajabasi, Vibration behavior optimization of planetary gear sets, *Propultion and Power Research*, Vol. 3, No. 4, pp. 196-206, 2014.
[17] A. Saghafi, A. Farshidianfar, Bifurcation and chaos control in a gear transmission system, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 14, pp. 61-68, 2015. (in Persian فارسی).
[18] F. Lei, W. Shaoping, W. Xingjian, H. Feng, L. Huawei, Nonlinear dynamic modeling of a helicopter planetary gear train for carrier plate crack fault diagnosis, *Chines Journal of Areonautics*, Vol. 29, No. 3, pp. 675-687, 2016.
[19] M. Beyaoui, M. Tounsi, K. Abboudi, N .Feki, L. Walha, M. Haddar, Dynamic behaviour of a wind turbine gear system with uncertainties, *Comptes Rendus Mecanique*, Vol. 334, No. 6, pp. 375-387, 2016.
[20] L. Xiang, Y. Jia, A. Hu, Bifurcation and chaos analysis for multi-freedom gear-bearing system with time-varying stiffness, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 40, No. 23, pp. 10506-10520, 2016.
[21] A. Shahabi, F. Sheykh Samani, Natural frequencies and vibration modes of the single-stage spur planetary gear, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 5, No. 9, pp. 109-120, 2016. (in Persian فارسی).