مجله مهندسی مکانیک مدرس، فروردین 1396، دوره 17، شماره 1، ص‌ص 1-10

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

بهینه‌سازی مانور انتقال مداری هم‌صفحه تراست کم با استفاده از راهکار کنترل بهینه فازی

امیررضا کوثری[1*]، سید علی‌اکبر رضوی[2]،هادی جهانشاهی[2]

1- استادیار، مهندسی هوافضا، دانشگاه تهران، تهران

2- کارشناس ارشد، مهندسی هوافضا، دانشگاه تهران، تهران

* تهران، صندوق پستی 55941-14399، kosari_a@ut.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 18 مرداد 1395

پذیرش: 09 آذر 1395

ارائه در سایت: 15 دی 1395

کلید واژگان:

مانور انتقال مداری هم‌صفحه

مسأله کمینه زمانی

کنترل بهینه فازی

قیود پایانه مسیر

چکیده

در این مقاله، مسأله مانور انتقال مداری کمینه زمانی هم‌صفحه با تراست کم با رهیافت کنترل بهینه فازی حل شده است. معادلات دینامیک مسیر برای مدارهای شبه‌دایروی به فرم گوسی از دسته معادلات لاگرانژ بیان می‌شود. با استفاده از تکنیک میانگین‌گیری تحلیلی، فرم مطلوب معادلات دینامیکی مسأله انتقال مداری هم‌صفحه با بزرگی شتاب ثابت حاصل می‌شود. پس از آن با استفاده از روش گسسته‌سازی اولر، تمامی معادلات دینامیکی تفاضلی، تابع عملکرد و قیود پایانه مسیر در یک فرم گسسته بیان می‌شوند. با استفاده از مفهوم تابع عضویت فضای فازی، مسأله کنترل بهینه کلاسیک مبتنی بر تابع عملکرد و قیود پایانه مسیر همراه با عدم قطعیت و نامعینی، تماما به فضای فازی منتقل می‌شوند. سپس با معرفی متغیرهای کمکی تمامی روابط نامساوی به شروط تساوی تغییر می‌یابند. در ادامه به کمک راهکار بلمن-زاده مسأله کنترل بهینه به یک مسأله بهینه‌سازی پارامتری تبدیل می‌شود که برای حل آن از روش بهینه‌سازی لاگرانژ استفاده می‌شود. در نهایت دستگاه معادلات جبری غیرخطی حاصل از تشکیل شروط لازم بهینگی با روش برنامه‌ریزی غیرخطی حل می‌شود. صحت سنجی نتایج حاصل از حل عددی بهینه فازی با نتایج تحلیلی دردسترس نشان از کارآمدی راهکار ذکرشده در بهینه‌سازی یک مسیر انتقال مداری در حضور عدم قطعیت و نامعینی‌ها دارد. اگرچه رویکرد کنترل بهینه فازی در زمره روش‌های حل مستقیم مسائل کنترل بهینه فازی جای می‌گیرد، اما از معایب آن‌ها نظیر نفرین ابعادی و حجم محاسباتی سنگین به دور بوده و با به‌کارگیری رویکرد فازی و تجربیات خبره حل مسأله می‌تواند ساده‌تر نیز حاصل شود.

Optimization of planar low-thrust orbit transfer maneuver via fuzzy optimal control approach

Amirreza Kosari*, Seyed Aliakbar Razavi, Hadi Jahanshahi

Department of Aerospace Engineering, University of Tehran, Tehran, Iran.
* P.O.B. 14399-55941 Tehran, Iran, kosari_a@ut.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 08 August 2016
Accepted 29 November 2016
Available Online 04 January 2017

Keywords:
Planar Orbit Transfer Problem
Minimum-Time Problem
Fuzzy Optimal Control
Transversality Condition

ABSTRACT

In this paper, minimum-time low-thrust planar orbit transfer problem is solved by fuzzy optimal control. Trajectory dynamic restricting assumptions and using analytical averaging method, the governing equations of orbit transfer problem in its desired form with constant acceleration magnitude are achieved. Then, using Euler discretization method, the whole differential dynamic equations, performance function and transversality conditions are represented in discrete form. Calling on membership function concept of fuzzy environment, this algorithm transfers classical optimal control including performance index and trajectory transversality conditions associated with uncertainties to fuzzy environment. Thereafter, introducing slack variables all the inequalities change to equality conditions. Applying Bellman-Zadeh approach, optimal control problem turns to parameter optimization problem which is then solved by Lagrange multipliers technique. Finally, solving the set of nonlinear algebraic equations made by optimality necessary conditions is simultaneously achieved by nonlinear programming method. Numerical fuzzy optimal control results are validated with available analytical results which show the priorities of this method in orbit transfer trajectory optimization in presence of uncertainties. FOC approach is categorized into direct methods for solving optimal control problems, while it is far from their defects, e.g. curse of dimensionality and burdensome computational load so that fuzzy approach and expert knowledge are applied to simply solve the problems.

1- مقدمه

با هدف بهره برداری از دانش و تکنولوژی فضایی، مسائل پیچیده بسیاری مطرح شده و اطلاعات زیادی پیرامون آن‌ها جمع‌آوری شده است. یکی از مسائل مهم در این زمینه حل مسیرهای بهینه مانور فضاپیما می‌باشد. اهمیت کاربری این مانورها در مأموریت‌هایی نظیر: تعمیر و نگهداری ماهواره، تعقیب بهینه زمانی بین شاتل فضایی و ایستگاه فضایی، مسیرهای انتقال سه بعدی به مدارهای هالو و مسیرهای انتقال سه بعدی به مدارهای زمین آهنگ می‌باشد [1]. برای انجام چنین مانورهایی، انرژی مصرف شده در راستای

Please cite this article using:

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

A. Kosari, S. A. Razavi, H. Jahanshahi, Optimization of planar low-thrust orbit transfer maneuver via fuzzy optimal control approach, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 1, pp. 1-10, 2017 (in Persian)

کنترل شده منجر به تغییر بردار سرعت و در نتیجه تغییر مداری مطلوب می‌شود. طراحی مسیر بهینه وسایل فضایی بسته به نوع پیشران مصرفی در کارهای مختلفی انجام گرفته است. روش مبتنی بر الگوریتم مشارکتی در یک ساختار دولایه برای طراحی مسیر بهینه اجسام بازگشت‌پذیر در مرجع [2] مورد بررسی قرار گرفته است. معانی و همکاران مسیر انتقال ماهواره‌های مخابراتی مدار ژئو را با بهره‌گیری از الگوریتم ژنتیک و با فرض مانور مداری پیوسته [3] و ضربه‌ای [4] بدست آورده‌اند. نوابی و صنعتی‌فر، معادله صریحی برای بهینه‌سازی انتقال مداری ضربه‌ای بین مدارهای هم‌صفحه غیرهم‌محور استخراج نموده‌اند که توانایی جستجوی جواب‌های بهینه محلی و سراسری را دارد [5]. امروزه سیستم‌هایی با توانایی تولید تراست بسیار کم در مانورهای انتقالی مدارهای زمین پایین به مدارهای زمین آهنگ و سفرهای بین‌سیاره‌ای مورد استفاده قرار می‌گیرد. سیستم‌های با پیشرانه الکتریکی باوجود کارایی بالا، تنها مقدار بسیار کمی نیروی تراست تولید می‌کنند و این مشخصه همراه با زمان بسیار طولانی مانور نسبت به موتورهای تراست زیاد، یافتن مسیرهای بهینه را با چالش‌های خاص خود مواجه می‌سازد.

به‌طور کلی حل مسأله کنترل بهینه فضاپیما منجر به مسأله مقدار مرزی دو نقطه ای[1] می‌شود که برای حل آن دو رهیافت کلی مستقیم و غیرمستقیم مطرح می‌شود. مقایسه انواع روش‌های حل غیرمستقیم اعم از روش‌های بر پایه مشتق همچون نزول سریع[2] و تغییر اکستریمال‌ها[3] و نیز روش خطی سازی ناقص[4] برای یک مسأله بهینه‌سازی مسیر تراست کم در [6] انجام شده است. یوری اولیبیشف برای بهینه‌سازی انتقال مدارات با پیشرانه کم و متوسط، رهیافتی مبتنی بر ترکیب الگوریتم‌های برنامه‌ریزی خطی در ابعاد گسترده و گسسته‌سازی دینامیک‌های مسیر به صورت مجزا برای هر بخش ارائه داده است [7]. گرگاد وهابرکرن به ارایه دو روش محاسباتی برای یک مانور انتقال مداری با هدف بیشینه کردن جرم نهایی پرداخته‌اند. روش‌های عددی ارایه شده در کار آن‌ها به طور جداگانه برای مانوری انتقال با تراست پایین و انتقال ضربه‌ای اعمال شده و ارتباط بین این نوع مانورها نشان دهنده این امر است که انتقال ضربه‌ای نه تنها با افزایش بیشینه بزرگی تراست بلکه با افزایش زمان ماموریت به عنوان محدوده پاسخ یک ماموریت انتقال مداری پیوسته شناخته می‌شود [8]. یانگ برای بهینه‌سازی انتقال کمینه زمانی با تراست پایین، روش مستقیمی را پیشنهاد نموده است. وی با استفاده از میانگین‌گیری مداری، از حجم محاسباتی کاسته و بهینه‌سازی مسیر را بر اساس دینامیک‌های متوسط‌گیری مداری نمایش داده و به فرم المان‌های اعتدالی غیرتکین پیش برده است [9].

