



تحلیل تاثیر میزان تترینگ شریانی روی برآورد تصلب شرایین

مهدی معرفت^{1*}، مریم انصاری²، منیژه مختاری دیزاجی³

1- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

2- دانشجو، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

3- استاد، فیزیک پزشکی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

* تهران، صندوق پستی 14115116، maerefat@modares.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 05 مهر 1395

پذیرش: 21 آبان 1395

ارائه در سایت: 08 دی 1395

کلید واژگان:

سرعت موج نبض

تترینگ شریانی

حل تحلیلی

سفتی شریانی

دیواره شریانی

چکیده

سرعت موج نبض اغلب به عنوان شاخصی کلینیکی برای تشخیص بیماری‌های قلبی-عروقی استفاده می‌شود. در تحقیقات گذشته به این نتیجه رسیده‌اند که سرعت موج نبض بالا نشان دهنده سفتی شریانی است این امر را این گونه می‌توان توجیه کرد که در فیزیک جریان ضربانی برای یک سیال تراکم‌ناپذیر سرعت موج در یک لوله سخت‌تر سریع‌تر حرکت می‌کند به طوری که در یک لوله کاملاً صلب سرعت موج بی‌نهایت می‌شود. در این مقاله به این موضوع پرداخته شده است که زمانی از این نتیجه می‌توان استفاده کرد که دیواره هیچ محدودیتی نداشته باشد که در حل از این محدودیت به عنوان شرط مرزی خارجی (تترینگ: میزان تترینگ) می‌توان استفاده کرد که دیواره هیچ محدودیتی نداشته باشد (استفاده شده است. در این مقاله با استفاده از معادلات حاکم بر دیواره رگ و سیال خون و با استفاده از حل تحلیلی و استفاده از تترینگ به عنوان شرط مرزی خارجی سرعت موج نبض بررسی شده است. در تحقیقات گذشته فقط برای درجه تترینگ صفر و یک سرعت موج نبض به دست آورده شده است، اما در این تحقیق سرعت موج نبض برای درجه تترینگ‌های مختلف و برای سه حالت دیواره مختلف ویسکوالاستیک، الاستیک و سخت بررسی شده است. در این تحقیق روند تغییر سرعت موج نبض برای درجه تترینگ‌ها و سختی‌های مختلف کاملاً مشخص است که این نتایج به استفاده صحیح از سرعت موج نبض به عنوان شاخص کلینیکی برای پیش‌بینی سفتی شریانی کمک به سزایی می‌کند.

The effect of the degree of arterial tethering on the estimation of arterial atherosclerosis using an analytical solution

Mehdi Maerefat^{1*}, Maryam Ansari¹, Manijeh Mokhtari Dizaji²

1- Department of Mechanical Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran

2- Department of Medical Physics, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran

* P.O.B. 14115116, Tehran, Iran, maerefat@modares.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 26 September 2016
Accepted 11 November 2016
Available Online 28 December 2016

Keywords:
Pulse Wave Velocity
Arterial tethering
Analytical solution
Arterial stiffness
Arterial wall

ABSTRACT

Pulse wave velocity is often used as an indicator clinically for diagnosis of cardiovascular diseases. This assumption is well grounded in the physics of pulsatile flow of an incompressible fluid where it is fully established that a pulse wave travels faster in a tube of stiffer wall, the wave speed becoming infinite in the mathematical limit of a rigid wall. In this paper we point out that pulse wave velocity in a stiffer tube is strictly valid only when the wall is free from outside constraints, which is used as the outer boundary condition (tethering: the degree to which the vessel wall is surrounded by tissue). In this paper, using the equations of blood fluid and vessel walls and using analytical solutions and the use of tethering as outer boundary conditions pulse wave velocity is investigated. In previous research pulse wave velocity has been obtained just for the tethering zero and one, but in this study pulse wave velocity is investigated for different degrees of tethering, and for three different material walls: viscoelastic, elastic and stiff. In this research pulse wave velocity for different degrees of tethering and different material wall are determined. These results can be of considerable help in the use of pulse wave velocity as a clinical index to predict arterial stiffness.

1- مقدمه

است و همچنین با فرض ناچیز بودن ضخامت دیواره، از جابجایی و تنش داخل ضخامت دیوار صرف‌نظر شده است [3].

مطالعات اخیر نشان داده است که جابجایی و تنش داخل ضخامت دیوار قابل توجه است و این نیرو به وسیله جریان ضربانی روی لایه اندوتلیال دیواره اعمال می‌شود. این لایه به نظر می‌رسد تنها شرط مرزی مسائل دینامیک دیواره‌ی شریان تحت نیروی جریان ضربانی باشد. به بیانی دیگر، باید مسایل مکانیک جامدات با کمک مکانیک سیالات، داخل ضخامت دیواره حل گردند

دیواره‌ی شریان، تحت نیروی جریان ضربانی تنش و کرنش قابل توجهی در جهت طولی و شعاعی را تحمل می‌کند [1]. بیشتر توجه در گذشته روی نیرویی است که به طور مستقیم روی لایه اندوتلیال¹ دیواره وارد می‌شود [2]، یا روی حرکت شعاعی دیواره‌ی شریان است. با این فرض که جابجایی طولی خیلی کوچک‌تر از جابجایی شعاعی باشد، از حرکت طولی صرف‌نظر شده

¹ Endothelial

Please cite this article using:

M. Maerefat, M. Ansari, M. Mokhtari Dizaji, The effect of the degree of arterial tethering on the estimation of arterial atherosclerosis using an analytical solution, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 12, pp. 685-691, 2016 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

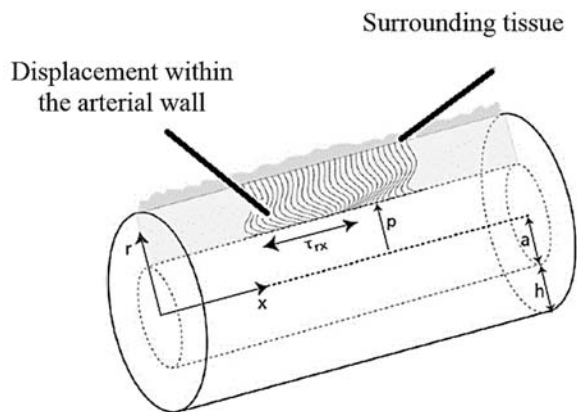


Fig. 1 A piece of vessels that are drawn exaggerated [9]

شکل 1 قطعه‌ای از رگ که به صورت اغراق آمیز رسم شده است [9]

$$\begin{cases} \rho_\omega \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{rx}}{\partial r} + \frac{\tau_{rx}}{r} \\ \rho_\omega \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \frac{\partial \tau_{xr}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr}}{r} - \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} \\ \frac{\partial \eta}{\partial r} + \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\eta}{r} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

ρ_ω چگالی مواد دیواره، ξ و η به ترتیب جابجایی در جهت x و r ، σ_{ii} ($i = x, r, \theta$) 3 جز تنش محوری، τ_{ij} ($i, j = x, r$) اجزای تنش برشی و t زمان است [10].

