مجله مهندسی مکانیک مدرس، فروردین 1396، دوره 17، شماره 1، ص‌ص 47-55

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

روشی نوین برای تحلیل کمانشی تیر هدفمند دوجهته اویلر با ضخامت متغیر دلخواه واقع بر بستر الاستیک هیتنی

عباس حیدری[1]، عبدالرحیم جلالی[2*]

1- دانشجوی دکتری، مهندسی عمران ، دانشگاه تبریز، تبریز
2- استادیار، مهندسی عمران، دانشگاه تبریز، تبریز
* تبریز، صندوق پستی 5166616471، jalali@tabrizu.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 10 مهر 1395
پذیرش: 08 آذر 1395
ارائه در سایت: 15 دی 1395

کلید واژگان:
تحلیل کمانشی
تیر هدفمند دوجهته با ضخامت متغیر
روش‌های طیفی
حساب تغییرات
بستر الاستیک هیتنی

چکیده

در این مقاله برای اولین بار، تحلیل کمانشی تیر هدفمند دوجهته (BFG) اویلر با ضخامت متغیر دلخواه واقع بر بستر الاستیک هیتنی ارائه شده است. به علاوه، روشی جدید بر پایه حساب تغییرات و روش طیفی هم آرایی برای تبدیل مسئله کمانشی مزبور به یک سیستم معادلات جبری پیشنهاد داده شده است. روش پیشنهادی منجر به حصول معادله مشخصه کمانشی شده و در نتیجه امکان حصول بارهای کمانشی اولین مودها فراهم می‌شود. به منظور بررسی میزان انطباق‌پذیری روش پیشنهادی با شرایط مختلف، تغییرات خواص مکانیکی در امتداد ضخامت و محور تیر، تغییرات دلخواه ضخامت، پی ارتجاعی هیتنی، شرایط مرزی خاص مانند مفصل برشی و همچنین شرایط مرزی کلاسیک مانند دوسرگیردار، ساده، یکسر گیردار-یکسر مفصل و کنسول در نظر گرفته شده است. سرعت همگرایی زیاد و انطباق‌پذیری با شرایط مختلف از جمله مزایای روش پیشنهادی هستند. با توجه به عدم وجود نتایج تحقیقات مشابه، از روش طیفی ریتز به منظور اعتبارسنجی نتایج استفاده شده است. در روش طیفی ریتز از پایه مشابه با روش پیشنهادی استفاده شده است. صحت نتایج روش پیشنهادی با توجه به انطباق کامل بین نتایج روش شناخته شده طیفی ریتز و نتایج تحقیق حاضر، تصدیق می‌شود.

A new scheme for buckling analysis of bidirectional functionally graded Euler beam having arbitrary thickness variation rested on Hetenyi elastic foundation

Abbas Heydari, Abdolrahim Jalali*

Mechanical Engineering Department, Shahid Rajaee Teacher Training University, Tehran, Iran.
*P.O.B. 5517910179 Tehran, Iran, maligoodarz@srttu.edu

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 01 October 2016
Accepted 28 November 2016
Available Online 04 January 2017

Keywords:
Buckling analysis
Tapered BFG beam
Spectral methods
Calculus of variations
Hetenyi elastic foundation

ABSTRACT

In current work, for the first time buckling analysis of bidirectional functionally graded (BFG) Euler beam having arbitrary thickness variation rested on Hetenyi elastic foundation is presented. Moreover, a new scheme based on calculus of variations and collocation method for converting the buckling problem to an algebraic system of equations is proposed. The mentioned scheme leads to obtaining the buckling characteristic equation of beam and therefore the first buckling loads are obtained. Various conditions including variation of mechanical properties across the thickness and through the axis, arbitrary thickness variation, Hetenyi elastic foundation, special boundary conditions like the shear hinge and classical boundary conditions like the clamped, simply supported, clamped-simply supported and cantilever beams are considered to show the compatibility of proposed scheme with the various circumstances. The fast convergence and compatibility with the various circumstances are the advantages of the proposed technique. Due to lack of similar studies in the literature, the same exercises are conducted by using the Spectral Ritz method for pursuing the validity of the proposed scheme. The same basis is used for Spectral Ritz and proposed methods. Excellent agreement is found between the results of well-known Spectral Ritz method and the results of proposed scheme, which validates the outcome of the proposed technique.

1- مقدمه

اصطلاح مواد هدفمند برای اولین بار در سال 1987 میلادی توسط نینو و همکاران در آزمایشگاه ملی هوافضای ژاپن با هدف تولید ماده‌ای مقاوم در برابر حرارت 2000 درجه کلوین (معادل 1726.85 درجه سلیسیوس) و گرادیان دمایی 1000 درجه کلوین برای ضخامت یک سانتیمتر، پیشنهاد شد. علاوه بر این، مقاومت در برابر سایش، کاهش تمرکز تنش نسبت به کامپوزیت‌های متعارف، کنترل محل شکست و تسلیم، استحکام اتصال و کاهش رشد طول و عرض ترک در محل اتصال نسبت به کامپوزیت‌های معمولی و اکسایش کمتر نسبت به اعضای فلزی، از جمله مزایای این مواد هستند. همچنین امکان ایجاد دو خاصیت متفاوت که همزمان در یک ماده

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:

A. Heydari, A. Jalali, A new scheme for buckling analysis of bidirectional functionally graded Euler beam having arbitrary thickness variation rested on Hetenyi elastic foundation, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 1, pp. 47-55, 2017 (in Persian)

یافت نمی‌شود، در مواد هدفمند وجود دارد، به مواد هدفمند، مواد گرادیان نیز گفته می‌شود؛ زیرا تغییر پیوسته خواص مکانیکی در میکروساختار یا در ابعاد اتمی، امکان تعیین خواص مکانیکی هر نقطه از ماده را برحسب موقعیت آن نقطه فراهم می‌کند. مواد گرادیان دارای تغییرات حجمی یا تغییرات سطحی (به‌عنوان نمونه در محل‌های اتصال یا پوشش‌ها) می‌باشند. در تیر هدفمند دو جهته، تغییرات پیوسته در هر دو جهت طولی و عرضی وجود دارد. اگر ضخامت بخشی از تیر به دلیل محدودیت‌های موجود، نسبت به سایر نقاط کم باشد، با استفاده از مواد هدفمند دارای خواص مکانیکی متغیر در امتداد محور، می‌توان به‌طور بهینه صلبیت خمشی مورد نیاز را تامین نمود. استفاده در دیوار داخلی رآکتورهای هسته‌ای، سیلندرهای موتور خودرو، تیغه‌های توربین، فیبرهای نوری، مدارهای کامپیوتر و ابزارهای برش از جمله کاربردهای عملی و کاربردهای بالقوه مواد هدفمند هستند [1].

