مجله مهندسی مکانیک مدرس، بهمن 1395، دوره 16، شماره 11، ص‌ص 397-408

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

حل عددی معادله جریان و انتقال جرم در محیط متخلخل با استفاده از روش گالرکین ناپیوسته

علی رئیسی[1] ، حمیدرضا غفوری[2*] ، داود رستمی[3]

1- دانشجوی دکتری، مهندسی عمران، دانشگاه شهید چمران، اهواز
2- استاد، مهندسی عمران، دانشگاه شهید چمران، اهواز
3- استاد، گروه ریاضی، دانشگاه بین المللی امام خمینی، قزوین
* اهواز، صندوق پستی 135، ghafouri_h@scu.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 23 مرداد 1395
پذیرش: 26 شهریور 1395
ارائه در سایت: 24 آبان 1395

کلید واژگان:
گالرکین ناپیوسته
تقریب سرعت هماهنگ
روش‌های سازگار
محدود کننده شیب

چکیده

در این تحقیق به بررسی و ارزیابی روش‌های گالرکین ناپیوسته در شبیه‌سازی معادله انتقال جرم و جریان پرداخته شده است. برای این منظور معادلات غیر خطی حاکم بر جریان و انتقال جرم در یک محیط متخلخل اشباع با استفاده از چند روش گالرکین ناپیوسته منقطع‌سازی گردید و از روش ضمنی برای منقطع‌سازی زمانی استفاده شد. در اینجا هر دو نوع شرط مرزی دیریشله و کوشی برای معادله انتقال جرم اعمال شد. بمنظور جلوگیری از خطای ناشی از ناسازگاری روش‌های بکار گرفته شده در منقطع‌سازی معادله جریان و معادله انتقال جرم، تنها از ترکیب‌های سازگار استفاده گردید. پس از منقطع‌سازی، روش پیکارد اصلاح شده برای خطی‌سازی معادلات جبری حاصله بکار گرفته شد که برای از بین بردن نوسانات غیرفیزیکی در حل عددی از محدود کننده شیب استفاد شد. برای تقریب سرعت هماهنگ، روش فرالکوویچ-نابنر بکار گرفته شد. بمنظور ارزیابی و صحت‌سنجی مدل از سه مسئله بهره گرفته شد که نتایج حاصل حاکی از دقت بسیار مناسب و پخش عددی کم مدل دارد. همچنین با استفاده از یک مسئله سیال ساکن، اهمیت تقریب سرعت هماهنگ نشان داده شد.

Numerical Solution of coupled Flow and Mass Transport equations in porous medium Using Discontinuous Galerkin Method

Ali Raeisi[1], Hamid Reza Ghafouri [1*] ,Davood Rostamy [2]

1- Department of Civil Engineering, Shahid Chamran University, Ahvaz, Iran.
2- Department of Mathematics, Imam Khomeini International University, Qazvin, Iran.
* P.O.B. 135, Ahvaz, Iran, ghafouri_h@scu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 13 August 2016
Accepted 16 September 2016
Available Online 14 November 2016

Keywords:
Discontinuous Galerkin
Locally conservative
Consistent velocity approximation
Compatible algorithms
Slope limiter

ABSTRACT

The present paper aims to evaluate a class of discontinuous Galerkin methods for modeling of coupled flow and mass transport equations in porous medium. Various combinations of primal discontinuous Galerkin methods were used for discretization of the coupled nonlinear system of flow and mass transport equations in a saturated porous medium and a fully implicit backward Euler scheme was applied for temporal discretization. The primal DGs have been developed successfully for density-dependent flows by applying both Cauchy and Dirichlet boundary conditions to the mass transport equation. To avoid the errors arising from non-compatible selection of DG methods for flow and mass transport equations, only compatible combinations were applied. To linearize the resulting nonlinear systems, Picard iterative technique was applied and a slope limiter was used to eliminate the nonphysical oscillations appeared in solution. For the purpose of consistent velocity approximation, Frolkovic-Knabner method was used. Three benchmark problems were simulated for validation and verification of the numerical code, which the results from the simulations show a good accuracy and low numerical dispersion for the model. Finally, to highlight the significance of consistent velocity approximation, a hydrostatic test problem was prepared.

1- مقدمه

مدل‌سازی عددی جریان‌های وابسته به چگالی در آب‌های زیرزمینی نقش بی‌بدیلی در پیش‌بینی وضعیت آب‌های زیرزمینی و انتشار آلودگی دارد. در مدل‌سازی چنین جریان‌هایی معمولاً از یک جفت معادله کوپل شده شامل معادله جریان و انتقال جرم به عنوان معادلات حاکم استفاده می‌شود. پر واضح است که دقت نتایج تا حد زیادی به خود مدل عددی مربوط می‌شود. به علت اینکه روش‌های گالرکین ناپیوسته دارای بقاء و دقت محلی و پخش عددی کمتر هستند، گزینه مناسبی برای مدل‌سازی این نوع مسائل به‌شمار می‌روند. از این رو در این تحقیق دسته‌ای از روش‌های گالرکین ناپیوسته[1]

[1] Discontinuous Galerkin

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:
A. Raeisi, H. R. Ghafouri, D. Rostamy, Numerical Solution of coupled Flow and Mass Transport equations in porous medium Using Discontinuous Galerkin Method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 11, pp. 397-408, 2016 (in Persian)

(DG) بنام روش‌های پنالتی داخلی[1] یا همان گالرکین ناپیوسته اولیه[2] برای منقطع‌سازی مکانی معادلات حاکم استفاده شد.

تاکنون تحقیقات متعددی روی مدل‌سازی جریان‌های وابسته به چگالی با استفاده از روش‌های تفاضل محدود، المان محدود، روش مشخصه‌ها، احجام محدود و ... انجام شده است [1-4]. همچنین مطالعات گوناگونی وجود دارد که به بررسی جنبه‌های مختلف جریان‌های وابسته به چگالی با استفاده از مدل‌های عددی پرداختند (برای نمونه [5-7])، اما علاوه بر روش‌های عددی معمول، در بسیاری از تحقیقات از ترکیب دو یا چند روش عددی برای حل معادلات حاکم استفاده شده است. از جمله می‌توان به کار آکرر و همکاران [8] و بوئس و اولتئان [9] اشاره کرد که از ترکیب روش المان محدود مختلط ترکیبی[3] (MHFE) و المان محدود ناپیوسته[4] (DFE) برای منقطع‌سازی معادلات استفاده نمودند. همچنین آکرر و یونس [10] و کونز و همکاران [11] از ترکیب روش‌های المان محدود مختلط[5] (MFE)، DG و روش تقریب شار چند نقطه‌ای[6] (MPFA) بهره بردند. علاوه براین کونز و همکاران [11] بجای روش DG، از ترکیب روش احجام محدود[7] (FVM) نیز استفاده کردند. پوویچ [12] از ترکیب دو روش گالرکین ناپیوسته محلی[8] (LDG) و گالرکین ناپیوسته اولیه برای حل مسائل وابسته به چگالی استفاده نمود.

از روش‌های گالرکین ناپیوسته اولیه یا همان روش‌های پنالتی داخلی تا به امروز برای منقطع‌سازی جفت معادلات انتقال جرم و جریان در مسائل جابجایی امتزاج‌پذیر[9] درون محیط متخلخل بارها استفاده شده است. معادلات دیفرانسیل حاکم بر این مسائل به لحاظ ریاضی متشکل از یک معادله بیضوی و یک معادله همرفت-پخشیدگی[10] است. چندین محقق از ترکیب روش MFE و DG به ترتیب برای معادله جریان و معادله انتقال جرم استفاده نمودند. سان و همکاران [13] این ترکیب را به همراه یک عملگر میان‌بر[11] بمنظور همگرایی روش DG بکار گرفتند. اخیراً نیز لی و ریویه [14] روشی بر مبنای این ترکیب بدون هیچ گونه محدود کننده‌ای[12] برای محیط‌های ناهمگن توسعه دادند که در آن از روش رنگ-کوتای مرتبه بالا[13] برای تقریب زمان استفاده شده بود. اما ریویه و ویلر [15] به تشریح یک روش بر مبنای ترکیب کامل DG برای شبیه‌سازی مسائل انتقال امتزاج‌پذیر پرداختند. آنها گام‌های زمانی معادله فشار را چندین برابر بزرگتر از گام‌های زمانی معادله غلظت انتخاب نمودند. سان و ویلر [16] از روش‌های گالرکین ناپیوسته اولیه به همراه عملگر میان‌بر برای مسائل انتقال واکنشی[14] استفاده کردند. از کارهای دیگری که کاملاً از روش‌های DG در این زمینه استفاده کردند می‌توان به کار اپشتین و ریویه [17] اشاره کرد. در آن تحقیق آنها سه روش متفاوت DG اولیه یعنی، روش پنالتی داخلی متقارن[15] (SIPG)، روش پنالتی داخلی نامتقارن[16] (NIPG) و روش پنالتی داخلی ناقص[17] (IIPG) را مورد بررسی قرار دادند. این نکته قابل ذکر است که در مسائل انتقال امتزاج‌پذیر فوق، بجز در تحقیق لی و ریویه [14]، در هیچ کدام ترم شناوری (ثقل) در معادله دارسی در نظر گرفته نشده است. از آنجا که تاکنون روش‌های DG اولیه بطور کامل در منقطع‌سازی معادلات جریان‌های وابسته به چگالی بکار گرفته نشده، در اینجا از سه ترکیب متفاوت DG اولیه برای مدل‌سازی این نوع جریان‌ها استفاده شد. از دیگر موارد نوآوری‌های تحقیق می‌توان به توسعه و بکارگیری روش تقریب سرعت هماهنگ فرالکوویچ-نابنر در ترکیب با روش‌های گالرکین ناپیوسته اشاره کرد.

در این تحقیق هدف ارزیابی روش‌های DG اولیه با بکارگیری روش فرالکوویچ-نابنر برای تقریب سرعت هماهنگ می‌باشد. در این روش از المان‌های خطی مثلثی استفاده شد که نسبت به روشی که برای تقریب بار هیدرولیکی از چندجمله‌ای‌های مرتبه دو استفاده می‌شود، به لحاظ محاسباتی ارزان‌تر است. در اینجا سعی براین است که دقت روش گالرکین ناپیوسته به همراه روش فرالکوویچ-نابنر مورد بررسی و ارزیابی قرار گیرد. قابل ذکر است که تفاوت این تحقیق با کار جامعی و غفوری [18،19] به کاربرد روش‌های DG در دو زمینه متفاوت سیالات امتزاج‌پذیر و سیالات دوفازی (امتزاج ناپذیر) برمی‌گردد. همچنین تحقیق حتیت و فیروزآبادی [20] به منقطع‌سازی معادلات سیالات امتزاج‌پذیر چندجزئی بدون در نظر گرفتن ترم پراکندگی با استفاده از روش MFE و DG می‌پردازد. تحقیق حاضر نیز از این جنبه با تحقیق پن و همکاران [21] متفاوت است که آنها به حل معادله ریچاردز (جریان‌های اشباع متغیر) با استفاده از روش‌های اجزاء محدود پرداخته‌اند.