در این بین همواره راهکارهای تحلیلی به عنوان ابزاری قدرتمند جهت صحت‌سنجی پاسخ‌های حل عددی مورد توجه بوده است. در اوایل دهه 1960، ادل‌بوام برای نخستین بار، عبارتی تحلیلی برای بیشینه تغییرات شیب بین دو مدار دایروی با اندازه داده‌شده با شتاب ثابت پیوسته و زمان انتقالی ثابت استخراج نمود [10]. همچنین وی عبارتی تحلیلی برای ΔV کل مورد نیاز برای انتقال بین مدارهای دایروی شیب‌دار بدست آورد. کچچیان مسأله انتقال تراست پایین بهینه ادل‌بوام بین مدارهای شیب‌دار را در چارچوب تئوری کنترل بهینه به‌گونه‌ای که برای تمامی انتقال‌های مداری به‌طور یکنواخت معتبر باشد، حل نموده است [11]. انتقال کمینه زمانی بین مدارهای دایروی شیب‌دار با چرخش صفحه مداری حول خط گره مدارهای اولیه و نهایی به‌کمک مؤلفه زاویه تراست خارج از صفحه که در مینیمم‌های نسبی تغییر علامت داده و اندازه مداری از مقدار اولیه آن تا مقدار مورد نیاز نهایی به‌صورت همزمان تغییر می‌کند، حل شده است [13,12]. در رهیافت-های عددی و تحلیلی ارائه شده شماتیک‌های میانگین‌گیری متعددی را برای حل عددی سریعتر مسائلی با پیچیدگی زیاد شامل قیود حقیقی نظیر اثر پخی زمین پیشنهاد می‌نماید.

در زمینه رهیافت‌های بهینه فازی تحقیقات زیادی صورت پذیرفته است. رویکرد بسیاری از این رهیافت‌ها مبتنی بر انتقال مسائل کنترل بهینه به فضای فازی و سپس استفاده از روش‌های بهینه جستجو می‌باشد. در اغلب این روش‌ها پارامترهای طراحی مسأله بهینه‌سازی از جنس اعداد فازی می‌باشند و در واقع توابع فازی ساز، به عنوان متغیرهای بهینه‌سازی مطرح می باشند. در این رهیافت‌ها، تئوری‌ها و روابط بین متغیرها در فضای فازی، مدل‌های فازی سازی و نافازی سازی و نیز مکانیزم‌های استنتاجی و قواعد فازی در مسأله نقش داشته و تمامی متغیرها و قیود بهینه‌سازی از جنس توابع عضویت فازی می باشند. از این رو به واقع این دسته از روش‌ها بایستی با نوع فازی بهینه مورد خطاب قرار گیرند، چرا که استخراج معادله بهینگی و فرایند بهینه‌سازی تماماً در فضای متغیرهای فازی صورت گرفته و جواب‌های خروجی مسأله بهنیه‌سازی نیز از جنس متغیرهای فازی می باشند. دراین‌راستا ژو در سال 2009 به ارائه مدلی برای کنترل بهینه فازی[5] می‌پردازد که بر اساس ایده فرایندهای فازی شکل گرفته است [14] سپس با به کارگیری اصل بهینگی بلمن[6] در برنامه‌ریزی دینامیکی، اصل بهینگی را برای یک سیستم کنترل بهینه فازی ارائه می دهد و سپس معادله‌ای با نام معادله بهینگی در کنترل بهینه فازی استخراج نموده و در نهایت با استفاده از این معادله، مدل انتخابی نمونه‌ای را حل می‌نماید. حل مسأله ی بیشینه بردار خطی با به کار گیری رهیافت برنامه‌ریزی خطی فازی توسط زیمرمن برای نخستین بار انجام شد. وی نشان داد که چگونه یک برنامه‌ریزی خطی فازی با اهداف چندگانه را به کمک توابع عضویت خطی می توان به برنامه‌ریزی خطی تک هدفه تبدیل نمود [15]. رهیافت برنامه‌ریزی غیرخطی فازی گسسته-ترکیبی که فرمول λ فازی را با یک الگوریتم ژنتیک هیبریدی ترکیب می نماید، برای حل مسأله بهینه‌سازی در فضای فازی استفاده شده است [16]. شمای جدید کنترل بهینه فازی برای سیستم‌های غیر خطی گسسته زمانی بر پایه ی اصل مینیمم پونتریاگین[7] در [17] ارائه شده است. در این روش، با بهره‌گیری از انتشار خطای شبه حالت نهایی و نزول گرادیانی، روشی برای آموزش یک سیستم موتور فازی تطبیقی جهت تخمین مقادیر برای متغیرهای شبه حالت استخراج شده است. آمراهوف در مطالعه خود رهیافتی جدید برای یک مسأله کنترل بهینه زمانی همراه با نامعینی ارائه نموده است [18]. وی با فرض دینامیک جسم کنترلی به شکل نافازی و حالات در فاز اولیه و نهایی از نوع فازی، مفهوم جدید زمان بهینه فازی را معرفی نموده و محاسبات را به دو مسأله کنترل بهینه کلاسیک با مجموعه‌های اولیه و نهایی تبدیل نموده است.

در این مقاله تکنیک کنترل بهینه فازی برای حل مسأله مانور انتقال مداری هم‌صفحه تراست کم و تابع هزینه کمینه زمانی و قیود پایانه مسیر حل شده است. در این روش سعی براین است تا با تعریف تمامی متغیرها و قیود مسأله در فضای فازی، معیار عملکرد مورد نظر را کمینه نموده و در عین

[1] Two-Point Boundary Value Problem
[2] Steepest Descent
[3] Variation of Extremals
[4] Qusilinearization
[5] Fuzzy Optimal Control (FOC)
[6] Bellman Optimality Principle
[7] Pontryagin Minimum Principle

حال قیود پایانه مسیر نیز ارضا شوند. نقش فضای فازی در این رهیافت، تنها به عنوان یک ابزار واسط بوده و پس از فازی سازی تابع هزینه و قیود پایانه‌ای آمیخته به عدم قطعیت، به کمک تئوری تصمیم‌گیری در فضای فازی و راهکار بلمن زاده، مسأله بیشینه‌سازی پارامتری در فضای متغیرهای نافازی بیان می شود. این رهیافت ضمن انتقال مسأله کنترل بهینه به فضای فازی، از روش برنامه‌ریزی غیرخطی برای پیداکردن حل بهینه بهره می‌برد. نحوه عملکرد الگوریتم بهینه فازی بدین صورت است که ابتدا معادلات حاکم بر مسأله را گسسته نموده، سپس با استفاده از هم‌مکان‌سازی مستقیم، مسأله و محدودیت‌های عملکردی در فضای گسسته تعریف می‌شوند. با تعریف توابع عضویت، تابع هزینه و نیز تمام قیود پایانه مسیر و محدودیت‌های عملکردی مسأله به‌شکل روابط فازی بازنویسی می‌شوند؛ سپس با توجه به نوع تعریف تابع عملکرد و قیود در فضای متغیرهای فازی، تمامی روابط نامساوی به شروط تساوی تبدیل می‌شوند. آنگاه، ضمن کمک گرفتن از راهکار بلمن زاده و تبدیل مسأله به نوع بهینه‌سازی پارامتری، برای حل مسأله از روش بهینه-سازی لاگرانژ کمک گرفته می‌شود؛ در نهایت دستگاه معادلات جبری غیرخطی حاصل را با روش‌های عددی و به‌طور همزمان حل نموده و با توجه به شرط وجود جواب، حل بهینه به دست می‌آید. درانتها، الگوریتم معرفی شده با حل تحلیلی مقایسه شده و بحث بر روی نتایج صحت‌سنجی شده انجام می‌گیرد.

2- معادلات دینامیکی انتقال مداری

دسته معادلات دینامیکی کلی برای انتقال مداری سه بعدی در فضا با استفاده از فرم گوسی معادلات سیاره ای لاگرانژ در مدارهای شبه دایروی به شکل زیر می‌باشد [19]. در مدارهای دایروی با میل خروج از مرکز به صفر، بدلیل تکینگی، ω را نمی‌توان به درستی تعریف نمود؛ از این رو معادله دیفرانسیل $\dot{\omega}$ و $\dot{e}$ با مؤلفه‌های غیرتکین[1] $\dot{e}_x$ و $\dot{e}_y$ جایگزین می‌شود.

$$\frac{da}{dt}=\frac{2af_t}{V} \tag{1}$$

$$\frac{de_x}{dt}=\frac{2f_tc_\delta}{V}-\frac{f_ns_{\alpha\delta}}{V} \tag{2}$$

$$\frac{de_y}{dt}=\frac{2f_ts_\delta}{V}+\frac{f_nc_\delta}{V} \tag{3}$$

$$\frac{di}{dt}=\frac{f_hc_\delta}{V} \tag{4}$$

$$\frac{d\Omega}{dt}=\frac{f_hs_\delta}{Vs_i} \tag{5}$$

$$\frac{d\delta}{dt}=n+\frac{2f_n}{V}-\frac{f_hs_\delta}{V\tan i} \tag{6}$$

در معادلات (1) تا (6)، a ارتفاع مداری، f بزرگی بردار شتاب تراست، V سرعت مداری، i شیب مدار، Ω زاویه بعد گره صعودی مدار، e خروج از مرکز مدار، n، حرکت متوسط و δ موقعیت زاویه‌ای متوسط می‌باشد که در مدارهای دایروی به صورت رابطه (7) ساده می‌شود.

$$\delta=\omega+M=\omega+\theta^*=\theta \tag{7}$$

در این رابطه ω آرگومان حضیض زمینی، M آنومالی متوسط، θ^* آنومالی حقیقی و θ موقعیت زاویه ای مدار می‌باشند. همچنین نمایش c_δ و s_δ بیانگر $\cos\delta$ و $\sin\delta$ است.