کارایی سازه‌های هدفمند، محققین زیادی را به انجام مطالعه در مورد رفتار این نوع از سازه‌ها ترغیب کرده است. به عنوان نمونه، تعدادی از تالیفات یکی از مولفین مقاله حاضر در زمینه تحلیل مخازن کروی و استوانه‌ای هدفمند، ارجاء داده شده است [2-4]. تعدادی از محققین نیز به بررسی رفتارهای کمانشی و پساکمانشی سازه‌ها پرداخته‌اند [5-7]. هوانگ و لی [8] در تحقیقی تحلیل پایداری تیر و ستون‌های هدفمند با مقطع دایره، همراه با تغییر شکل برشی را مطالعه نموده‌اند. در تحقیق مزبور، براساس شرایط سطح عاری از کشش، معادلات حاکم کوپله دوگانه برای دوران و خیز و یک معادله حاکم اضافی به‌دست آمده است. علاوه بر این تاثیر گرادیان شعاعی بر بارهای کمانشی ستون‌های الاستیک مدور بررسی شده است. همچنین در تحقیق مزبور، تنش بحرانی تیوب‌های دو جداره نانوکربنی محاسبه شده و با تئوری‌های تیموشنکو و ردی- بیکفورد مقایسه شده است. هوانگ و کاردومتیس [9] به بررسی رفتار کمانشی و پس‌کمانشی تیرهای منشوری ساندویچی تحت برش عرضی پرداخته‌اند. آنها راه حل بسته‌ای جهت محاسبه بار بحرانی، جابجائی وسط تیر و کوتاه شدگی طول تیر در ابتدای مرحله پس‌کمانش ارائه کرده‌اند. مونتینو و باراکو [10] در یک تحقیق، رفتار پس‌کمانشی تیر لاغر تحت فشار و یک لنگر پیچشی، که درداخل تیوب استوانه‌ای قرار گرفته است را بررسی کرده‌اند. فرض شده است تیر نسبت طول به عرض زیادی دارد و تحت بار فشاری کوچکی کمانش می‌کند. رفتار پس کمانشی همراه با در نظر گرفتن اصطکاک و بدون در نظر گرفتن اصطکاک بررسی شده است. این تحقیق در زمینه‌ی بررسی رفتار مته‌های داخل سوراخ استوانه‌ای جهت حفاری سنگ‌های بستر در عمق زیاد اهمیت بسیاری دارد. همچنین تحقیق مزبور جهت بررسی رفتار کابل‌های همگن قرار گرفته در یک مجرای صلب مدور افقی تحت فشار محوری در صنعت نفت به ویژه برای حفاری گمانه‌های چاهی در جهت افقی یا مورب کاربرد دارد. لی و باترا [11] به بررسی کمانش و پس کمانش حرارتی تیرهای اولر-برنولی در یک بستر الاستیک غیرخطی پرداخته‌اند. در تحقیق مذکور برای بررسی رفتار پس کمانشی، مسئله غیرخطی به مسئله مقدار اولیه تبدیل شده است. همچنین شرایط تکیه‌گاهی به صورت مفصلی و گیردار مفروض بوده است و تحلیل غیر خطی هندسی برای تیر قرار گرفته در یک بستر الاستیک غیرخطی به کمک روش شوتینگ انجام شده است. ژائو و همکاران [12] به بررسی رفتار پس‌کمانشی و پدیده فروجهش تیرهای لاغر پرداخته‌اند. براساس تئوری تغییرشکل‌های بزرگ غیرخطی، معادلات دیفرانسیل حاکم مربوط به مرحله‌ی پس‌کمانشی با شرایط تکیه‌گاهی گیردار برای تیرهای مورب بدست آمده است. با بکارگیری شرایط سازگاری ضمنی، معادلات غیرخطی توسط انتگرال‌های بیضوی به‌صورت عددی حل شده‌اند. با توجه به نتایج حل عددی، هنگامی که بار به مقدار بحرانی می‌رسد، طی یک جهش، مسیر تعادل تغییر می‌کند. واز و پاتل [13] به بررسی رفتار پس‌کمانشی سازه‌های لاغر به کمک روابط دوخطی لنگر – انحناء پرداخته‌اند. منحنی دو خطی برای سازه‌هایی که دارای سطح مقطع پیچیده بوده یا از مصالحی خاص تشکیل شده‌اند، به‌کار می‌رود.

در این مقاله برای اولین بار، به بررسی رفتار کمانشی تیر هدفمند دو جهته اویلر با ضخامت متغیر دلخواه واقع بر بستر الاستیک هیتنی پرداخته شده است. به‌علاوه جهت حل مسئله کمانشی مذکور، روشی نوین بر پایه حساب تغییرات و روش طیفی هم‌آرایی ارائه شده است. روش مزبور، برای اولین بار توسط یکی از مولفین مقاله حاضر، به‌منظور تحلیل کمانشی تیرهای مستطیلی و حلقوی هدفمند اویلر بدون وجود تغییرات ضخامت یا تغییرات خواص مکانیکی در امتداد محور تیر و بدون حضور پی ارتجاعی [14] و همچنین برای تحلیل کمانشی صفحات مدور هدفمند کیرشهف با ضخامت ثابت بدون حضور بستر الاستیک استفاده شده است [15]. در دو تحقیق مزبور روش حساب تغییرات بدون استفاده از روش طیفی هم آرایی برای حصول پاسخ‌های تحلیلی استفاده شده است. در تحقیقی دیگر، رفتار کمانشی صفحات هدفمند با ضخامت متغیر واقع بر بستر الاستیک پاسترناک بر پایه تئوری کلاسیک به کمک ترکیبی از روش‌های حساب تغییرات و طیفی هم آرایی، توسط مولفین مقاله حاضر بررسی شده است [16]. نتایج کلیه تحقیقات مزبور با نتایج سایر تحقیقات انطباق کاملی داشته‌اند. با انجام هر چه بیشتر تحلیل‌های کمانشی تحت شرایط پیچیده‌تر، قابلیت روش پیشنهادی بیش از پیش مشخص شده است. در این مقاله وجود شرایطی از قبیل تغییرات دلخواه ضخامت و خواص مکانیکی متغیر در امتداد محور تیر در کنار تغییرات خواص مکانیکی در امتداد ضخامت، شرایط مرزی خاص مانند وجود مفصل برشی و به ویژه استفاده از مدل بستر الاستیک هیتنی که نسبت به مدل‌های دیگر مانند مدل بستر الاستیک پاسترناک پیچیده‌تر است، مجموعه عواملی هستند که روش پیشنهادی را به چالش خواهند کشید. سرعت همگرایی مناسب و انطباق‌پذیری با شرایط مختلف از جمله مزایای روش پیشنهادی است. با توجه به عدم وجود نتایج تحقیقات مشابه، از روش طیفی ریتز به منظور صحت سنجی نتایج استفاده شده است. پایه‌ی مشابه با روش پیشنهادی و توابع فرعی (چسبنده) مناسب برای ارضای شرایط مرزی در روش طیفی ریتز استفاده شده‌اند. صحت نتایج حاصل از روش پیشنهادی با توجه به انطباق کامل بین نتایج حاصل از روش طیفی ریتز و نتایج تحقیق حاضر تصدیق شده است.

2- بستر الاستیک هیتنی

دو رویکرد کلی برای در نظر گرفتن تاثیر خاک زیر سازه وجود دارد. یک رویکرد، در نظر گرفتن محیطی پیوسته به عنوان بستر غیر ایزوتروپیک و ناهمگن متشکل از چند لایه بوده که در آن نیاز به تحلیل‌های الاستیک، الاستوپلاستیک و هایپوپلاستیک وجود دارد. رویکرد دیگر استفاده از مدل‌های ریاضی ساده شده است. وینکلر در سال 1867 میلادی، خاک را با فنرهای انتقالی الاستیک خطیِ مستقل از هم مدل نمود. محدود شدن تغییرشکل به ناحیه بارگذاری، عدم در نظر گرفتن مساحت بارگذاری و نیز عدم در نظر گرفتن پیوستگی تغییرشکل خاک از جمله نارسایی‌های مدل وینکلر هستند. در مدل هیتنی، بخشی از نارسایی‌ها به کمک در نظر گرفتن یک صفحه (یا تیر) رابط بین فنرها که تنها مجاز به تغییرشکل خمشی است،

مرتفع شده است. پاسخ بستر الاستیک به فرم معادله (1) می‌باشد که در آن D صلبیت خمشی صفحه (یا تیر) فرضی رابط، k ثابت وینکلر و w تغییرشکل خمشی است. با توجه به این‌که توان نابلا (∇) زوج است، ترم دوم یک مقدار اسکالر می‌باشد.

$$f = kw + D\nabla^4 w \tag{1}$$

3- معادله دیفرانسیل حاکم

انرژی کرنشی خمشی ذخیره شده در تیر هدفمند دو جهته اویلر به صورت رابطه (2) می‌باشد.

$$U_b = \frac{1}{2}\int_0^L \int_{-\frac{h}{2}-y_0}^{\frac{h}{2}-y_0} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} E\varepsilon_x^2 dzdydx \tag{2}$$

در معادله (2)، پارامترهای b، h، L، ε_x و E به ترتیب عرض، ارتفاع، طول، کرنش محوری و مدول ارتجاعی تیر هستند. پارامتر y_0 فاصله بین تار خنثی و میان‌تار است که تابعی از x می‌باشد. نحوه توزیع خواص مکانیکی در سازه‌های مختلف هدفمند، متفاوت است. به‌عنوان نمونه، تانکرهای استوانه‌ای هدفمند و تیرهای حلقوی یا مدور هدفمند دارای قانون توزیع خواص مکانیکی یکسانی هستند. نوع توزیع خواص مکانیکی در تیرهای مستطیلی هدفمند مشابه توزیع خواص مکانیکی صفحات هدفمند است. رابطه (3) توزیع مدول الاستیسیته در سراسر طول تیر هدفمند دوجهته را در مختصات منطبق بر محور خنثی نمایش می‌دهد.

$$E = e^{\frac{\alpha x}{L}}\left((E_c - E_m)\left(\frac{y + y_0}{h} + \frac{1}{2}\right)^n + E_m\right) \tag{3}$$