2- مدل ریاضی مسئله

2-1- معادلات حاکم بر جریان

معادلات حاکم بر جریان‌های وابسته به چگالی تحت شرایط دمای ثابت، از دو معادله دیفرانسیل جفت شده جریان و انتقال جرم تشکیل شده است. این معادلات به ترتیب از ترکیب معادلات دارسی و فیک با معادله توازن جرم بدست می‌آید. در یک سیستم آبخوان اشباع معادله جریان برحسب بار هیدرولیکی آب شیرین معادل را می‌توان به صورت ذیل بیان نمود [23،22]:

$$S_0 \frac{\partial h}{\partial t} + \phi \beta_c \frac{\partial C}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\frac{\rho}{\rho_0}\mathrm{q}\right) = \frac{\rho_R}{\rho_0} Q_R - \frac{\rho}{\rho_0} Q_P \qquad (1)$$

$$h = z + \frac{P}{\rho_0 g} \qquad (2)$$

با توجه به اینکه در بیشتر مسائل جریان آب زیرزمینی اشباع، عدد رینولدز[18] در محدوده کمتر از ده می‌باشد [23]، در رابطه فوق می‌توان نوشت:

$$\mathrm{q} = -\frac{\mu_0}{\mu}\mathrm{K}_0\left(\nabla h + \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}\nabla z\right) \qquad (3)$$

$$\mathrm{K}_0 = \frac{\rho_0 g k}{\mu_0}, \qquad \mathrm{K} = \frac{\rho g k}{\mu} \qquad (4)$$

که در روابط بالا، S_0 ضریب ذخیره ویژه آبخوان $[L^{-1}]$، h بار هیدرولیکی آب شیرین معادل $[L]$، C کسر جرمی غلظت نسبی $[-]$، P فشار سیال $[ML^{-1}T^{-2}]$، ρ چگالی سیال $[ML^{-3}]$، ρ_0 چگالی آب شیرین (چگالی مرجع) $[ML^{-3}]$، ϕ تخلخل محیط متخلخل $[-]$، Q_P و Q_R بترتیب میزان برداشت و تغذیه از آب زیرزمینی $[T^{-1}]$، ρ_R چگالی آب تغذیه شده $[ML^{-3}]$، q سرعت دارسی $[LT^{-1}]$، β_c ضریب تفاوت چگالی آب شور و شیرین $[-]$، K_0 تانسور هدایت هیدرولیکی آب شیرین (مرجع) $[LT^{-1}]$، K،

[1] Interior penalty methods
[2] Primal DG
[3] Mixed Hybrid Finite Element method
[4] Discontinuous Finite Element method
[5] Mixed Finite Element method
[6] Multi-Point Flux Approximation
[7] Finite Volume Method
[8] Local Discontinuous Galerkin
[9] Miscible displacement
[10] Convection-diffusion
[11] Cut-off operator
[12] Limiter
[13] High-order Runge-Kutta
[14] Reactive transport
[15] Symmetric interior penalty Galerkin
[16] Non-symmetric interior penalty Galerkin
[17] Incomplete interior penalty Galerkin
[18] Reynolds number

تانسور هدایت هیدرولیکی سیال $[LT^{-1}]$، k تانسور ضریب نفوذپذیری $[L^2]$، μ ویسکوزیته آب $[ML^{-1}T^{-1}]$، μ_0 ویسکوزیته آب شیرین $[ML^{-1}T^{-1}]$، g شتاب ثقل $[LT^{-2}]$ و z تراز نسبت به سطح مبنا در جهت قائم $[L]$ می‌باشد.

همینطور معادله انتقال جرم (نمک) را می توان برحسب کسر جرمی نسبی (برای اختصار کسر جرمی) به ترتیب ذیل بدست آورد [23]:

$$\frac{\partial(\phi\rho C)}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho C\mathrm{q} - \phi\rho \mathrm{D}\nabla C) = \rho_R C_R Q_R - \rho C Q_P \quad (5)$$

$$\phi\, \mathrm{D} = (\alpha_T|\mathrm{q}| + \phi\tau D_m)\mathrm{I} + (\alpha_L - \alpha_T)\frac{\mathrm{q}\mathrm{q}^T}{|\mathrm{q}|} \quad (6)$$

که در روابط بالا، C_R کسر جرمی آب تغذیه شده $[-]$، D تانسور ضریب پراکندگی هیدرودینامیکی $[L^2T^{-1}]$، $|\cdot|$ علامت نشان‌دهنده مقدار یک بردار، D_m ضریب پخشیدگی ملکولی $[L^2T^{-1}]$، τ ضریب پیچاپیچی[1] محیط متخلخل $[-]$، I ماتریس واحد و α_L و α_T بترتیب پراکندگی طولی و عرضی $[L]$ می‌باشد.

در این تحقیق رابطه میان تغییر کسر جرمی و چگالی / ویسکوزیته سیال به صورت خطی در نظر گرفته شده است [24]:

$$\rho = \rho_0(1 + \beta_c C) \quad (7)$$

$$\mu = \mu_0(1 + \beta_\mu C) \quad (8)$$

که β_μ ضریبی است که کسر جرمی را با ویسکوزیته سیال مرتبط می‌سازد.

2-2- شرایط اولیه و مرزی

دامنه حل $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ را با مرز $\partial\Omega$ در نظر بگیرید، شرایط اولیه برای معادله جریان (1) و معادله انتقال جرم (2) را می‌توان به شکل زیر تعریف نمود:

$$h(0,x,y) = h_0 \quad \text{روی کل دامنه}\ \Omega \quad (9)$$

$$C(0,x,y) = C_0 \quad \text{روی کل دامنه}\ \Omega \quad (10)$$

در روابط فوق h_0 و C_0 بترتیب بار هیدرولیکی آب شیرین و کسر جرمی غلظت در زمان شروع شبیه‌سازی است.

برای معادله جریان شرایط مرزی به صورت شرط مرزی دیریشله و نیومن[2] تعریف می‌شود:

$$h = h_D \quad \text{روی مرز}\ \partial\Omega_D \quad (11)$$

$$\mathrm{q}\cdot\mathrm{n} = q_N \quad \text{روی مرز}\ \partial\Omega_N \quad (12)$$

که در آن رابطه $\partial\Omega = \partial\Omega_D \cup \partial\Omega_N$ برقرار است و n بردار برون‌سوی عمود بر مرز، h_D بار هیدرولیکی روی مرز دیریشله $(\partial\Omega_D)$ و q_N شار خروجی از مرز نیومن $(\partial\Omega_N)$ است.

برای معادله انتقال جرم دو نوع شرط مرزی بکار رفته است که بسته به مسئله تنها یکی از آنها را می توان بکار برد، مجموعه اول شامل شرط مرزی دیریشله و نیومن و مجموعه دوم شامل شرط مرزی مختلط (کوشی) و شرط مرزی نیومن است. شرط مرزی کوشی روی مرزی که جریان ورودی است اعمال می‌گردد و شرط مرزی نیومن روی قسمتی از مرز که جریان خروجی است، تعریف می‌شود، مرز ورودی و خروجی به شکل زیر بیان می‌شود:

$$\partial\Omega_{in} = \{\mathrm{x} \in \partial\Omega:\ \mathrm{q}\cdot\mathrm{n} < 0\}, \qquad \partial\Omega_{\mathrm{out}} = \partial\Omega \setminus \partial\Omega_{\mathrm{in}} \quad (13)$$

مجموعه اول شرط مرزی عبارت است از:

$$(\rho C\mathrm{q} - \phi\rho\mathrm{D}\nabla C)\cdot\mathrm{n} = \rho_{\mathrm{in}} C_{\mathrm{in}}\mathrm{q}\cdot\mathrm{n} \quad \text{روی مرز}\ \partial\Omega_{\mathrm{in}} \quad (14)$$

$$-\mathrm{D}\nabla C\cdot\mathrm{n} = 0 \quad \text{روی مرز}\ \partial\Omega_{\mathrm{out}} \quad (15)$$

و مجموعه دوم شرط مرزی به شکل زیر است:

$$C = C_D \quad , \quad \text{روی مرز}\ \partial\Omega_D \quad (16)$$

$$-\mathrm{D}\nabla C\cdot\mathrm{n} = 0 \quad , \text{روی مرز}\ \partial\Omega_N \quad (17)$$

بنابراین خواهیم داشت: $\partial\Omega = \partial\Omega_D \cup \partial\Omega_N = \partial\Omega_{\mathrm{in}} \cup \partial\Omega_{\mathrm{out}}$، ρ_{in} و C_{in} بترتیب چگالی و کسر جرمی غلظت ورودی می‌باشد و C_D مقدار کسر جرمی روی مرز دیریشله است.

3- فرمول‌بندی به روش گالرکین ناپیوسته

در تحقیق حاضر برای گسسته سازی معادلات دیفرانسیل حاکم بر مسئله از دسته‌ای از روش‌های گالرکین ناپیوسته، بنام روش‌های گالرکین ناپیوسته اولیه یا روش‌های پنالتی داخلی، استفاده شده است. این روش‌ها عبارتند از SIPG، NIPG، و IIPG. در اینجا از همه روش‌ها برای حل مسائل مختلف بهره برده شده است. قبل از گسسته سازی معادلات علائم ریاضی بکار برده شده معرفی شود:

دوره کل شبیه‌سازی با حرف T نمایش داده می‌شود و تقسیم بندی آن به زیر بازه‌ها به شکل $0 = t_0 < t^1 < t^2 < \cdots < t^N = T$ در نظر گرفته می‌شود، همچنین در نظر بگیرید دامنه حل Ω بر اساس تقسیم‌بندی $\mathcal{E}_h = \{E_i\}_{N_h}$ به المان‌های زیر مجموعه تقسیم بندی شود. در اینجا منظور از N_h همان تعداد المان و E نمایش دهنده یک المان دلخواه است. اندازه و مرز یک المان بترتیب با $|E|$ و ∂E نشان داده می‌شود. در صورتی که مجموعه همه وجوه المان‌ها با $\mathcal{F}_h$ نمایش داده شود، آنگاه مجموعه وجوه داخلی و وجوه مرزی را می‌توان بگونه‌ای تعریف نمود که $\mathcal{F}_h = \mathcal{F}_h^I \cup \mathcal{F}_h^B$. وجوه مرزی را می‌توان به وجوه دیریشله و نیومن یا وجوه ورودی و خروجی جریان تقسیم‌بندی نمود بگونه‌ای که خواهیم داشت، $\mathcal{F}_h^B = \mathcal{F}_h^D \cup \mathcal{F}_h^N = \mathcal{F}_h^{\mathrm{in}} \cup \mathcal{F}_h^{\mathrm{out}}$. اگر Γ یک وجه داخلی با اندازه $|\Gamma|$ باشد، آنگاه دو المان مجاور همانند E_Γ^- و E_Γ^+ برای آن وجود دارد بطوریکه $\Gamma = \partial E_\Gamma^- \cap \partial E_\Gamma^+$. همینطور n_Γ به عنوان بردار عمود بر Γ در نظر گرفته می‌شود که جهت آن از E_Γ^- به E_Γ^+ مطابق جهت n_Γ^- و مخالف جهت n_Γ^+ است. اگر اثرات[3] تابعی همچون ψ روی وجه Γ (مشترک بین دو المان) با $\psi_\Gamma^\pm$ نمایش داده شود، سپس پرش و میانگین تابع ψ روی وجه Γ چنین تعریف می‌شود:

$$[\![\psi]\!] = \psi_\Gamma^- - \psi_\Gamma^+ \quad \text{(18-الف)}$$

$$\langle\psi\rangle = \frac{1}{2}(\psi_\Gamma^- + \psi_\Gamma^+) \quad \text{(18-ب)}$$

در پایان فضای گالرکین ناپیوسته بصورت $\mathcal{V}_h^p = \{v \in L^2(\Omega): v|_E \in P_p(E) \quad \forall E \in \mathcal{E}_h\}$ در نظر گرفته می‌شود که به فضای سوبولوف $\mathcal{H}^s(\mathcal{E}_h)$ $(s \geq 1)$ تعلق دارد، در اینجا $P_p(E)$ بعنوان فضای چند جمله‌ای‌هایی با مرتبه کل کوچکتر مساوی p است و متناظر با آن p_h و p_c بترتیب بعنوان مرتبه کل چند جمله‌ای‌های تقریب مربوط به بار هیدرولیکی (h) و کسر جرمی غلظت (C) شناخته می‌شوند.