بردار تراست در حالت کلی در فضای سه بعدی دارای سه مؤلفه مماسی، عمود بر مدار و خارج از صفحه مداری می‌باشد که به ترتیب با f_t ، f_n و f_h نمایش داده می شوند (شکل 1).

[1] Nonsingular

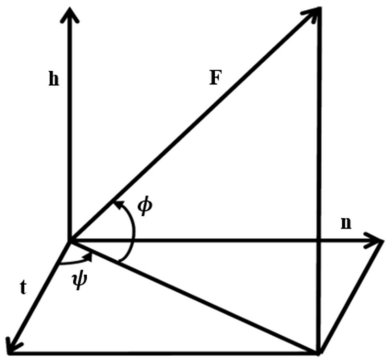

Fig. 1 Thrust vector and thrust angles

شکل 1 بردار و زوایای تراست

$$f_t=f\cos\phi\cos\psi \tag{8}$$

$$f_n=f\cos\phi\sin\psi \tag{9}$$

$$f_h=f\sin\phi \tag{10}$$

در روابط (8) تا (10)، ϕ زاویه سمت تراست می‌باشد که به صورت زاویه بین بردار تراست با صفحه مداری تعیین می‌شود. ψ زاویه چرخش تراست در صفحه می‌باشد که به صورت زاویه بین تصویر بردار تراست روی صفحه مدار و راستای افق محلی[2] تعریف می‌شود.

در مسأله انتقال مداری موردتحقیق در این پژوهش فرضیات زیر بایستی مدنظر قرار گیرند؛

1) انتقال مداری در صفحه زاویه سمت تراست انجام می‌شود؛ از این رو تغییری در شیب مداری وجود ندارد.

2) در این تحلیل، فرض می شود $\psi=0$ است، بنابراین تنها مؤلفه‌های شتاب تراست مماسی و عمود بر مدار اعمال می‌شوند و در حین مانور، فرض بر این است که مدار به‌صورت دایروی باقی می‌ماند. به عبارت دیگر، در تحلیل صورت گرفته $f_n=0$ است.

از این‌رو برای این مسأله، مؤلفه‌های تراست به صورت روابط (12,11) ساده می‌شوند:

$$f_t=f\cos\phi \tag{11}$$

$$f_h=f\sin\phi \tag{12}$$

3) بزرگی بردار شتاب ثابت فرض شده $(f=ct)$ و متغیر ϕ متغیر کنترلی مسأله خواهد بود.

با اعمال فرضیات ذکرشده، معادلات بکارگرفته شده در مانور هم‌صفحه به صورت روابط (13) تا (15) خلاصه می‌شوند:

$$\frac{da}{dt}=\frac{2af_t}{V} \tag{13}$$

$$\frac{d\Omega}{dt}=\frac{f_hs_\theta}{Vs_i} \tag{14}$$

$$\frac{d\delta}{dt}=n-\frac{f_hs_\theta}{V\tan i} \tag{15}$$

با توجه به معادله انرژی در مدارهای دایروی رابطه (16) برقرار است:

$$\frac{V^2}{2}-\frac{\mu}{r}=\frac{\mu}{2a} \tag{16}$$

در مدارهای دایروی $(r=a)$ می باشد و ارتباط بین سرعت و ارتفاع مداری به صورت رابطه (17) حاصل می شود:

$$V=\sqrt{\frac{\mu}{a}} \tag{17}$$

[2] Local- horizontal

با جایگزاری معادله (17) در معادله (13) رابطه (18) حاصل می‌شود:

$$\frac{dV}{dt} = -fc_{\phi} \tag{18}$$

با فرض اینکه زاویه ϕ در گره‌های تلاقی مدار با صفحه استوا به‌صورت تناوبی تغییر علامت می‌دهد، سهم عبارت $f_h s_\theta$، معادل صفر خواهد بود. از این رو معادله (15) به شکل رابطه (19) ساده می‌شود.

$$\frac{d\theta}{dt} = n \tag{19}$$

با حاصل شدن معادله (19) می‌توان معادلات دینامیکی مسأله انتقال مداری هم‌صفحه را نسبت به متغیر θ میانگین‌گیری نمود. در روش تحلیلی میانگین‌گیری مداری، نرخ تغییر متوسط زمانی هر پارامتر با محاسبه تغییرات افزایشی در هر پارامتر در یک بار گردش مداری نسبت به دوره تناوب مداری انجام می‌گیرد. استفاده از این تکنیک بار محاسباتی مسأله بهینه‌سازی را کاهش می‌دهد. از آنجایی‌که تغییرات پنج پارامتر مداری a, e, i, Ω, ω به دلیل شتاب بسیار کم سیستم پیشرانش الکتریکی در هر دور چرخش مداری کوچک می‌باشد، نرخ تغییرات زمانی متوسط هر یک از این المان‌های مداری قابل محاسبه می‌باشد. از این رو می‌توان با گام‌های زمانی بزرگ حل مسأله پیشروی مداری[1] را حل نمود. یکی از مشکلات استفاده از روش میانگین‌گیری مداری این است که اطلاعات پارامترهای مداری با تغییرات سریع برخی پارامترهای دیگر از دست می‌رود و از این رو تعیین موقعیت دقیق ماهواره امکان‌پذیر نمی‌باشد. بنابراین در این مسأله سعی بر این است تا با میانگین گیری کلیه معادلات نسبت به پارامتر θ، اثر آن در معادلات خنثی شود. با میانگین گیری مداری از معادله $\dot{\Omega}$ در بازه موقعیت زاویه‌ای $[0 - \pi]$ و با توجه به تغییر علامت ϕ در گره‌های صعودی و نزولی فرمول (20) حاصل می‌شود:

$$\dot{\bar{\Omega}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f s_\phi s_\theta}{V s_i} d\theta = \frac{2 f s_\phi}{\pi V s_i} \tag{20}$$

با استفاده از مقدار متوسط انتگرال، معادلات دینامیکی (21) و (22) در مسأله انتقال مداری هم‌صفحه مورد استفاده قرار می‌گیرند:

$$\dot{V} = -fc_{\phi} \tag{21}$$

$$\dot{\Omega} = \frac{2 f s_\phi}{\pi V s_i} \tag{22}$$

3- روش کنترل بهینه فازی

حل یک مسأله کنترل بهینه کلاسیک به طور عمده با روش‌های مستقیم وغیرمستقیم پیش برده می‌شود. روش کنترل بهینه فازی در زمره روش‌های حل مستقیم مسائل مقدار مرزی دو نقطه‌ای کنترل بهینه قرار می‌گیرد. در این راستا تابع عملکرد مورد نظر طراح و نیز محدودیت‌های عملکردی و قیود پایانه مسیر یک مسأله بهینه‌سازی همراه با عدم قطعیت و نامعینی‌ها، به صورت روابط فازی و تحت توابع عضویت مشخص تعریف می شوند. با توجه به نوع تعریف تابع عملکرد و محدودیت‌های مورد نظر که در فضای متغیرهای فازی تعریف می‌شوند، با تعریف متغیرهای کمکی تمامی این روابط که به صورت نامساوی هستند، در مسأله اخیر تبدیل به شروط تساوی خواهند شد. در این راستا و به منظور یافتن حل بهینه از راهکار بلمن-زاده کمک گرفته می شود و برای وارد کردن محدودیت‌ها از ضرایب لاگرانژ استفاده می‌شود. نهایتاً دستگاه معادلات جبری غیرخطی حاصل، به صورت هم‌زمان حل شده و با توجه به شرط وجود جواب، حل بهینه بدست خواهد آمد.

در گام نخست الگوریتم، با گسسته‌سازی معادلات دینامیکی تفاضلی و استفاده از تکنیک هم‌مکان‌سازی مستقیم، تابع هزینه و شروط پایانه مسیر مسأله در فضای گسسته وارد می‌شوند.

بدین منظور، معادلات دینامیکی در یک فرم فشرده گسسته بیان می‌شوند.