در معادله (3)، پارامترهای E_c، E_m، n و α به ترتیب ضرایب یانگ سرامیک و فلز و ثابت‌های ماده (n یک عدد نامنفی و α یک عدد حقیقی) می‌باشند. با توجه به معادله (3)، سطوح تحتانی و فوقانی در تیر هدفمند دوجهته برخلاف تیرهدفمند، جزء در مبدا در سایر نقاط فلز و سرامیک خالص نیست. تغییرات ارتفاع مقطع تیر به فرم رابطه (4) مفروض است.

$$h = h_0\left(1 + \beta\left(\frac{x}{L}\right)\right)^\gamma \tag{4}$$

در معادله (4)، پارامترهای h_0 و β به ترتیب ارتفاع تیر در مبدا مختصات و ضریب تغییرات ارتفاع (یک عدد حقیقی) هستند. پارامتر γ نوع تغییرات ارتفاع مقطع را مشخص می‌کند. برای γ برابر با یک، تغییر ارتفاع خطی و برای مقادیر بزرگتر از یک، تغییر ارتفاع غیرخطی است. "شکل 1"، مشخصات هندسی تیر را در مختصات منطبق بر میان تار نمایش می‌دهد.
با جایگذاری معادله (3) در معادله (2) و همچنین با قرار دادن عبارت $-w^{(2)}y$ به جای کرنش محوری، معادله (5) حاصل می‌شود. عبارت $w^{(2)}$، تقعر تیر بوده که برابر با مشتق دوم جابجایی خمشی تیر w، نسبت به x است.

$$U_b = \frac{b}{2}\int_0^L e^{\frac{\alpha x}{L}}\left(w^{(2)}\right)^2 \int_{-\frac{h}{2}-y_0}^{\frac{h}{2}-y_0}\left((E_c - E_m)\left(\frac{y + y_0}{h} + \frac{1}{2}\right)^n + E_m\right)y^2 dy\, dx \tag{5}$$

در حالت کلی اگر از $y^m E$ که در آن m یک عدد طبیعی است انتگرال بگیریم، حاصل برای n برابر با 1-، 2-، ...، $(m+1)-$ مقداری موهومی است. در معادله (5) حاصل انتگرال روی محور قائم، با توجه به شرط $n \geq 0$ مقداری حقیقی است. پس از محاسبه انتگرال مزبور، معادله (4) در آن جایگذاری و حاصل به صورت معادله (6) بازنویسی شده است.

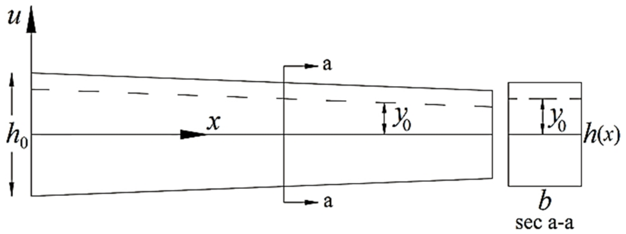

Fig. 1 The geometrical properties of tapered beam

شکل 1 مشخصات هندسی تیر با مقطع متغیر

$$U_b = \frac{A_0}{2}\int_0^L e^{\frac{\alpha x}{L}}\left(w^{(2)}\right)^2\left(1 + \beta\left(\frac{x}{L}\right)\right)^\gamma \left[\phi_1\left(1 + \beta\left(\frac{x}{L}\right)\right)^{2\gamma} + \phi_2\left(1 + \beta\left(\frac{x}{L}\right)\right)^\gamma y_0 + \phi_3 y_0^2\right]dx \tag{6}$$

پارامتر A_0 سطح مقطع تیر در مبدا مختصات است. پارامترهای ϕ_1 الی ϕ_3 ضرایب ثابت هستند که در معادلات (7) معرفی شده‌اند.

$$\phi_1 = \frac{h_0^2\left(3E_c(n^2 + n + 2) + nE_m(n^2 + 3n + 8)\right)}{12(n+1)(n+2)(n+3)}$$
$$\phi_2 = -\frac{nh_0(E_c - E_m)}{(n+1)(n+2)}$$
$$\phi_3 = \frac{(nE_m + E_c)}{n+1} \tag{7}$$

برای محاسبه انرژی ذخیره شده در تیر نیاز به محاسبه پارامتر y_0 وجود دارد. به این منظور تعادل استاتیکی تیر در نظر گرفته می‌شود. معادله (8) تعادل نیروهای محوری در تیر هدفمند دوجهته اویلر را بیان می‌کند. سمت راست تساوی در مختصات میان‌تار با استفاده از تعویض متغیر $u=y+y_0$ محاسبه شده است. مبدا محور y در تارخنثی و مبدا محور u در میان‌تار قرار دارد.

$$\int_{-\frac{h}{2}-y_0}^{\frac{h}{2}-y_0} E(y)\varepsilon_x(y)\, dy = -w''\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}(u - y_0)E(u - y_0)\, du = 0 \tag{8}$$

با توجه به سمت راست معادله (8)، فرمول مربوط به پارامتر مجهول y_0 در مختصات میان‌تار محاسبه می‌شود.

$$y_0 = \frac{\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\left((E_c - E_m)\left(\frac{u}{h} + \frac{1}{2}\right)^n + E_m\right)udu}{\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\left((E_c - E_m)\left(\frac{u}{h} + \frac{1}{2}\right)^n + E_m\right)du} \tag{9}$$

انتگرال‌های صورت و مخرج در معادله (9) با توجه به شرط $n \geq 0$ محاسبه شده و معادله (4) در آن جایگذاری می‌شود.

$$y_0 = \frac{h_0 n(E_c - E_m)}{2(n+2)(nE_m + E_c)}\left(1 + \beta\left(\frac{x}{L}\right)\right)^\gamma \tag{10}$$

با توجه به معادله (10)، فاصله بین تار خنثی و میان‌تار، خود تابعی از فاصله از مبدا مختصات است. معادله (10) مشخص می‌کند، بار محوری که در مبدا مختصات بر تار خنثی اثر داده می‌شود نسبت به بار محوری موثر بر تار خنثی در انتهای راست تیر دارای خروج از مرکزیت است. لنگر خمشی ناشی از خروج از مرکزیت بار فشاری، قبل از رسیدن بار محوری به مقدار بحرانی، باعث ایجاد تغییرشکل‌های پیش‌کمانشی می‌شود. بنابراین می‌توان تیر کامل همراه با لنگر مزبور را معادل یک تیر ناکامل بدون لنگر فرض کرد. آزمایش‌ها نشان می‌دهند که بین بار کمانشیِ تیرها (یا صفحات) نازک کامل و بار کمانشیِ تیرها (یا صفحات) نازک ناکامل با شرایط تکیه‌گاهی، ابعاد هندسی و

خواص مکانیکی یکسان، تفاوتی وجود ندارد [17]. به‌عنوان مثال، در تحلیل کمانشی صفحات نازک هدفمند با ضخامت متغیر، لنگری که منجر به ایجاد فشار غیریکنواخت و تغییر شکل پیش‌کمانشی می‌شود، نادیده گرفته شده است [18]. انرژی کرنشی بستر الاستیک به فرم رابطه (11) می‌باشد. پارامتر EI صلبیت خمشی تیر رابط فرضی و $w^{(4)}$ مشتق چهارم w نسبت به x است.

$$U_f = \frac{1}{2}\int_0^L \left(kw + EIw^{(4)}\right) w dx \tag{11}$$

کار نیروی خارجی F، برابر با حاصل‌ضرب نیرو در تغییر طول تیر است. با استفاده از دو جمله اول بسط تیلور، انرژی هدر رفته Ω یا منفی کار نیروی خارجی، به صورت معادله (12) محاسبه می‌شود.

$$\Omega = F\int_0^L \left(1 - \sqrt{1 + (w^{(1)})^2}\right) dx = -\frac{F}{2}\int_0^L \left(w^{(1)}\right)^2 dx \tag{12}$$

انرژی پتانسیل کل برابر با مجموع انرژی‌های ذخیره شده و هدر رفته است.