اگر مواد دیواره دارای خواص فیزیکی مشابه (همسانگرد) باشد رابطه تنش- کرنش به صورت زیر است:

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = -\Omega + 2E^* \frac{\partial \eta}{\partial r} \\ \sigma_{\theta\theta} = -\Omega + 2E^* \frac{\eta}{r} \\ \tau_{rx} = E^* \left[\frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right] \end{cases} \quad (2)$$

که E^* مدول الاستیسیته مختلط است. با استفاده از مدل مشتق جزئی کریم و آرمنتانو⁵ مدول الاستیسیته مختلط به صورت زیر به دست می‌آید [11]:

$$E^*(\omega) = E_0 + \eta_1 \omega^\alpha e^{i\pi\alpha/2} + \eta_2 \omega^\beta e^{i\pi\beta/2} \quad (3)$$

ω فرکانس اصلی جریان ضربانی، E_0 مدول الاستیک استاتیکی مواد دیواره، α, β مرتبه مشتق فنر و نقطه⁶ که پارامتر ویسکوزیته به ترتیب η_1, η_2 است [11].

2-1- حل عمومی

حل معادلات (1) و (2) به صورت عمومی به دست آورده شده است [1]:

$$\begin{cases} \xi(x, r, t) = \bar{\xi}(r) e^{i(\omega t - \gamma x)} \\ \eta(x, r, t) = \bar{\eta}(r) e^{i(\omega t - \gamma x)} \end{cases} \quad (4)$$

که $\gamma = 2\pi/\iota = \omega/c$ شماره موج، ι طول موج و c سرعت موج نبض است. دامنه جابجایی ξ, η به صورت زیر داده شده است:

$$\xi(r) = [-i\gamma A_1 I_0(\gamma r) - i\gamma A_2 K_0(\gamma r) + \lambda_1 A_3 I_0(\gamma r) + \lambda_1 A_4 K_0(\gamma r)] e^{i(\omega t - \gamma x)} \quad (5)$$

$$\eta(r) = \gamma [A_1 I_1(\gamma r) - A_2 K_1(\gamma r) + A_3 I_1(i\lambda_1 r) - A_4 K_1(i\lambda_1 r)] e^{i(\omega t - \gamma x)} \quad (6)$$

[4].

به طور کلی در گذشته، مسائل با فرض دیواره‌ی نازک حل می‌شد، اما اخیراً در مطالعات برای دیواره ضخامت محدودی در نظر گرفته می‌شود [5]. به دست آوردن تنش و کرنش داخل ضخامت دیوار با حل تجربی بسیار مشکل است، اما اخیراً عکس‌های بسیار دقیقی از دینامیک دیواره به دست آمده است که جابجایی و تنش قابل ملاحظه‌ای را داخل ضخامت دیوار نشان می‌دهد، که این مشاهدات با فرض دیواره‌ی نازک مغایرت دارد [6].

تغییر در سختی شریان‌ها یک فاکتور خطر برای بیماری‌های قلبی-عروقی است. بیماری‌های قلبی-عروقی به طریق مختلفی با فشار خون، دیابت، آتروزکلوژی¹ و سکته‌ی قلبی ارتباط دارند [7]، که دلیل این امر می‌تواند تغییر دینامیک دیواره و تغییر در فعل و انفعال‌های دیواره-سیال در جریان ضربانی باشد.

دیواره شریان با افزایش سن و بیماری از حالت الاستیک خارج می‌شود و کش می‌آید، مانند کشی که خیلی باز شده باشد شل شده و افزایش طول می‌دهد، که به آن تترینگ شریانی² گویند. مشاهدات نشان می‌دهد که در قسمت‌های مختلف از سیستم قلبی-عروقی شریان‌ها عموماً دارای تترینگ هستند و اغلب تترینگ با سفتی شریانی همراه است [8].

یکی از شاخص‌های مکانیکی اندازه‌گیری سفتی شریان‌ها سرعت موج نبض است، که بیشتر به عنوان شاخصی کلینیکی از آن استفاده می‌شود. مطالعات اخیر به بررسی ارتباط درجه تترینگ³ دیواره (میزانی که دیواره رگ به وسیله بافت اطراف احاطه شده باشد) با دینامیک دیواره و همچنین تاثیر تترینگ در انتشار موج⁴ ضربانی، داخل دیواره پرداخته‌اند [9,8,1].

هنگامی که دیواره رگ آزاد باشد (تترینگ وجود نداشته باشد) با افزایش سختی دیواره، سرعت موج نبض افزایش می‌یابد، اما با افزایش درجه تترینگ این سرعت تغییر می‌کند. به دلیل این که از سرعت موج به عنوان یک شاخص کلینیکی بیماری‌های قلبی-عروقی استفاده می‌شود این موضوع از اهمیت ویژه‌ای برخوردار می‌شود [1]. در تحقیقات گذشته نشان داده شده است زمانی که تترینگ شریانی وجود داشته باشد، استفاده از سرعت موج نبض به عنوان شاخصی کلینیکی می‌تواند اطلاعات غلطی از سفتی شریان‌ها به ما بدهد [8].

هدف کلی مقاله این است که تغییر خواص دیواره شریان که به وسیله بیماری یا افزایش سن ایجاد می‌شود شبیه‌سازی شود، که با این هدف به بررسی ارتباط پایداری مکانیکی با مواد دیواره به‌ویژه مواد مرتبط با ظرفیت الاستیسیته و ویسکوزیته پرداخته می‌شود.