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k) \quad , \quad k = 0. \dots . \mathrm{N} - 1 \tag{23}$$

تابع هزینه مسأله کنترل بهینه در فرم کلی گسسته شده

$$J = g(x_N) + \sum_{k=0}^{N-1} h(x_k, u_k) \tag{24}$$

و شروط پایانه مسیر مسأله نیز به‌صورت رابطه (25) تعریف می‌شوند.

$$S_i(x_N) = 0 \quad i = 1, \dots, q \tag{25}$$

در مسائل کنترل بهینه جهان واقعی، فرموله‌بندی شروط پایانه مسیر به دانش عمیقی از طبیعت سیستم نیاز دارد و معمولاً این شروط با یک عدم قطعیت همراه می‌باشند. به تعبیری دیگر، می‌توان این‌گونه بیان داشت که رسیدن به یک سطح مطلوب نهایی به طور دقیق مقدور نبوده و درصدی انحراف حول سطح مطلوب نهایی قابل قبول است. از طرفی دیگر هدف بهینه‌سازی، محدود نمودن تابع هزینه کمتر از یک مقدار ثابت معین و یا ارضای آن با یک درجه معین می‌باشد. بسته به مدل‌سازی نامعینی‌ها به صورت متغیرهای تصادفی و یا غیرتصادفی، از روش‌های مخلفی برای حل مسائلی با عدم قطعیت می‌توان استفاده نمود. کار با متغیرهای تصادفی و آماری با به کارگیری تئوری احتمالات و تئوری اعتباری انجام می‌گیرد. درصورتی که داده‌های آماری قابل اعتماد نبوده و یا در دسترس نباشند، تئوری مجموعه فازی بهترین روش برای مدل کردن نامعینی‌های سیستم می‌باشند [20] این تئوری از متغیر تصمیم‌گیری در فضای فازی استفاده می‌نماید. از این‌رو با کمک گرفتن از مفهوم تابع عضویت در فضای فازی، می‌توان تمامی عدم قطعیت‌های موجود در شروط پایانه مسیر و نیز تابع هزینه را به سیستم وارد نمود.

$$\mu_i : S_i \to [0,1], \quad i = 1, \dots, q$$
$$\mu_0 : J \to [0,1] \tag{26}$$

μ_i توابع عضویت مربوط به قیود پایانه مسیر (S) و q تعداد این قیود می‌باشد و μ_0 تابع عضویت مربوط به تابع هزینه می‌باشد. استفاده از نوع توابع عضویت با توجه به نوع مسأله و دقت مورد نظر طراح انتخاب می‌گردد. با توجه به سادگی و عمومیت کاربرد توابع عضویت خطی-مثلثی و نیز حفظ پایداری روش بهینه‌سازی کنترل بهینه فازی [21]، در این مسأله از توابع عضویت ذوزنقه‌ای همانند شکل‌های 2 و 3 استفاده شده است. α_0 و β_0 پارامترهای تابع عضویت اختصاص یافته به تابع هزینه و $\alpha_i \ (i = 1.2)$ و $\beta_i \ (i = 1.2)$ پارامترهای تابع عضویت شروط پایانه مسیر می‌باشند. تعیین این پارامترها به طور قابل ملاحظه‌ای به فرموله‌بندی مسأله کنترل بهینه و نیز تخمین مناسب از مقدار تابع عملکرد و شروط مسأله وابسته بوده و توسط فرد خبره و با توجه به درک صحیح از دینامیک و محدودیت‌های فیزیکی مسأله تعیین می‌شوند.

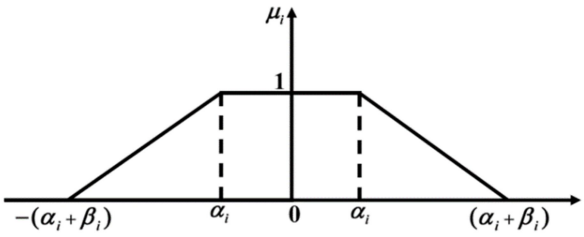

Fig. 2 Membership function of transversality conditions.

شکل 2 تابع عضویت قیود پایانه مسیر

[1] Propagation

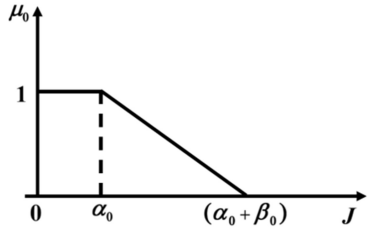

Fig. 3 The membership function of performance function.

شکل 3 تابع عضویت تابع عملکرد

به طور کلی، مسأله کنترل بهینه با درنظرگرفتن N معادله حاصل از تکرار معادله (13) همراه با q شرط پایانه مسیر می‌تواند به یک مسأله برنامه‌ریزی ریاضیاتی تبدیل شود. تبدیل مسأله کنترل بهینه فازی به یک مسأله بیشینه-سازی پارامتری با استفاده از عملگر اشتراک بین توابع عضویت فازی و نیز راهکار بلمن-زاده امکان‌پذیر می‌باشد. مطابق با این راهکار می‌توان یک تصمیم فازی را به عنوان مجموعه فازی جایگزین، حاصل از اشتراک تمامی اهداف و قیود تعریف نمود (شکل 4) [22].

از این رو با توجه به نوع توابع عضویت تعریفی برای تابع هزینه و قیود پایانه مسیر رابطه (27) حاصل می‌شود:

$$\mu_D = \mu_0 \wedge \mu_1 \wedge \dots \wedge \mu_q \tag{27}$$

طبق [23]، λ پارامتر تابع عضویت تصمیم‌گیری بوده و به صورت (28) تعریف می‌شود.

$$\lambda = \mu_D = \min_{i=0.\dots.q}\{\mu_i\} \tag{28}$$

این پارامتر بایستی شرط نامساوی (29) را دربر بگیرد.

$$\lambda \le \mu_i \quad i = 0.\dots.q \tag{29}$$

پارامتر تصمیم از جنس تابع عضویت می‌باشد، از این‌رو بایستی در شرط (30) نیز صدق نماید.

$$0 \le \lambda \le 1 \tag{30}$$

با استخراج رابطه (29)، فرموله‌بندی کلی مسأله کنترل بهینه فازی در فرم یک مسأله بهینه‌سازی پارامتری با توجه به محدودیت‌ها و قیود مربوطه، طبق (31) خواهد بود:

$$\begin{aligned}
&\max_{x.u} \lambda \\
&x_{k+1} = f(x_k, u_k) \quad , \quad k = 0.\dots.N-1 \\
&\lambda \le 1 - \frac{J-\alpha_0}{\beta_0} \\
&\lambda \le 1 - \frac{S_i-\alpha_i}{\beta_i} \quad , \quad i = 1.\dots.q \\
&\lambda \le 1 - \frac{S_i+\alpha_i}{\beta_i} \\
&0 \le \lambda \le 1
\end{aligned} \tag{31}$$

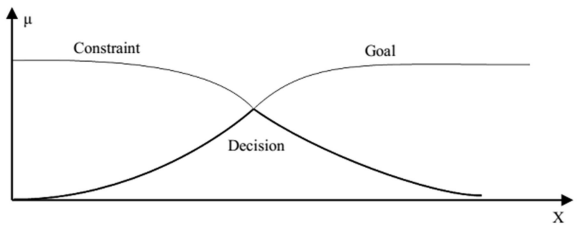

Fig. 4 Relation between the goal, the constraint and the decision

شکل 4 ارتباط بین قید، هدف و تصمیم

با تعریف متغیرهای کمکی، $p_i \;\; i = 1,\dots,2q+2$ ، تمامی روابط و قیود نامساوی، به شروط تساوی تبدیل می‌شوند. حال می‌توان مسأله بهینه‌سازی مقید حاصل را با روش بهینه‌سازی لاگرانژ حل نمود. به این منظور تابع لاگرانژ به شکل (32) تشکیل می شود.

$$L = \lambda - \sum_{j=1}^{N+2q+2} A_j Q_j(x,u,p,\lambda) \tag{32}$$

که A_j ضرایب لاگرانژ، N تعداد معادلات دینامیکی، q تعداد قیود پایانه مسیر و Q_i شامل تمام معادلات دینامیکی، تابع هزینه و قیود مسأله می‌باشند. شرط یافتن حل بهینه در صورت وجود جواب از حل هم‌زمان دستگاه معادلات جبری غیرخطی (33) تا (37)، به کمک الگوریتم‌های گرادیانی نظیر نیوتون تعیم‌یافته و گوس-سایدل و با فراهم‌کردن بردار حدس اولیه جواب‌ها حاصل می‌شود.

$$\frac{dL}{d\lambda} = 0 \tag{33}$$

$$\frac{dL}{du_k}, \quad k = 1,\dots,N-1 \tag{34}$$

$$\frac{dL}{dx_k}, \quad k = 1,\dots,N \tag{35}$$

$$\frac{dL}{dA_j} = 0, \quad j = 1,\dots,N+2q+1 \tag{36}$$

$$\frac{dL}{dp_i} = 0, \quad i = 0,\dots,2q+1 \tag{37}$$

4- شبیه‌سازی و نتایج

در این بخش ابتدا معادلات دینامیک مسیر انتقال مداری هم‌صفحه برای استفاده در رهیافت کنترل بهینه فازی به فرم گسسته بیان می‌شوند. سپس با استفاده از توابع عضویت مشخص و راهکار بلمن-زاده، مسأله به نوع بیشینه‌سازی پارامتری تبدیل می‌شود. در نهایت با حل دسته معادلات جبری غیرخطی حاصل از به‌کارگیری بهینه‌سازی لاگرانژ بردار حالات بهینه مسیر حاصل می‌شود. در انتها مقایسه خروجی حل عددی با نتایج حاصل از حل تحلیلی انجام شده و پارامترهای مؤثر بر راهکار کنترل بهینه فازی مورد بحث قرار گرفته‌است.