3-1- فرم ضعیف معادلات حاکم

با ضرب معادلات دیفرانسیل (1) و (5) در توابع آزمون متناظر، سپس انتگرال‌گیری روی یک المان، استفاده از قضیه گرین، جمع روی تمامی المان‌های درون $\mathcal{E}_h$ و در نهایت با اعمال شرایط مرزی، فرم ضعیف مربوط به هر معادله بدست خواهد آمد. بنابراین فرض نمایید که v یک تابع آزمون متعلق به فضای $\mathcal{H}^s(\mathcal{E}_h)$ باشد. با ضرب آن در معادله (1)، فرم ضعیف معادله جریان به شکل زیر بدست می‌آید:

[1] Tortuosity
[2] Dirichlet and Neumann
[3] Traces

$$\left(S_0\frac{\partial h}{\partial t},v\right)_\Omega+\mathcal{A}_{\epsilon_F}(h,v;C)=\mathcal{L}_1(v;C) \tag{19}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{\epsilon_F}(h,v;C)=&\sum_{E\in\mathcal{E}_h}\int_E \mathrm{K}\nabla h\cdot\nabla v-\sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^I\cup\mathcal{F}_h^D}\int_\Gamma\langle\mathrm{K}\nabla h\cdot \mathrm{n}_\Gamma\rangle[\![v]\!]\\&+\epsilon_F\sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^I\cup\mathcal{F}_h^D}\int_\Gamma\langle\mathrm{K}\nabla v\cdot \mathrm{n}_\Gamma\rangle[\![h]\!]\\&+\sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^I\cup\mathcal{F}_h^D}\frac{\sigma_\Gamma^F}{|\Gamma|}\int_\Gamma[\![h]\!][\![v]\!]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1(v;C)=&\int_\Omega\frac{\rho_RQ_R-\rho Q_P}{\rho_0}v-\int_\Omega\phi\beta_c\frac{\partial C}{\partial t}v\\&+\epsilon_F\sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^D}\int_\Gamma(\mathrm{K}\nabla v\cdot\mathrm{n}_\Gamma)h_D\\&+\sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^D}\frac{\sigma_\Gamma^F}{|\Gamma|}\int_\Gamma vh_Dv-\sum_{E\in\mathcal{E}_h}\int_E \mathrm{K}\beta_cC\nabla z\cdot\nabla\\&+\sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^N}\int\frac{\rho}{\rho_0}vq_N\\&+\sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^I\cup\mathcal{F}_h^D}\int_\Gamma\langle\mathrm{K}\beta_cC\nabla z\cdot\mathrm{n}_\Gamma\rangle[\![v]\!]\end{aligned}$$

بطور مشابه با اعمال مجموعه شرایط مرزی اول (14) و (15) و در نظر گرفتن $w\in\mathcal{H}^s(\mathcal{E}_h)$، فرم ضعیف معادله انتقال جرم بصورت زیر نتیجه می‌شود:

$$\left(\frac{\partial(\phi\rho C)}{\partial t},w\right)_\Omega+\mathcal{B}_{\epsilon_T}(C,w;\mathrm{q})=\mathcal{L}_2(w;\mathrm{q}) \tag{20}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{\epsilon_T}(C,w;\mathrm{q})=&\sum_{E\in\mathcal{E}_h}\int_E\phi\rho\mathrm{D}\nabla C\cdot\nabla w\\&-\sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^I}\int_\Gamma\langle\phi\rho\mathrm{D}\nabla C\cdot\mathrm{n}_\Gamma\rangle[\![w]\!]\\&+\epsilon_T\sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^I}\int_\Gamma\langle\phi\rho\mathrm{D}\nabla w\cdot\mathrm{n}_\Gamma\rangle[\![C]\!]\\&+\sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^I}\frac{\sigma_\Gamma^T}{|\Gamma|}\int_\Gamma[\![C]\!][\![w]\!]-\sum_{E\in\mathcal{E}_h}\int_E\rho C\mathrm{q}\cdot\nabla w\\&+\sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^I}\int_\Gamma\langle\rho\mathrm{q}\cdot\mathrm{n}_\Gamma\rangle C^{\mathrm{UP}}[\![w]\!]+\sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^{out}}\int_\Gamma\rho\mathrm{q}\\&\cdot\mathrm{n}_\Gamma Cw\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_2(w;\mathrm{q})=\int_\Omega(\rho_RC_RQ_R-\rho CQ_P)w+\sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^{in}}\int_\Gamma\rho_{in}C_{in}\mathrm{q}\cdot\mathrm{n}_\Gamma w$$

برای مجموعه دوم شرایط مرزی (16) و (17) فرم ضعیف به صورت زیر حاصل خواهد شد:

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{\epsilon_T}(C,w;\mathrm{q})=&\sum_{E\in\mathcal{E}_h}\int_E\phi\rho\mathrm{D}\nabla C\cdot\nabla w\\&-\sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^I\cup\mathcal{F}_h^D}\int_\Gamma\langle\phi\rho\mathrm{D}\nabla C\cdot\mathrm{n}_\Gamma\rangle[\![w]\!]\\&+\epsilon_T\sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^I\cup\mathcal{F}_h^D}\int_\Gamma\langle\phi\rho\mathrm{D}\nabla w\cdot\mathrm{n}_\Gamma\rangle[\![C]\!]\\&+\sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^I\cup\mathcal{F}_h^D}\frac{\sigma_\Gamma^T}{|\Gamma|}\int_\Gamma[\![C]\!][\![w]\!]-\sum_{E\in\mathcal{E}_h}\int_E\rho C\mathrm{q}\\&\cdot\nabla w+\sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^I}\int_\Gamma\langle\rho\mathrm{q}\cdot\mathrm{n}_\Gamma\rangle C^{\mathrm{UP}}[\![w]\!]\\&+\sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^N\cup\mathcal{F}_h^D\cap\mathcal{F}_h^{out}}\int_\Gamma\rho\mathrm{q}\cdot\mathrm{n}_\Gamma Cw\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_2(w;\mathrm{q})=&\int_\Omega(\rho_RC_RQ_R-\rho CQ_P)w+\sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^D\cap\mathcal{F}_h^{in}}\int_\Gamma\rho_DC_D\mathrm{q}\\&\cdot\mathrm{n}_\Gamma w+\epsilon_T\sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^D}\int_\Gamma(\phi\rho_D\mathrm{D}\nabla w\cdot\mathrm{n}_\Gamma)C_D\\&+\sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^D}\frac{\sigma_\Gamma^T}{|\Gamma|}\int_\Gamma wC_D\end{aligned}$$

که در روابط فوق $\sigma_\Gamma\geq 0$ پارامتر ثابت پنالتی است، مقدار کسر جرمی در مرز المان‌ها بصورت بادسو[1] محاسبه می‌شود:

$$C^{\mathrm{UP}}=\begin{cases}C|_{E_\Gamma^-}\ , & \mathrm{q}\cdot\mathrm{n}_\Gamma\geq 0\\ C|_{E_\Gamma^+}\ , & \mathrm{q}\cdot\mathrm{n}_\Gamma<0\end{cases}\qquad\forall\,\Gamma=\partial E_\Gamma^-\cap\partial E_\Gamma^+ \tag{21}$$

که در روابط فوق $\epsilon\in\{-1,0,1\}$ پارامتر متقارن‌سازی است، بازای ϵ مساوی 1-، 0 و 1 روش DG بترتیب SIPG ،IIPG و NIPG نامیده می‌شود، درصورتی که در روش NIPG، σ_Γ برابر صفر باشد، آنگاه روش OBB-DG نامیده می‌شود [25]. قابل ذکر است که روش‌های SIPG و IIPG بازای مقادیر باندازه کافی بزرگ σ_Γ پایدار[2] و همگرا[3] خواهد بود ولی روش NIPG به ازای هر مقدار نامنفی σ_Γ پایدار و همگراست [25].

لازم بذکر است که اگر الگوریتم‌های بکار رفته برای حل معادلات جریان و انتقال جرم باهم سازگار نباشند (براساس معیار داوسون و همکاران [26])، آنگاه ممکن است که دقت روش بکار گرفته شده برای معادله انتقال جرم و همچنین خصوصیت بقاء آن از بین برود. داوسون و همکاران [26] در تحقیقی بر روی سازگاری الگوریتم‌ها دو معیار را مد نظر قرار دادند، یکی بقاء کلی[4] و دیگری دقت مرتبه صفر[5] برای روش بکار گرفته شده در حل معادله انتقال جرم، در این چهارچوب آنها نشان دادند که روش IIPG تنها روشی است که می‌توان برای حل معادله جریان در نظر گرفت تا معیارهای مذکور برای معادله انتقال جرم تامین شود. براین اساس در این تحقیق تنها از روش IIPG برای حل معادله جریان استفاده شد، در حالی که برای معادله انتقال جرم هریک از روش‌های SIPG ،IIPG و NIPG قابل استفاده است.

3-2- گسسته‌سازی مکانی و زمانی

با محدود کردن فرم ضعیف معادلات به فضای ابعادی محدود[6] یعنی $(\tilde{h},\tilde{C}):(0,T)\rightarrow\mathcal{V}_h^{p_h}\times\mathcal{V}_h^{p_c}$، حاصل کار فرمول‌بندی گالرکین ناپیوسته خواهد بود. بنابراین با جایگزینی تقریب‌های $\tilde{h}$ و $\tilde{C}$ درون معادلات (19) و (20) سیستم نیمه گسسته معادلات بصورت زیر حاصل خواهد شد:

$$\forall v\in\mathcal{V}_h^{p_h},\quad\left(S_0\frac{\partial\tilde{h}}{\partial t},v\right)_\Omega+\mathcal{A}_{\varepsilon_F}(\tilde{h},v;\tilde{C})=\mathcal{L}_1(v;\tilde{C}) \tag{22}$$

$$\forall w\in\mathcal{V}_h^{p_c},\left(\frac{\partial(\phi\rho\tilde{C})}{\partial t},w\right)_\Omega+\mathcal{B}_{\varepsilon_T}(\tilde{C},w;\tilde{\mathrm{q}})=\mathcal{L}_2(w;\tilde{\mathrm{q}}) \tag{23}$$

[1] Upwind
[2] Stable
[3] Convergent
[4] Global conservation
[5] Zeroth-order accuracy
[6] Finite dimensional spaces

که در روابط فوق داریم:

$$\tilde{h} = \sum_{j=1}^{Dof_G} h_j(t)\phi_j(\mathrm{x}), \quad \phi_j(\mathrm{x}) = \begin{cases} \Phi_j^E(\mathrm{x}) & \mathrm{x} \in E \\ 0 & \mathrm{x} \not\in E \end{cases} \tag{24}$$

$$\tilde{C} = \sum_{j=1}^{Dof_G} C_j(t)\psi_j(\mathrm{x}), \quad \psi_j(\mathrm{x}) = \begin{cases} \Psi_j^E(\mathrm{x}) & \mathrm{x} \in E \\ 0 & \mathrm{x} \not\in E \end{cases} \tag{25}$$

$$\tilde{\mathrm{q}} = -\frac{\mu_0}{\mu(\tilde{C})}\mathrm{K}_0\left(\nabla\tilde{h} + \beta_c\tilde{C}\nabla z\right) \tag{26}$$

در این مرحله با گسسته‌سازی زمانی معادلات، سیستم گسسته کامل بدست می‌آید. در اینجا از روش کاملاً ضمنی تفاضل محدود برای گسسته-سازی هر جفت معادلات استفاده شده است. بنابراین معادلات گسسته شده کامل معادلات (22) و (23) بصورت زیر نتیجه می‌شود:

$$\left(S_0\frac{\tilde{h}^{n+1} - \tilde{h}^n}{\Delta t}, v\right)_\Omega + \mathcal{A}_{\varepsilon_F}\left(\tilde{h}^{n+1}, v; \tilde{C}^{n+1}\right) = \mathcal{L}_1\left(v; \tilde{C}^{n+1}\right) \tag{27}$$

$$\left(\frac{\left(\phi\rho\tilde{C}\right)^{n+1} - \left(\phi\rho\tilde{C}\right)^n}{\Delta t}, w\right)_\Omega + \mathcal{B}_{\varepsilon_T}\left(\tilde{C}^{n+1}, w; \tilde{\mathrm{q}}^{n+1}\right) = \mathcal{L}_2\left(w; \tilde{\mathrm{q}}^{n+1}\right) \tag{28}$$

بالانویس n مقدار متغیر را در گام زمانی t^n نشان می‌دهد و $n+1$ مقدار متغیر در گام زمانی t^{n+1} است.