2-2- معادلات حاکم

یک بخش از دیواره‌ی رگ را در نظر بگیرید، فرض کنید دیواره ضخیم، مستقیم و استوانه‌ای باشد، همچنین فرض شده است که مواد دیواره ویسکوالاستیک (هم دارای خواص ویسکوزیته و هم الاستیسیته باشد) و سیال نیوتنی و تراکم‌ناپذیر باشد [10]. برای حل مسائل از مختصات استوانه‌ای r, θ, x استفاده می‌شود که x جهت محوری، r جهت شعاعی و θ جهت محیطی می‌باشد. مطابق "شکل 1"، با فرض تقارن محوری، تغییرات زاویه‌ای صفر در نظر گرفته شده است. معادله پیوستگی و مومنوم حاکم داخل دیواره رگ به صورت زیر است:

¹ atherosclerosis

² Arterial Tethering

³ Degree of tethering

⁴ Wave propagation

⁵ Craiem and Armentano

⁶ Spring-pot

اگر دیواره تا حدی تترده باشد، درجه تترینگ δ_x, δ_r در جهت محوری و شعاعی به صورت زیر تعریف می شود:

$$\begin{cases} \delta_x = 1 - \frac{|\xi_{1,\delta_x}|}{|\xi_{1,0}|} \\ \delta_r = 1 - \frac{|\eta_{1,\delta_r}|}{|\eta_{1,0}|} \end{cases} \quad (13)$$

که $|\xi_{1,\delta_x}|, |\eta_{1,\delta_r}|$ دامنه جابجایی در لایه خارجی وقتی که درجه تترینگ δ_x, δ_r باشد و $|\xi_{1,0}|, |\eta_{1,0}|$ دامنه جابجایی زمانی که درجه تترینگ صفر باشد (دیواره ی آزاد) است، و این مقادیر از حل مسائل دیواره نامحدود محاسبه می شوند [8]. شرط مرزی خارجی برای دیواره با تترینگ جزئی به صورت زیر ساده سازی می شود:

$$\begin{cases} \xi(a+h, x, t) = (1-\delta_x)\xi_{1,0}e^{i(\omega t-\gamma x)} \\ \eta(a+h, x, t) = (1-\delta_r)\eta_{1,0}e^{i(\omega t-\gamma x)} \end{cases} \quad (14)$$

هنگامی که $\delta_r = \delta_x = 1$ باشد، دیواره کاملاً تترده شده است و اگر $\delta_r = \delta_x = 0$ باشد، دیواره کاملاً از تترینگ آزاد است. جدولی از پارامترهای $\alpha, \beta, \eta_1, \eta_2$ توسط زمیر و هادیس³ جمع آوری شده است [8].

3- روش های حل

3-1- حل بر اساس تقریب موج بلند

تقریب موج بلند به طول انتشار موج (l) داخل سیال برمی گردد که این طول موج باید خیلی بزرگتر از شعاع رگ (a) باشد، بنابراین $\gamma (= 2\pi/l) \ll 1/a$ می شود. چون در شریان های بزرگ طول موج از مرتبه 100 cm و شعاع رگ از مرتبه 1 cm است این فرض منطقی به نظر می رسد. انتشار موج درون سیال یک محرک برای رویدادهای مکانیکی داخل دیواره ی رگ است، به همین دلیل در گذشته به طور وسیع از این تقریب برای صرف نظر کردن از تغییرات جابجایی دیواره در جهت محوری در مقایسه با تغییرات در جهت شعاعی استفاده شده است [1]. به طور خاص، جابجایی محوری و شعاعی داخل دیواره به عنوان تابعی از شعاع رگ و زمان عمل می کند $\eta = \eta(r, t)$ $\xi = \xi(r, t)$.

یک نتیجه مهم تقریب موج بلند این است که معادلات حرکت در جهت شعاعی و محوری جداسازی می شوند (معادله (1))، بنابراین جابجایی شعاعی و محوری به طور جداگانه توزیع می شوند [1]. به طور خاص، معادله حرکت در جهت محوری به صورت زیر ساده می شود [1]:

$$\xi = \xi(r, t) = \lambda_x [A_3 I_0(i\lambda_x r) + A_4 K_0(i\lambda_x r)] e^{i(\omega t - \gamma x)} \quad (15)$$

که A_3, A_4 ثابت های انتگرال گیری هستند، که این پارامترها به مواد دیواره و شرایط مرزی بستگی دارند، I_0, K_0 توابع بسل تعمیم یافته مرتبه صفر از نوع اول و دوم هستند و همچنین

$$\lambda_x^2 = \frac{\rho \omega^2}{E^*} \quad (16)$$

در مسیری مشابه، تقریب موج بلند می تواند برای تنش برشی استفاده شود، که معادله نهایی به صورت زیر است:

$$\tau_{rx}(r, x, t) = i\lambda_x^2 E^* [A_3 I_1(i\lambda_x r) - A_4 K_1(i\lambda_x r)] e^{i\omega t} \quad (17)$$

که I_1, K_1 توابع بسل مرتبه 1 از نوع اول و دوم هستند [1].

که I_i, K_i توابع بسل تعمیم یافته نوع اول و دوم است و $i (i = 0, 1)$ مرتبه تابع بسل است و

$$\lambda_1^2 = \frac{\rho \omega^2}{E^*} - \gamma^2 \quad (7)$$

ثابت های A_{1-4} به وسیله شرایط مرزی که در بخش های بعدی آورده می شوند، توصیف می گردد.

از جای گذاری معادلات (5)، (6) در معادله (2) اجزای تنش به صورت زیر ساده می شوند [12]:

$$\tau_{rx} = -iE^* [2\gamma^2 I_1(\gamma r) A_1 - 2\gamma^2 K_1(\gamma r) A_2 + (\gamma^2 - \lambda^2) I_1(\gamma r) A_3 + (\gamma^2 - \lambda^2) K_1(i\lambda r) A_4] e^{i(\omega t - \gamma x)} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} = \{ & [(\gamma^2 - \lambda^2) I_0(\gamma r) - \frac{2\gamma}{r} I_1(\gamma r)] A_1 + \\ & [(\gamma^2 - \lambda^2) K_0(\gamma r) + \frac{2\gamma}{r} K_1(\gamma r)] A_2 \} e^{i(\omega t - \gamma x)} \\ & + 2i\gamma \lambda \{ [I_0(i\lambda r) - \frac{1}{i\lambda r} I_1(i\lambda r)] A_3 \\ & - [K_0(i\lambda r) - \frac{1}{i\lambda r} K_1(i\lambda r)] A_4 \} e^{i(\omega t - \gamma x)} \end{aligned} \quad (9)$$

2-2- شرایط مرزی

ثابت های مجهول A_{1-4} با دنبال کردن شرایط مرزی به دست می آیند.