با توجه به مرتبه خطای روش‌های گسسته‌سازی، انتخاب نوع روش در دقت حل تأثیرگذار می‌باشد. روش‌های گسسته‌سازی گوناگونی نظیر اولر، ذوزنقه‌ای، رانج کوتا و سیمپسون در حل مسأله می‌توانند مورد استفاده قرار گیرند. با انتخاب روش‌های گسسته‌سازی پیچیده‌تر، دقت حل افزایش و سرعت حل کاهش می‌یابد. در مسأله انتقال مداری بهینه، از روش اولر استفاده می‌شود که باوجود سادگی، منجر به پاسخ‌های قابل قبول خواهد شد.

از این‌رو، در گام نخست، معادلات دینامیکی (21) و (22)، با روش اولر گسسته می‌شوند.

$$V_{k+1} = V_k + T_s(-f c_\phi) \;\; , \;\; k = 0,\dots,N \tag{38}$$

$$\Omega_{k+1} = \Omega_k + T_s\left(\frac{2\, f\, s_\phi}{\pi\, V\, s_i}\right) \;\; , \;\; k = 0,\dots,N \tag{39}$$

که T_s اندازه گام زمانی مسیر است.

تابع هزینه در مسأله انتقال مداری، از نوع یک مسأله کمینه زمانی است.

$$J = \int_{t_0}^{t_1} L dt = t_f - t_0 \quad (L = 1) \tag{40}$$

هدف از انتقال مداری بدون تغییر در شیب مداری، رسیدن به ارتفاع مدار پایانی و نیز تزریق در نقطه Ω_f است. بنابراین شروط پایانه مسیر مسأله به‌صورت رابطه (41) و (42) تعریف می‌شوند.

$$V_f = V(t_f) \tag{41}$$

$$\Omega_f = \Omega(t_f) \tag{42}$$

پارامترهای لازم در حل مسأله انتقال مداری بین دو مدار دایروی هم صفحه در جدول 1 و خروجی‌های مطلوب در جدول 2 آورده شده‌اند [24]. لازم به ذکر است شرایط اولیه در لحظه $t_0 = 0$ محاسبه می‌شوند.

با دانستن ارتفاع‌های مداری اولیه و نهایی، می توان سرعت‌های اولیه و نهایی را طبق رابطه (17) برای مدارهای دایروی بدست آورد.

$$V_0 = 7.79 \ \text{km/s}$$
$$V_f = 7.61 \ \text{km/s}$$

در مسأله کنترل بهینه فازی بایستی با توجه به نوع توابع عضویت هزینه و قیود، پارامترهای آن‌ها تعیین گردند. α_1 و α_2 پارامترهای تابع عضویت مربوط به قیود سرعت و زاویه بعد مداری می‌باشند که با توجه به شرط تزریق نقطه‌ای به صورت روابط تساوی (41) و (42) انتخاب می‌شوند. α_0 پارامتر تابع عضویت مربوط به تابع هزینه می‌باشد. در واقع α_0 مقدار تقریبی از هزینه یک مسأله بهینه‌سازی همراه با نامعینی بوده و طراح بایستی به گونه‌ای این پارامتر را معین کند تا تقریب مناسبی از تابع هزینه نهایی بدست آید. تعیین مقدار این پارامتر از جمله نکات کلیدی مسأله کنترل بهینه فازی می‌باشد. یکی از روش‌های تعیین این پارامتر استفاده از راه‌حل‌های تحلیلی در دسترس می‌باشد. همچنین در صورت عدم وجود حل تحلیلی، می‌توان با روش‌های سعی وخطا به مقدار مطلوب این پارامتر نزدیک شد. در این مسأله، با توجه به تابع هزینه کمینه زمانی، این پارامتر به شکل حاصلضرب تعداد گره‌ها در اندازه گام انتخاب می‌شود. β_1 و β_2 پارامترهای تلرانس توابع عضویت قیود و β_0 پارامتر تلرانس تابع عضویت هزینه می‌باشند که با توجه به دقت مورد نظر طراح و الزامات ماموریتی تزریق مداری بایستی محاسبه گردند.

در فرموله‌بندی مسأله انتقال مداری با رهیافت کنترل بهینه فازی، متغیرهای تصمیم به صورت رابطه (43) می باشند.

$$\begin{bmatrix} V_k, \Omega_k, \phi_k, \\ \lambda, y_i, p_j \end{bmatrix} \ , \quad k = 1, \dots, N, \quad i = 1, \dots, 2q+2 \ , \quad j = 1, \dots, 2N + 2q + 2 \tag{43}$$

که V_k نشانگر سرعت، Ω_k نشانگر زوایای بعد و ϕ_k نشانگر متغیرهای کنترلی مسأله در هر مرحله از معادلات گسسته شده می‌باشند. λ پارامتر بهینه‌سازی مسأله و از جنس تابع عضویت بوده و به شکل اشتراک بین همه توابع عضویت تعریف شده است. p_i ضرایب لازم برای تبدیل نامساوی‌ها به شروط تساوی و A_j ضرایب لاگرانژ مسأله حاضر می باشند. با تشکیل تابع لاگرانژین و برآورد شروط لازم بهینه‌سازی، تعداد $5N + 13$ معادله جبری غیرخطی حاصل می‌شود که به کمک روش‌های برنامه‌ریزی غیرخطی حل می‌شوند.

برای حل مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی از حل‌کننده‌های گوناگونی می‌توان بهره برد، اما با توجه به دینامیک مسأله تراست کم به دلیل غیرخطی بودن شدید، بازه حل زمانی طولانی و تغییرات بسیار کم متغیرهای حالت از حل‌کننده‌ای که از توانمندی‌های بالایی برای حل چنین مسائلی برخوردار است، استفاده می‌شود. با صفر قرار دادن مقدار تابع هزینه، مسأله به نوع یافتن ریشه‌های دسته معادلات تغییر می‌یابد.

با توجه به تابع هزینه کمینه زمان، مقدار زمان نهایی در مسأله انتقال مداری بهینه آزاد می‌باشد. با توجه به اینکه گام زمانی حل در مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی ثابت در نظر گرفته می‌شود [25]، می‌توان زمان نهایی را به صورت رابطه (44) در نظر گرفت.

$$t_f = N \times T_s \tag{44}$$

N تعداد گره‌ها و T_s گام مسیر می‌باشند. انتخاب هر دو پارامتر نقش مهمی در دقت و سرعت حل دارد. انتخاب تعداد گره‌های کم و گام بزرگ، سرعت محاسبات را افزایش و دقت حل را کاهش می‌دهد و انتخاب تعداد گره‌های زیاد و گام کوچک، سرعت محاسبات را کاهش و دقت حل را افزایش می‌دهد. مقدار مناسب تعداد گره‌ها و گام مسیر به دقت مطلوب طراح و سیستم سخت‌افزاری و نرم‌افزاری در دسترس وابسته می‌باشد. حل مسأله کمینه زمان با حل کننده برنامه‌ریزی غیرخطی بدین صورت می‌باشد که ابتدا با تعیین یک مقدار اولیه برای تعداد گره‌ها و نیز بردار حدس اولیه، متغیرهای طراحی مسأله مقداردهی می‌شوند؛ سپس با تعریف خطای فاصله از حالات مطلوب و بروزرسانی تعداد متغیرها و قیود تساوی تا زمان رسیدن به محدوده بازه خطای تعیین‌شده، تعداد گره‌ها با فرموله‌بندی مناسب تغییر می‌نمایند.

حل تحلیلی مسأله انتقال مداری تراست کم هم‌صفحه برای یک انتقال مداری از مختصات اولیه (V_0, Ω_0) به مختصات نهایی (V_f, Ω_f) مطابق آنچه در مرجع [24] آمده است بدست می‌آید. (فرموله‌بندی تحلیلی در بخش پیوست بحث شده است). پاسخ‌های بدست آمده از روش کنترل بهینه فازی با نتایج تحلیلی در دسترس مقایسه شده است. مقایسه نتایج پاسخ‌های یک مسأله انتقال مداری هم‌صفحه تراست کم با روش الگوریتم بهینه فازی با حل تحلیلی نسبت به متغیرهای حالات سرعت و زاویه بعد و نیز متغیر کنترلی زاویه سمت تراست بازای $T_s = 600$ s و با دقت 0.001 به ترتیب در شکل‌های 5 تا 7 نشان داده شده است. همچنین با توجه به اهمیت دید شهودی نحوه انجام مانور انتقالی در صفحه، استخراج مسیر بهینه انتقال مداری تراست کم بین دو مدار دایروی اولیه و هدف به مختصات کارتزینی انتقال یافته و در شکل 8 نمایش داده شده است. این شکل حرکت سیستم از نقطه اولیه به کمک پالس‌های پیوسته پیشرانش الکتریکی تراست کم را تا لحظه رسیدن به مختصات نهایی در مدار هدف نشان می‌دهد. جدول 3 خروجی حاصل از حل الگوریتم کنترل بهینه فازی را نشان می‌دهد.

از جمله معیارهای مهم در مانورهای مداری میزان دقت رسیدن به شروط پایانه مسیر می‌باشد، از این رو پارامترهای تلرانس توابع عضویت مناسب طبق جدول 4 درنظرگرفته شده است.