برای از بین بردن نوسانات غیر فیزیکی بخصوص در مسائل همرفت غالب، در این تحقیق از محدود کننده شیب چاونت-جافری در مسئله آزمایشگاهی استفاده گردید [27]. این محدود کننده علاوه بر اینکه بقاء محلی روش را حفظ می‌کند، با استفاده از مینیمم کردن فاصله مقادیر بعد و قبل از اعمال محدود کننده تا حد امکان مقادیر اولیه را حفظ می‌نماید [19].

3-3- روش حل معادلات گسسته شده

بدلیل وجود ترم شناوری (ثقل) $\nabla z(\rho - \rho_0)/\rho_0$ در معادله دارسی، اگر چند جمله‌ای‌های مورد استفاده برای تقریب بار هیدرولیکی و کسر جرمی غلظت هم مرتبه باشند، آنگاه وقتی که از بار هیدرولیکی مشتق گرفته شود، مرتبه تغییرات آن یک درجه کمتر از ترم شناوری خواهد شد، که این عدم هماهنگی بین تغییرات دو ترم در معادله دارسی همان چیزی است که عدم هماهنگی در تقریب سرعت نامیده می‌شود و اگر برطرف نشود منجر به تولید یکسری سرعت‌های غیر واقعی و غلط خواهد شد. از روش‌های حل این مشکل معمولاً تحت عنوان تقریب سرعت هماهنگ یاد می‌شود. برای رفع این مشکل دو روش معمولاً استفاده می‌شود. در راه حل اول، چند جمله‌ای‌های تقریب بار هیدرولیکی یک مرتبه بزرگتر از چند جمله‌ای‌های تقریب کسر جرمی غلظت انتخاب می‌شود. اگر چه در این روش تقریبی وارد نمی‌شود، اما به لحاظ محاسباتی گران خواهد بود. روش دیگری که حجم محاسبات آن خیلی پایین‌تر از روش قبلی است، استفاده از الگوریتم فرالکوویچ-نابنر می-باشد [28]. این روش تاکنون تنها در روش‌های عددی احجام محدود و المان محدود بکار برده شده و در روش‌های گالرکین ناپیوسته استفاده نشده است. در این تحقیق این روش برای روش گالرکین ناپیوسته نیز توسعه داده شد و مورد ارزیابی قرار گرفت.

قبل از تشریح روند استخراج فرمول‌بندی این روش، لازم است به نکته‌ای در زمینه نگاشت گرادیان از سیستم مختصات دکارتی به مختصات محلی المان مرجع اشاره شود:

$$\nabla_{(\xi,\eta)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial\xi} \\ \dfrac{\partial}{\partial\eta} \end{pmatrix} = \mathrm{J}^E \cdot \nabla, \qquad \nabla = \left(\mathrm{J}^E\right)^{-1} \cdot \nabla_{(\xi,\eta)} \tag{29}$$

از طرفی برای بردار ثقل می‌توان نوشت:

$$\nabla z = e, \quad e_{(\xi,\eta)} = \begin{pmatrix} e_\xi \\ e_\eta \end{pmatrix} = \mathrm{J}^E \cdot e, \quad e = \left(\mathrm{J}^E\right)^{-1} \cdot e_{(\xi,\eta)} \tag{30}$$

بنابراین می‌توان رابطه دارسی (3) را به شکل زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \mathrm{q} &= -\frac{\mu_0}{\mu}\mathrm{K}_0\left(\nabla h + \beta_C C\, e\right) \\ &= -\frac{\mu_0}{\mu}\mathrm{K}_0\left(\left(\mathrm{J}^E\right)^{-1}\left(\nabla_{(\xi,\eta)} h + \beta_C C\, e_{(\xi,\eta)}\right)\right) \\ &= -\frac{\mu_0}{\mu}\mathrm{K}_0\left(\left(\mathrm{J}^E\right)^{-1}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial\xi}\left(h + \int \beta_C C\, e_\xi\, d\xi\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial\eta}\left(h + \int \beta_C C\, e_\eta\, d\eta\right) \end{pmatrix}\right) \end{aligned} \tag{31}$$

اگر جمله انتگرالی معادله بالا را معادل یک متغیر انتگرالی همانند H در نظر بگیریم یعنی:

$$\begin{cases} H_\xi^E = \int \beta_C C\, e_\xi\, d\xi \\ H_\eta^E = \int \beta_C C\, e_\eta\, d\eta \end{cases} \tag{32}$$

آنگاه می‌توان معادله دارسی را بصورت زیر باز نویسی نمود:

$$\mathrm{q} = -\frac{\mu_0}{\mu}\mathrm{K}_0\left(\left(\mathrm{J}^E\right)^{-1}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial\xi}\left(h + H_\xi^E\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial\eta}\left(h + H_\eta^E\right) \end{pmatrix}\right) \tag{33}$$

اگر توابع انتگرالی بالا را با توابع میان‌یابی[1] هم مرتبه h تقریب بزنیم، یعنی

$$\widetilde{H}_\xi^E = \sum_{J=1}^{Dof_E} H_{\xi J}^E \Phi_J^E, \qquad \widetilde{H}_\eta^E = \sum_{J=1}^{Dof_E} H_{\eta J}^E \Phi_J^E \tag{34}$$

آنگاه،

$$\mathrm{q} = -\frac{\mu_0}{\mu}\mathrm{K}_0\left(\left(\mathrm{J}^E\right)^{-1}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial\xi}\left(\tilde{h} + \widetilde{H}_\xi^E\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial\eta}\left(\tilde{h} + \widetilde{H}_\eta^E\right) \end{pmatrix}\right) \tag{35}$$

بنابراین استفاده از توابع انتگرالی فوق باعث برقراری هماهنگی میان جمله شناوری و گرادیان هیدرولیکی خواهد شد، چرا که در رابطه فوق اکنون هردو دارای مرتبه تغییرات یکسان هستند. در اینجا برای بار هیدرولیکی و کسر جرمی هردو از المان‌های خطی مثلثی استفاده شد.

گام نهایی، حل معادلات گسسته شده (27) و (28) می‌باشد که در اینجا از روش تکراری پیکارد[2] استفاده شده است [29]. این روش برای حل دستگاه‌های مذکور مناسب است زیرا اولاً غیرخطی بودن معادله جریان خیلی قوی نیست و ثانیاً این روش نسبت به روش‌های دیگری همچون نیوتون هزینه محاسباتی کمتری دارد. فرایند کلی حل بواسطه این روش بگونه‌ای است که در هر گام زمانی، هریک از معادلات گسسته شده فوق بطور جداگانه و پشت سرهم حل می‌شود تا اینکه معیار همگرایی فرا برسد. این روش شامل مراحل زیر است:

1- با استفاده از $h^{n+1,l}$ و $C^{n+1,l}$ از تکرار قبلی و بعنوان حدس اولیه،

[1] Interpolation functions
[2] Picard iterative method

$h^{n+1,l+1}$ در تکرار $l+1$ محاسبه می‌شود.

2- محاسبه سرعت دارسی با استفاده از $h^{n+1,l+1}$ و $C^{n+1,l}$.

3- حل معادله انتقال جرم براساس $h^{n+1,l+1}$ و سرعت دارسی در مرحله قبل و در نتیجه محاسبه $C^{n+1,l+1}$ و بروز گردانی $C^{n+1,l}$ در مرحله 1.

4- بررسی معیار توقف (میزان تلورانس قابل قبول). اگر این معیار تامین شود، این چرخه برای گام زمانی بعدی تکرار خواهد شد و در غیر اینصورت تکرار بعدی برای گام زمانی جاری از مرحله 1 شروع می‌شود.

در اینجا برای حل هریک از دستگاه‌ها در مرحله 1 و 3 از روش حذفی گاوس استفاده می‌شود. آنچه که در ادامه خواهد آمد ارائه نتایج براساس روش گالرکین ناپیوسته بصورت دوبعدی برای محیط‌های اشباع می‌باشد.

4- اجرای عددی

4-1- مسئله هنری[1]

مسئله هنری به همراه مسئله الدر (مسئله بعدی) از پرکاربردترین مسائل تست مدل‌های وابسته به چگالی هستند. هنری (1964) اولین محققی بود که توانست فرایند پیشروی آب شور دریا را با در نظر گرفتن چگالی متغیر مدل‌سازی کند. او از یک مدل ساده دو بعدی در مقطع عمودی که متشکل از یک آبخوان همگن مستطیلی شکل است برای این منظور استفاده نمود. او برای این مدل یک حل نیمه تحلیلی بر مبنای سری‌های فوریه دوگانه[2] ارائه کرد. بخاطر وجود حل نیمه تحلیلی برای این مسئله محققان بسیاری از آن به عنوان یک مسئله برای محک زدن مدل‌های وابسته به چگالی استفاده کردند. شکل 1 موقعیت آبخوان را نشان می‌دهد که از سمت چپ با آب شیرین زیرزمینی با نرخ Q تغذیه می‌شود و از سمت راست به آب دریا منتهی می‌شود. آب شور از سمت دریا به سمت آبخوان هجوم می‌آورد و تا جایی پیش می‌رود تا به تعادل با تغذیه آب شیرین زیرزمینی برسد. در این تحقیق از مسئله استاندارد هنری و دو مورد اصلاح شده آن برای صحت‌سنجی مدل استفاده شده است. جدول 1 شامل داده‌ها و پارامترهای ورودی برای مسائل هنری است. در اینجا برای مقایسه از حل‌های نیمه تحلیلی ارائه شده در [32-30] بترتیب برای مورد استاندارد، اصلاح شده اول و اصلاح شده دوم استفاده شده است.

به منظور حل مسئله استاندارد و مورد اصلاح شده اول، دامنه حل به 2172 المان مثلثی بی‌سازمان[3] غیریکنواخت (شکل 2) تقسیم‌بندی شد. برای حل مسئله اصلاح شده دوم از یک شبکه یکنواخت متشکل از 12800 المان مثلثی استفاده گردید. طول دوره شبیه‌سازی برای مسئله استاندارد، اصلاح شده اول و اصلاح شده دوم بترتیب 400، 600 و 1000 دقیقه انتخاب شد، که مبنای این انتخاب شرایط رسیدن به جریان ماندگار[4] بوده است. گام‌های زمانی برای هر سه حالت از 10 ثانیه شروع شده و هرگام نسبت به گام قبلی بصورت تدریجی تا حداکثر 600 ثانیه تغییر پیدا نمود. قابل ذکر است تعداد تکرار در هر گام زمانی بین 1 تا 3 تکرار متغیر بوده است و زمان اجرای برنامه برای سه مورد به ترتیب 134، 185 و 4381 ثانیه بطول انجامید.