2-2-1- شرط مرزی داخلی

در مرز دیواره-سیال ($r = a$) شرط عدم لغزش تحمیل می شود. جابجایی شعاعی و طولی در مرز داخلی رگ به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$\begin{cases} \xi(a, x, t) = \xi_0 e^{i(\omega t - \gamma x)} \\ \eta(a, x, t) = \eta_0 e^{i(\omega t - \gamma x)} \end{cases} \quad (10)$$

که ξ_0, η_0 دامنه جابجایی شعاعی و طولی در لایه ی داخلی هستند. دامنه ی جابجایی طولی و شعاعی از طریق آزمایش های تجربی با حل مسائل جریان سیال به دست می آیند [6].

2-2-2- شرط مرزی خارجی

در مرز خارجی دیواره رگ ($r = h + a$) شرط مرزی به درجه تترینگ بستگی دارد. برای محاسبه حد تترینگ در گذشته از مفاهیمی چون جرم افزوده¹ و نیروی برشی خارجی² استفاده شده است که در این مطالعات به دست آوردن یا اندازه گیری درجه تترینگ لایه ی خارجی کار بسیار دشواری است [6]. اخیراً با پیشرفت های چشم گیر در عکس برداری، نشان داده شده است که می توان جابجایی در مرز خارجی را محاسبه کرد، با این وجود حل تحلیلی برای بدست آوردن درجه تترینگ موجود است [8]. به طور خاص، اگر دیواره کاملاً تترده باشد، جابجایی در لایه ی خارجی به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\begin{cases} \xi(a+h, x, t) = 0 \\ \eta(a+h, x, t) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

اگر دیواره کاملاً از تترینگ آزاد باشد با فرض نامحدود بودن ضخامت دیواره شرط مرزی خارجی به صورت زیر بازنویسی می شود:

$$\begin{cases} \lim_{r \rightarrow \infty} \xi(r, x, t) = 0 \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \eta(r, x, t) = 0 \end{cases} \quad (12)$$

¹ Added mass

² External shear force

³ Zamir and Hodis

2-3- حل براساس کوپلینگ محوری - شعاعی

اگر تقریب موج بلند استفاده نشود، معادلات حرکت در جهت محوری و شعاعی باید به طور هم زمان حل شوند. حل شامل معادلات (5) و (6) می شود. تنش برشی و تنش شعاعی داخل دیواره شریان از معادلات (8) و (9) به دست می آیند.

چهار ثابت مجهول A_{1-4} با استفاده از دو شرط مرزی داخلی در معادله (10) و دو شرط مرزی خارجی در معادله (11) و (12) یا معادله (14) محاسبه می شوند [1].

در این قسمت جابجایی ورودی ξ_0, η_0 در مرز داخلی در معادله (10) می تواند برای تعیین محدوده اعتبار تقریب موج بلند استفاده شود [1].

در بخش بعد ξ_0, η_0 از مسائل جریان سیال بدست می آیند. بنابراین حل جابجایی و تنش داخل دیواره ی رگ به این ورودی ها بستگی دارند.

3-3- حل براساس کوپلینگ دیواره سیال

هدف نهایی حل در بخش های قبلی، محاسبه جابجایی و تنش داخل دیواره ی رگ تحت شرایط فیزیولوژیکی است. این امر نیازمند این است که جابجایی ورودی ξ_0, η_0 در مرز داخلی دیواره از حل مسائل جریان سیال به جای حل بخش قبلی به دست آید که این خود نیازمند حل جابجایی و تنش داخل دیواره (معادله (5) و (6)) با حل کلاسیک برای جریان ضربانی در یک لوله ویسکوالاستیک است، یعنی [1]:

$$\begin{cases} P(r, x, t) = -i\rho_f \omega B J_0(i\gamma r) e^{i(\omega t - \gamma x)} \\ v(r, x, t) = [-i\gamma B J_0(i\gamma r) - i\gamma C J_1(i\lambda_2 r)] e^{i(\omega t - \gamma x)} \\ u(r, x, t) = [-i\gamma B J_0(i\gamma r) - i\lambda_2 C J_0(i\lambda_2 r)] e^{i(\omega t - \gamma x)} \end{cases} \quad (18)$$

که P فشار سیال و u, v به ترتیب سرعت در جهت شعاعی و محوری است و هم چنین

$$\lambda_2^2 = \frac{i\rho_f \omega}{\mu} + \gamma^2 \quad (19)$$

که ρ_f چگالی سیال، μ ویسکوزیته سیال و B, C ثابت هستند که باید محاسبه شوند.

دو دسته ی حل (معادلات (5) و (6) و (18)) از طریق شرایط مرزی در سطح دیواره-سیال دنبال می شوند [1]:

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \xi}{\partial t} \\ v = \frac{\partial \eta}{\partial t} \\ \mu \left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial r} \right] = E^* \left[\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial r} \right] \\ -P + 2\mu \frac{\partial v}{\partial r} = -\Omega + 2E^* \frac{\partial \eta}{\partial r} \end{cases} \quad (20)$$

چهار شرط در معادله (20) با دو شرط مرزی خارجی از معادله (11) و (12) یا (14)، شش معادله ی مورد نیاز را فراهم می کند، که بتوان شش مجهول A_{1-4}, B, C را به دست آورد. با دقت بیش تر در سیستم 6 معادله 6 مجهول می توان سرعت موج که پارامتر بسیار مهمی است را به دست آورد [13].

4- حل نهایی

در این مقاله از روش حل براساس کوپلینگ دیواره-سیال استفاده شده است. در قدم اول با استفاده از شرط مرزی برای دیواره کاملاً آزاد (معادله (12)) و معادله (20) دستگاه معادله نهایی به صورت زیر ساده می شود

$$\begin{aligned} & 1) i\Gamma J_0(i\Gamma) \bar{B} + iA_2 J_0(iA_2) \bar{C} + \Gamma K_0(\Gamma) \bar{A}_2 + iA_1 K_0(iA_1) \bar{A}_4 = 0 \\ & 2) J_1(i\Gamma) \bar{B} + J_1(iA_2) \bar{C} - K_1(\Gamma) \bar{A}_2 + K_1(iA_1) \bar{A}_4 = 0 \\ & 3) \{i(\Gamma^2 + A_1^2) J_0(i\Gamma) + 2 \frac{\omega \mu}{E^*} \Gamma^2 \left[J_0(i\Gamma) - \frac{1}{i\Gamma} J_1(i\Gamma) \right]\} \bar{C} + \\ & \quad \bar{B} + 2 \frac{\omega \mu}{E^*} \Gamma A_2 \left[J_0(iA_2) - \frac{1}{iA_2} J_1(iA_2) \right] \bar{C} + \\ & \quad \{(\Gamma^2 + A_1^2) K_0(\Gamma) - 2\Gamma^2 \left[K_0(\Gamma) + \frac{1}{\Gamma} K_1(\Gamma) \right]\} \bar{A}_2 \\ & \quad + 2i\Gamma A_1 \left[K_0(iA_1) + \frac{1}{iA_1} K_1(iA_1) \right] \bar{A}_4 = 0 \\ & 4) -2 \frac{\omega \mu}{E^*} \Gamma^2 J_1(i\Gamma) \bar{B} - \frac{\omega \mu}{E^*} (\Gamma^2 + A_2^2) J_1(iA_2) \bar{C} - \\ & \quad 2i\Gamma^2 K_1(\Gamma) \bar{A}_2 + i(\Gamma^2 + A_1^2) K_1(iA_1) \bar{A}_4 = 0 \\ & 5) \bar{A}_1 = 0 \\ & 6) \bar{A}_3 = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

برای شرط مرزی دیواره با تترینگ جزئی (معادله ی (14)) دستگاه معادله 6 معادله 6 مجهول به صورت زیر ساده می شود:

$$\begin{aligned} & 1) i\Gamma J_0(i\Gamma) \bar{B} + iA_2 J_0(iA_2) \bar{C} + \Gamma I_0(\Gamma) \bar{A}_1 + \Gamma K_0(\Gamma) \bar{A}_2 + iA_1 I_0(iA_1) \bar{A}_3 + iA_1 K_0(iA_1) \bar{A}_4 = 0 \\ & 2) J_1(i\Gamma) \bar{B} + J_1(iA_2) \bar{C} + I_1(\Gamma) \bar{A}_1 - K_1(\Gamma) \bar{A}_2 + I_1(iA_1) \bar{A}_3 + K_1(iA_1) \bar{A}_4 = 0 \\ & 3) \{i(\Gamma^2 + A_1^2) J_0(i\Gamma) + 2 \frac{\omega \mu}{E^*} \Gamma^2 \left[J_0(i\Gamma) - \frac{1}{i\Gamma} J_1(i\Gamma) \right]\} \bar{C} + \\ & \quad \bar{B} + 2 \frac{\omega \mu}{E^*} \Gamma A_2 \left[J_0(iA_2) - \frac{1}{iA_2} J_1(iA_2) \right] \bar{C} + \\ & \quad \{(\Gamma^2 + A_1^2) I_0(\Gamma) - 2\Gamma^2 \left[I_0(\Gamma) + \frac{1}{\Gamma} I_1(\Gamma) \right]\} \bar{A}_1 \\ & \quad + \{(\Gamma^2 + A_1^2) K_0(\Gamma) - 2\Gamma^2 \left[K_0(\Gamma) + \frac{1}{\Gamma} K_1(\Gamma) \right]\} \bar{A}_2 \\ & \quad - 2i\Gamma A_1 \left[I_0(iA_1) + \frac{1}{iA_1} I_1(iA_1) \right] \bar{A}_3 + \\ & \quad 2i\Gamma A_1 \left[K_0(iA_1) + \frac{1}{iA_1} K_1(iA_1) \right] \bar{A}_4 = 0 \\ & 4) -2 \frac{\omega \mu}{E^*} \Gamma^2 J_1(i\Gamma) \bar{B} - \frac{\omega \mu}{E^*} (\Gamma^2 + A_2^2) J_1(iA_2) \bar{C} + \\ & \quad 2i\Gamma^2 I_1(\Gamma) \bar{A}_1 - 2i\Gamma^2 K_1(\Gamma) \bar{A}_2 + i(\Gamma^2 - A_1^2) I_1(iA_1) \bar{A}_3 + i(\Gamma^2 + A_1^2) K_1(iA_1) \bar{A}_4 = 0 \\ & 5) -i\Gamma I_0(\Gamma(1+\bar{h})) \bar{A}_1 - i\Gamma K_0(\Gamma(1+\bar{h})) \bar{A}_2 \\ & \quad + A_1 I_0(iA_1(1+\bar{h})) \bar{A}_3 + A_1 K_0(iA_1(1+\bar{h})) \bar{A}_4 - \\ & \quad \frac{\xi_{1,\delta x}}{a} = 0 \\ & 6) I_1(\Gamma(1+\bar{h})) \bar{A}_1 - K_1(\Gamma(1+\bar{h})) \bar{A}_2 \\ & \quad + I_1(iA_1(1+\bar{h})) \bar{A}_3 + K_1(iA_1(1+\bar{h})) \bar{A}_4 - \\ & \quad \frac{\eta_{1,\delta r}}{a} = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

در این معادلات تمام ضرایب بدون بعد شده اند [9]:

$$\begin{cases} \bar{h} = \frac{h}{a} \\ (\bar{B}, \bar{C}) = \frac{(B, C)}{a^2 \omega} \\ (\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3, \bar{A}_4) = \frac{(A_1, A_2, A_3, A_4)}{a^2} \\ \Gamma = \gamma a \\ A_1 = \lambda_1 a \\ A_2 = \lambda_2 a \end{cases} \quad (23)$$

ورودی های دستگاه معادلات در جدول 1 آورده شده است.

جدول 1 پارامترهای فیزیولوژی استفاده شده در نتایج [9]

Table 1 Physiology parameters used in results [9]	
$E_0 = 411$ kPa	مدول الاستیک استاتیکی
$P = 13.3$ kPa	فشار سیال
$\mu = 0.04$ dynes/cm ²	ویسکوزیته ی سیال
$a = 1$ cm	شعاع رگ
$h = 0.15a$	ضخامت دیواره ی رگ
$\rho_f = 1.055$ g/cm ³	چگالی سیال
$\rho_w = 1.1$ g/cm ³	چگالی دیواره رگ

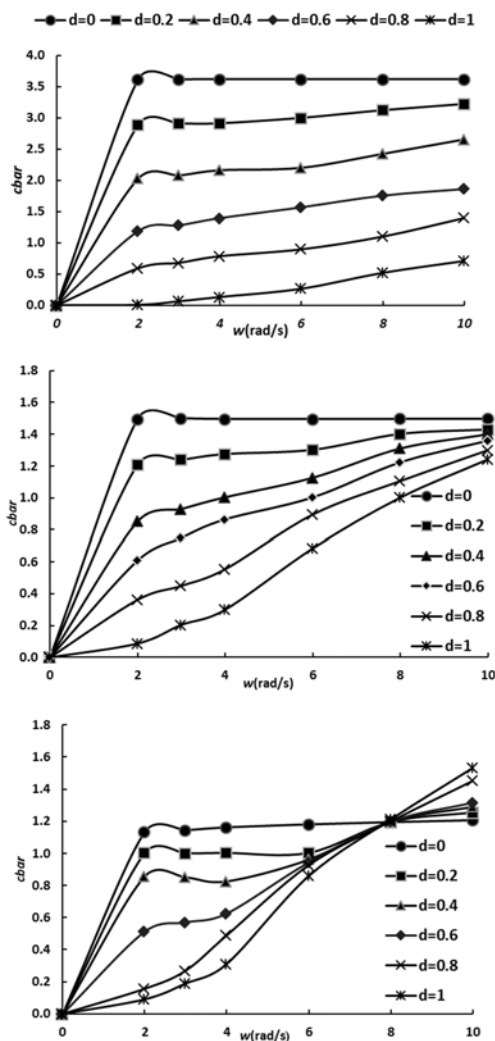


Fig. 2 Calculated pulse wave velocity for different degree of tethering for three material walls, elastic (center), viscoelastic (down) and stiff. (top) Here the tethering in radial and axial direction is considered equal d

شکل 2 سرعت موج نبض محاسبه شده برای درجه تترینگ‌های مختلف و برای سه جنس دیواره ویسکوالاستیک (پایین)، الاستیک (وسط) و سخت (بالا). در این جا درجه تترینگ در جهت شعاعی و محوری یکسان و برابر d در نظر گرفته شده است

محوری تغییرات سرعت موج نبض نسبت به درجه تترینگ در جهت شعاعی برای سه حالت دیواره مختلف بررسی شده است. همان‌طور که از "شکل 4" مشخص است با افزایش درجه تترینگ در جهت شعاعی برای دیواره سخت سرعت موج نبض تغییر قابل ملاحظه‌ای نمی‌کند اما برای دو حالت دیگر سرعت موج تغییر می‌کند.

6- بررسی نتایج

یکی از مهم‌ترین شاخص‌ها برای تشخیص بیماری‌های قلبی-عروقی و بیماری‌های مرتبط با افزایش سن سرعت موج نبض است [9]. تحقیقات گذشته نشان داده است که با افزایش سفتی شریانی سرعت موج نبض افزایش می‌یابد. مقدار معمول سرعت موج نبض برای افراد 20 ساله 5 m/s و برای افراد 80 ساله 12 m/s است [9]. با توجه به فیزیک جریان ضربانی سرعت موج در یک لوله با دیواره، با افزایش سختی افزایش می‌یابد به‌طوری که در یک لوله کاملاً صلب سرعت موج به بی‌نهایت می‌رسد [10]. همان‌طور که از نتایج

از حل دو دستگاه معادلات ضرایب مجهول و سرعت موج نبض محاسبه می‌شود و با استفاده از ضرایب و سرعت نبض محاسبه شده برای درجه تترینگ-های مختلف جابجایی و تنش داخل دیواره را می‌توان به‌دست آورد.

5- نتایج

دستگاه معادلات (21) و (22) با روش نیوتن رافسون¹ و با استفاده از برنامه-نویسی در محیط نرم‌افزار متلب² حل شده است. روش نیوتن رافسون به‌شدت به شرط اولیه برای ورودی برنامه وابسته است و برای شرط‌های اولیه مختلف جواب‌های متفاوتی به‌دست می‌آید. با استفاده از نزدیک‌ترین شرط مرزی سرعت موج نبض برای درجه تترینگ‌های مختلف به‌دست می‌آید. در نتایج از قسمت حقیقی سرعت موج نبض استفاده شده است. برای بی‌بعد کردن سرعت موج نبض از معادله مونس کرت‌وگ³ استفاده شده است [9]:

$$c_0 = \sqrt{\frac{E_0 h (2 + \bar{h})}{\rho_w (3\bar{h}^2 + 6\bar{h} + 4)}} \quad (24)$$

که $\bar{h} = h/a$ است و معادله (24) برای دیواره‌ی نازک $\bar{h} \ll 1$ به‌صورت زیر ساده می‌شود:

$$c_0 = \sqrt{\frac{E_0 h}{2\rho_w a}} \quad (25)$$

ضرایب معادله (3) برای سه حالت دیواره‌ی ویسکوالاستیک، الاستیک و سخت در جدول 2 آورده شده است.

در "شکل 2" سرعت موج نبض برای سه حالت دیواره‌ی ویسکوالاستیک، الاستیک و سخت برای درجه تترینگ‌های مختلف نشان داده شده است. مهم‌ترین نکته در این قسمت این است که سرعت موج نبض با افزایش درجه تترینگ برای دیواره‌ی الاستیک و سخت کاهش می‌یابد اما برای دیواره‌ی ویسکوالاستیک از این روند پیروی نمی‌کند.

در "شکل 2" برای دیواره‌ی ویسکوالاستیک نقطه برخورد خطوط در فرکانس 8 اتفاق می‌افتد. فرکانس جریان ضربانی قلب انسان به 10 نزدیک است، می‌توان این‌طور در نظر گرفت که در حیوانی که فرکانس قلبش به 8 نزدیک است تغییرات درجه تترینگ در دیواره ویسکوالاستیک تاثیری در سرعت موج نبض ندارد.

در "شکل 3" برای سه حالت دیواره مختلف، سرعت موج نبض برای درجه تترینگ‌های 0، 0.6، 0.8 و 1 بررسی شده است. برای درجه تترینگ صفر با افزایش سختی سرعت موج نبض افزایش یافته است اما با افزایش درجه تترینگ به‌خصوص در نزدیکی درجه یک این روند تقریباً برعکس می‌شود.

در "شکل 2 و 3" درجه تترینگ در جهت شعاعی و محوری یکسان در نظر گرفته شده‌اند. در "شکل 4" با ثابت فرض کردن درجه تترینگ در جهت

جدول 2 ضرایب معادله (3) برای دیواره ویسکوالاستیک، الاستیک و سخت [9]

	viscoelastic	elastic	Stiff
E_f	0.1	0.1	1
α	0.11	0	0
β	0.8	0	0
η_1	0.13	0.16	0.73
η_2	0.003	0.16	0.73

¹ Newton Raphson

² MATLAB

³ Moens-Korteweg

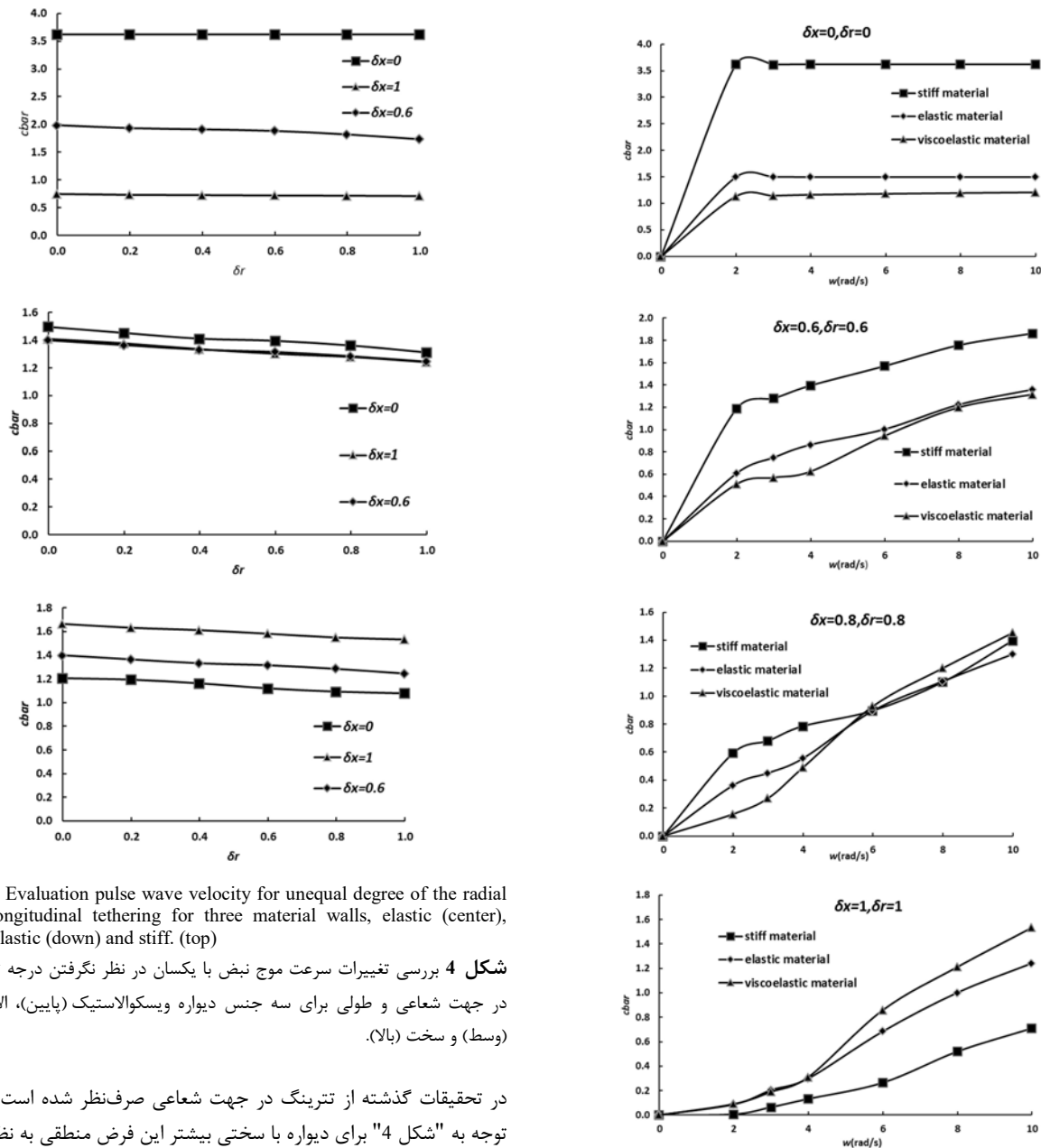


Fig. 3 Calculated pulse wave velocity for different degree of tethering for three material walls, elastic, viscoelastic and stiff

شکل 3 سرعت موج نبض محاسبه شده برای درجه تترینگ‌های مختلف و برای سه جنس دیواره ویسکوالاستیک الاستیک و سخت

مشخص است با در نظر گرفتن درجه تترینگ و افزایش آن، سرعت موج نبض از این روند پیروی نمی‌کند.

در این مقاله با استفاده از معادلات حاکم بر سیال خون و دیواره رگ و با استفاده از تترینگ به عنوان شرط مرزی این نتیجه به دست می‌آید که با افزایش سختی و با وجود تترینگ سرعت موج نبض محدود می‌شود (شکل 1 و 2). یکی از دلایل این امر این است که جابجایی شعاعی و طولی با افزایش درجه تترینگ به شدت کاهش می‌یابد و سرعت موج نبض به شدت، به نسبت جابجایی شعاعی به طولی بستگی دارد [9]. این نسبت در دیواره با تترینگ خیلی کمتر از دیواره کاملاً آزاد با سختی مشابه است [9].

Fig. 4 Evaluation pulse wave velocity for unequal degree of the radial and longitudinal tethering for three material walls, elastic (center), viscoelastic (down) and stiff. (top)

شکل 4 بررسی تغییرات سرعت موج نبض با یکسان در نظر نگرفتن درجه تترینگ در جهت شعاعی و طولی برای سه جنس دیواره ویسکوالاستیک (پایین)، الاستیک (وسط) و سخت (بالا).

در تحقیقات گذشته از تترینگ در جهت شعاعی صرف نظر شده است [8] با توجه به "شکل 4" برای دیواره با سختی بیشتر این فرض منطقی به نظر می‌آید اما برای دیواره الاستیک و ویسکوالاستیک با تغییر درجه تترینگ در جهت شعاعی سرعت موج نبض تغییر می‌کند. از "شکل 4" این طور می‌توان نتیجه گرفت که با افزایش سختی این فرض قابل قبول تر است.

در تحقیقات گذشته فقط برای درجه تترینگ صفر و یک سرعت موج نبض بررسی شده است [9]، و فقط به این نتیجه رسیده‌اند که درجه تترینگ، سرعت موج نبض را محدود می‌کند که در این مقاله روند تغییرات محاسبه شده است. که در این دو حالت نتایج مقاله با نتایج تحقیقات گذشته هم‌خوانی دارند (شکل 5).

7- جمع‌بندی

در این مقاله برای درجه تترینگ‌های مختلف و سختی‌های مختلف، سرعت موج نبض بررسی شده است زیرا برای استفاده از سرعت موج نبض به عنوان شاخص کلینیکی به مقدار این سرعت در درجه تترینگ‌ها و سفتی‌های مختلف نیاز است.

تترینگ و سفتی شریان را به دست آورد که این اطلاعات می تواند به تشخیص بیماری های قلبی عروقی مانند سفتی شریانی و تترینگ شریانی کمک کند.

8- تقدیر و تشکر

نویسندگان مقاله از خانم دکتر سیمونا هادیس¹ از دانشگاه کینگزویل² به خاطر پیشنهادهای ارزنده ایشان، صمیمانه تشکر و قدردانی می نمایند.

9- مراجع

- [1] S. Hodis, M. Zamir, Mechanical events within the arterial wall under the forces of pulsatile flow, A review, *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, Vol. 4, No. 8, pp. 1595-1602, 2011.
- [2] H. Atabek, Wave propagation through a viscous fluid contained in a tethered, initially stressed, orthotropic elastic tube, *Biophysical Journal*, Vol. 8, No. 5, pp. 626-649, 1968.
- [3] G. A. Holzapfel, T. C. Gasser, M. Stadler, A structural model for the viscoelastic behavior of arterial walls: Continuum formulation and finite element analysis, *European Journal of Mechanics-A/Solids*, Vol. 21, No. 3, pp. 441-463, 2002.
- [4] C. A. Taylor, J. Humphrey, Open problems in computational vascular biomechanics, Hemodynamics and arterial wall mechanics, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 198, No. 45, pp. 3514-3523, 2009.
- [5] R. Torii, M. Oshima, T. Kobayashi, K. Takagi, T. E. Tezduyar, Fluid-structure interaction modeling of a patient-specific cerebral aneurysm, influence of structural modeling, *Computational Mechanics*, Vol. 43, No. 1, pp. 151-159, 2008.
- [6] M. Cinthio, A. R. Ahlgren, J. Bergkvist, T. Jansson, H. W. Persson, K. Lindstrom, Longitudinal movements and resulting shear strain of the arterial wall, *American Journal of Physiology*, Vol. 291, No. 1, pp. H394, 2006.
- [7] M. F. O'Rourke, Arterial aging, Pathophysiological principles, *Vascular Medicine*, Vol. 12, No. 4, pp. 329-341, 2007.
- [8] S. Hodis, M. Zamir, Arterial wall tethering as a distant boundary condition, *Physical Review E*, Vol. 80, No. 5, pp. 051913, 2009.
- [9] S. Hodis, M. Zamir, Pulse wave velocity as a diagnostic Index: The pitfalls of tethering versus stiffening of the arterial wall, *Journal of Biomechanics*, Vol. 44, No. 7, pp. 1367-1373, 2011.
- [10] M. Zamir, *The physics of pulsatile flow*, First Edition, pp. 113-142, New York: Springer, 2000.
- [11] D. Craiem, R. L. Armentano, A fractional derivative model to describe arterial viscoelasticity, *Biorheology*, Vol. 44, No. 4, pp. 251-263, 2007.
- [12] I. Mirsky, Pulse velocities in an orthotropic elastic tube, *The Bulletin of Mathematical Biophysics*, Vol. 29, No. 2, pp. 311-318, 1967.
- [13] S. Hodis, M. Zamir, Mechanical events within the arterial wall: the dynamic context for elastin fatigue, *Journal of biomechanics*, Vol. 42, No. 8, pp. 1010-1016, 2009.
- [14] D. J. Patel, A. J. Mallos, D. L. Fry, Aortic mechanics in the living dog, *Journal of Applied Physiology*, Vol. 16, No. 2, pp. 293-299, 1961.

¹ Simona Hodis

² Kingsville

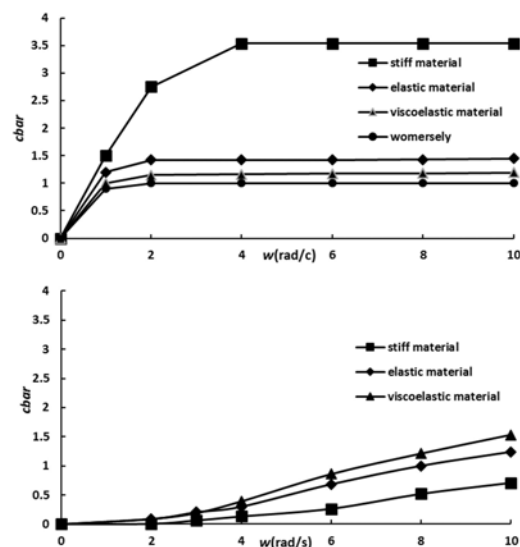


Fig. 5 The results for the tethering 0 (top) and 1 (down) in the previous research [9]

شکل 5 نتایج بدست آمده برای درجه تترینگ 0 (نمودار بالا) و 1 (نمودار پایین) در تحقیقات گذشته [9]

با استفاده از این تحقیق ارتباط بین سرعت موج نبض و سفتی شریانی و درجه تترینگ کاملاً مشخص می شود.

درخت شریانی یک سیستم همگن نیست بنابراین الاستیسیته و درجه تترینگ در قسمت های مختلف درخت شریانی متفاوت است [1]. با استفاده از مطالعات تجربی روی سگ به این نتیجه رسیده اند که با حرکت از آئورت به سمت شریان های محیطی درجه تترینگ افزایش می یابد همچنین سرعت موج نبض در شریان های محیطی کاهش می یابد و نکته دیگر این که شریان های محیطی کمتر تحت تاثیر سن هستند [14]. نتایج مقاله نیز نشان می دهد که سرعت کمتر در شریان های محیطی می تواند به علت افزایش درجه تترینگ باشد.

نکته نهایی این است که فیزیولوژی بیماری های مرتبط به افزایش سن و بیماری های قلبی عروقی پیچیده و چندگانه است [1]. تمرکز ما در این مقاله به تاثیر درجه تترینگ در تغییرات سرعت موج نبض و استفاده از این نتایج به عنوان ابزار تشخیصی برای تعیین سفتی شریان ها بود.

برای ادامه کار می توان با استفاده از تصاویر و فیلم های اولتراسونیک و نرم افزارهای تحلیل عکس، شعاع و ضخامت رگ و سرعت موج نبض یک شریان را محاسبه کرد و با استفاده از دستگاه معادله ای مشابهی، درجه