جدول 1 پارامترهای ورودی لازم برای یافتن مسیر بهینه مانور انتقال مداری

Table 1 Necessary input parameters for finding optimal trajectory of orbit transfer maneuver

ورودی‌های الگوریتم	مقدار
ارتفاع مدار اولیه	185 (km)
زاویه بعد گره صعودی اولیه	10 (deg)
شیب مداری	10 (deg)
شتاب تراست	3.5×10^{-5} (km/s^2)
شعاع زمین	6378.33 (km)
ثابت گرانش	398600 (km^3/s^2)

جدول 2 مقادیر مطلوب مدار نهایی

Table 2 Desired values of final orbit

خروجی‌های مطلوب	مقدار
ارتفاع مدار نهایی	500 (km)
زاویه بعد گره صعودی نهایی	20 (deg)

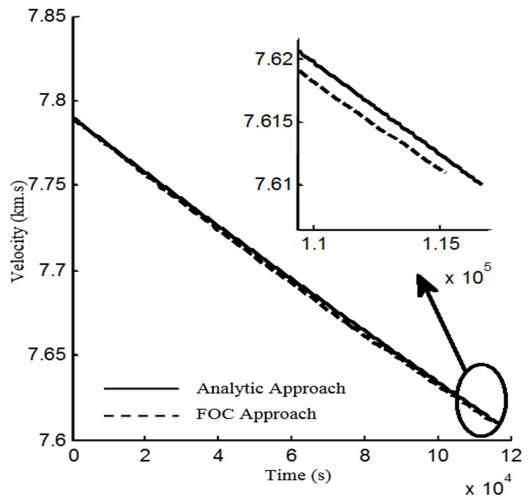

Fig. 5 Orbital velocity vs. time in analytical and FOC approach

شکل 5 سرعت مداری نسبت به زمان در حل تحلیلی و کنترل بهینه فازی

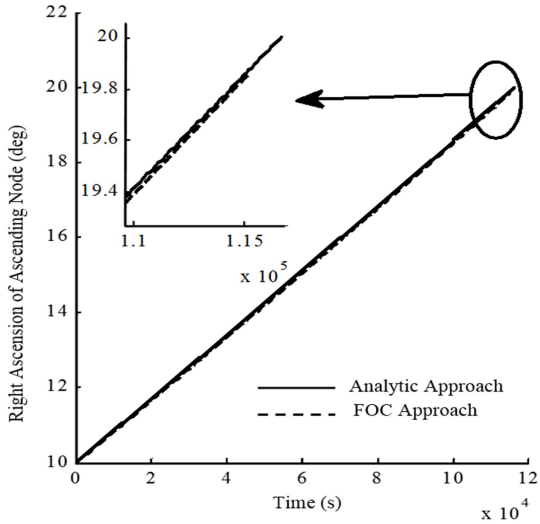

Fig. 6 Orbital right ascension of ascending node vs. time in analytical and FOC approach

شکل 6 زاویه بعد گره صعودی مداری نسبت به زمان در حل تحلیلی و کنترل بهینه فازی

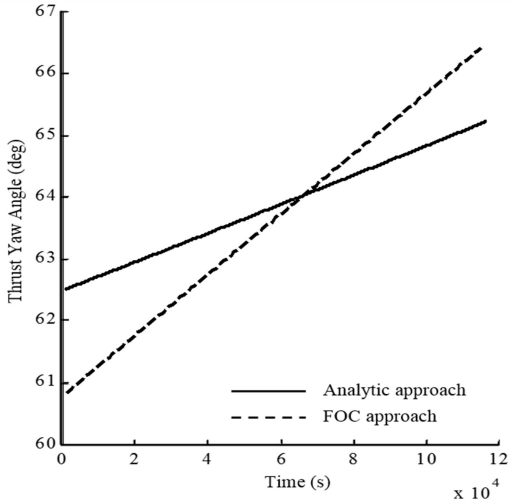

Fig. 7 Control variable of thrust yaw angle vs. time in analytical and FOC approach

شکل 7 متغیر کنترلی زاویه سمت پیشران نسبت به زمان در حل تحلیلی و کنترل بهینه فازی

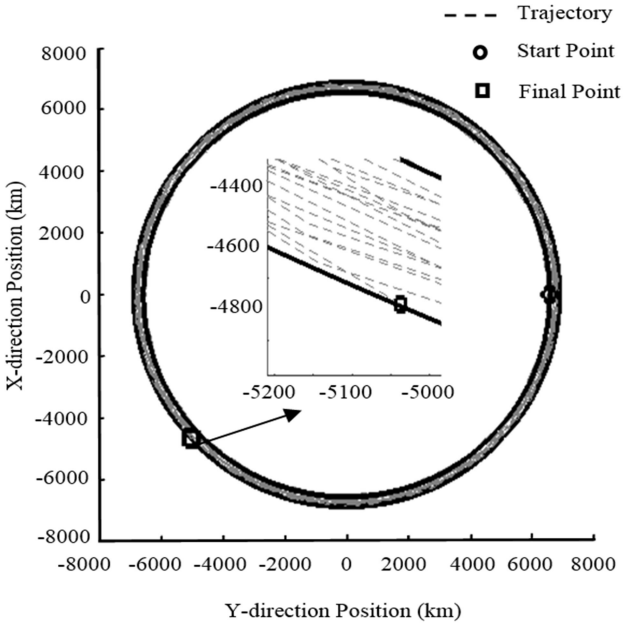

Fig. 8 Low-Thrust Planar Orbit Transfer Trajectory

شکل 8 مسیر انتقال مداری هم صفحه تراست کم

جدول 3 مقادیر خروجی متغیرهای طراحی الگوریتم کنترل بهینه فازی

Table 3 Design variable output values of FOC algorithm

خروجی الگوریتم	مقدار
پارامتر تصمیم λ	0
ارتفاع نهایی	503.21 (km)
زاویه بعد گره صعودی نهایی	19.85 (deg)

جدول 4 مقادیر تلرانس مربوط به توابع عضویت هزینه و قیود

Table 4 Tolerance values of performance function and transversality membership function

پارامتر تلرانس	مقدار
β_0	1e-5 (second)
β_1	1e-3 (km,s)
β_2	0.5 (deg)

در این مسأله خطای تزریق نسبت به حل تحلیلی سنجیده می‌شود. با توجه به شکل‌های 5 و 6 مقدار خطا برای متغیر حالت سرعت در لحظه پایانی و دقت تزریق نقطه‌ای مشخص می‌باشد. جدول 5 اختلاف بین مقادیر مطلوب و خروجی این الگوریتم را نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که با وجود نامعینی‌های مفروض در دینامیک سیستم که در فرموله‌بندی رهیافت کنترل بهینه فازی مد نظر قرار گرفته‌اند، خطای 6.3% نسبت به زمان نهایی حاصل از تحلیلی مناسب به نظر می‌رسد. همچنین پارامتر تصمیم به عنوان یکی از خروجی‌های الگوریتم بهینه فازی برابر مقدار صفر می‌باشد که در شرط (20) صدق می‌کند.

جدول 5 اختلاف نسبی مقادیر مطلوب با متغیرهای طراحی

Table 5 Relative difference of desired values with design variables

خطای نسبی	مقدار
دقت تزریق نقطه‌ای	0.15 (deg)
اختلاف ارتفاع مداری	3.21 (km)

الگوریتم عددی کنترل بهینه فازی، مقید به حرکت از شرایط اولیه با مختصات مفروض بوده و با فراهم آوردن بردار حدس اولیه برای متغیرهای تصمیم مراحل دیگر، امکان رسیدن به نقطه نهایی را ممکن می‌سازد. در مسأله مورد نظر در این مقاله، ماهواره بایستی با وجود عدم قطعیت‌های موجود در مسیر از نقطه شروع مفروض به نقطه پایانی انتقال یابد، از این رو طی نمودن مسیر با وجود نامعینی و عدم قطعیت‌های موجود و همگرایی به جواب‌های نزدیک بهینه نشان از پایداری الگوریتم هدایتی بازای شرایط معین شده برای پارامترهای توابع فازی ساز دارد.

در این مسأله، تولید بردار حدس اولیه برای متغیرهای مسأله در گام‌های بعدی، از برون‌یابی بردار جواب بهینه مسأله تکرار گذشته حاصل می‌شود. لازم به ذکر است که به دلیل طبیعت غیرخطی سیستم و وجود تعداد زیاد کمینه‌های محلی در مسأله مذکور، حدس‌های اولیه متغیرهای تصمیم سرعت و زاویه بعد و متغیر کنترلی، به کمک حل تحلیلی انتخاب می‌شود تا خطر به دام افتادن در کمینه‌های محلی و نیز واگرایی کاهش یابد. در شکل 7، مشاهده می شود که متغیر کنترلی ϕ در حل عددی بهینه فازی نسبت به حل تحلیلی دارای اختلاف می‌باشد. این اختلاف ناشی از بردار حدس اولیه برای متغیرهای کنترلی و مقید نبودن به یک شرط اولیه شروع برای این متغیر آزاد می‌باشد. در حل کنترل بهینه فازی تمامی معادلات جبری غیر خطی هم‌زمان حل می‌شوند؛ از این رو پروفیل زاویه بردار تراست به عنوان پارامتر آزاد کنترلی در هر مرحله تولید می‌گردد. اگرچه تغییرات نمودار نسبت به حل تحلیلی محسوس می‌باشد اما تغییرات مسیر حرکتی با حل تحلیلی همخوانی دارد.