به‌منظور حل مسائل هنری، از هر سه ترکیب IIPG-IIPG، -IIPG SIPG و IIPG-NIPG استفاده شد ولی تفاوت محسوسی بین نتایج مشاهده نشد. در شکل 3 تا 5 نتایج حاصل از حل سه مسئله هنری در مقایسه با حل نیمه تحلیلی قابل مشاهده است. با مقایسه حل عددی با حل تحلیلی، مشاهده می‌شود که برای هر سه مورد تطابق خوبی بین آنها برقرار است. علاوه براین، مورد استاندارد و اصلاح شده اول با نتایج حاصل از سیوات [33] نیز مقایسه شد. در شکل 3 و 4 مشاهده می‌شود که در خطوط هم‌شوری حاصل از سی‌وات برخلاف مدل حاضر، در گوشه بالای سمت راست دامنه (قسمت خروجی جریان) انحراف و نوساناتی وجود دارد. در واقع در آن ناحیه به دلیل سرعت بالای جریان، انتقال شوری غالباً ناشی از همرفت است. به همین خاطر روش‌های عددی استاندارد و معمول در این نواحی، نوساناتی از خود بروز می‌دهند [31]. همانطور که مشاهده می‌شود در نتایج حاصل از

جدول 1 پارامترهای مورد نیاز برای شبیه‌سازی مسائل استاندارد و اصلاح شده هنری

Table 1 Input parameters for simulation of the standard and modified Henry problems

پارامتر	مقدار	واحد
K_0	0.01 I*	ms^{-1}
D_m	(2,1) 1.886×10^{-5} ، (3) 9.43×10^{-7}	m^2s^{-1}
α_L	0	m
α_T	0	m
S_0	0	m^{-1}
ϕ	0.35	-
ρ_0	1000	kgm^{-3}
ρ_s	1025	kgm^{-3}
C_0	0	-
Q	(3,1) 6.6×10^{-6} ، (2) 3.3×10^{-6}	m^2s^{-1}
μ_0	0.001	$kgm^{-1}s^{-1}$
β_μ	0	-
β_c	0.025	-

*ماتریس یکه.

(1)، (2) و (3): به ترتیب برای مورد اول، دوم و سوم مسئله هنری.

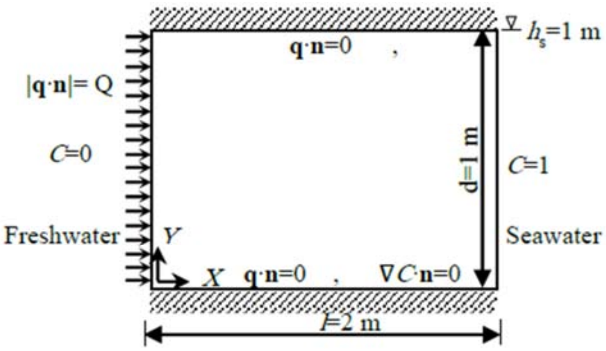

Fig. 1 Geometry and boundary conditions for Henry problem

شکل 1 هندسه و شرایط مرزی مسئله هنری

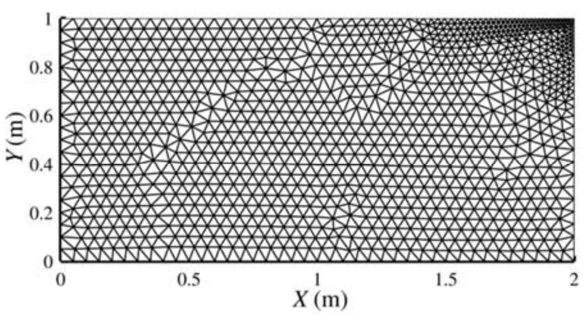

Fig. 2 An unstructured mesh used for Henry problem with 2172 elements and 1164 nodes

شکل 2 المان‌بندی بی‌سازمان مسئله هنری با استفاده از 2172 المان و 1164 گره

---

[1] Henry problem
[2] Double Fourier series
[3] Unstructured mesh
[4] Steady state conditions

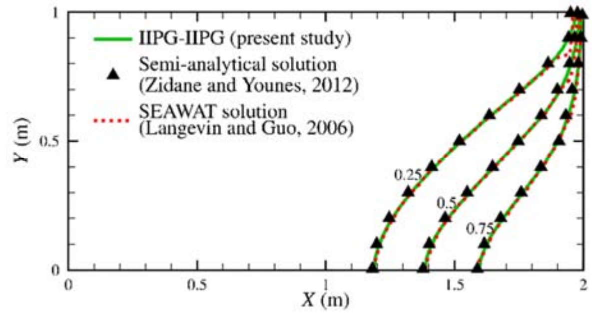

Fig. 3 Numerical results in comparison with semi-analytical and SEAWAT solutions for standard Henry problem

شکل 3 مقایسه نتایج حاصل از مدل با حل نیمه تحلیلی و نتایج حاصل از سی‌وات برای مسئله استاندار هنری

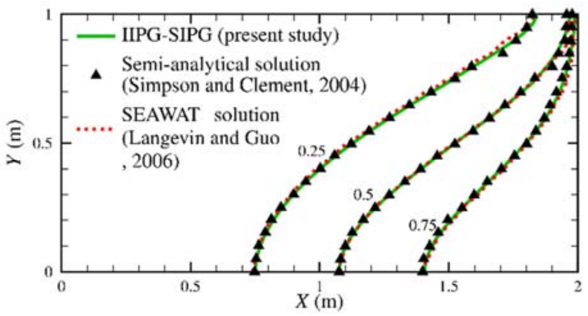

Fig. 4 Numerical results in comparison with semi-analytical and SEAWAT solutions for the second case of Henry problem

شکل 4 مقایسه نتایج حاصل از مدل با حل نیمه تحلیلی و نتایج حاصل از سی‌وات برای مسئله دوم هنری

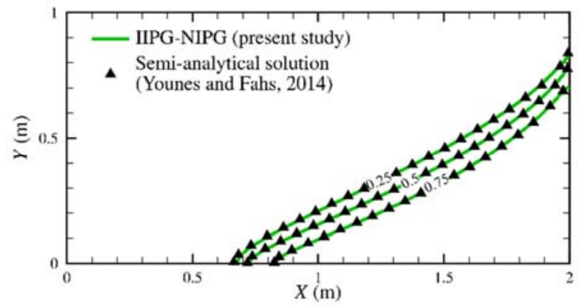

Fig. 5 Numerical results in comparison with semi-analytical solution for the third case of Henry problem

شکل 5 مقایسه نتایج حاصل از مدل با حل نیمه تحلیلی برای سومین مسئله هنری

گالرکین ناپیوسته هیچگونه نوسانی وجود ندارد.

اما هدف از ارائه مسئله سوم هنری نشان دادن (شکل 5) قابلیت گالرکین ناپیوسته در برابر پخش عددی است. این موضوع قبلاً توسط یونس و فاهس [32] در مورد گالرکین ناپیوسته و FVM مورد تحقیق قرار گرفت و آنها نشان دادند نسخه‌ای از کد که ترکیب گالرکین ناپیوسته را شامل می‌شود، پخش عددی خیلی کمی از خود بروز می‌دهد. علاوه براین آنها بیان کردند که برای این مسئله نتایج غیر قابل رضایتی برای نسخه‌ای از کد که در بردارنده FVM است، حاصل شده است. آنها برای تعیین میزان پخش عددی میزان شوری را در نقطه‌ای به مختصات (0.016 ، 0.85) اندازه‌گیری کردند. مقدار بدست آمده برای FVM (برای شبکه مشابه در این تحقیق) 0.73 بدست آمده است در حالی که این مقدار برای مدل حاضر و حل نیمه تحلیلی بترتیب 0.77 و 0.78 حاصل شده است. همانطور که واضح است اختلاف زیاد میان FVM (حدود 6 درصد) نشان از پخش عددی زیاد و اختلاف حدود یک درصدی میان مدل حاضر و حل نیمه-تحلیلی حاکی از پخش عددی کم است. تطابق خوب نتایج با حل نیمه-تحلیلی در شکل 5 نیز این موضوع را ثابت می‌کند. بنابراین نتایج ارائه شده در این مسله نیز تایید دیگری بر تمایل کمتر روش گالرکین ناپیوسته به پخش عددی می‌باشد.

در این قسمت برای بررسی همگرایی حل نسبت به کوچک شدن اندازه شبکه، از مسئله استاندارد هنری استفاده شده است. برای این منظور از یک شبکه درشت یکنواخت متشکل از 400 المان مثلثی که تا چهار مرتبه ریز شده است (هر مثلث در هر مرتبه ریزسازی با نصف کردن اضلاع مثلث به چهار مثلث تبدیل می‌شود)، استفاده گردید. به خاطر اینکه حل دقیق مسئله روی کل دامنه وجود ندارد، حل بدست آمده برای ریزترین شبکه مبنای مقایسات قرار گرفت. ریز ترین شبکه متشکل از 102400 المان مثلثی است. میزان خطای نرم L_2 حاصل از شبیه‌سازی به ازای هر یک از شبکه‌های درشت‌تر محاسبه گردید تا روند کاهش خطا و همگرایی به سمت حل مبنا بررسی گردد. در شکل 6 روند همگرایی حل برای هر دو متغیر h و C نمایش داده شده است. نتایج حاکی از آن است که با هر بار نصف کردن اندازه شبکه میزان خطا کمتر و شیب کاهشی خطا افزایش می‌یابد.

4-2- مسئله شوری الدر[1]

از آنجا که مسئله قبل یک مسئله با تفاوت چگالی کم میان آب شور و شیرین بود، لازم است که علاوه براین، مدل روی یک مسئله با تفاوت چگالی نسبتاً زیاد همانند مسئله الدر نیز ارزیابی گردد. مسئله شوری الدر در اصل توسط ووس و سوزا [34] بر اساس مدل حرارتی آن توسط الدر (1967) مدل‌سازی شد. سیمپسون و سلمنت [35] در تحقیقی روی مسئله الدر و هنری، بیان کردند که مسئله الدر در ارزیابی مدل‌های وابسته به چگالی قابلیت بهتری را از خود نشان می‌دهد هر چند برای این مسئله حل تحلیلی وجود ندارد. نتایج حاصل از حل‌های عددی این مسئله حل واحدی را نشان نمی‌دهد و تا کنون جواب‌های متفاوتی برای آن بدست آمده است. به همین منظور ارزیابی نتایج حاصل بیشتر به صورت کیفی صورت می‌گیرد. بنابراین تنها بایستی بررسی نمود که آیا مدل توانسته است جنبه‌های مهم حل (مانند تعداد لوب‌های تشکیل شده و الگوی کلی جریان و نیمرخ‌های بوجود آمده) را تسخیر نماید یا خیر. مسئله الدر شامل آبخوان همگن و همسان بوده و تمامی مرزهای آن نفوذناپذیر است (شکل 7). در قسمت وسطی بالای دامنه سیالی با چگالی بالا

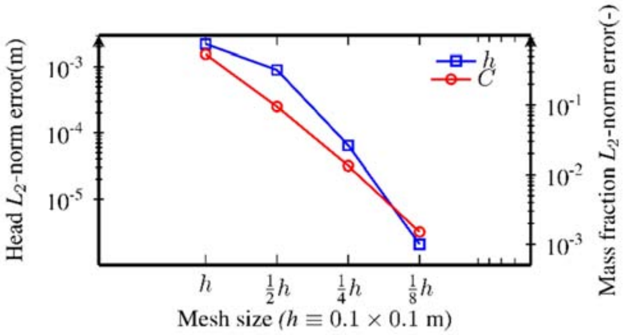

Fig. 6 Decreasing $L2$-norm error for h and C with refining the mesh (for standard Henry problem)

شکل 6 نحوه کاهش خطای نرم $L2$ برای متغیرهای h و C با ریز کردن شبکه (برای مسئله استاندارد هنری)

[1] Elder problem

(منبع شوری) بر روی سیال سبک‌تر (آب) قرار گرفته است که این باعث بوجود آمدن ناپایداری‌هایی به شکل انگشته در طول دامنه خواهد شد. معمولاً از عدد بی‌بعد ریلی[1] ($Ra = K_0 d\beta_C \Delta C/\phi D_m$، d ضخامت آبخوان و ΔC حداکثر اختلاف کسر جرمی است) برای تعیین وضعیت ناپایداری در مسائل همرفت آزادی همچون مسئله الدر (Ra=400) استفاده می‌شود.