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^L [\phi e^{\frac{\alpha x}{L}} \left(w^{(2)}\right)^2 \left(1 + \beta\left(\frac{x}{L}\right)\right)^{3\gamma} + \left(kw + EIw^{(4)}\right)w - F\left(w^{(1)}\right)^2]dx \tag{13}$$

ثابت ϕ به صورت معادله (14) برحسب ثابت‌های ارائه شده در معادلات (7) بیان می‌شود.

$$\phi = A_0\left(\phi_1 - \frac{\phi_2^2}{4\phi_3}\right) \tag{14}$$

در هنگام کمانش انرژی پتانسیل کل صفر می‌شود؛ لذا می‌توان معادله تعادل را با صفر قرار دادن Π در رابطه (13) محاسبه کرد. اما در این تحقیق به جای محاسبه معادله تعادل، از اصل لیاپانو استفاده می‌شود. طبق اصل لیاپانو، چنانچه به یک سیستم، اغتشاشی کوچک اعمال گردد و سیستم در مجاورت وضعیت قبلی خود باقی بماند، تعادل خنثی وجود دارد و اگر به حالت اولیه خود باز گردد، سیستم پایدار است. اگر Π در معادله (13) برابر با صفر قرار داده شود، تعادل خنثی ایجاد خواهد شد. در این تحقیق، مقدار Π در رابطه (13) کمینه می‌شود. بدین منظور، تابع جابجایی عرضی $w(x)$ با عبارت $w(x)+\mu\lambda(x)$ جایگزین می‌شود. تابع پیوسته و حداقل یک بار مشتق‌پذیر $\lambda(x)$ اغتشاش بوده که با میل دادن μ به صفر کوچک بودن اغتشاش اعمالی تضمین می‌شود. از سویی برای کمینه شدن انرژی پتانسیل کل، از Π نسبت به μ مشتق می‌گیریم. پس از استفاده از انتگرال‌گیری جزء به جزء و اعمال شرایط مرزی الزامی ($\lambda(L) = \lambda(0) = 0$)، معادله اویلر-لاگرانژ تعمیم یافته به دست می‌آید. درنهایت معادله دیفرانسیل حاکم کمانش تیر هدفمند دو جهته اویلر با ارتفاع متغیر دلخواه واقع بر بستر الاستیک هیتنی به فرم رابطه (15) حاصل می‌شود. $w^{(i)}$ مشتق i اُم w نسبت به x است.

$$2kw + \sum_{i=2}^{4} \varphi_i w^{(i)} = 0 \tag{15}$$

ضرایب معادله دیفرانسیل (15) تابعی از x هستند. ضرایب مزبور در معادلات (16) نمایش داده شده‌اند.

$$\varphi_2 = 12\tilde{\varphi}_1\tilde{\varphi}_2 I_0 \left(1 + \beta\left(\frac{x}{L}\right)\right)^{3\gamma} e^{\frac{\alpha x}{L}} + 12\tilde{\varphi}_3 FL^2(\beta x + L)^2$$

$$\varphi_3 = 12\tilde{\varphi}_1 I_0 (3L\beta\gamma + \alpha\beta x + L\alpha)\left(1 + \beta\left(\frac{x}{L}\right)\right)^{3\gamma} e^{\frac{\alpha x}{L}}$$

$$\varphi_4 = 12\tilde{\varphi}_1 L^4 I_0 \left(1 + \beta\left(\frac{x}{L}\right)\right)^{3\gamma+2} e^{\frac{\alpha x}{L}} + 12\tilde{\varphi}_3(\beta x + L)^2 L^2 EI \tag{16}$$

پارامتر I_0، ممان اینرسی تیر در مبدا مختصات است. پارامترهای مجهول در معادلات (16)، در معادلات (17) بیان شده‌اند.

$$\begin{aligned}
\tilde{\varphi}_1 &= 12E_c^2 + E_m(4n^3 + 16n^2 + 28n)E_c + (n^4 + 4n^3 + 7n^2)E_m^2 \\
\tilde{\varphi}_2 &= \beta^2(\gamma L^2(9\gamma - 3) + 6\alpha\gamma Lx + \alpha^2x^2) + \alpha^2 L(2\beta x + L) + 6\alpha\beta\gamma L^2 \\
\tilde{\varphi}_3 &= (n + 3)(n + 2)^2(nE_m + E_c)
\end{aligned} \tag{17}$$

4- تحلیل کمانشی

معادله دیفرانسیل (15) فاقد حل تحلیلی است. برای حل آن، بسط تیلور تابع جابجایی عرضی (با فرض عدم وجود جابجایی عرضی در مبدا) در نظر گرفته می‌شود.

$$w = \sum_{r=1}^{m} \frac{w^{(r)}(0)}{r!} x^r = \sum_{r=1}^{m} a_r\, x^r \tag{18}$$

مطابق با روش طیفی هم آرایی، تعداد m نقطه روی تیر به عنوان نقاط نمونه انتخاب می‌شود. با جایگذاری معادله (18) در معادله دیفرانسیل (15)، تابع باقیمانده به فرم معادله (19) حاصل می‌شود. به صورت دلخواه نقاط نمونه در حالتی که از پایه‌های متعامد به عنوان پاسخ احتمالی مسئله استفاده شود، ریشه‌های بسل نوع اول در نظر گرفته می‌شوند. در این مسئله، نقاط انتخابی به فاصله برابر از هم در نظر گرفته شده است. نقاط نمونه به فرم $x=iL/m$ هستند که در آن i یک عدد طبیعی بین یک تا m-c می‌باشد (c تعداد معادلات مرزی، طبیعی یا شرطی است). شرط مرزی در انتهای آزاد وجود نداشته و در محل تکیه‌گاه گیردار با برابر صفر قرار دادن شیب و جابجایی عرضی ارضا می‌شود. شرایط طبیعی در محل مفصل برشی با برابر صفر قرار دادن مشتق سوم جابجایی عرضی و در محل مفصل خمشی با برابر صفر قرار دادن مشتق دوم جابجایی عرضی ارضا می‌شود. همچنین معادله شرایط طبیعی در انتهای آزاد کنسول مشابه مفصل خمشی در نظر گرفته می‌شود. جابجایی عرضی در مبدا صفر فرض شده است؛ لذا برای تیر دوسر مفصل، دو سر گیردار، یک انتها مفصل - یک انتها گیردار و یک انتها گیردار - یک انتها مفصل برشی، c برابر با 3 و برای تیر کنسول c برابر با 2 می‌باشد.

$$R_{ir} = \left[\hat{\varphi}_1 + \left(\frac{\tilde{\varphi}_3}{\hat{\varphi}_2}\right)\sum_{j=0}^{4} \Phi_j \left(\frac{iL}{m}\right)^{r-j}\right] a_r \tag{19}$$

ضرایب موجود در معادله (19)، در معادلات (20) نمایش داده شده‌اند.

$$\begin{aligned}
\Phi_0 &= L^2(P\beta^2 r(r-1) + kL^2)\hat{\varphi}_2 + I_0\alpha^2\beta^2 r(r-1) \\
\Phi_1 &= 2L^3 P\beta r(r-1)\hat{\varphi}_2 + 2I_0 L\alpha\beta r(r-1)(\alpha + (3\gamma + r - 2)\beta) \\
\Phi_2 &= I_0 r(r-1)L^2\hat{\varphi}_3 + L^2\hat{\varphi}_2 r(r-1)(\beta^2(r^2 - 5r + 6)EI + PL^2) \\
\Phi_3 &= 2L^3 EI\beta r(r-1)(r-2)(r-3)\hat{\varphi}_2 + 2I_0 L^3(\alpha + (3\gamma + r - 3)\beta)r(r-1)(r-2) \\
\Phi_4 &= r(r-1)(r-2)(r-3)(L^4 EI\hat{\varphi}_2 + I_0 L^4)
\end{aligned} \tag{20}$$

ثابت‌های معادلات (19) و (20)، در معادلات (20) ارائه شده‌اند.

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}_1 &= kL^3\beta\tilde{\varphi}_3\left(\frac{iL}{m}\right)^{r+1}\left(2 + \beta\left(\frac{i}{m}\right)\right) \\
\hat{\varphi}_2 &= e^{\left(-\frac{\alpha i}{m}\right)}\left(\frac{\tilde{\varphi}_3}{\tilde{\varphi}_1}\right)\left(1 + \beta\left(\frac{i}{m}\right)\right)^{-3\gamma} \\
\hat{\varphi}_3 &= \beta^2(9\gamma(\gamma + 6r - 15) + r(r - 5) + 6) + \alpha(\alpha - 8\beta) + 2\alpha\beta(3\gamma + 2r)
\end{aligned} \tag{21}$$

رابطه (19) باید در تمام نقاط انتخابی برابر با صفر باشد. ضرایب a_r برای شرایط مرزی و طبیعی به‌صورت ماتریس $[B.C.]$ مرتب می‌شوند. شرط صفر بودن مشتق اول، مشتق دوم یا مشتق سوم جابجایی به ترتیب در تکیه‌گاه‌های گیردار، مفصلی یا گیردار غلتکی (مفصل برشی) در مبدا مختصات به ترتیب به صفر شدن a_1، a_2 یا a_3 منجر می‌شود که در تشکیل ماتریس کلی ضرایب (شامل معادلات متناظر به نقاط نمونه و شرایط مرزی) باعث کاهش مرتبه ماتریس از m به m-1 می‌شود. بنابراین شروط مرزی یا طبیعی در مبدا در ماتریس $[B.C.]$ تاثیر داده نمی‌شوند. برای حصول حل غیرتکراری باید دترمینان ضرایب برابر با صفر باشد.

$$\left|\begin{matrix}\left[\hat{\varphi}_1+\left(\frac{\tilde{\varphi}_3}{\hat{\varphi}_2}\right)\sum_{j=0}^{4}\Phi_j\left(\frac{iL}{m}\right)^{r-j}\right]_{(m-c)\times(m-1)}\\ [B.C.]_{(c-1)\times(m-1)}\end{matrix}\right|=0 \qquad (22)$$

دترمینان 22، منجر به حصول معادله مشخصه تیر هدفمند دوجهته اویلر با ضخامت متغیر دلخواه واقع بر بستر الاستیک هیتنی می‌شود. پاسخ‌های این معادله به ترتیب کوچک به بزرگ، بار کمانشی اولین مودها می‌باشند.

5- روش طیفی ریتز

روش طیفی ریتز در بسیاری از جهات مشابه روش اجزاء محدود است. اما در روش طیفی ریتز برخلاف روش اجزاء محدود به جای مختصات‌های محلی از یک مختصات عمومی استفاده می‌شود. همچنین به جای استفاده از توابع شکل که به جزء محدوده کوچکی در سایر نقاط صفر هستند، از پایه‌هایی استفاده می‌شود که در سراسر طول تیر جز در نقاطی که شرایط مرزی ایجاب کند، غیرصفر می‌باشند. برای افزایش سرعت همگرایی در مسائل پیچیده‌تر، از پایه‌های متعامد استفاده می‌شود، به این ترتیب می‌توان به کمک روش گالرکین فرم ضعیف شده‌ای از معادلات را محاسبه نمود. قنادپور و همکاران برای تحلیل کمانشی تیر هدفمند غیرمحلی اویلر با ضخامت و صلبیت ثابت در امتداد محور از پایه‌ی متعامد چیبیشف استفاده نموده‌اند [19]. محمدی‌مهر و همکاران [20] نیز از روش پیشنهادی قنادپور و همکاران [19] استفاده کرده‌اند. در تحقیق حاضر جهت بررسی صحت نتایج، از روش ریتز با پایه‌ی غیر متعامد تیلور (معادله 18) استفاده می‌شود. در تحقیق حاضر، سرعت همگرایی مناسب نیاز به استفاده از پایه‌های متعامد را برطرف می‌سازد. با ضرب کردن توابع فرعی مناسب به معادله (18) شامل چند جمله‌ای‌هایی که مقدار آن‌ها یا مشتق آن‌ها در تکیه‌گاه‌ها صفر هستند، شرایط مرزی برآورده می‌شود [22 ,21,19].

$$w=\Pi_{i=1}^{n}(x-x_k)^s\sum_{r=1}^{m}a_r\,x^r \qquad (23)$$

پارامتر s در تکیه‌گاه گیردار برابر با دو و درتکیه‌گاه ساده برابر با یک است. همچنین x_k فاصله تکیه‌گاه از مبدا است. به جای این کار، می‌توان ابتدا ضرایب a_1 الی a_c را پس از ارضا شدن معادلات مرزی و طبیعی برحسب باقی ضرایب بسط تیلور جابجایی خمشی (a_{c+1} الی a_m) محاسبه و در معادله (18) قرار داد. سپس با جایگذاری معادله (18) در معادله (13) و پس از محاسبه دترمینان ماتریس ضرایبِ مجموعه معادلات (24)، معادله مشخصه کمانشی تیر هدفمند دو جهته اویلر با ضخامت دلخواه واقع بر بستر هیتنی حاصل می‌شود.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_k}=0,\quad k=c+1,c+2,\ldots,m \qquad (24)$$

6-نتایج عددی

برای بی‌بعد سازی نتایج، در تمامی شکل‌ها و جدول‌ها پارامترهای I_0 و L برابر با یک واحد مفرض هستند. "شکل 2" همگرایی روش پیشنهادی و درصد خطا را برای مود اول (بار کمانشی بحرانی) در تیر ساده نمایش می‌دهد. همچنین مقایسه بین نتایج حاصل از روش پیشنهادی با نتایج روش طیفی ریتز در "شکل 2" ارائه شده است. برای ترسیم "شکل 2"، ضرایب α و β برابر با 0.1، ضرایب γ و n برابر با 3 و 1، نسبت E_c/E_m برابر با 2 و نسبت ضرایب k و EI مربوط به مدل خاک بر E_m و E_mI_0 برابر با 0.5 مفروض هستند. مطابق با نتایج "شکل 2"، با انتخاب تعداد کوچکی از ترم‌ها، نتایجی با دقت مناسب حاصل خواهند شد.

همگرایی روش پیشنهادی با ترسیم معادله مشخصه مربوط به تیر یک انتها گیردار و یک انتها مفصلی (تکیه‌گاه مفصلی در مبدا مختصات قرار دارد) برای تعداد مختلفی از ترم‌های پایه در "شکل 3" نمایش داده شده است. برای ترسیم "شکل 3"، از مشخصات هندسی و مکانیکی مشابه با تیر مربوط به "شکل 2" استفاده شده است. با ازدیاد تعداد ترم‌های پایه، ریشه‌های معادله مشخصه (بارهای کمانشی در اولین مودها) به سمت مبدا حرکت می‌کنند. درجه چند جمله‌ای‌های مشخصه برابر با m-c است. بنابراین با به‌کار بردن m ترم، حداکثر m-c بار کمانشی متناظر به اولین مودها محاسبه می‌شود.

"شکل 4"، بارهای کمانشی دو مود اول را برای مقادیر مختلف α و β در تیر ساده نمایش می‌دهد. در "شکل 4"، ضرایب γ و n و نسبت E_c/E_m برابر با 2 و نسبت k/E_m و $EI/(E_mI_0)$ برابر با 1 مفروض هستند. محور قائم سمت چپ مربوط به بار کمانشی بی‌بعد بحرانی و محور قائم سمت راست مربوط به بار کمانشی بی‌بعد مود دوم است. با ازدیاد ضرایب α و β بار کمانشی در هر

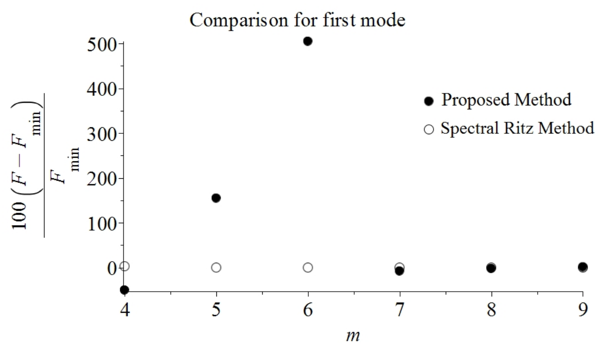

Fig. 2 The convergence of proposed method

شکل 2 همگرایی روش پیشنهادی

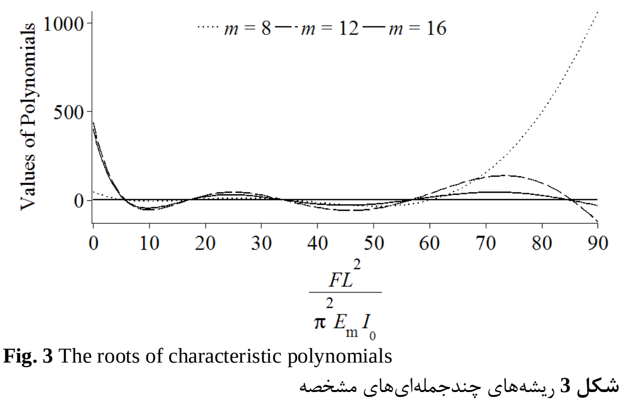

Fig. 3 The roots of characteristic polynomials

شکل 3 ریشه‌های چندجمله‌ای‌های مشخصه

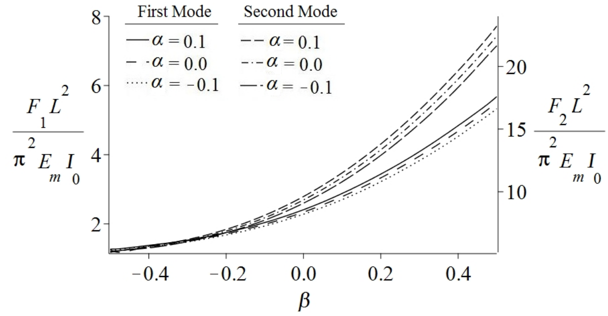

Fig. 4 The influence of taper constant and material constant in axial direction on buckling loads

شکل 4 تاثیر ثابت ماده در امتداد محور و ضریب ارتفاع بر بارهای کمانشی

دو مود ازدیاد می‌یابد. تاثیر ثابت ماده در امتداد طولی بر بار کمانشی دو مود نخست، زمانی که ضریب ارتفاع بزرگتر باشد، بیشتر است.

تاثیر صلبیت خمشی تیر رابط فرضی بر بار کمانشی بحرانی تیر دو سر گیردار برای الگوهای مختلف تغییر ارتفاع در "شکل 5" نمایش داده شده است. ضرایب α، β برابر با 0.5، نسبت E_c/E_m و مقدار n برابر با 2 و نسبت ضریب k بر E_m برابر با 3 مفروض هستند.

"شکل 6"، تاثیر ضریب ثابت ماده و نسبت مدول ارتجاعی سرامیک بر مدول ارتجاعی فلز را بر بار بحرانی کمانشی تیر کنسول نمایش می‌دهد. تغییرات ارتفاع کنسول به صورت خطی مفروض است ($\gamma = 1$). ضرایب مربوط به بستر ارتجاعی برابر با صفر قرار داده شده است ($k=EI=0$). همچنین ضرایب α و β برابر با صفر مفروض هستند. با ازدیاد ضریب ثابت

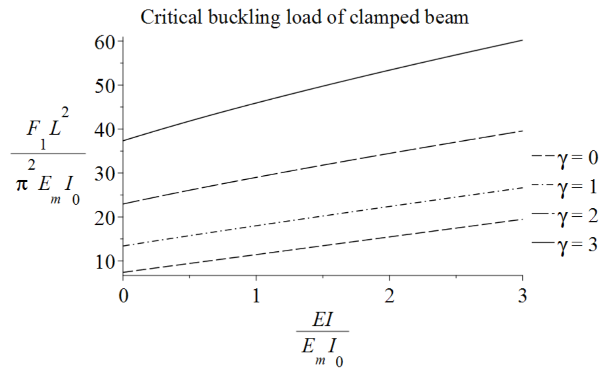

Fig. 5 The influence of flexural rigidity of connecting beam in Hetenyi's model on critical buckling load

شکل 5 تاثیر صلبیت خمشی تیر رابط در مدل هیتنی بر بار کمانشی بحرانی

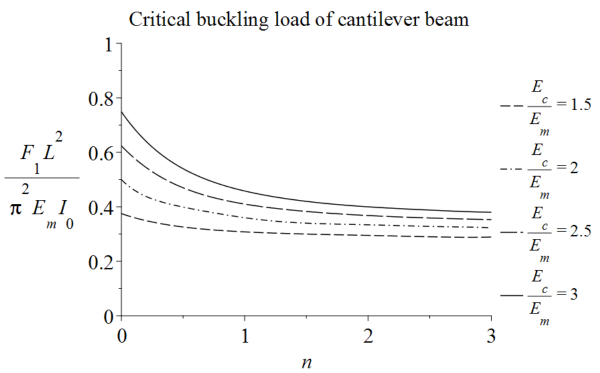

Fig. 6 The influence of material constant and the ratio of the ceramic elasticity modulus to metal elasticity modulus on critical buckling load

شکل 6 تاثیر ثابت ماده و نسبت مدول ارتجاعی سرامیک بر فلز بر بار کمانشی بحرانی

ماده یا کاهش نسبت مدول ارتجاعی سرامیک بر مدول ارتجاعی فلز، بار بحرانی کمانشی کاهش می‌یابد. با توجه به رابطه (3)، هر اندازه ثابت ماده بزرگتر باشد مدول ارتجاعی و در نتیجه صلبیت خمشی تیر هدفمند، نسبت به تیر همگن سرامیکی کمتر خواهد بود.

تغییر شکل کمانشی بی‌بعد (نرمال شده نسبت به تغییرشکل بیشینه) مربوط به اولین مود کمانشی برای شرایط مرزی مختلف در "شکل 7" ترسیم شده است. نمادهای C، S، F، SHH به ترتیب مربوط به شرایط مرزی گیردار، ساده، آزاد و مفصل برشی (گیردار غلتکی) هستند. برای ترسیم "شکل 7" فرض شده است که ضرایب α و β برابر با 0.2- و ضرایب γ و n برابر با 2، نسبت E_c/E_m برابر با 3 و ضرایب k و EI مربوط به مدل خاک برابر با صفر هستند.

"شکل 8" تغییرشکل کمانشی بی‌بعد مربوط به سه مود اول تیر یک انتها گیردار و یک انتها مفصلی را نمایش می‌دهد. مفروض است که انتهای مفصلی در مبدا مختصات قرار دارد، در "شکل 8" برای هر مود فاصله محل حداکثر جابجایی کمانشی از مبدا نمایش داده شده است. برای ترسیم "شکل 8" از مشخصات هندسی و مکانیکی تیر "شکل 7" استفاده شده است، اما ضرایب k و EI مربوط به مدل خاک به ترتیب تقسیم بر E_m و E_mI_0 برابر با 1 مفروض می‌باشند.

با توجه به این‌که تیر دارای ضخامت متغیر و خواص مکانیکی متغیر در امتداد محور طولی است، با تعویض محل تکیه‌گاه‌های نا مشابه در دو انتهای تیر، بارهای کمانشی متفاوت و همچنین تغییرشکل‌های کمانشی متفاوتی حاصل خواهد شد. در "شکل 9"، تیری با مشخصات هندسی و مکانیکی مشابه با تیر مربوط به "شکل 8" در نظر گرفته شده است. برای ترسیم

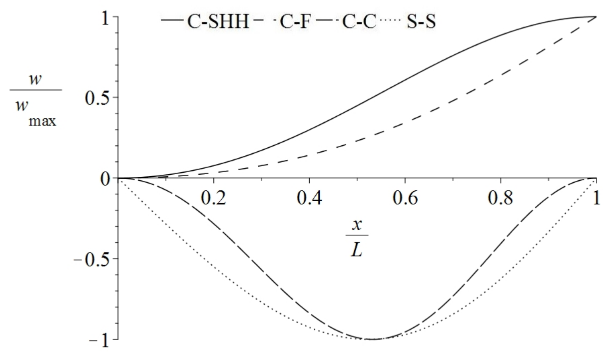

Fig. 7 Buckling deformation for various boundary conditions

شکل 7 تغییرشکل کمانشی برای شرایط مرزی مختلف

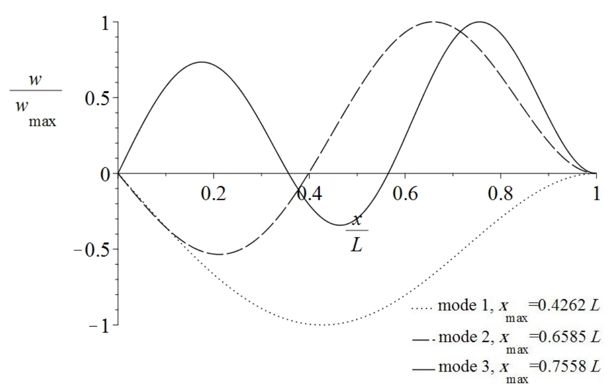

Fig. 8 Buckling deformation for first three modes

شکل 8 تغییرشکل کمانشی در سه مود اول

"شکل 9" فرض شده است که تکیه‌گاه گیردار در مبدا و تکیه‌گاه مفصلی در انتهای دیگر تعبیه شده است. فاصله محل حداکثر تغییر شکل کمانشی از تکیه‌گاه گیردار در "شکل 8" و "شکل 9" برای هر سه مود اول تقریبا یکسان است.

در جدول 1 بارهای کمانشی بی‌بعد بحرانی (متناظر به اولین مود) تیر یک انتها مفصل و یک انتها گیردار برای مقادیر مختلف ضرایب α و β ارائه شده است. مفروض است که ضرایب n، γ و نسبت‌های E_c/E_m، k/E_m و $EI/(E_mI_0)$ برابر با 2 هستند. همچنین مفروض است که تکیه‌گاه گیردار در مبدا قرار دارد.

در جدول 2 مقادیر مربوط به بارهای کمانشی بحرانی بی‌بعد تیر کنسول (تکیه‌گاه در مبدا مختصات قرار دارد) برای مقادیر مختلف ضرایب n و γ نمایش داده شده است. مفروض است که ضرایب α و β برابر با 0.1 و نسبت‌های E_c/E_m، k/E_m و $EI/(E_mI_0)$ برابر با 2 هستند.

جدول 3 مقادیر مربوط به بارهای کمانشی بحرانی بی‌بعد تیر با شرایط مرزی ساده را برای مقادیر مختلف نسبت‌های k/E_m و $EI/(E_mI_0)$ نمایش می‌دهد. مفروض است که ضرایب α و β برابر با 0.1- و نسبت E_c/E_m و ضرایب n و γ برابر با 3 هستند.

در جدول 4 تاثیر شرایط مرزی (BC) بر بار کمانشی سه مود اول نمایش داده شده است. فرض می‌شود که تیر بر روی بستر الاستیک قرار ندارد ($k=EI=0$). پارامترهای α، β، E_c/E_m، n و γ به ترتیب برابر با 0، 0.15، 2، 2 و 3 مفروض‌اند. پارامتر F_M، بار کمانشی مود M می‌باشد. محل حداکثر جابجایی عرضی از مبدا ($x_{\max}$) مربوط به سه مود اول نیز نمایش داده شده است. با فرض یکسان بودن مشخصات مکانیکی و هندسی، بار کمانشی سه مود اول در تیر ساده و در تیر یک انتها گیردار و انتهای دیگر گیردار غلتکی، با ضخامت ثابت ($\gamma = 0$) با هم برابر هستند؛ در حالی که برای ضخامت متغیر چنین نیست.

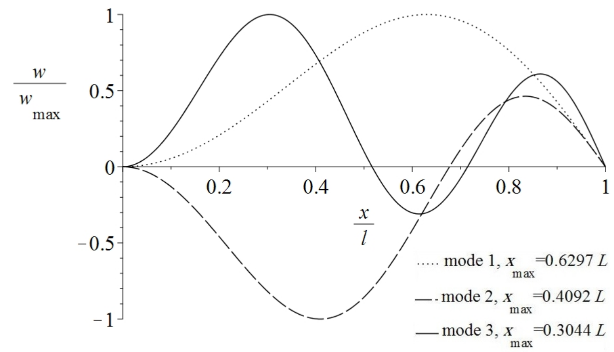

Fig. 9 Buckling deformation for first three modes after replacing supports

شکل 9 تغییرشکل کمانشی در سه مود اول بعد از تعویض تکیه‌گاه‌ها

جدول 1 بارهای کمانشی بحرانی بی‌بعد برای مقادیر مختلف α و β

Table 1 The dimensionless critical buckling loads for various amounts of α and β

$\frac{F_1L^2}{\pi^2E_mI_0}$	β	α
11.6849	0.3	
7.45603	0.0	0.4
5.42100	-0.3	
11.0008	0.3	
7.13375	0.0	0.2
5.32170	-0.3	
10.3674	0.3	
6.84441	0.0	0.0
5.23364	-0.3	
9.78317	0.3	
6.58544	0.0	-0.2
5.15546	-0.3	
9.24646	0.3	
6.35429	0.0	-0.4
5.08599	-0.3	

جدول 2 بارهای کمانشی بحرانی بی‌بعد برای مقادیر مختلف n و γ

Table 2 The dimensionless critical buckling loads for various amounts of n and γ

$\frac{F_1L^2}{\pi^2E_mI_0}$	γ	n
8.41019	0	
9.08665	1	0
9.86834	2	
7.21536	0	
7.71020	1	1
8.25268	2	
6.98535	0	
7.44479	1	2
7.97061	2	
6.89609	0	
7.33735	1	3
7.85134	2	
6.83983	0	
7.27231	1	4
7.77648	2	

جدول 3 بارهای کمانشی بحرانی بی‌بعد برای مقادیر مختلف k و EI

Table 3 The dimensionless critical buckling loads for various amounts of k and EI

$\frac{F_1L^2}{\pi^2E_mI_0}$	$\frac{EI}{E_mI_0}$	$\frac{k}{E_m}$
1.8126	0.0	
2.8780	0.5	0
3.9206	1.0	
1.9024	0.0	
2.9657	0.5	10
4.0073	1.0	
1.9472	0.0	
3.0095	0.5	15
4.0506	1.0	
1.9920	0.0	
3.0533	0.5	20
4.0939	1.0	
2.0367	0.0	
3.0970	0.5	25
4.1372	1.0	

جدول 4 بارهای کمانشی بی‌بعد سه مود اول برای شرایط مرزی مختلف

Table 4 The dimensionless buckling loads corresponding to the first three modes for various boundary conditions

$\frac{F_ML^2}{\pi^2E_mI_0}$	$\frac{x_{\max}}{L}$	M	BC
2.449701	0.453513	1	
9.838913	0.696079	2	S-S
22.15479	0.789138	3	
5.036821	0.345492	1	
14.89217	0.559702	2	S-C
29.67200	0.667076	3	
9.866719	0.447232	1	
20.15208	0.437645	2	C-C
39.42513	0.635137	3	
0.474046	1.000000	1	
5.403795	0.605882	2	C-F
15.25673	0.330255	3	
2.525223	1.000000	1	
9.916483	0.421922	2	C-SHH
22.23277	1.000000	3	

7- نتیجه‌گیری

در این مقاله برای اولین بار، تحلیل کمانشی تیر هدفمند دو جهته اویلر واقع بر بستر الاستیک هیتنی بررسی شده است. به علاوه روشی نوین برای حل مسئله کمانشی مزبور ارائه شده است. درجه چند جمله‌ای‌های مشخصه حاصل در این روش برابر با m-c است؛ که پارامتر m تعداد جملات در سری محدود مربوط به تقریب جابجایی خمشی و c تعداد معادلات مرزی است. بنابراین با به‌کار بردن m ترم، حداکثر m-c بار کمانشی متناظر به اولین مودها محاسبه می‌شود. انطباق نتایج عددی حاصل از روش پیشنهادی با نتایج حاصل از روش شناخته شده طیفی ریتز، حاکی از دقت و سرعت همگرایی مناسب و همچنین انطباق‌پذیری روش جدید با شرایط مرزی و طبیعی مختلف است. بنابراین روش پیشنهادی می‌تواند برای بررسی پایداری اعضای سازه‌ای هدفمند دوجهته با ضخامت متغیر واقع بر بستر ارتجاعی مناسب باشد. در این مقاله با توجه به قانون مخلوط‌ها، توزیع خواص مکانیکی به نحوی است که هر اندازه ثابت ماده بزرگ‌تر باشد، ضریب یانگ و در نتیجه صلبیت خمشی تیر هدفمند، نسبت به تیر همگن سرامیکی کمتر خواهد بود. تغییرات خواص مکانیکی در امتداد ضخامت و محور تیر، تغییرات دلخواه ضخامت با الگوهای خطی و غیرخطی، پی ارتجاعی هیتنی، شرایط مرزی خاص مانند مفصل برشی و همچنین شرایط مرزی کلاسیک مانند دوسرگیردار، ساده، یکسر گیردار-یکسر مفصل و طره در نظر گرفته شده است. بارهای کمانشی، شکل‌های بی‌بعد کمانشی و محل حداکثر جابجایی عرضی برای سه مود اول ارائه شده است. نتایج در قالب نمودارها و جداول ارائه شده‌اند. برای بیان نتایج جامع، تمامی نمودارها با محورهای بی‌بعد ترسیم شده‌اند. نتایج مزبور نشان می‌دهند که کاهش ثابت ماده در امتداد عرضی و یا افزایش ثابت ماده در امتداد طولی، ازدیاد ثابت‌های مدل هیتنی شامل ضریب وینکلر و صلبیت خمشی تیر رابط فرضی و همچنین افزایش ثابت ارتفاع تیر هدفمند دو جهته باعث ازدیاد بار کمانشی در مودهای مختلف می‌شود. تاثیر ثابت ماده در امتداد طولی بر بار کمانشی، برای ضریب ارتفاع بزرگ‌تر، بیشتر است. در حالتی که ثابت ارتفاع مثبت باشد، ازدیاد ضریب الگوی تغییر ارتفاع، باعث ازدیاد بار کمانشی خواهد شد. نتایج نشان می‌دهند که با کاهش نسبت مدول الاستیسیته سرامیک بر مدول ارتجاعی فلز، بار بحرانی کمانشی کاهش می‌یابد. به علاوه با بررسی نتایج مشاهده شد که با فرض وجود ضخامت غیرمتغیر و با فرض یکسان بودن مشخصات مکانیکی و هندسی، بار کمانشی سه مود اول در تیر ساده با بار کمانشی سه مود نخست در تیر یک انتها گیردار و انتهای دیگر گیردار غلتکی (مفصل برشی در محل تکیه‌گاه)، برابر هستند؛ در حالی که در مورد تیر هدفمند دارای ضخامت متغیر یا در مورد تیر هدفمند دوجهته چنین نیست. با توجه به این‌که تیر دارای ضخامت و خواص مکانیکی متغیر در امتداد محور طولی است، با تعویض محل تکیه‌گاه‌های نامشابه در دو انتهای تیر، بارهای کمانشی متفاوت و همچنین تغییرشکل‌های کمانشی متفاوتی حاصل شد.

8- فهرست علائم

A_0	سطح مقطع در مبدا
a_r	ضرایب بسط تیلور
b	عرض تیر
B.C.	مجموعه معادلات مرزی، طبیعی یا شرطی
c	تعداد معادلات مرزی، طبیعی یا شرطی
D	صلبیت خمشی در مدل هیتنی
E	مدول ارتجاعی تیر هدفمند دوجهته
E_c	مدول ارتجاعی سرامیک
EI	صلبیت خمشی تیر رابط فرضی
E_m	مدول ارتجاعی فلز
F	نیروی محوری فشاری
f	پاسخ بستر ارتجاعی
F_i	بار کمانشی مود i
h	ارتفاع تیر
h_o	ارتفاع تیر در مبدا
I_o	ممان اینرسی مقطع در مبدا
k	ضریب وینکلر
L	طول تیر
m	تعداد جملات بسط تیلور
n	ثابت ماده در امتداد عرضی
U_b	انرژی کرنشی خمشی تیر ارتجاعی
U_f	انرژی کرنشی بستر ارتجاعی
w	جابجایی عرضی تیر
x, u, z	مختصات منطبق بر میان‌تار
x, y, z	مختصات منطبق بر تار خنثی
y_0	فاصله بین تار خنثی و میان‌تار

علائم یونانی

α	ثابت ماده در امتداد طولی
β	ثابت ارتفاع
γ	ثابت الگوی تغییرشکل
ε_x	کرنش محوری
λ	اغتشاش
μ	ضریب اغتشاش
Π	انرژی پتانسیل کل
Ω	انرژی هدر رفته

9- مراجع

[1] M. S. EL-Wazery, A. R. EL-Desouky, A review on Functionally Graded Ceramic-Metal Materials, *Journal of Materials and Environmental Science*, Vol. 6, No. 5, pp. 1369-1376, 2015.

[2] A. Heydari, M. T. Kazemi, Elasto-Plastic analysis of thick-walled FG reservoirs subjected to internal pressure, *International Journal of Advanced Design and Manufacturing Technology*, Vol. 3, No. 1, pp. 11-18, 2009. (in Persian فارسی)

[3] A. Heydari, M. T. Kazemi, Thermo-Elasto-Plastic Analysis of Functionally Graded Spherical Reservoirs Subjected to Temperature Gradient, *10th International Congress on Civil Engineering*, University of Tabriz, 2015.

[4] A. Heydari, Spreading of plastic zones in functionally graded spherical tanks subjected to internal pressure and temperature gradient combinations, *Iranian Journal of Mechanical Engineering Transactions of the ISME*, Vol. 16, No. 2, pp. 5-25, 2015.

[5] M. Dezyani, H. Dalayeli, S. Yousefi, H. Farrokhfal, Optimum design of compression stiffened panel under buckling constraint using Gaussian surrogate model, *Modares Mechanical Engineering Journal*, Vol. 16, No. 6, pp. 205-216, 1395. (in Persian فارسی)

[6] S. A. M. Ghannadpour, M. A. Mehrpouya, P. Kiani, Post-buckling of laminated plates using collocation method and Legendre basis functions, *Modares Mechanical Engineering Journal*, Vol. 16, No. 4, pp. 213-220, 1395. (in Persian فارسی)

[7] M. Livani, K. Malekzadeh Fard, S. Shokrollahi, Buckling and flutter analyses of composite sandwich panels under supersonic flow *Modares Mechanical Engineering Journal*, Vol. 16, No. 7, pp. 99-110, 1395. (in Persian فارسی)

[8] Y. Huang, X. F. Li, Buckling of functionally graded circular columns including shear deformation, *Materials and Design*, Vol. 31, No. 7, pp. 3159-3166, 2010.

[9] H. Huang, G. A. Kardomateas, Buckling and Initial Postbuckling Behavior of Sandwich Beams Including Transverse Shear, *AIAA Journal*, Vol. 40, No. 11, pp. 2331-2335, 2002.

[10] M. G. Munteanu, A. Barraco, Post-Buckling Behaviour of a compressed slender beam constrained to a cylindrical tube, *8th. World Congress on Computational Mechanics (WCCM), 5th. European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS)*, Venice, Italy, 2008.

[11] S. R. Li, R. C. Batra, Thermal Buckling and Postbuckling of Euler–Bernoulli Beams Supported on Nonlinear Elastic Foundations, *AIAA Journal*, Vol. 45, No. 3, pp. 712-720, 2007.

[12] J. Zhao, J. Jia, X. He, H. Wang, Post-buckling and Snap-Through Behavior of Inclined Slender Beams, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 75, No. 4, p. 041020 -1, 2008.

[13] M. A. Vaz, M. H. Patel, Post-buckling behaviour of slender structures with a bi-linear bending moment - curvature relationship, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 42, No. 3, pp. 470-483, 2007.

[14] A. Heydari, Buckling of Functionally Graded Beams with Rectangular and Annular Sections Subjected to Axial Compression, *International Journal of Advanced Design and Manufacturing Technology*, Vol. 5, No. 1, pp. 25-31, 2011.

[15] A. Heydari, Analytical Solutions for Buckling of Functionally Graded Circular Plates under Uniform Radial Compression using Bessel Function, *International Journal of Advanced Design and Manufacturing Technology*, Vol. 6, No. 4, pp. 41-47, 2013.

[16] A. Heydari, A. Jalali, A. Nemati, Buckling analysis of circular functionally graded plate under uniform radial compression including shear deformation with linear and quadratic thickness variation on the Pasternak elastic foundation, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 41, pp. 494–507, 2017.

[17] E. Ventsel, T. Krauthammer, *Thin Plates and Shells, Theory, Analysis, and Applications*, pp. 556-557, New York: Marcel Dekker, Inc, 2001.

[18] M. H. Naei, A. Masoumi, A. Shamekhi, Buckling analysis of circular functionally graded material plate having variable thickness under uniformcompression by finite-element method, *Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 221, No. 11, pp. 1241-1247, 2007.

[19] S. A. M. Ghannadpour, B. Mohammadi, J. Fazilati, Bending, buckling and vibration problems of nonlocal Euler beams using Ritz method, *Composite Structures*, Vol. 96, pp. 584–589, 2013.

[20] M. Mohammadimehr, M. Salemi, H. Nasiri, H. Afshari, Thermal effect on deflection, critical buckling load and vibration of nonlocal Euler-Bernoulli beam on Pasternak foundation using Ritz method, Modares Mechanical Engineering Journal, Vol. 13, No. 11, pp. 64-76, 1392. (in Persian فارسی)

[21] A. Nemati, S. Yousefi, F. Soltanian, J. Saffar Ardabili, An efficient numerical solution of fractional optimal control problems by using the ritz method and bernstein operational matrix, Asian Journal of Control, Vol. 19, No. 1, pp. 1-11, 2017.

[22] A. Nemati, S. Yousefi, A numerical method for solving fractional optimal control problems using Ritz method, *ASME, Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, Vol. 11, No. 5, p. 051015-1, 2016.