یکی دیگر از عوامل تاثیرگذار در دقت پاسخ‌های نهایی، انتخاب اندازه گام مسیر می‌باشد. شکل 9 تأثیر انتخاب پارامتر T_s را بر حصول جواب مطلوب برای حالات سرعت و زاویه بعد نشان می‌دهد. نمودار حاصله با دقت 0.001 بدست آمده است. همان‌گونه که در شکل ملاحظه می‌شود، مطابق انتظار افزایش فاصله گره‌ها موجب دور شدن پاسخ‌های بدست آمده از مقادیر مطلوب پایانه مسیر می‌شود.

در مانور انتقال مداری کمینه زمانی، رسیدن به شروط پایانه مسیر در کمترین زمان، مطلوب می‌باشد. در فرموله‌بندی FOC، پارامتر مؤثر بر میزان خطای طراحی شده مجاز برای رسیدن به زمان نهایی، β_0 می‌باشد. این پارامتر مبین بازه مجاز تغییرات α_0 است که بایستی توسط طراح مسأله بدرستی تعیین گردد چرا که تخمین نادرست این پارامتر می‌تواند موجب عدم همگرایی مسأله به پاسخ نهایی گردد. از سوی دیگر این پارامتر بازه تغییرات نامعینی‌ها در سیستم را تعیین می‌نماید. در مسأله حاضر با توجه به حل تحلیلی در دسترس، محدوده زمان لازم برای انجام یک مانور با شتاب تراست بسیار کم مشخص می‌باشد. از این رو پارامتر β_0 با تقریب مناسبی 10^{-5} در نظر گرفته شده است. بدیهی است که هر چقدر β_0 بزرگتر فرض شود، اختیار عمل سیستم برای دورشدن از زمان نهایی بیشتر می‌شود.

به طور مثال وقتی $\beta_0 = 10^{-2}$ فرض شود، خطای زمان نهایی بدست آمده نسبت به حل تحلیلی 56.29% می‌باشد، حال آنکه وقتی $\beta_0 = 10^{-5}$ اختیار شود، این مقدار به 6.3% تقلیل می‌یابد.

دیگر پارامترهای مؤثر در طراحی فرموله‌بندی یک مسأله کنترل بهینه فازی، پارامترهای توابع عضویت قیود می‌باشند. این پارامترها میزان بازه مجاز تغییرات α_i $(i = 1.2)$ را مشخص می‌نمایند. در مسأله انتقال مداری هم‌صفحه، β_1 مبین دقت رسیدن به سرعت مدار نهایی و β_2 مبین دقت تزریق نقطه‌ای مانور می‌باشد. بدیهی است در صورتی که β_i $(i = 1.2)$ تغییرات بزرگتری از α_i را دربر گیرد، فاصله پاسخ‌های حاصله از مقادیر مطلوب بیشتر می‌شود. به طور مثال با اختیار $\beta_1 = 1$ مقدار سرعت پایانی 6833.7 متر بر ثانیه بدست می‌آید که میزان خطای 3.73 متر بر ثانیه را در پی دارد، در حالی که اگر $\beta_1 = 0.1$ فرض شود، سرعت پایانی 6106.7 متر بر ثانیه حاصل می‌شود که میزان خطای 6.0 متر بر ثانیه‌ای نسبت به مقدار مطلوب را بدست می‌دهد.

لازم به ذکر است تعیین دقیق مقادیر β_i $(i = 1.2)$ لزوماً به معنای این نیست که طراح با کوچکتر اختیار کردن این مقادیر، به خطای تزریق کمتری دست یابد، چرا که یک مقدار حدی برای این پارامترها وجود دارد که با کوچکتر کردن آن‌ها، تغییر محسوسی در مرتبه پاسخ‌های حاصله دیده نمی‌شود. همچنین طراح ممکن است به فراخور مسأله به‌دلیل الزامات ماموریتی و نیز امکان‌پذیری[1] قیود مسأله مقادیر متفاوتی نسبت به مقادیر حدی این پارامترها در نظر بگیرد.

5- نتیجه‌گیری

در این مقاله یافتن پاسخ‌های بهینه یک مسأله انتقال مداری تراست کم هم‌صفحه با تابع هزینه کمینه زمان و قیود پایانه مسیر معین با الگوریتم کنترل بهینه فازی انجام گرفت. معادلات دینامیکی مورد نیاز پس از در نظر گرفتن فرضیات و ساده‌سازی‌های لازم تابعی از المان‌های مداری ارائه گردید. در این راستا استفاده از تکنیک تحلیلی میانگین‌گیری، وابستگی معادلات به پارامتر موقعیت زاویه ای مداری با تغییرات سریع نسبت به زمان مرتفع گردید. در گام اول از رهیافت کنترل بهینه فازی، تمامی معادلات حالت، تابع عملکرد و قیود پایانه مسیر در یک فرم گسسته بیان شدند. در ادامه با تعریف تابع عضویت خطی، قیود و تابع هزینه در فرم فازی ارائه شده‌اند. با استفاده از راهکار بلمن-زاده و عملگر اشتراک بین توابع عضویت تعریف شده، مسأله کلاسیک کنترل بهینه به یک مسأله بیشینه‌سازی پارامتری تبدیل می‌شود. پس از تبدیل تمامی نامساوی‌ها به شروط تساوی، روش بهینه‌سازی ضرایب لاگرانژ برای حل مسأله بهینه‌سازی مقیدبه کار گرفته شد. در نهایت با تشکیل دسته معادلات جبری غیرخطی، برای یافتن بردار پاسخ بهینه از روش‌های برنامه‌ریزی غیرخطی کمک گرفته شده است.

نتایج حل حاصل از رهیافت کنترل بهینه فازی با نتایج تحلیلی نشان از کارکرد مطلوب این الگوریتم از جهت شاخص‌های ماموریتی دقت خطای تزریق به مدار نهایی و زمان نهایی مانور در حضور عدم قطعیت‌ها و نامعینی‌ها دارد. ضمن اینکه فرموله‌بندی مسأله کنترل بهینه به نوع برنامه‌ریزی غیرخطی و استفاده از حل‌کننده‌های مقاوم مشکل بار محاسباتی زیاد روش‌های مستقیم را تا حد زیادی کاهش می‌دهد. در حالی که بسیاری از رهیافت‌های بهینه‌سازی دینامیک مسیرهای فضایی، با چشم‌پوشی از نامعینی‌های موجود، حل صریح مسأله در فضای کنترل بهینه کلاسیک را پیش می‌برند و یا راهکارهای پیچیده‌ای را برای پوشش این نامعینی‌ها به مسأله بهینه‌سازی معرفی می‌نمایند، رویکرد کنترل بهینه فازی با پوشش عدم قطعیت‌ها در فضای فازی، ضمن سادگی حل، قوام لازم را در حصول پاسخ‌های شبه بهینه به طراحی یک مسأله بهینه‌سازی وارد می‌نماید.

6- پیوست

برای حل معادلات (21) و (22) به روش تحلیلی، روش استخراج معادلات شبه

[1] Feasibility

حالت و شرط بهینگی به کار گرفته می‌شوند؛ به این منظور، ابتدا همیلتونین سیستم تشکیل می‌شود:

$$H = 1 + \lambda_V(-f\mathrm{c}_\phi) + \lambda_\Omega \frac{2f\mathrm{s}_\phi}{\pi V \mathrm{s}_i} \tag{1}$$

معادلات اویلر-لاگرانژ به فرم (2) و (3) می‌باشند.

$$\lambda_V = -\frac{\partial H}{\partial V} = \frac{2f\mathrm{s}_\phi}{\pi V \mathrm{s}_i}\lambda_\Omega \tag{2}$$

$$\lambda_\Omega = -\frac{\partial H}{\partial \Omega} = 0 \rightarrow \lambda_\Omega = cte \tag{3}$$

با اعمال شرط بهینگی به مسأله، رابطه (4) بدست می‌آید:

$$\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0 \tag{4}$$

ازاین‌رو با ساده سازی‌های لازم رابطه (5) استخراج می‌شود:

$$\tan\phi = -\frac{2}{\pi V \mathrm{s}_i}\frac{\lambda_\Omega}{\lambda_V} \tag{5}$$

در این مسأله، همیلتونین[1] تابع صریحی از زمان نمی‌باشد؛ از این‌رو در تمامی نقاط نسبت به زمان ثابت می‌باشد.

با توجه به شروط ذکرشده و نیز شرط بهینگی مسأله، می‌توان λ_V و λ_Ω را به‌صورت تحلیلی بیان نمود.

$$\lambda_V = \frac{\mathrm{c}_\phi}{f} \tag{6}$$

$$\lambda_\Omega = -\frac{\pi V \mathrm{s}_\phi \mathrm{s}_i}{2f} \tag{7}$$

با توجه به معادلات شبه حالت، λ_Ω مقداری ثابت است. به همین منظور می‌توان رابطه (28):

$$\lambda_\Omega = \mathrm{cte} = V\mathrm{s}_\phi = V_0\mathrm{s}_{\phi_0} \tag{8}$$

حال می‌توان فرم تحلیلی سرعت مداری را به شکل تابعی زمانی از پارامترهای V_0 و ϕ_0 پیدا نمود.

$$\dot{V} = -f\mathrm{c}_\phi = -f\left(\pm\sqrt{1-\mathrm{s}_\phi{}^2}\right) = \mp\frac{f\sqrt{V^2 - V^2\mathrm{s}_\phi{}^2}}{V} \tag{9}$$

با جداسازی متغیرها و انتگرال‌گیری از عبارت (9)، عبارت تحلیلی سرعت مداری بدست می‌آید:

$$V = (V_0{}^2 + f^2t^2 - 2ftV_0\mathrm{c}_{\phi_0})^{1.2} \tag{10}$$

با توجه به ثابت بودن i، برای بیان عبارت $\tan\phi$ بر حسب پارامترهای t، V_0 و ϕ_0 می‌توان از قاعده مشتق زنجیره‌ای کمک گرفت.

$$\frac{d}{dt}(\tan\phi) = \frac{d}{d\phi}(\tan\phi) \times \frac{d\phi}{dt} = \frac{\dot{\phi}}{\mathrm{c}_\phi{}^2} \tag{11}$$

با جایگزاری معادله (2) رابطه (12) حاصل می‌شود:

$$\frac{d}{dt}\left(-\frac{2}{\pi \mathrm{s}_i\lambda_V}\frac{\lambda_\Omega}{V}\right) = \frac{-2}{\pi \mathrm{s}_i\lambda_V}\left(\frac{\lambda_\Omega V - V\dot{\lambda}_\Omega}{V^2}\right) = \frac{-2}{\pi \mathrm{s}_i\lambda_V}\left(\frac{f\mathrm{c}_\phi\lambda_\Omega}{V^2}\right) \tag{12}$$

جایگزاری مقادیر λ_V و λ_Ω انجام گرفته و سپس عبارت حاصله ساده‌سازی می شود:

$$\dot{\beta} = \frac{f\mathrm{s}_\phi}{V} = \frac{f\mathrm{s}_\phi{}^2}{V_0\mathrm{s}_{\phi_0}} \tag{13}$$

$$\frac{d}{dt}(\tan\phi) = \frac{\frac{f\mathrm{s}_\phi{}^2}{V_0\mathrm{s}_{\phi_0}}}{\mathrm{c}_\phi{}^2} = \frac{f}{V_0\mathrm{s}_{\phi_0}}(\tan\phi)^2 = \frac{d(\tan\phi)}{(\tan\phi)^2} = \frac{f}{V_0\mathrm{s}_{\phi_0}}dt \tag{14}$$

انتگرال‌گیری از طرفین عبارت (14)، رابطه (12) را بدست می‌دهد:

$$\tan\beta = \frac{V_0\mathrm{s}_{\phi_0}}{V_0\mathrm{c}_{\phi_0} - ft} \tag{15}$$

حال می‌توان عبارات زمانی متغیرهای شبه حالت و زاویه بعد را نیز بدست آورد:

$$\dot{\lambda}_V = -\frac{\mathrm{s}_\phi{}^2}{V} = -\frac{V^2\mathrm{s}_\phi{}^2}{V^3} = -\frac{V_0{}^2\mathrm{s}_{\phi_0}{}^2}{V^3} \tag{16}$$

عبارت زمانی $V = f(t)$ از (10) جایگزاری شده و سپس از عبارت (16) انتگرال‌گیری می‌شود:

$$\lambda_V = \frac{V_0\mathrm{s}_{\phi_0} - ft}{fV} \tag{17}$$

با یادآوری رابطه $\lambda_V = \mathrm{c}_\phi/f$ می‌توان c_ϕ را نیز بدست آورد.

$$\mathrm{c}_\phi = \frac{V_0\mathrm{s}_{\phi_0} - ft}{V} \tag{18}$$

برای محاسبه فرم تحلیلی زاویه بعد با دانستن اینکه i ثابت می باشد کافی است با جایگذاری $\mathrm{s}_\phi = V_0\mathrm{s}_{\phi_0}/V$ و نیز جایگزین نمودن عبارت زمانی V، از معادله حاصل انتگرال‌گیری شود.

$$\Delta\Omega = \frac{2}{\pi \mathrm{s}_i}\left[\tan^{-1}\left(\frac{ft - V_0\mathrm{c}_{\phi_0}}{V_0\mathrm{s}_{\phi_0}}\right) + \frac{\pi}{2} - \phi_0\right] \tag{19}$$

مقدار اولیه زاویه سمت تراست با توجه به ورودی‌های مقدار، سرعت اولیه، سرعت نهایی، شیب مداری و میزان تغییرات زاویه بعد گره صعودی از رابطه (20) محاسبه می‌شود.

$$\tan\beta_0 = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}\mathrm{s}_i\Delta\Omega_t)}{\frac{V_0}{V_f} - \cos(\frac{\pi}{2}\mathrm{s}_i\Delta\Omega_t)} \tag{20}$$

7- مراجع

[1] S. Pourtakdoust, M. Jalali, Thrust-limited optimal three-dimensional spacecraft trajectories, *International Journal of Engineering,* Vol. 14, No. 1, pp. 81-90, 2001.
[2] A. A. Naeeni, J. Roshanian, Developing a hybrid algorithm to design the optimal trajectory of reentry vehicles, *Modares Mechanical Engineering,* Vol. 14, No. 13, pp. 143-152, 2015. (in Persian فارسی)
[3] E. Maani, A. Kosari, M. Fakoor, Two-objective optimization of GEO communication satellite trajectory considering continuous orbital maneuver, *Modares Mechanical Engineering,* Vol. 13, No. 7, pp. 142-152, 2013. (in Persian فارسی)
[4] E. Maani, A. Kosari, M. Fakoor, Two-objective optimization of GEO communication satellite trajectory considering impulsive orbital maneuver, *Modares Mechanical Engineering,* Vol. 14, No. 5, pp. 121-128, 2014. (in Persian فارسی)
[5] M. Navabi, M. Sanatifar, Optimal impulsive orbital transfer between coplanar-noncoaxial orbits, local and global solutions, 5th International Conference on Recent Advances in Space Technologies (RAST), Istanbul, Turkey, June 9-11, 2011.
[6] M. Navabi, E. Meshkinfam, Space low-thrust trajectory optimization utilizing numerical techniques, a comparative study, 6th International Conference on Recent Advances in Space Technologies (RAST), Istanbul, Turkey, June 12-14, 2013.
[7] Y. Ulybyshev, Continuous thrust orbit transfer optimization using large-scale linear programming, *Journal of Guidance, Control, And Dynamics,* Vol. 30, No. 2, pp. 427-436, 2007.
[8] J. Gergaud, T. Haberkorn, Orbital transfer: Some links between the low-thrust and the impulse cases, *Acta Astronautica,* Vol. 60, No. 8, pp. 649-657, 2007.
[9] G. Yang, Direct optimization of low-thrust many-revolution earth-orbit transfers, *Chinese Journal of Aeronautics,* Vol. 22, No. 4, pp. 426-433, 2009.
[10] T. N. Edelbaum, Propulsion requirements for controllable satellites, *ARS Journal,* Vol. 31, No. 8, pp. 1079-1089, 1961.
[11] J. A. Kechichian, Reformulation of Edelbaum's low-thrust transfer problem using optimal control theory, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics,* Vol. 20, No. 5, pp. 988-994, 1997.
[12] J. A. Kéchichian, Optimal altitude-constrained low-thrust transfer between inclined Circular Orbits, *The Journal of the Astronautical Sciences,* Vol. 54, No. 3-4, pp. 485-503, 2006.
[13] J. A. Kéchichian, Optimal low-thrust transfer in general circular orbit using analytic averaging of the system dynamics, *The Journal of the Astronautical Sciences,* Vol. 57, No. 1-2, pp. 369-392, 2009.

[1] Hamiltonian

[14] Y. Zhu, A fuzzy optimal control model, *Journal of uncertain systems,* Vol. 3, No. 4, pp. 270-279, 2009.
[15] H.-J. Zimmermann, Fuzzy programming and linear programming with several objective functions, *Fuzzy sets and systems,* Vol. 1, No. 1, pp. 45-55, 1978.
[16] Y. Xiong, S. S. Rao, Fuzzy nonlinear programming for mixed-discrete design optimization through hybrid genetic algorithm, *Fuzzy Sets and Systems,* Vol. 146, No. 2, pp. 167-186, 2004.
[17] P. Salgado, G. Igrejas, Learning strategy for optimal fuzzy control, *IEEE* International Symposium on Industrial Electronics*,* Vigo, Spain, June 4-7, 2007.
[18] Ş. Amrahov, N. Gasilov, A. Fatullayev, A new approach to a fuzzy time-optimal control problem, *CMES: Computer Modeling in Engineering & Sciences,* Vol. 99, No. 5, pp. 351-369, 2014.
[19] V. A. Chobotov, *Orbital mechanics*, pp. 335-336, Virginia: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2002.
[20] L. Deng, Y. Zhu, Uncertain optimal control with jump, *ICIC Express Letters, Part B: Applications,* Vol. 3, No. 2, pp. 419-424, 2012.
[21] L.-X. Wang, *A course in fuzzy systems and control*, pp. 219-228, New Jersey: Prentice-Hall International, 1999.
[22] R. E. Bellman, L. A. Zadeh, Decision-making in a fuzzy environment, *Management Science,* Vol. 17, No. 4, pp. B-141-B-164, 1970.
[23] D. Filev, P. Angelov, Fuzzy optimal control, *Fuzzy Sets and Systems,* Vol. 47, No. 2, pp. 151-156, 1992.
[24] B. A. Conway, *Spacecraft trajectory optimization*, pp. 159-161, Cambridge: Cambridge University Press, 2010.
[25] J. T. Betts, *Practical methods for optimal control and estimation using nonlinear programming*, pp. 109-111, Pennsylvania: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2010.