برای حل این مسئله بخاطر متقارن بودن مسئله تنها نیمه سمت چپ آن مورد مدل‌سازی قرار گرفت. برای همین منظور از یک شبکه ریز یکنواخت برای حل این مسئله بهره گرفته شد. شبکه ریز متشکل از 6600 المان مثلثی می‌باشد. گام‌های زمانی مورد استفاده برای این مسئله بصورت یکنواخت و برابر 7.5 روز بوده است. سایر پارامترهای مورد نیاز در جدول 2 ارائه شده است. تعداد تکرار لازم برای همگرایی در هر گام زمانی بین 3 و 4 تکرار متغیر بوده و زمان اجرای برنامه برای این تعداد المان 7838 ثانیه طول کشیده است. برای حل این مسئله از هر سه ترکیب عددی IIPG-IIPG، IIPG-SIPG و IIPG-NIPG استفاده شد که نتایج آنها نیز در اینجا مشابه بود.

شکل 8 نتایج حاصل را در چهار مقطع زمانی 2، 4، 10، 20 سال نشان می‌دهد. از آنجا که برای این مسئله حل دقیق وجود ندارد، نتایج بدست آمده با نتایج راک‌فلو (یک مدل المان محدود بر اساس المان مثلثی) [22] مقایسه شد. دلیل این مقایسه این بود که شباهت زیادی بین نتایج مدل حاضر و راک‌فلو وجود داشت. عوامل مختلفی وجود دارد که منجر به تولید نیمرخ‌های متفاوتی برای این مسئله می‌شود. از جمله این‌ها خود روش عددی، نوع متغیر وابسته (غلظت یا کسر جرمی) و نوع المان می‌باشد [36]. از آنجا که مدل ارائه شده در این تحقیق و راک‌فلو هر دو از المان مثلثی و از معادله انتقال جرم براساس کسر جرمی بهره برده‌اند، می‌تواند دلیلی برای شباهت میان نتایج آنها باشد. در شکل 8 به مقایسه میان نتایج هر دو مدل پرداخته شده است و همانطور که مشاهده می‌شود شباهت زیادی را می‌توان بین آنها مشاهده نمود که این خود دلیلی بر صحت نتایج حاصل از مدل تهیه شده در این تحقیق می‌باشد. اما برای بررسی وضعیت همگرایی مدل، این مسئله مشابه آنچه که فرالکوویچ و شپر [4] انجام دادند با شبکه متشکل از 1024 تا 262144 المان (مرتبه 4 تا 8 طبق منبع مذکور) مورد شبیه‌سازی قرار گرفت. در شکل 9 نتایج حاصل برای این پنج شبکه در چهار مقطع زمانی 2، 4، 10 و 20 سال ارائه شده است. این نتایج حاوی خطوط هم‌شوری 0.2، 0.4، 0.6 و 0.8 به همراه میدان سرعت می‌باشد. همانطور که واضح است نتایج از مرتبه

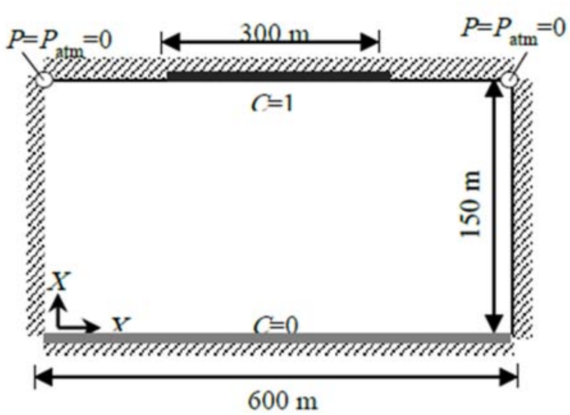

Fig. 7 Geometry and boundary conditions for the saline Elder problem

شکل 7 هندسه و شرایط مرزی مسئله الدر

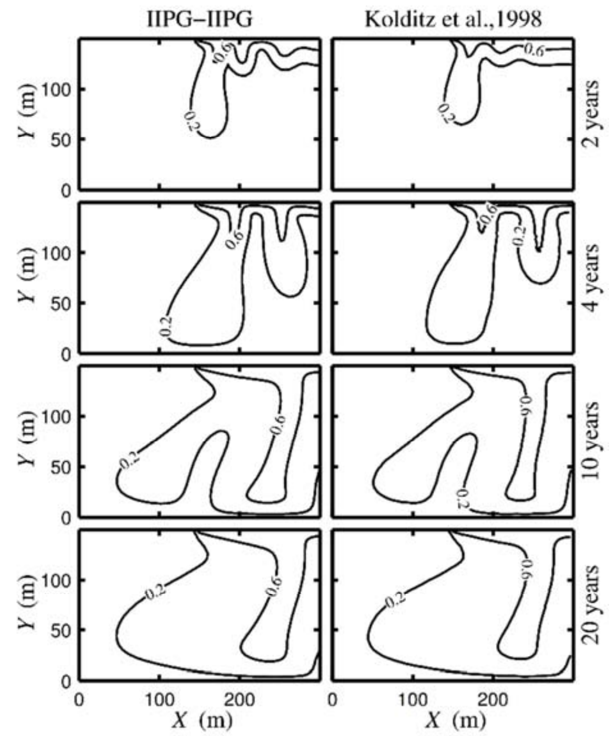

Fig. 8 Isochlors resulted from the present model (left) in comparison with those of ROCKFLOW simulator (right) for the left half of Elder problem

شکل 8 مقایسه خطوط هم‌شوری حاصل از مدل در مقایسه با نتایج شبیه‌ساز راک‌فلو در نیمه چپ مسئله الدر

جدول 2 پارامترهای مورد نیاز برای شبیه‌سازی مسئله الدر

Table 2 Input parameters for simulation of Elder problem

واحد	مقدار	پارامتر
m^2	4.845×10^{-13} I	k
	3.565×10^{-6}	D_m
m	0	$_L\alpha$
m	0	$_T\alpha$
m^{-1}	0	S_0
-	0.1	ϕ
kgm^{-3}	1000	ρ_0
kgm^{-3}	1200	ρ_s
-	0	C_0
$kgm^{-1}s^{-1}$	0.001	μ_0
-	0	β_μ
-	0.2	β_c

سوم (16384 المان) به بعد به نیمرخ های مشابه و ثابتی نزدیک شده‌اند و مشابه یکی از سه پروفیل ممکن ارائه شده توسط فرالکوویچ و شپر برای این مسئله می‌باشد. از آنجا که با ریزتر شدن شبکه، نتایج به سمت یک نیمرخ ثابت و بدون تغییر میل می‌کنند، می‌توان گفت همگرایی حل عددی نسبت به شبکه حاصل شده است. قابل ذکر است که مدل حاضر نسبت به مدل فرالکوویچ و شپر زودتر همگرا شده است (بترتیب از مرتبه 6 و 7 به بعد). همچنین نتایج نشان می‌دهد که مدل DG در حالتی که روش بادسو در نظر گرفته شود و حالتی که درنظر گرفته نشود برخلاف مدل احجام محدود فرالکوویچ و شپر، پروفیل حاصل تغییرات کلی از خود نشان نمی‌دهد. از آنجا که روش‌های بادسو اثرات شبکه‌ای را به نتایج اعمال می‌کنند و موجب نرمی بیش از حد حل می‌شود، موجب تغییر نتایج فرالکوویچ و شپر حتی برای شبکه ریز مرتبه 7 شده است [4]. چنانچه شبکه درشت‌تر باشد این عامل خطای بیشتری را وارد حل حاصل می‌نماید. بنابراین یکی از دلایل تفاوت در

[1] Rayleigh Number

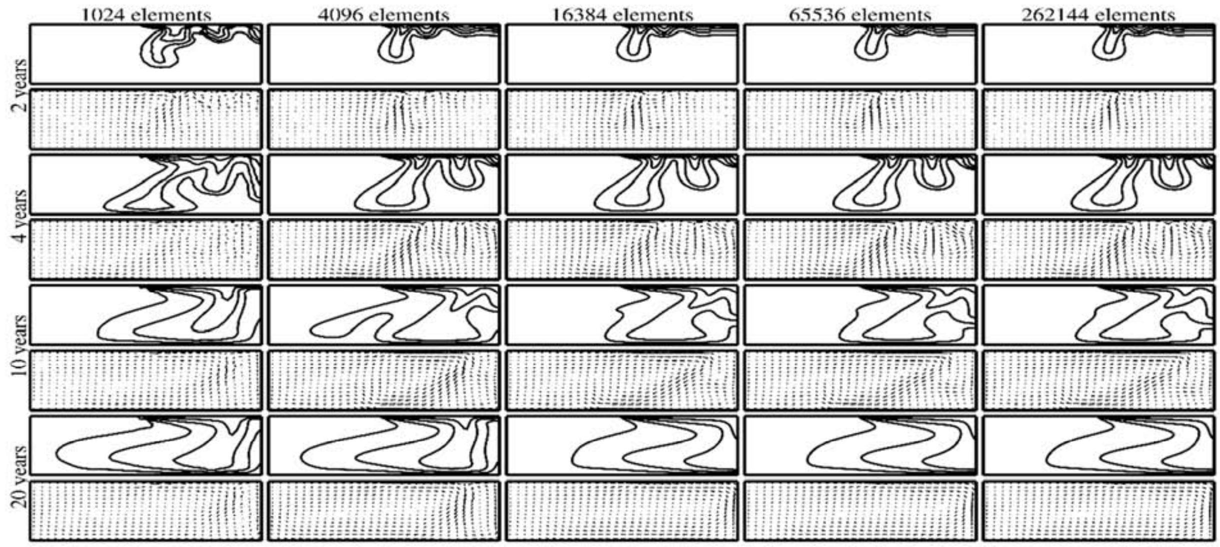

Fig. 9 Computed 0.2, 0.4, 0.6 and 0.8 isochlors and velocity arrows for the left half domain of Elder problem based on five different grid levels, four different simulation periods and time step sizes of 7.5 days.

شکل 9 خطوط هم‌کلر 0.2، 0.4، 0.6 و 0.8 و بردارهای سرعت محاسبه شده در نیمه چپ مسئله الدر برای پنج شبکه گوناگون در چهار مقطع زمانی متفاوت با فواصل زمانی 7.5 روزه

آغاز همگرایی دو روش می‌تواند ناشی از خطای ناشی از روش بادسو باشد، عدم تغییرات جواب کلی در مسئله الدر با بکارگیری روش بادسو و بدون آن، نشان می‌دهد که در مدل حاضر نه تنها روش بادسو پخش عددی زیادی را به جواب حاصل اعمال نمی‌کند که موجب پایداری روش در مسائل همرفت غالب می‌شود.

4-3- مسئله آزمایشگاهی گاسوامی-سلمنت

مسئله آزمایشگاهی گاسوامی-سلمنت [37] به منظور ارزیابی و صحت‌سنجی مدل‌های آب زیرزمینی وابسته به چگالی طراحی شد، این مسئله از یک جعبه مستطیلی شکل شامل سه محفظه تشکیل شده است، محفظه وسطی شامل محیط متخلخل همگن و همسان بوده و یک آبخوان آزاد را بوجود می‌آورد، در حالی که محفظه سمت چپ شامل آب شور و محفظه سمت راست شامل آب شیرین است. این آزمایش شامل هر دو آزمایش ماندگار و غیرماندگار و متشکل از سه فاز کاملاً مجزا است. فاز اول با تنظیم بار هیدرولیکی آب شیرین سمت راست روی 26.7 سانتی‌متر و تنظیم بار هیدرولیکی آب شور روی 25.5 سانتی‌متر انجام گرفت. تحت این شرایط وقتی اولین حالت ماندگار (SS-1) با ثابت ماندن گوه پیشرو آب شور تشکیل گردید (فاز اولیه)، بار هیدرولیکی آب شیرین سمت راست بطور ناگهانی روی

جدول 3 پارامترهای مورد نیاز برای شبیه‌سازی مسئله گاسوامی-سلمنت

Table 3 Input parameters for simulation of Goswami-Clement experimental setup

واحد	مقدار	پارامتر
m^2	1.239×10^{-9} I	k
m^2s^{-1}	1×10^{-9}	D_m
m	0.001	$_L\alpha$
m	0.0001	$_T\alpha$
m^{-1}	1×10^{-5}	S_0
-	0.385	ϕ
kgm^{-3}	1000	ρ_0
kgm^{-3}	1026	ρ_s
-	0	C_0
$kgm^{-1}s^{-1}$	0.001	μ_0
-	0.026	β_c

مقدار 26.2 سانتی‌متر افت داده شد و تا زمانی که شرایط ماندگار (SS-2) برقرار گردد، روی همین مقدار ثابت نگه داشته شد (فاز پیشروی آب شور). در نهایت با افزایش بار هیدرولیکی آب شیرین سمت راست به میزان 26.55 سانتی‌متر و نگهداشتن آن روی همین مقدار، شرایط ماندگار (SS-3) برای این حالت نیز پدید آمد (فاز پسروی آب شور).

علاوه بر اندازه‌گیری‌های آزمایشگاهی، گاسوامی و سلمنت یک مدل عددی برای این آزمایشات توسعه دادند. شکل 10 مدل عددی و شرایط مرزی حاکم مورد استفاده آنها را نشان می‌دهد. سایر پارامترهای مورد نیاز مدل‌سازی در جدول 3 آورده شده است. آنها برای مقایسه نتایج مدل عددی با آزمایشگاهی مبنای خود را خط هم‌کلر 0.5 به عنوان موقعیت جبهه گوه آب شور قرار دادند. در اینجا دامنه این مسئله با 11024 المان مثلثی یکنواخت منقطع گردید و از گام‌های زمانی مساوی یک ثانیه‌ای برای شبیه‌سازی استفاده شد. زمان لازم برای اجرای برنامه در سه فاز به ترتیب 32158، 42873، 36684 ثانیه و تعداد تکرار لازم برای همگرایی در هر گام زمانی 3 تا 4 تکرار می‌باشد. نتایج حاصل در دو حالت ماندگار و غیر ماندگار با

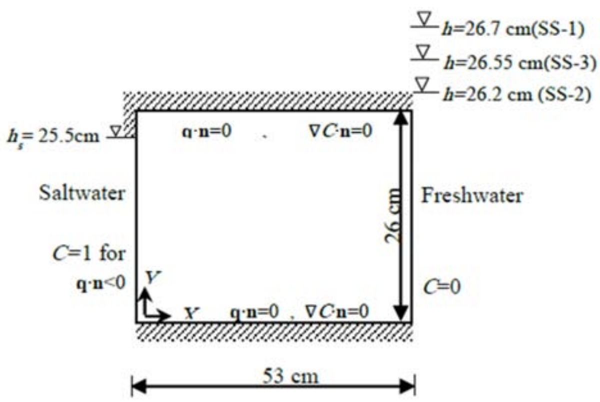

Fig. 10 Geometry and boundary conditions for Goswami-Clement experimental setup

شکل 10 هندسه و شرایط مرزی مربوط به مسئله گاسوامی-سلمنت

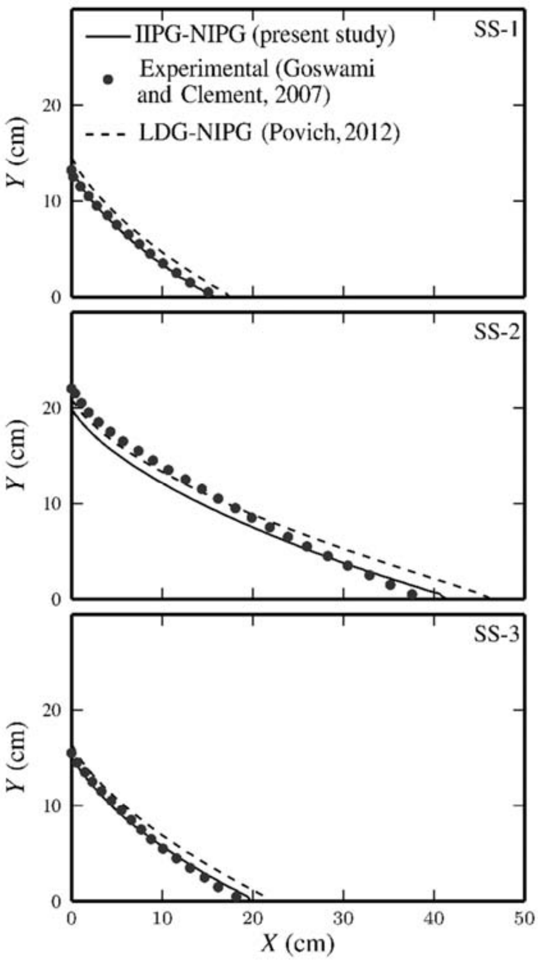

Fig. 11 Goswami-Clement experimental problem: numerical results in comparison with the experimental data and LDG-NIPG solutions for the steady state conditions.

شکل 11 نتایج حاصل از شبیه‌سازی مسئله آزمایشگاهی در حالت ماندگاردر قیاس با داده‌های آزمایشگاهی و نتایج عددی LDG-NIPG

اندازه‌گیری‌های آزمایشگاهی در شکل 11 و 12 مقایسه شده است. در اینجا برای مقایسه نتایج حاصل از LDG-NIPG [12] نیز اضافه گردید. همانطور که مشاهده می‌شود مدل حاضر توانسته است تقریب بهتری از میزان پیشروی آب شور و موقعیت گوه آب شور (بخصوص پنجه آن) ارائه دهد.

4-4- مسئله سیال ساکن[1]

در این قسمت برای نشان دادن اهمیت تقریب سرعت هماهنگ، یک مثال عددی که شامل جعبه‌ای حاوی آب شور (در نیمه پایینی) و آب شیرین (در نیمه بالایی) است ارائه گردید (شکل 13). این مسئله قبلاً توسط ووس و سوزا [34] برای همین منظور پیشنهاد و توسط دیرش وکولدیتز [7] طراحی شد. در شکل 13 نشان داده شده که جعبه از چهار طرف نفوذ ناپذیر بوده و بنابراین بدلیل ساکن بودن سیال، انتشار شوری مستقل از چگالی است و تنها به صورت پخشیدگی (طبق قانون فیک) خواهد بود. بنابراین بعنوان حل مرجع، مسئله بدون در نظر گرفتن تغییرات چگالی یا بدون در نظر گرفتن ضریب کوپله کننده چگالی (یعنی c=0β) با 16384 المان و گام‌های زمانی یک ساعته تا 1000 روز شبیه‌سازی شد (دقت شود در این حالت جمله دوم معادله دارسی در تمامی محاسبات صفر خواهد شد و بنابراین سرعت تنها

[1] Hydrostatic test problem

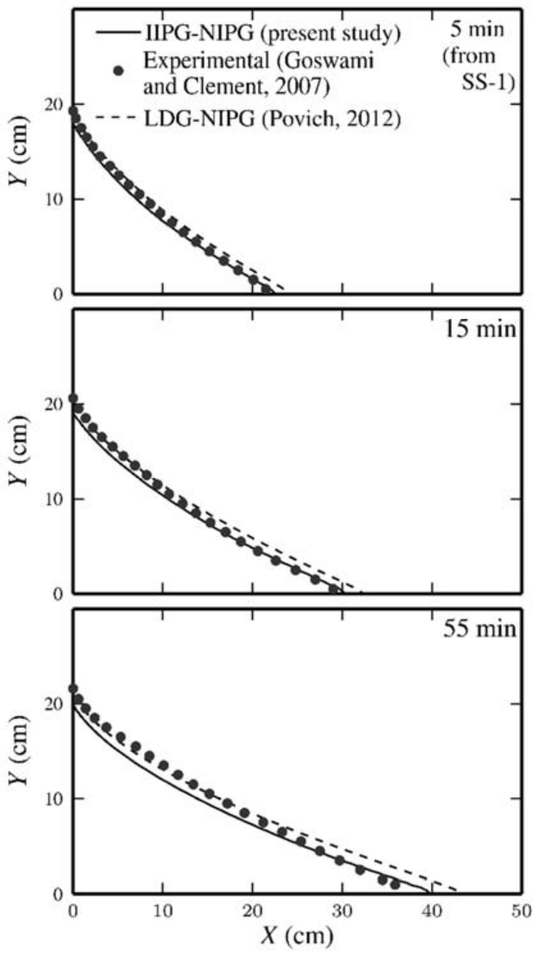

Fig. 12 Goswami-Clement experimental problem: numerical results in comparison with the experimental data and LDG-NIPG solutions for transient conditions.

شکل 12 نتایج حاصل از شبیه‌سازی مسئله آزمایشگاهی در حالت غیرماندگاردر قیاس با داده‌های آزمایشگاهی و نتایج عددی LDG-NIPG

براساس بار هیدرولیکی محاسبه می‌شود). سپس با در نظر گرفتن ضریب کوپله (c≠0β)، مسئله برای هر دو حالت اعمال تقریب سرعت هماهنگ و عدم اعمال تقریب سرعت هماهنگ حل گردید.

در جدول 4 پارامترهای مورد نیاز این شبیه‌سازی‌ها آورده شده است. در شکل 14 نتایج حاصل برای نیمرخ شوری در امتداد خط x=10 (مقطع عمودی وسط دامنه) ارائه شده است. همانطور که از نتایج واضح است استفاده از تقریب سرعت هماهنگ جواب‌های نزدیکی را به حل مرجع تولید نموده است، در حالی که نتایج بدون در نظر گرفتن سرعت هماهنگ، نتایج کاملاً غیر قابل قبولی را ارائه داده است. بنابراین، این نتایج به خوبی نشان می‌دهد که در نظر گرفتن تقریب سرعت هماهنگ برای مسائل وابسته به چگالی امری اجتناب ناپذیر است. علاوه براین نتایج حاصل در تمامی مسائل یاد شده نشان از دقت بسیار مناسب الگوریتم فرالکوویچ-نابنر به عنوان روشی برای تقریب سرعت هماهنگ دارد.

5- نتیجه‌گیری

در این تحقیق یک مدل عددی بر مبنای گالرکین ناپیوسته برای منقطع‌سازی هر دو معادله جریان و انتقال جرم در جریان‌های وابسته به چگالی توسعه داده شد. برای معادله انتقال جرم، مدل برای اعمال هر دو نوع شرط مرزی

جدول 4 پارامترهای مورد نیاز برای شبیه‌سازی مسئله سیال ساکن

Table 4 Input parameters for simulation of hydrostatic problem

پارامتر	مقدار	واحد
K	$1\times10^{-4}\times I$	ms^{-1}
D_m	1×10^{-8}	m^2s^{-1}
$_L\alpha$	0.4	m
$_T\alpha$	0.04	m
S_0	1×10^{-4}	m^{-1}
ϕ	0.3	-
ρ_0	1000	kgm^{-3}
ρ_s	1030	kgm^{-3}
μ_0	0.001	$kgm^{-1}s^{-1}$
β_c	0.03	-

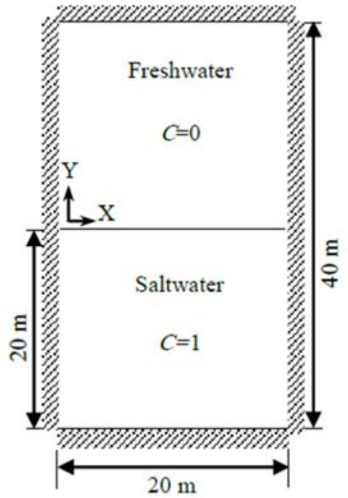

Fig. 13 Initial and boundary conditions for hydrostatic test problem

شکل 13 هندسه و شرایط مرزی مربوط به مسئله سیال ساکن

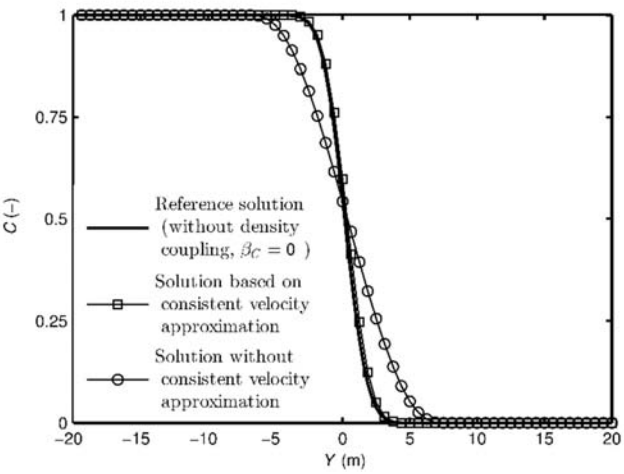

Fig. 14 Comparing mass fraction profile along X = 10 for simulations considering consistent velocity and no consistent velocity approximation against reference solution

شکل 14 مقایسه کسر جرمی در امتداد خط X=10 در مقابل حل مرجع برای حالتی که تقریب سرعت هماهنگ در نظر گرفته شده و برای حالتی که تقریب سرعت هماهنگ در نظر گرفته نشده است

کوشی و دیریشله توسعه داده شد. بدلیل ظاهر شدن نوسانات غیرفیزیکی در مسئله آزمایشگاهی از محدود کننده شیب چاونت-جافری که خود حفظ کننده بقاء محلی است، استفاده گردید. همچنین سازگاری الگوریتم‌ها برای روش‌های مختلف گالرکین ناپیوسته در نظر گرفته شد تا دقت روش عددی به نحو مطلوبی افزایش یابد. از روش پیکارد برای خطی سازی معادلات غیر خطی استفاده شد. نشان داده شد که تقریب سرعت هماهنگ در معادله دارسی اهمیت زیادی دارد و بدون در نظر گرفتن این موضوع مدل نتایج کاملاً نارضایت بخشی تولید خواهد نمود. با وجود هزینه محاسباتی بالای گالرکین ناپیوسته در مقایسه با روش‌های عددی همچون گالرکین پیوسته، در این تحقیق از تعداد بسیار زیادی المان برای شبیه‌سازی‌ها استفاده شد.

برای ارزیابی مدل تهیه شده بر پایه گالرکین ناپیوسته، تحلیل کاملی در قالب چهار مسئله ارائه شد. از همه ترکیب‌های عددی IIPG-IIPG، IIPG-SIPG و IIPG-NIPG برای شبیه‌سازی مثال‌های مذکور استفاده گردید که نتایج حاصل از آنها برای تمامی مسائل کاملاً مشابه بود. در شبیه-سازی مسئله هنری دقت مدل در مقابل حل نیمه‌تحلیلی و سی‌وات مورد ارزیابی قرار گرفت، که نتایج حاصل حاکی از دقت بسیار بالای مدل بود. علاوه براین نشان داده شد که مدل توانایی مناسبی در شبیه‌سازی دومین مسئله اصلاح شده هنری که حساس‌تر به پخش عددی است، دارد. در مسئله الدر نتایج در مقابل مدل عددی راک‌فلو بصورت کیفی مقایسه شد که دلیل آن نیمرخ‌های گوناگون بدست آمده برای این مسئله است. مقایسات نشان داد که مدل بخوبی توانسته است جنبه‌های مهم این مسئله را همچون تعداد لوب‌های بوجود آمده و یا الگوی جریان را پیش‌بینی نماید. در نهایت برای ارزیابی مدل از یک مدل آزمایشگاهی استفاده شد که مقایسات در هر دو حالت ماندگار و غیر ماندگار دقت نسبتاً مناسبی را برای مدل نشان داد.

با توجه به اینکه روش‌های گالرکین ناپیوسته قدرت بالایی در تسخیر شوک‌ها و ناهمگنی‌ها دارند، گام بعدی این تحقیق ارزیابی روش‌های گالرکین ناپیوسته در مقابل ناهمگنی‌ها در مسائل وابسته به چگالی می‌باشد.

6- مراجع

[1] W. Guo, C. D. Langevin, *User's guide to SEAWAT: a computer program for simulation of three-dimensional variable-density ground-water flow*, USGS Water Resources Investigations Report, Florida, pp. 1-87, 2002.

[2] P. S. Huyakorn, P. F. Andersen, J. W. Mercer, H. O. White, Saltwater intrusion in aquifers: Development and testing of a three-dimensional finite element model, *Water Resources Research*, Vol. 23, No. 2, pp. 293–312, 1987.

[3] G. Oude Essink, MOC3D adapted to simulate 3D density-dependent groundwater flow, *Proceedings of the MODFLOW'98 Conference*, Colorado, USA, Oct. 4-8, 1998.

[4] P. Frolkovič, H. De Schepper, Numerical modelling of convection dominated transport coupled with density driven flow in porous media, *Advances in Water Resources*, Vol. 24, No. 1, pp. 63–72, 2001.

[5] A. Mazzia, M. Putti, Mixed-finite element and finite volume discretization for heavy brine simulations in groundwater, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 147, No. 1, pp. 191–213, 2002.

[6] C. I. Voss, C. T. Simmons, N. I. Robinson, Three-dimensional benchmark for variable-density flow and transport simulation: matching semi-analytic stability modes for steady unstable convection in an inclined porous box, *Hydrogeology Journal*, Vol. 18, No. 1, pp. 5–23, 2010.

[7] H.-J. G. Diersch, O. Kolditz, Variable-density flow and transport in porous media: approaches and challenges, *Advances in Water Resources*, Vol. 25, No. 8–12, pp. 899–944, 2002.

[8] P. Ackerer, A. Younes, R. Mose, Modeling Variable Density Flow and Solute Transport in Porous Medium: 1. Numerical Model and Verification, *Transport in Porous Media*, Vol. 35, No. 3, pp. 345–373, 1999.

[9] M. A. Buès, C. Oltean, Numerical Simulations for Saltwater Intrusion by the Mixed Hybrid Finite Element Method and Discontinuous Finite Element Method, *Transport in Porous Media*, Vol. 40, No. 2, pp. 171–200, 2000.

[10] P. Ackerer, A. Younes, Efficient approximations for the simulation of density driven flow in porous media, *Advances in Water Resources*, Vol. 31, No. 1, pp. 15–27, 2008.

[11] M. Konz, P. Ackerer, A. Younes, P. Huggenberger, E. Zechner, Two-dimensional stable-layered laboratory-scale experiments for testing density-coupled flow models, *Water Resources Research*, Vol. 45, No. 2, W02404, 2009.

[12] T. J. Povich, *Discontinuous Galerkin (DG) methods for variable density groundwater flow and solute transport*, PhD Thesis, University of Texas at Austin, Austin, 2012.

[13] S. Sun, B. Rivière, M. F. Wheeler, *A Combined Mixed Finite Element and Discontinuous Galerkin Method for Miscible Displacement Problem in Porous Media*, T. F. Chan, Y. Huang, T. Tang, J. Xu, and L.-A. Ying (Eds.),

Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2008.
[26] C. Dawson, S. Sun, M. F. Wheeler, Compatible algorithms for coupled flow and transport, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 193, No. 23–26, pp. 2565–2580, 2004.
[27] H. Hoteit, P. Ackerer, R. Mose, J. Erhel, B. Philippe, New two-dimensional slope limiters for discontinuous Galerkin methods on arbitrary meshes, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 61, No. 14, pp. 2566–2593, 2004.
[28] P. Frolkovic, Consistent velocity approximation for density driven flow and transport, R. V. Keer (Eds.), *Advanced computational methods in engineering*, pp. 603–611, Maastricht: Shaker Publishing, 1998.
[29] M. Putti, C. Paniconi, Picard and Newton linearization for the coupled model for saltwater intrusion in aquifers, *Advances in Water Resources*, Vol. 18, No. 3, pp. 159–170, 1995.
[30] A. Zidane, A. Younes, P. Huggenberger, E. Zechner, The Henry semianalytical solution for saltwater intrusion with reduced dispersion, *Water Resources Research*, Vol. 48, No. 6, W06533, 2012.
[31] M. J. Simpson, T. P. Clement, Improving the worthiness of the Henry problem as a benchmark for density-dependent groundwater flow models, *Water Resources Research*, Vol. 40, No. 1, W01504, 2004.
[32] A. Younes, M. Fahs, A semi-analytical solution for saltwater intrusion with a very narrow transition zone, *Hydrogeology Journal*, Vol. 22, No. 2, pp. 501–506, 2014.
[33] C. D. Langevin, W. Guo, MODFLOW/MT3DMS-based simulation of variable-density ground water flow and transport, *Ground Water*, Vol. 44, No. 3, pp. 339–351, 2006.
[34] C. I. Voss, W. R. Souza, Variable density flow and solute transport simulation of regional aquifers containing a narrow freshwater-saltwater transition zone, *Water Resources Research*, Vol. 23, No. 10, pp. 1851–1866, 1987.
[35] M. J. Simpson, T. P. Clement, Theoretical analysis of the worthiness of Henry and Elder problems as benchmarks of density-dependent groundwater flow models, *Advances in Water Resources*, Vol. 26, No. 1, pp. 17–31, 2003.
[36] J. A. Woods, G. F. Carey, Upwelling and downwelling behavior in the Elder-Voss-Souza benchmark, *Water Resources Research*, Vol. 43, No. 12, W12403, 2007.
[37] R. R. Goswami, T. P. Clement, Laboratory-scale investigation of saltwater intrusion dynamics, *Water Resources Research*, Vol. 43, No. 4, W04418, 2007.

Recent Progress in Computational and Applied PDES, pp. 323–351, Eds. Boston, MA: Springer US, 2002.
[14] J. Li, B. Riviere, Numerical solutions of the incompressible miscible displacement equations in heterogeneous media, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 292, pp. 107–121, 2015.
[15] B. Rivière, M. F. Wheeler, Discontinuous Galerkin methods for flow and transport problems in porous media, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, Vol. 18, No. 1, pp. 63–68, 2002.
[16] S. Sun, M. F. Wheeler, Symmetric and Nonsymmetric Discontinuous Galerkin Methods for Reactive Transport in Porous Media, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol. 43, No. 1, pp. 195–219, 2005.
[17] Y. Epshteyn, B. Riviere, Convergence of high order methods for miscible displacement, *International Journal of Numerical Analysis and Modeling*, Vol. 5, pp. 47–63, 2008.
[18] M. Jamei, H. Ghafouri, A discontinuous Galerkin method for two-phase flow in porous media using modified MLP slope limiter, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 12, pp. 326–336, 2015. (in Persian فارسی)
[19] M. Jamei, H. Ghafouri, A novel discontinuous Galerkin model for two-phase flow in porous media using an improved IMPES method, *International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow*, Vol. 26, No. 1, pp. 284–306, 2016.
[20] H. Hoteit, A. Firoozabadi, Multicomponent fluid flow by discontinuous Galerkin and mixed methods in unfractured and fractured media, *Water Resources Research*, Vol. 41, No. 11, W11412, 2005.
[21] L. Pan, A. W. Warrick, P. J. Wierenga, Finite element methods for modeling water flow in variably saturated porous media: Numerical oscillation and mass-distributed schemes, *Water Resources Research*, Vol. 32, No. 6, pp. 1883–1889, 1996.
[22] O. Kolditz, R. Ratke, H.-J. G. Diersch, W. Zielke, Coupled groundwater flow and transport: 1. Verification of variable density flow and transport models, *Advances in Water Resources*, Vol. 21, No. 1, pp. 27–46, 1998.
[23] J. Bear, A.-D. Cheng, *Modeling groundwater flow and contaminant transport*, Vol. 23, pp. 620-660, Dordrecht: Springer Netherlands, 2010.
[24] J. Bear, *Seawater Intrusion in Coastal Aquifers*, Vol. 14, pp.140-178, Dordrecht: Springer Netherlands, 1999.
[25] B. Rivière, *Discontinuous Galerkin methods for solving elliptic and parabolic equations: theory and implementation*, pp. 32-67, Philadelphia: