مجله مهندسی مکانیک مدرس، فروردین 1396، دوره 17، شماره 1، ص‌ص 210-220

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

تحلیل ارتعاشات غیرخطی پوسته‌های مخروطی با استفاده از رهیافت عددی

عماد حسرتی[1]، رضا انصاری[*2]

1- دانش‌آموخته‌ی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان، رشت

2- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان، رشت

* رشت، صندوق پستی 3756، r_ansari@guilan.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 17 مرداد 1395

پذیرش: 07 آبان 1395

ارائه در سایت: 26 دی 1395

کلید واژگان:

ارتعاشات غیرخطی

پوسته‌های مخروطی

روش تربیع دیفرانسیلی تعمیم‌یافته

رهیافت عددی

ایزوتروپیک

چکیده

پوسته‌های مخروطی به طور گسترده‌ای در شاخه‌های گوناگون مهندسی از جمله مهندسی مکانیک، عمران و هوافضا مورد استفاده قرار می‌گیرند. در این مقاله، ارتعاشات غیرخطی پوسته‌های مخروطی ناقص با استفاده از یک رهیافت عددی در شرایط مرزی مختلف مورد مطالعه قرار گرفته است. برای نیل به این هدف معادلات حاکم و شرایط مرزی مرتبط، بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول دانل و با استفاده از اصل همیلتون استخراج شده‌اند. پس از بی‌بعدسازی معادلات حاکم، به‌منظور دست‌یابی به فرم گسسته‌ی معادلات از روش تربیع دیفرانسیلی تعمیم یافته استفاده شده است. سپس با اعمال روش گلرکین عددی معادلات حاکم به فرم معادلات دیفرانسیل معمولی در آمده است و روشی تحت عنوان گسسته‌سازی شبکه‌بندی متناوب برای به‌دست آوردن فرم گسسته‌ی معادلات در حوزه‌ی زمان به خدمت گرفته شده است. در نهایت پاسخ فرکانسی ارتعاشات غیرخطی پوسته‌ی مخروطی با استفاده از روش طول-کمان به‌دست آمده است. با ارائه‌ی نتایج عددی، اثرات عواملی نظیر نسبت ضخامت به شعاع، نست شعاع‌های کوچک و بزرگ، زاویه‌ی رأس مخروط و شرایط مرزی مختلف بر ارتعاشات غیرخطی پوسته‌های مخروطی مورد تحلیل و بررسی قرار گرفته است. مشاهده می‌شود که تغییر شکل مود ارتعاشی غالب و تعداد موج‌های محیطی پوسته تأثیر قابل توجهی بر اثرات سخت‌شوندگی و ارتعاشات غیرخطی دارد.

Nonlinear vibration analysis of conical shells using a numerical strategy

Emad Hasrati, Reza Ansari*

Department of Solid Mechanics, Faculty of Engineering, University of Guilan, Rasht, Iran

* P.O.B. 3756 Rasht, Iran, r_ansari@guilan.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 07 August 2016
Accepted 28 October 2016
Available Online 15 January 2017

Keywords:
Nonlinear vibrations
Conical shells
Generalized differential quadrature method
Numerical approach
Isotropic

ABSTRACT

Conical shells are widely used in various engineering branches such as mechanical engineering, civil and aerospace engineering. In the present paper, based on the first order shear deformation theory (FSDT) of shells, the nonlinear vibration behavior of truncated conical shells under different boundary conditions is investigated using a numerical approach. To this end, the governing equations of motion and corresponding boundary conditions are derived by the use of Hamilton's principle. After catching the dimensionless form of equations, the generalized differential quadrature (GDQ) method is deployed to obtain a discretized set of nonlinear governing equations. Thereafter a Galerkin-based scheme is applied to achieve a time-varying set of ordinary differential equations and a method called periodic grid discretization so as to discretize the equations on the time domain. The pseudo arc-length continuation method is finally used to obtain the frequency-amplitude response of conical shells. Selected numerical results are presented to examine the effects of different factors such as thickness-to-radius ratio, up and down edges radius ratio, semi-vertex angle of cone, circumferential wave number and boundary conditions. It can be concluded that the change of the vibrational mode shapes and circumferential wave number have significant effects on the nonlinear vibration characteristics and hardening effects.

1- مقدمه

پوسته‌های مخروطی به طور گسترده‌ای در شاخه‌های گوناگون مهندسی هم‌چون کشتی‌ها، زیردریایی‌ها، موشک‌ها، فضاپیماها و سازه‌های عمرانی مورد استفاده قرار می‌گیرند. این کاربرد گسترده باعث ایجاد انگیزه برای توسعه‌ی مدل‌های دقیق ریاضی به‌منظور پیش‌بینی رفتار ارتعاشی مدل‌های فیزیکی گردیده است. به طوری که شناخت رفتار ارتعاشی پوسته‌ها برای طراحی سازه‌هایی با ارتعاش کنترل شده و کاهش نویز اهمیت زیادی می‌یابد.

تاریخچه‌ی مطالعه بر روی تئوری‌های پوسته به حدود نیم قرن پیش باز می‌گردد. تئوری‌های گوناگون هم‌چون تئوری دانل، تیموشنکو و رایسنر بر اساس فرضیات و تقریب‌های گوناگون ارائه شده‌اند که اغلب این کارها توسط لیسا [1] معرفی شده است. لازم به ذکر است که بیشتر مطالعات انجام شده بر اساس تئوری‌های مختلف موجود در دبیره، در زمینه‌ی ارتعاشات پوسته‌های استوانه‌ای می‌باشد. در مقایسه با پوسته‌های استوانه‌ای مطالعات صورت گرفته بر روی پوسته‌های مخروطی بسیار اندک می‌باشد.

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:

E. Hasrati, R. Ansari, Nonlinear vibration analysis of conical shells using a numerical strategy, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 1, pp. 210-220, 2017 (in Persian)

از جمله مطالعات صورت گرفته در زمینه‌ی ارتعاشات خطی پوسته‌های مخروطی می‌توان به مواردی که در ادامه بیان می‌شوند اشاره کرد.

شو [2] از روش تربیع دیفرانسیلی تعمیم‌یافته[1] به منظور بررسی ارتعاشات آزاد پوسته‌های مخروطی استفاده کرد. سیوالک [3] روش کانولوشن منفرد گسسته[2] را برای مطالعه‌ی ارتعاشات پوسته‌های مخروطی چرخان معرفی نمود. گولدبرگ و همکارانش [4] مودهای متقارن محوری و فرکانس‌های طبیعی پوسته‌های مخروطی ناقص را مورد مطالعه قرار دادند. کالنینز [5] ارتعاشات آزاد و مودهای ارتعاشی پوسته‌های مخروطی چرخان متقارن را بررسی نمود. آیری و همکارانش [7,6] روش ماتریس انتقال را برای مطالعه‌ی ارتعاشات آزاد پوسته‌های مخروطی با ضخامت متغیر ارائه نمودند. روش حل سری‌های توانی به منظور مطالعه‌ی ارتعاشات آزاد پوسته‌های مخروطی ایزوتروپیک و ارتوتروپیک توسط تانگ [9,8] مورد استفاده قرار گرفت. بر اساس تئوری مرتبه اول لاو، لم و هوئا [11,10] و همچنین هوئا [12] یک روش تحلیلی را برای مطالعه‌ی ارتعاشات آزاد پوسته‌های مخروطی ارتوتروپیک با شرایط مرزی کلاسیک ارائه کردند. ویلکنز و همکارانش [13] ارتعاشات آزاد پوسته‌های مخروطی ارتوتروپیک را تحت شرایط مرزی مختلف مورد تجزیه و تحلیل قرار دادند. تحلیل ارتعاشات و کمانش پوسته‌های مخروطی ارتوتروپیک غیرهمگن با تکیه‌گاه‌های گیردار توسط سوفیف و همکارانش [14] صورت گرفت. جین و همکارانش [15] ارتعاشات آزاد پوسته‌های مخروطی ناقص را با استفاده از روش حل سری فوریه مطالعه نمودند. سوفیف [16] ارتعاشات خطی و پایداری پوسته‌های مخروطی ناقص را تحت بار محوری مورد بررسی قرار داد. کمریان و همکارانش [17] ارتعاشات آزاد خطی پوسته‌های مخروطی تقویت شده توسط نانولوله‌های کربنی متراکم را با استفاده از روش تربیع دیفرانسیلی تعمیم‌یافته بررسی کردند. دونگ و تیم [18] ارتعاشات آزاد و فرکانس‌های خطی پوسته‌های مخروطی ناقص هدفمند دارای حلقه‌های سفت‌کننده را با استفاده از روش گلرکین مطالعه نمودند.

بررسی دبیره نشان می‌دهد که تاکنون مطالعات اندکی برای بررسی ارتعاشات غیرخطی پوسته‌های مخروطی به انجام رسیده است که این مساله از پیچیدگی معادلات پوسته‌های مخروطی در مختصات منحنی‌های متعامد[3] ناشی می‌شود. از جمله‌ی این تحقیقات که تماماً به روش‌های تحلیلی و با استفاده از ساده‌سازی معادلات انجام شده است می‌توان به مواردی که در ادامه ذکر می‌شوند اشاره نمود.

ژو و همکارانش [19] ارتعاشات غیرخطی پوسته‌های مخروطی متورق را با به‌کارگیری روش‌های گلرکین و هارمونیک بالانس مورد مطالعه قرار دادند. ارتعاشات غیرخطی پوسته‌های مخروطی ناقص نسبتا نازک متحرک با استفاده از روش‌های گلرکین و هارمونیک بالانس توسط فو و همکارانش [20] مورد مطالعه قرار گرفت. شن و همکارانش [21] ارتعاشات غیرخطی و پایداری پوسته‌های مخروطی ناقص چرخان را با استفاده از روش هارمونیک بالانس بررسی نمودند. سوفیف [22] ارتعاشات غیرخطی پوسته‌های مخروطی ناقص هدفمند را با استفاده از روش‌های برهم‌نهی[4]، گلرکین و هارمونیک بالانس مطالعه کرد.

در مقاله‌ی حاضر پس از به دست آوردن معادلات غیرخطی پوسته‌ی مخرطی ناقص بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول دانل با استفاده از اصل کار مجازی (همیلتون[5]) و بی‌بعد نمودن معادلات، از روش تربیع

[1] Generalized differential quadrature (GDQ)
[2] Discrete Singular Convolution
[3] Orthogonal curvilinear coordinates
[4] Superposition
[5] Hamilton principle

دیفرانسیلی تعمیم‌یافته و گلرکین عددی به منظور گسسته‌سازی معادلات استفاده شده است. معادلات غیرخطی گسسته به منظور به‌دست آوردن پاسخ فرکانسی در نهایت با استفاده از روش طول-کمان[6] حل شده‌اند. لازم به ذکر است که در این مقاله برای نخستین بار از یک روش عددی و بدون ساده سازی‌های موجود در روش‌های تحلیلی از قبیل نادیده گرفتن اینرسی و جابجایی‌های درون‌صفحه‌ای برای حل معادلات ارتعاشی پوسته‌های مخروطی استفاده شده است. همچنین نشان داده است که تغییر شکل مود ارتعاشی غالب پوسته، تاثیر قابل ملاحظه‌ای بر رفتار ارتعاشی آن می‌گذارد. به‌طوری که اثرات سخت‌شوندگی با تغییر شکل مود غالب تغییر الگو داده و دستخوش تغییر ناگهانی می‌شوند.

2- فرمول‌بندی ریاضی معادلات حاکم و شرایط مرزی مرتبط

یک پوسته‌ی مخروطی ناقص مطابق شکل 1 در نظر گرفته می‌شود. در این شکل α نصف زاویه‌ی رأس، R_1 شعاع کوچک، R_2 شعاع بزرگ، h ضخامت و L طول مخروط در راستای یال (مولد) آن است. ($0 \le x \le L,\ 0 \le \theta \le 2\pi, -h/2 \le z \le h/2$)

بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول دانل، خطوط عمود بر سطح مبنا پس از تغییر شکل، عمود بر سطح مبنا باقی نمی‌مانند. همچنین بر اساس این تئوری، جابجایی‌های درون‌صفحه‌ای (u_x و u_θ) توابعی خطی از ضخامت پوسته بوده و جابجایی عرضی (u_z) نیز در راستای ضخامت پوسته ثابت در نظر گرفته می‌شود.

میدان جابجایی برای یک نقطه‌ی دلخواه بر روی پوسته‌ی مخروطی در راستای محورهای x، θ و z با روابط (1) محاسبه می‌شود:

$$
\begin{aligned}
u_x(x,\theta,z,t) &= u(x,\theta,t) + z\psi(x,\theta,t)\\
u_\theta(x,\theta,z,t) &= v(x,\theta,t) + z\phi(x,\theta,t)\\
u_z(x,\theta,z,t) &= w(x,\theta,t)
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

که در آن t بیان‌گر زمان، u، v و w به ترتیب معرف جابجایی سطح میانی در راستاهای محوری (x)، مماسی (θ) و شعاعی (z) می‌باشند. ψ و ϕ نیز معرف دوران بردارهای نرمال صفحه‌ی میانی حول محورهای θ و x هستند.

بر اساس فرض فون‌کارمن و در نظر گرفتن میدان جابجایی در رابطه‌ی (2)، مؤلفه‌های غیرصفر تنسور کرنش را می‌توان با رابطه‌ی (2) بیان نمود.

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{xx}^0 + zk_{xx}, \qquad \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\theta\theta}^0 + zk_{\theta\theta},\\
&\varepsilon_{x\theta} = \frac{(\gamma_{x\theta} + zk_{x\theta})}{2}, \qquad \varepsilon_{xz} = \frac{\gamma_{xz}}{2}, \qquad \varepsilon_{\theta z} = \frac{\gamma_{\theta z}}{2}
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

در رابطه (2) می‌توان روابط (3) را نوشت:

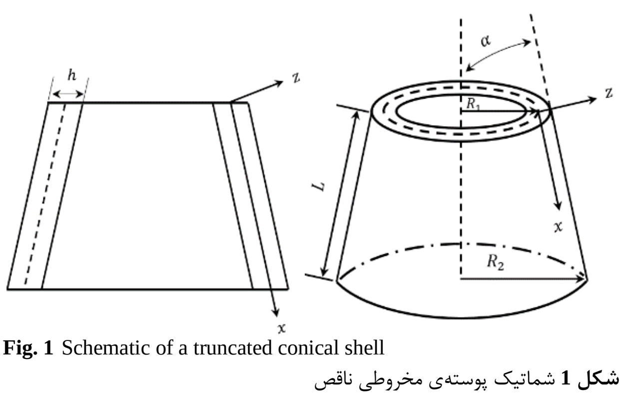


Fig. 1 Schematic of a truncated conical shell

شکل 1 شماتیک پوسته‌ی مخروطی ناقص

[6] Pseudo arc-length

$$\varepsilon_{xx}^0 = u_{,x} + \frac{w_{,x}^2}{2},$$
$$\varepsilon_{\theta\theta}^0 = \frac{(v_{,\theta} + w\cos\alpha + u\sin\alpha)}{s} + \frac{w_{,\theta}^2}{2s^2},$$
$$\gamma_{x\theta} = \frac{(u_{,\theta} - v\sin\alpha)}{s} + v_{,x} + \frac{w_{,x}w_{,\theta}}{s},$$
$$\gamma_{xz} = \psi + w_{,x}, \qquad \gamma_{\theta z} = \phi + \frac{w_{,\theta}}{s}$$
$$k_{xx} = \psi_{,x}, \qquad k_{\theta\theta} = \frac{(\phi_{,\theta} + \psi\sin\alpha)}{s},$$
$$k_{x\theta} = \frac{(\psi_{,\theta} - \phi\sin\alpha)}{s} + \phi_{,x} \tag{3}$$

که s شعاع مخروط در طول دلخواه x بوده و با رابطه‌ی (4) تعیین می‌شود.

$$s = R_1 + x\sin\alpha \tag{4}$$

مؤلفه‌های تنسور تنش کلاسیک (σ) با استفاده از رابطه‌ی (5) به‌دست می‌آیند.

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \tag{5}$$

با جای‌گذاری مؤلفه‌های کرنش از رابطه‌ی (3) در رابطه‌ی (5)، روابط (6) بدست می‌آیند:

$$\sigma_{xx} = (\lambda + 2\mu)(\varepsilon_{xx}^0 + zk_{xx}) + \lambda(\varepsilon_{\theta\theta}^0 + zk_{\theta\theta}),$$
$$\sigma_{\theta\theta} = (\lambda + 2\mu)(\varepsilon_{\theta\theta}^0 + zk_{\theta\theta}) + \lambda(\varepsilon_{xx}^0 + zk_{xx}),$$
$$\sigma_{x\theta} = \sigma_{\theta x} = \mu(\gamma_{x\theta} + zk_{x\theta}),$$
$$\sigma_{xz} = k_s\mu\gamma_{xz}, \qquad \sigma_{yz} = k_s\mu\gamma_{yz} \tag{6}$$

که k_s در رابطه‌ی (6) بیانگر ضریب تصحیح برشی است و برابر 5/6 در نظر گرفته شده است. همچنین λ و μ ثابت‌های کلاسیک لامه هستند که با استفاده از مدول الاستیسیته (E) و ضریب پوآسون (ν) با رابطه‌ی (7) تعریف می‌شوند.

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1-\nu^2)}, \qquad \mu = \frac{E}{1+\nu} \tag{7}$$

معادلات حاکم و شرایط مرزی متناظر با آن‌ها را می‌توان با استفاده از اصل کار مجازی به‌دست آورد. بر اساس اصل کار مجازی می‌توان نوشت:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta\Pi_T - \delta\Pi_s + \delta\Pi_P)dt = 0 \tag{8}$$

که $\delta\Pi_T$، $\delta\Pi_s$ و $\delta\Pi_P$ به‌ترتیب بیانگر تغییرات مجازی انرژی جنبشی، انرژی کرنشی و کار انجام شده توسط نیروهای خارجی هستند.

انرژی کرنشی پوسته از رابطه‌ی (9) به‌دست می‌آید.

$$\delta\Pi_s = \int_A \{N_{xx}\delta\varepsilon_{xx}^0 + M_{xx}\delta k_{xx} + N_{\theta\theta}\delta\varepsilon_{\theta\theta}^0 + M_{\theta\theta}\delta k_{\theta\theta} + N_{x\theta}\delta\gamma_{x\theta} + M_{x\theta}\delta k_{x\theta} + Q_x\delta\gamma_{xz} + Q_\theta\gamma_{\theta z}\}dA \tag{9}$$

که نیروهای منتجه N_{ij} و گشتاورهای خمشی M_{ij} اعمال شده بر یک مقطع پوسته را می‌توان به‌صورت رابطه‌ی (10) به‌دست آورد.

$$N_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij}dz, \qquad M_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij}zdz \tag{10}$$

با جای‌گذاری روابط (6) در رابطه‌ی (10) و در نظر گرفتن پارامترهای معرفی شده در رابطه‌ی (11):

$$\{A_{11}, B_{11}, D_{11}\} = \int_{-h/2}^{h/2} (\lambda + 2\mu)\{1, z, z^2\}dz,$$
$$\{A_{12}, B_{12}, D_{12}\} = \int_{-h/2}^{h/2} \lambda\{1, z, z^2\}dz,$$
$$\{A_{55}, B_{55}, D_{55}\} = \int_{-h/2}^{h/2} \mu\{1, z, z^2\}dz \tag{11}$$

نیروها و گشتاورهای منتجه‌ی ظاهر شده در رابطه‌ی (9) را می‌توان توسط رابطه‌ی (12) تعریف کرد.

$$N_{xx} = A_{11}\varepsilon_{xx}^0 + B_{11}k_{xx} + A_{12}\varepsilon_{\theta\theta}^0 + B_{12}k_{\theta\theta},$$
$$N_{\theta\theta} = A_{11}\varepsilon_{\theta\theta}^0 + B_{11}k_{\theta\theta} + A_{12}\varepsilon_{xx}^0 + B_{12}k_{xx},$$
$$M_{xx} = B_{11}\varepsilon_{xx}^0 + D_{11}k_{xx} + B_{12}\varepsilon_{\theta\theta}^0 + D_{12}k_{\theta\theta},$$
$$M_{\theta\theta} = B_{11}\varepsilon_{\theta\theta}^0 + D_{11}k_{\theta\theta} + B_{12}\varepsilon_{xx}^0 + D_{12}k_{xx},$$
$$N_{x\theta} = A_{55}\gamma_{x\theta} + B_{55}k_{x\theta}, \qquad M_{x\theta} = B_{55}\gamma_{x\theta} + D_{55}k_{x\theta},$$
$$Q_x = k_sA_{55}\gamma_{xz}, \qquad Q_\theta = k_sA_{55}\gamma_{\theta z} \tag{12}$$

انرژی جنبشی پوسته بر اساس تئوری مرتبه اول برشی را نیز می‌توان به صورت رابطه‌ی (13) بیان نمود.

$$\Pi_T = \frac{1}{2}\int_A \int_{-h/2}^{h/2} \rho\left\{(u_{,t} + z\psi_{,t})^2 + (v_{,t} + z\phi_{,t})^2 + w_{,t}^2\right\}zdA = \frac{1}{2}\int_A \{I_0u_{,t}^2 + 2I_1u_{,t}\psi_{,t} + I_2\psi_{,t}^2 + I_0v_{,t}^2 + 2I_1v_{,t}\phi_{,t} + I_2\phi_{,t}^2 + I_0w_{,t}^2\}dA \tag{13}$$

که:

$$\{I_0, I_1, I_2\} = \int_{-h/2}^{h/2} \rho\{1, z, z^2\}dz \tag{14}$$

همچنین کار خارجی ناشی از بارهای f_x، f_θ و f_z برابر است با:

$$\Pi_P = \int_A \{f_xu + f_\theta v + f_zw\}dA \tag{15}$$

با قرار دادن روابط (9)، (13) و (15) در رابطه‌ی (8)، معادلات غیرخطی حاکم به‌صورت روابط (16-الف)-(16-ث) به‌دست می‌آیند.

$$N_{xx,x} + \frac{N_{x\theta,\theta}}{s} + f_x = I_0u_{,tt} + I_1\psi_{,tt} \tag{16- الف}$$
$$N_{x\theta,x} + \frac{N_{\theta\theta,\theta}}{s} + \frac{Q_\theta}{s} + f_\theta = I_0v_{,tt} + I_1\phi_{,tt} \tag{16- ب}$$
$$Q_{x,x} + \frac{Q_{\theta,\theta}}{s} - \frac{N_{\theta\theta}}{s} + (N_{xx}w_{,x})_{,x} + \left(\frac{N_{x\theta}w_{,\theta}}{s}\right)_{,x} + \left(\frac{N_{x\theta}w_{,x}}{s}\right)_{,\theta} + \left(\frac{N_{\theta\theta}w_{,\theta}}{s^2}\right)_{,\theta} + f_z = I_0w_{,tt} \tag{16- پ}$$
$$M_{xx,x} + \frac{M_{x\theta,\theta}}{s} - Q_x = I_2\psi_{,tt} + I_1u_{,tt} \tag{16- ت}$$
$$M_{x\theta,x} + \frac{M_{\theta\theta,\theta}}{s} - Q_\theta = I_2\phi_{,tt} + I_1v_{,tt} \tag{16- ث}$$

همچنین شرایط مرزی به صورت روابط (16-الف)-(16-ث) حاصل می‌شوند.

$$\delta u = 0, \qquad N_{xx}n_x + N_{x\theta}n_\theta = 0 \tag{17- الف}$$
$$\delta v = 0, \qquad N_{x\theta}n_x + N_{\theta\theta}n_\theta = 0 \tag{17- ب}$$
$$\delta w = 0, \qquad \left(Q_x + N_{xx}w_{,x} + \frac{N_{x\theta}w_{,\theta}}{R}\right)n_x + (Q_\theta + \frac{N_{\theta\theta}w_{,\theta}}{R} + N_{x\theta}w_{,x})n_\theta = 0 \tag{17- پ}$$
$$\delta\psi = 0, \qquad M_{xx}n_x + M_{x\theta}n_\theta = 0 \tag{17- ت}$$
$$\delta\phi = 0, \qquad M_{x\theta}n_x + M_{\theta\theta}n_\theta = 0 \tag{17- ث}$$

برای به‌دست آوردن معادلات حاکم بر حسب مؤلفه‌های جابجایی، کافی است نیروها و گشتاورهای به‌دست آمده را در روابط (17) جای‌گذاری نمود. با توجه به این‌که پوسته ایزوتروپیک در نظر گرفته شده است، ضرایب B_{11}، B_{12}، B_{55} و I_1 برابر صفر خواهند بود، همچنین نیروهای خارجی f_x، f_θ و f_z در ارتعاشات غیرخطی آزاد برابر صفر فرض می‌شوند. بنابراین معادلات حاکم را برحسب مؤلفه‌های جابجایی می‌توان به‌صورت روابط (18) نوشت.

$$K_{11}u + K_{12}v + K_{13}w + K_{14}\psi + K_{15}\phi + Z_1 = I_0u_{,tt} \tag{18-الف}$$
$$K_{21}u + K_{22}v + K_{23}w + K_{24}\psi + K_{25}\phi + Z_2 = I_0v_{,tt} \tag{18-ب}$$
$$K_{31}u + K_{32}v + K_{33}w + K_{34}\psi + K_{35}\phi + Z_3 = I_0w_{,tt} \tag{18-پ}$$

$$K_{41}u + K_{42}v + K_{43}w + K_{44}\psi + K_{45}\phi = I_2\psi_{,tt} \qquad (18\text{-ت})$$

$$K_{51}u + K_{52}v + K_{53}w + K_{54}\psi + K_{55}\phi = I_2\phi_{,tt} \qquad (18\text{-ث})$$

که در روابط (18)، روابط (19) برقرارند:

$$\begin{aligned}
K_{11} &= A_{11}\partial_{xx} + A_{12}\left(\frac{\partial_x \sin\alpha}{s} - \frac{\sin^2\alpha}{s^2}\right) + \frac{A_{55}\partial_{\theta\theta}}{s^2},\\
K_{12} &= \frac{(A_{55}+A_{12})\partial_{x\theta}}{s} - \frac{(A_{12}\sin\alpha + A_{55})\partial_\theta \sin\alpha}{s^2},\\
K_{13} &= A_{12}\left(\frac{\partial_{,x}\cos\alpha}{s} - \frac{\cos\alpha\sin\alpha}{s^2}\right),\\
K_{21} &= \frac{A_{55}\partial_{x\theta}}{s} + \frac{A_{12}\partial_{x\theta}}{s} + \frac{(A_{11}-A_{55})\partial_\theta \sin\alpha}{s^2},\\
K_{22} &= -A_{55}\left(\frac{\partial_x \sin\alpha}{s} - \frac{\sin^2\alpha}{s^2}\right) + A_{55}\partial_{xx} + \frac{A_{11}\partial_{\theta\theta}}{s^2},\\
K_{23} &= \frac{A_{11}\partial_\theta\cos\alpha}{s^2} + \frac{k_s A_{55}\partial_\theta}{s^2},\\
K_{25} &= \frac{k_s A_{55}}{s}, \qquad K_{31} = -\frac{A_{12}\partial_x}{s} - \frac{A_{11}\sin\alpha}{s^2},\\
K_{32} &= \frac{A_{11}\partial_\theta}{s^2}, \qquad K_{34} = k_s A_{55}\partial_x, \qquad K_{35} = \frac{k_s A_{55}\partial_\theta}{s}\\
K_{33} &= k_s A_{55}\partial_{xx} + \frac{k_s A_{55}\partial_{\theta\theta}}{s^2} + \frac{A_{11}\cos\alpha}{s^2},\\
K_{14} &= K_{15} = K_{24} = K_{41} = K_{42} = K_{51} = K_{52} = 0
\end{aligned} \qquad (19)$$

که ∂_{xx}، $\partial_{\theta\theta}$ و $\partial_{x\theta}$ به ترتیب معرف $\partial^2/\partial x^2$، $\partial^2/\partial\theta^2$ و $\partial^2/\partial x\partial\theta$ می‌باشند. همچنین بخش غیرخطی معادلات Z_1، Z_2 و Z_3 در پیوست الف آورده شده است.

شرایط مرزی در نظر گرفته شده برای حالت‌های گیردار-گیردار، ساده-گیردار و ساده-ساده عبارت است از:

گیردار-گیردار:

$$u = v = w = \psi = \phi = 0; \quad x = 0, L \qquad (20)$$

ساده-ساده:

$$N_{xx} = v = w = M_{xx} = \phi = 0; \quad x = 0, L \qquad (21)$$

ساده-گیردار:

$$\begin{aligned}
&N_{xx} = v = w = M_{xx} = \phi = 0; \quad x = 0\\
&u = v = w = \psi = \phi = 0; \quad x = 0, L
\end{aligned} \qquad (22)$$

که:

$$\begin{aligned}
N_{xx} &= \left[A_{11}u_{,x} + \frac{A_{12}u\sin\alpha}{s}\right] + \left[\frac{A_{12}v_{,\theta}}{s}\right] + \left[\frac{A_{12}w\cos\alpha}{s}\right]\\
M_{xx} &= \left[D_{11}\psi_{,x} + \frac{D_{12}\psi\sin\alpha}{s}\right] + \left[\frac{D_{12}\phi_{,\theta}}{s}\right]
\end{aligned} \qquad (23)$$

2-1- بی‌بعدسازی معادلات و شرایط مرزی

با در نظر گرفتن پارامترهای بی‌بعد به صورت رابطه‌ی (24):

$$\begin{aligned}
&\zeta = \frac{x}{L}, \qquad (\bar{u},\bar{v},\bar{w}) = \frac{(u,v,w)}{h}, \qquad \eta = \frac{L}{h}\\
&(\bar{\psi},\bar{\phi}) = (\psi,\phi), \quad \kappa = \frac{R_2}{L}, \qquad \tau = \frac{t}{L}\sqrt{\frac{A_{11}}{I_0}},\\
&(a_{11},a_{12},a_{55}) = \frac{(A_{11},A_{12},A_{55})}{A_{11}}, \quad \bar{s} = \kappa + \zeta\sin\alpha,\\
&(d_{11},d_{12},d_{55}) = \frac{(D_{11},D_{12},D_{55})}{A_{11}h^2},\\
&\bar{I}_0 = \frac{I_0}{I_0}, \qquad \bar{I}_2 = \frac{I_0}{I_0 h^2}
\end{aligned} \qquad (24)$$

فرم بی‌بعد معادلات حاکم را می‌توان به صورت روابط (25-الف)-(25-ث) نوشت.

$$\bar{K}_{11}\bar{u} + \bar{K}_{12}\bar{v} + \bar{K}_{13}\bar{w} + \bar{K}_{14}\bar{\psi} + \bar{K}_{15}\bar{\phi} + \bar{Z}_1 = \bar{I}_0\bar{u}_{,\tau\tau} \qquad (25\text{- الف})$$

$$\bar{K}_{21}\bar{u} + \bar{K}_{22}\bar{v} + \bar{K}_{23}\bar{w} + \bar{K}_{24}\bar{\psi} + \bar{K}_{25}\bar{\phi} + \bar{Z}_2 = \bar{I}_0\bar{v}_{,\tau\tau} \qquad (25\text{- ب})$$

$$\bar{K}_{31}\bar{u} + \bar{K}_{32}\bar{v} + \bar{K}_{33}\bar{w} + \bar{K}_{34}\bar{\psi} + \bar{K}_{35}\bar{\phi} + \bar{Z}_3 = \bar{I}_0 w_{,\tau\tau} \qquad (25\text{- پ})$$

$$\bar{K}_{41}\bar{u} + \bar{K}_{42}\bar{v} + \bar{K}_{43}\bar{w} + \bar{K}_{44}\bar{\psi} + \bar{K}_{45}\bar{\phi} = \bar{I}_2\bar{\psi}_{,\tau\tau} \qquad (25\text{- ت})$$

$$\bar{K}_{51}\bar{u} + \bar{K}_{52}\bar{v} + \bar{K}_{53}\bar{w} + \bar{K}_{54}\bar{\psi} + \bar{K}_{55}\bar{\phi} = \bar{I}_2\bar{\phi}_{,\tau\tau} \qquad (25\text{- ث})$$

که مقادیر $\bar{K}_{ij}$ و $\bar{Z}_i$ در پیوست ب تعریف شده است.

3- روند حل عددی معادلات

برای حل عددی معادلات ارتعاشی، از روش تربیع دیفرانسیلی تعمیم‌یافته، [23] برای گسسته‌سازی معادلات استفاده شده است. به‌منظور شبکه‌بندی نقاط در راستای ζ از رابطه‌ی چبیشو-گاوس-لوباتو[1] استفاده شده است.

$$\zeta = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{i-1}{n_g - 1}\pi\right), \qquad i = 1,2,\ldots,n_g \qquad (26)$$

در راستای θ نیز رابطه‌ی (27) مورد استفاده قرار گرفته است.

$$\theta_j = \frac{2\pi j}{m_g}, \qquad j = 1,2,\ldots,m_g \qquad (27)$$

اگر فرض شود $f(\zeta,\theta)$ یک تابع دو متغیره‌ی تعریف شده بر روی نقاط $[\zeta_1,\ldots,\zeta_{n_g}]$ و $[\theta_1,\ldots,\theta_{m_g}]$ باشد. همچنین $\mathrm{D}_\zeta^{(1)}$ و $\mathrm{D}_\theta^{(1)}$ به ترتیب معرف ماتریس‌های ضرایب وزنی در راستای ζ و θ هستند که اجزای آن‌ها در پیوست ت آورده شده است. در این صورت مشتق مرتبه دوم f نسبت به ζ و θ را می‌توان با رابطه‌ی (28) تقریب زد.

$$f_{,\zeta\theta} = \left(\mathrm{D}_\theta^{(1)} \otimes \mathrm{D}_\zeta^{(1)}\right)\mathrm{f}^v, \qquad (28)$$

که علامت $\otimes$ معرف ضرب تنسوری کرونکر[2] و f^v بیانگر فرم برداری تابع دومتغیره‌ی f می‌باشد.

$$f^v = \left[f(\zeta_1,\theta_1),\ldots,f\left(\zeta_{n_g},\theta_1\right),\ldots,\left(\zeta_1,\theta_{m_g}\right),\ldots,f\left(\zeta_{n_g},\theta_{m_g}\right)\right] \qquad (29)$$

به طریق مشابه فرم برداری توابع جابجایی دوبعدی برابر است با:

$$\begin{aligned}
&u(\zeta,\theta) = \mathrm{U}^v, \qquad v(\zeta,\theta) = \mathrm{V}^v, \qquad w(\zeta,\theta) = \mathrm{W}^v,\\
&\psi(\zeta,\theta) = \psi^v, \qquad \phi(\zeta,\theta) = \phi^v
\end{aligned} \qquad (30)$$

بنابراین با به‌کارگیری روابط (28-30)، فرم گسسته‌ی معادلات حاکم را می‌توان به صورت رابطه‌ی (31) نوشت.

$$\mathrm{M}\ddot{\mathrm{X}} + \mathrm{K}\mathrm{X} + \mathrm{K}_{nl}(\mathrm{X}) = 0 \qquad (31)$$

$\ddot{\mathrm{X}}$ معرف مشتق دوم X نسبت به زمان و $\mathrm{X} = \{\mathrm{U}^\mathrm{T},\mathrm{V}^\mathrm{T},\mathrm{W}^\mathrm{T},\psi^\mathrm{T},\phi^\mathrm{T}\}^\mathrm{T}$ بردار متغیرهای میدان است. K و M ماتریس‌های سفتی و جرم بوده و $\mathrm{K}_{nl}(\mathrm{X})$ بیانگر بخش‌های غیرخطی ماتریس سفتی می‌باشد که در پیوست ث به آن‌ها اشاره شده است. شرایط مرزی نیز به طور مشابه به فرم گسسته در می‌آید.

برای تبدیل معادلات حرکت به دستگاه معادلات دیفرانسیل عادی از روشی موسوم به گلرکین عددی استفاده می‌گردد. به این منظور پاسخ‌های به‌دست آمده از از بخش خطی معادلات به عنوان توابع پایه مورد استفاده قرار می‌گیرند. بنابراین با فرض پاسخ هارمونیک $\mathrm{X} = \tilde{\mathrm{X}}\,\mathrm{e}^{j\omega\tau}$ و صرف‌نظر کردن از بخش‌های غیرخطی معادلات رابطه‌ی (32) حاصل می‌شود.

$$\mathrm{K}\tilde{\mathrm{X}} = \omega^2\mathrm{M}\tilde{\mathrm{X}}, \quad \tilde{\mathrm{X}} = \left\{\tilde{\mathrm{U}}^\mathrm{T},\tilde{\mathrm{V}}^\mathrm{T},\tilde{\mathrm{W}}^\mathrm{T},\tilde{\psi}^\mathrm{T},\tilde{\phi}^\mathrm{T}\right\}^\mathrm{T} \qquad (32)$$

که ω بیان‌گر فرکانس طبیعی غیرخطی است. با حل معادله‌ی (32) فرکانس‌های طبیعی خطی و بردار مودهای ارتعاشی سیستم به‌دست می‌آید. به‌منظور اعمال روش گلرکین عددی پاسخ معادله‌ی (32) به صورت رابطه‌ی (33) در نظر گرفته می‌شود.

1 Chebyshev-Gauss-Lobatto
2 Kronecker tensor product

$$\mathrm{X} = \mathrm{Bq} \tag{33}$$

که B معرف ماتریس توابع پایه‌ی گلرکین شامل m بردار ویژه‌ی اول سیستم و q بیانگر بردار مختصات تعمیم یافته است.

$$\mathrm{B}_{(5N_g)\times(5m)} = \begin{bmatrix} \mathrm{B_U} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{B_V} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{B_W} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{B_\psi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{B_\phi} \end{bmatrix},$$

$$\mathrm{q^T}_{(5m)\times 1} = \left[q_u^{(1)}, q_u^{(2)}, \dots, q_u^{(m)}, \dots, q_\phi^{(m)}, q_\phi^{(1)}, q_\phi^{(2)}, \dots, q_\phi^{(m)}\right]^{\mathrm{T}} \tag{34}$$

$$\begin{aligned} &\mathrm{B_U}\,_{N_g\times m} = \left[\widetilde{\mathrm{U}}_{N_g\times 1}^{(1)}, \dots, \widetilde{\mathrm{U}}_{N_g\times 1}^{(m)}\right], \\ &\mathrm{B_V}\,_{N_g\times m} = \left[\widetilde{\mathrm{V}}_{N_g\times 1}^{(1)}, \dots, \widetilde{\mathrm{V}}_{N_g\times 1}^{(m)}\right], \\ &\mathrm{B_W}\,_{N_g\times m} = \left[\widetilde{\mathrm{W}}_{N_g\times 1}^{(1)}, \dots, \widetilde{\mathrm{W}}_{N_g\times 1}^{(m)}\right], \\ &\mathrm{B_\psi}\,_{N_g\times m} = \left[\widetilde{\Psi}_{N_g\times 1}^{(1)}, \dots, \widetilde{\Psi}_{N_g\times 1}^{(m)}\right], \\ &\mathrm{B_\phi}\,_{N_g\times m} = \left[\widetilde{\Phi}_{N_g\times 1}^{(1)}, \dots, \widetilde{\Phi}_{N_g\times 1}^{(m)}\right] \end{aligned} \tag{35}$$

که $N_g = n_g \times m_g$. با جای‌گذاری رابطه‌ی (33) در (31):

$$\mathrm{MB\ddot{q}} + \mathrm{KBq} + \mathrm{K}_{nl}(\mathrm{Bq}) = 0 \tag{36}$$

برای آن‌که امکان ضرب رابطه‌ی (36) در توابع پایه فراهم شودنیاز به یک عملگر ماتریسی می‌باشد که توسط رابطه‌ی (37) تعریف می‌گردد.

$$\mathrm{G}_{5m\times 5N_g} = \mathrm{B^T}\begin{bmatrix} \mathrm{S}_\theta \otimes \mathrm{S}_\zeta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{S}_\theta \otimes \mathrm{S}_\zeta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{S}_\theta \otimes \mathrm{S}_\zeta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{S}_\theta \otimes \mathrm{S}_\zeta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{S}_\theta \otimes \mathrm{S}_\zeta \end{bmatrix} \tag{37}$$

که S_ζ و S_θ عملگرهای انتگرال‌گیری هستند که بر روی $[\zeta_1, \dots, \zeta_{n_g}]$ و $[\theta_1, \dots, \theta_{m_g}]$ ساخته شده و در پیوست ت تعریف شده‌اند. با ضرب عملگر G در رابطه‌ی (36) معادله دیفرانسیل معمولی وابسته به زمان ارائه شده توسط رابطه‌ی (38) حاصل می‌شود.

$$\widetilde{\mathrm{M}}\ddot{\mathrm{q}} + \widetilde{\mathrm{K}}\mathrm{q} + \widetilde{\mathrm{K}}_{nl}(\mathrm{Bq}) = 0 \tag{38}$$

که در آن:

$$\widetilde{\mathrm{M}} = \mathrm{GMB},\ \ \widetilde{\mathrm{K}} = \mathrm{GKB},\ \ \widetilde{\mathrm{K}}_{nl}(\mathrm{Bq}) = \mathrm{GK}_{nl}(\mathrm{Bq}) \tag{39}$$

با به‌کارگیری رابطه‌ی (38) تعداد درجات آزادی سیستم از $5N_g$ به $5m$ کاهش می‌یابد که این امر به‌طور قابل ملاحظه‌ای باعث کاهش مقدار و زمان انجام محاسبات می‌گردد. به‌منظور حل معادله‌ی ارائه شده در رابطه‌ی (31)، با به‌کارگیری روشی موسوم به گسسته‌سازی شبکه‌بندی متناوب، گسسته‌سازی بر روی زمان نیز انجام می‌شود که به این منظور از یک عملگر مشتق‌گیری بسیار دقیق [24] استفاده می‌گردد. با تعریف $\tau^* = \tau/T^*$ که در آن $T^* = 2\pi/\Omega^*$ و Ω^* فرکانس ارتعاشات غیرخطی است، رابطه‌ی (39) به صورت رابطه‌ی (40) در می‌آید.

$$\left(\frac{\Omega^*}{2\pi}\right)^2 \widetilde{\mathrm{M}}\ddot{\mathrm{q}} + \widetilde{\mathrm{K}}\mathrm{q} + \widetilde{\mathrm{K}}_{nl}(\mathrm{Bq}) = 0 \tag{40}$$

اگر N_t تعداد نقاط گرهی زمان باشد، شبکه‌بندی نقاط بر روی زمان را می‌توان به توسط رابطه‌ی (41) نشان داد.

$$\tau_J^* = \frac{J}{N_t},\ \ 0 < \tau_J^* \le 1, \qquad J = 1,2,\dots,N_t = 2k \tag{41}$$

فرم گسسته‌ی q بر روی زمان عبارت است از:

$$\mathrm{Q}_{5m\times N_t} = \left[\mathrm{q_U^{(1)}}_{1\times \mathrm{N_t}}, \dots, \mathrm{q_U^{(m)}}_{1\times \mathrm{N_t}}, \dots, \mathrm{q_\phi^{(1)}}_{1\times \mathrm{N_t}}, \dots, \mathrm{q_\phi^{(m)}}_{1\times \mathrm{N_t}}\right]^{\mathrm{T}} \tag{42}$$

همچنین عملگر مشتق‌گیری نسبت به زمان که با $\mathrm{D}_{\tau^*}^{()}$ معرفی می‌شود به شکل رابطه‌ی (43) تعریف می‌شود [24].

$$\begin{cases} a_{11} = 0 \\ a_{I,1} = (-1)^{I-1}\cot\dfrac{\pi(I-1)}{N_t} \\ a_{1,J} = (-1)^{N_t-J+1}\cot\dfrac{\pi(N_t-J+1)}{N_t}, \qquad I,J = 2,3,4,\dots,N_t \\ a_{I+1,J+1} = a_{I,J} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_{11} = -\dfrac{{N_t}^2}{12} - \dfrac{1}{6} \\ b_{I,1} = \dfrac{(-1)^{I-1}}{2\sin^2\frac{\pi(I-1)}{N_t}}, \qquad I,J = 2,3,4,\dots,N_t \\ b_{1,J} = \dfrac{(-1)^{N_t-J+1}}{2\sin^2\frac{\pi(N_t-J+1)}{N_t}} \\ b_{I+1,J+1} = b_{I,J} \end{cases}$$

$$\mathrm{D}_{\tau^*}^{(1)} = 2\pi[a_{I,J}], \qquad D_{\tau^*}^{(2)} = (2\pi)^2[b_{I,J}] \tag{43}$$

با استفاده از رابطه‌ی (42) و به‌کارگیری عملگرهای $\mathrm{D}_{\tau^*}^{()}$، فرم گسسته‌ی رابطه‌ی (40) به صورت رابطه‌ی (44) در می‌آید.

$$\left(\frac{\Omega^*}{2\pi}\right)^2 \widetilde{\mathrm{M}}\mathrm{Q}{\mathrm{D}_{\tau^*}^{(2)}}^{\mathrm{T}} + \widetilde{\mathrm{K}}\mathrm{Q} + \widetilde{\mathrm{K}}_{nl}(\mathrm{BQ}) = 0 \tag{44}$$

با توجه به رابطه‌ای (45) که به منظور تشکیل فرم برداری یک رابطه به‌کار می‌رود [25]:

$$\lceil \mathrm{AXB} \rceil = (\mathrm{B^T} \otimes \mathrm{A})\lceil \mathrm{X} \rceil \tag{45}$$

رابطه‌ی (44) را می‌توان به شکل رابطه‌ی (46) بازنویسی نمود.

$$\left(\left(\frac{\Omega^*}{2\pi}\right)^2 \left(\mathrm{D}_{\tau^*}^{(2)} \otimes \widetilde{\mathrm{M}}\right) + \left(\mathrm{I}_{\tau^*} \otimes \widetilde{\mathrm{K}}\right)\right)\lceil \mathrm{Q} \rceil + \left\lceil \widetilde{\mathrm{K}}_{nl}(\mathrm{BQ}) \right\rceil = 0 \tag{46}$$

که I_{τ^*} ماتریس یکه‌ای با ابعاد $N_t \times N_t$ است.

در نهایت به منظور حل معادله‌ی (46) و تعیین مجهولات Q که معرف بردار جابجایی است و نیز به‌دست آوردن پاسخ فرکانسی از روش طول-کمان شده است. در ادامه نحوه‌ی عملکرد روش طول-کمان [26] به طور مختصر توضیح داده شده است.

به‌منظور حل دستگاه معادلات غیرخطی $G(u,\lambda)$ به ازای مقادیر مختلف پارامتر λ روش‌های مختلفی همچون روش نیوتن-رافسون و نیز روش تعقیب (کنترل) ساده وجود دارد. در این‌جا $u \in R^N$، λ یک اسکالر حقیقی و $G: R^{N+1} \to R^N$ می‌باشد. یکی از ضعف‌های روش‌های ذکر شده برای حل دستگاه معادلات غیرخطی در نقاطی از (u,λ) است که ژاکوبین G یا $G_{,u}$ منفرد باشد. منفرد بودن $G_{,u}$ می‌تواند در جاهایی رخ دهد که اصطلاحاً منحنی در آن نقاط دارای تاخوردگی یا بازگشت ناگهانی از مسیر اولیه باشد. در روش طول کمان برای غلبه بر این مشکل پارامترهای مسأله مجددا تعریف می‌شوند. به این منظور پارامتر تقریبی طول کمان s معرفی می‌شود به طوری که u و λ وابسته به s می‌باشند. همچنین بردار جدیدی به صورت $x = (u,\lambda)$ تعریف می‌شوند که وابسته به s است. با انجام این کار می‌توان دستگاه معادلات پارامتری جدیدی به صورت $F(x,s) = 0$ با پارامتر s تشکیل داد. برای به‌دست آوردن پاسخ این دستگاه معادلات لازم است که ژاکوبین F یا $F_{,x}$ غیرمنفرد باشد. ثابت می‌شود که $F_{,x}$ در نقاط تاخوردگی منحنی غیرمنفرد می‌باشد.

4- نتایج عددی

در این بخش با ارائه‌ی نتایج عددی پاسخ فرکانسی پوسته‌ی مخروطی ناقص در شرایط مرزی گیردار-گیردار، ساده-گیردار و ساده-ساده مورد بررسی قرار گرفته است. خواص مکانیکی پوسته‌ی مورد بررسی عبارت است از $E = 211 \times 10^9\ (\mathrm{Nm^{-2}})$، $\nu = 0.3$ و $\rho = 7800\ (\mathrm{kgm^{-3}})$ که E، ν و ρ به‌ترتیب معرف مدول الاستیسیته، ضریب پوآسون و چگالی می‌باشند. به منظور بررسی صحت نتایج، پاسخ‌های ارائه شده در مقاله‌ی حاضر در جدول 1 با یکی از کارهای موجود در دبیره مقایسه شده است و ملاحظه می‌شود که نتایج ارائه شده در تحقیق حاضر با دقت مناسبی با نتایج مرجع [21] مطابقت دارند.

از آنجایی مطالعات انجام شده بر روی ارتعاشات غیرخطی پوسته‌های مخروطی بسیار اندک است، لذا برای حصول اطمینان از روش و نتایج غیرخطی ارائه شده، نتایج مقاله‌ی حاضر با در نظر گرفتن نیم‌زاویه‌ی رأس مخروط ناقص برابر صفر درجه ($\alpha = 0$) با نتایج ارائه شده توسط شن [27] و نیز راجو و رائو [28] برای یک پوسته‌ی استوانه‌ای مقایسه شده است. لازم به ذکر است در صورتی که نیم زاویه‌ی رأس مخروط برابر صفر در نظر گرفته شود، مخروط ناقص به استوانه تبدیل خواهد شد. به این منظور یک پوسته‌ی مخروطی با مشخصات $L = 4\ \mathrm{m}$، $R_1 = R_2 = 0.254\ \mathrm{m}$، $h = 2.54\ \mathrm{mm}$، $E = 200\ \mathrm{GPa}$، $\nu = 0.3$ و $\rho = 7800\ \mathrm{kgm^{-3}}$ در نظر گرفته شده است.

نتایج برای تعداد موج‌های طولی $m = 1$ و تعداد موج‌های محیطی در سه حالت $n = 2{,}3$ به‌دست آمده‌اند. نتایج ارائه شده در جدول 2 نشان می‌دهد که پاسخ‌های به‌دست آمده از تحقیق حاضر با دقت خوبی با مراجع مذکور مطابقت دارد.

4-1- تحلیل پاسخ فرکانسی

در این بخش پاسخ فرکانسی ارتعاشات غیرخطی پوسته‌هایی مخروطی ایزوتروپیک به ازای متغیرهای مختلف از قبیل نسبت شعاع‌های کوچک به شعاع بزرگ، نسبت ضخامت به شعاع، نیم زاویه‌ی رأس مخروط، برای سه شرط مرزی گیردار-گیردار، ساده-گیردار و ساده-ساده مورد بررسی قرار گرفته است.

جدول 1 مقایسه‌ی فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد $(\Omega_l = \omega_l R_2\sqrt{\rho(1-\nu^2)/E})$ به ازای مودهای ارتعاشی گوناگون و در شرایط مرزی مختلف:
$(E = 211\ \mathrm{GPa}, \nu = 0.3, \rho = 7800\ \mathrm{kgm^{-3}}, R_2 = 1\ \mathrm{m}, h/R_2 = 0.01, \alpha = 45\,°, L\,sin\,\alpha/R_2 = 0.5)$

Table 1 Comparison of dimensionless fundamental natural frequencies $(\Omega_l = \omega_l R_2\sqrt{\rho(1-\nu^2)/E})$ for vibration modes and boundary conditions $(E = 211\ \mathrm{GPa}, \nu = 0.3, \rho = 7800\ \mathrm{kgm^{-3}}, R_2 = 1\ \mathrm{m}, h/R_2 = 0.01, \alpha = 45\,°, L\sin\alpha/R_2 = 0.5)$

مود	گیردار-گیردار: مقاله‌ی حاضر	گیردار-گیردار: مرجع [21]	ساده-گیردار: مقاله‌ی حاضر	ساده-گیردار: مرجع [21]	ساده-ساده: مقاله‌ی حاضر	ساده-ساده: مرجع [21]
1	0.3971	0.3970	0.3751	0.3458	0.2230	0.2233
2	0.4095	0.4095	0.3837	0.3598	0.3255	0.3248
3	0.4151	0.4151	0.3999	0.3657	0.3353	0.3348
4	0.4569	0.4570	0.4326	0.4102	0.3529	0.3524
5	0.4575	0.4577	0.4488	0.4164	0.3951	0.3947
6	0.5179	0.5189	0.5137	0.4715	0.4036	0.4033
7	0.5429	0.5430	0.5249	0.5203	0.4683	0.4684

جدول 2 مقایسه‌ی نسبت فرکانس غیرخطی به خطی (ω_{NL}/ω_L) برای یک پوسته‌ی مخروطی ایزوتروپیک
$(\alpha = 0, L = 0.4\ \mathrm{m}, R = 0.254\ \mathrm{m}, h = 2.54\ \mathrm{mm}, E = 200\ \mathrm{GPa}, \nu = 0.3, \rho = 7800\ \mathrm{kgm^{-3}})$

Table 2 Comparison of nonlinear to linear frequency ratio (ω_{NL}/ω_L) for an isotropic conical shell $(\alpha = 0, L = 0.4\ \mathrm{m}, R = 0.254\ \mathrm{m}, h = 2.54\ \mathrm{mm}, E = 200\ \mathrm{GPa}, \nu = 0.3, \rho = 7800\ \mathrm{kg/m^3})$

$\frac{W_{max}}{h}$	$(m,n) = (1,2)$: مقاله‌ی حاضر	$(m,n) = (1,2)$: مرجع [27]	$(m,n) = (1,2)$: مرجع [28]	$(m,n) = (1,3)$: مقاله‌ی حاضر	$(m,n) = (1,3)$: مرجع [27]	$(m,n) = (1,3)$: مرجع [28]
1.0	1.0010	1.0008	1.0006	1.0063	1.0072	1.0060
2.0	1.0034	1.0029	1.0024	1.0250	1.0342	1.0235
3.0	1.0095	1.0063	1.0053	1.0552	1.0731	1.0516

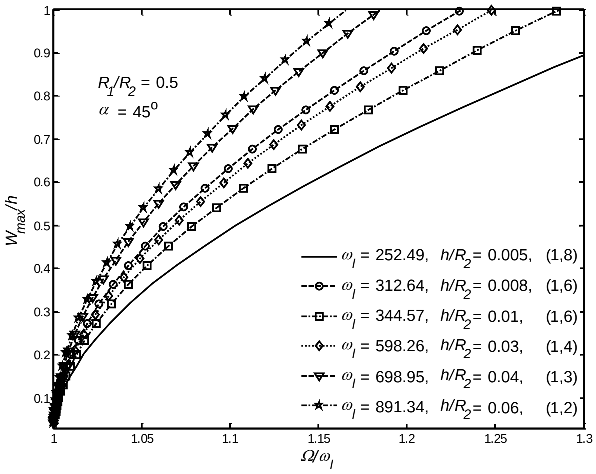
در شکل 2 پاسخ فرکانسی ارتعاشات غیرخطی به ازای نسبت‌های مختلف ضخامت به شعاع بزرگ مخروط (h/R_2) در سه شرط مرزی گیردار-گیردار، ساده-گیردار و ساده-ساده بررسی شده است. نتایج نشان می‌دهند که با افزایش نسبت h/R_2 شکل مود ارتعاشی خطی و تعداد موج‌های محیطی ممکن است تغییر کنند. به‌طوری که در شرط مرزی گیردار-گیردار با افزایش نسبت h/R_2 از 0.005 به 0.008 تعداد موج‌های محیطی به ترتیب برابر 8 و 6 می‌باشد و در این محدوده اثرات سخت‌شوندگی[1] کاهش می‌یابد. هم‌چنین با افزایش h/R_2 از 0.008 به 0.01 تعداد موج‌های محیطی برابر 6 بوده و ثابت باقی می‌ماند و افزایش در اثرات سخت‌شوندگی مشاهده می‌شود. به‌طور کلی می‌توان نتیجه گرفت که چنانچه با افزایش نسبت h/R_2 شکل مود ارتعاشی خطی پوسته تغییر کند، اثرات سخت‌شوندگی کاهش می‌یابد. اما چنانچه شکل مود ارتعاشی ثابت و بدون تغییر باقی بماند، افزایش نسبت h/R_2 با افزایش اثرات سخت‌شوندگی همراه است.

در شکل 3 تأثیر نسبت شعاع‌های مختلف (R_1/R_2) بر ارتعاشات غیرخطی پوسته‌ی مخروطی در شرایط مرزی مختلف بررسی شده است. لازم به ذکر است که R_1 شعاع کوچک و R_2 شعاع بزرگ مخروط ناقص می‌باشد. نتایج نشان می‌دهند که در تمامی شرایط مرزی به استثناء تکیه‌گاه ساده-ساده چنان‌چه با افزایش نسبت R_1/R_2 شکل مود ارتعاشی خطی و تعداد موج‌های محیطی ثابت باقی بماند اثرات سخت‌شوندگی در پوسته کم می‌شود اما در صورتی که افزایش R_1/R_2 با تغییر تعداد موج‌های محیطی همراه باشد اثرات سخت‌شوندگی افزایش می‌یابد. هم‌چنین ملاحظی می‌شود که در تکیه‌گاه ساده-ساده مود ارتعاشی ثابت و به صورت متقارن محوری بوده و افزایش نسبت R_1/R_2 افزایش اثرات سخت‌شوندگی را به دنبال دارد.

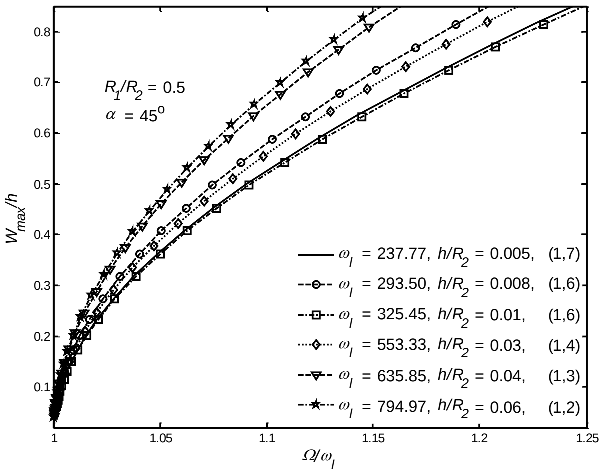
شکل 4 پاسخ فرکانسی ارتعاشات غیرخطی را برای مقادیر مختلف نیم زاویه‌ی رأس مخروط (α) و در شرایط مرزی متفاوت نشان می‌دهد. با افزایش زاویه‌ی α از 30 درجه تا 70 در جه مشاهده می‌شود که اثرات سخت‌شوندگی در شرایط مرزی گیردار-گیردار و ساده-گیردار به طور متناوب ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد. در تکیه‌گاه ساده-ساده شکل مود ارتعاشی غالب، متقارن محوری بوده و با افزایش α، اثرات سخت‌شوندگی به طور پیوسته زیاد می‌شود.

در شکل 5 تأثیر تغییر شرایط مرزی بر پاسخ فرکانسی ارتعاشات غیرخطی پوسته‌ی مخروطی بررسی شده است. می‌توان نتیجه گرفت که اثرات سخت شوندگی به ترتیب در تکیه‌گاه‌های گیردار-گیردا، ساده-گیردار و

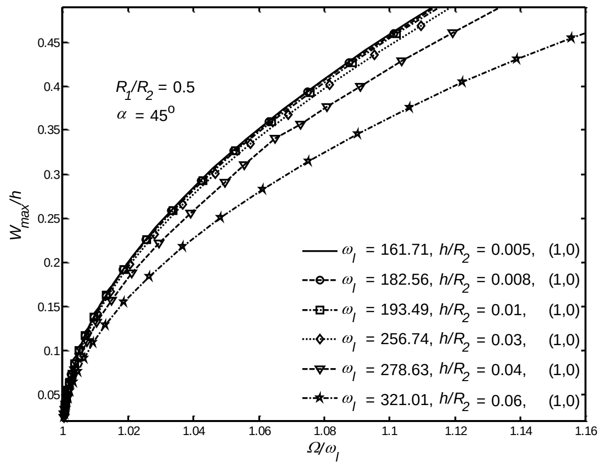
[1] Hardening effects



(a) (الف)



(b) (ب)



(c) (پ)

Fig. 2 Non-dimensional maximum deflection of conical shell versus frequency ratio for different ratio of (h/R_2), a) fully clamped, b) simply supported-clamped, c) fully simply supported

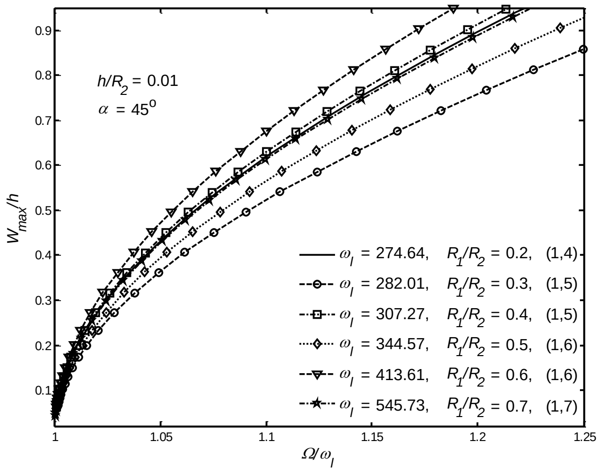
شکل 2 پاسخ فرکانسی ارتعاشات غیرخطی برای نسبت‌های متفاوت ضخامت به شعاع بزرگ مخروط (h/R_2): الف) گیردار-گیردار ج) ساده-گیردار د) ساده-ساده

ساده-ساده روند افزایش را طی می‌کند، به‌گونه‌ای که بیشترین اثرات سخت‌شوندگی در تکیه‌گاه ساده-ساده و کمترین آن در تکیه‌گاه گیردار-گیردار دیده می‌شود.

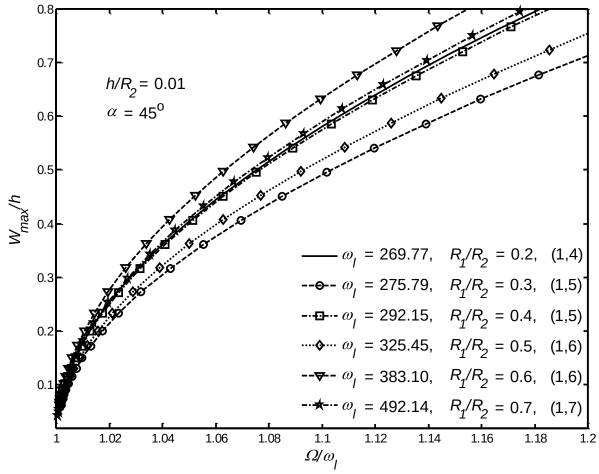
شکل 6 نیز نمونه‌هایی از شکل مودهای ارتعاشی یک پوسته‌ی مخروطی ناقص را به ازای تعداد موج‌های محیطی (n) مختلف نشان می‌دهد.

5- نتیجه‌گیری

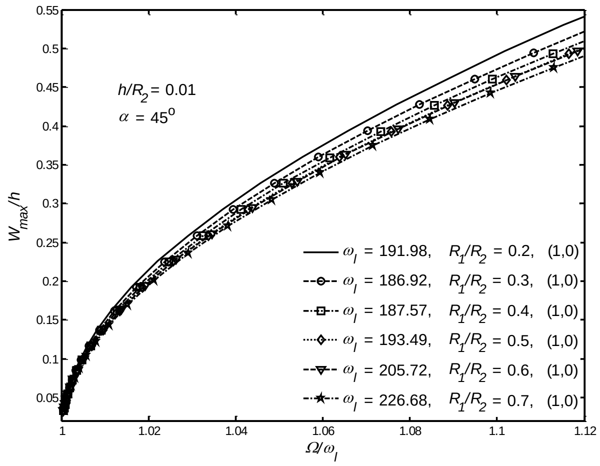
در این مقاله ارتعاشات غیرخطی پوسته‌های مخروطی ناقص مورد بررسی قرار گرفته است. به‌منظور استخراج معادلات حاکم و شرایط مرزی، بر اساس



(a) (الف)



(b) (ب)



(c) (پ)

Fig. 3 Non-dimensional maximum deflection of conical shell versus frequency ratio for different ratio of (R_1/R_2), a) fully clamped, b) simply supported-clamped, c) fully simply supported

شکل 3 پاسخ فرکانسی ارتعاشات غیرخطی برای نسبت‌های شعاع‌های متفاوت (R_1/R_2): الف) گیردار-گیردار ج) ساده-گیردار د) ساده-ساده

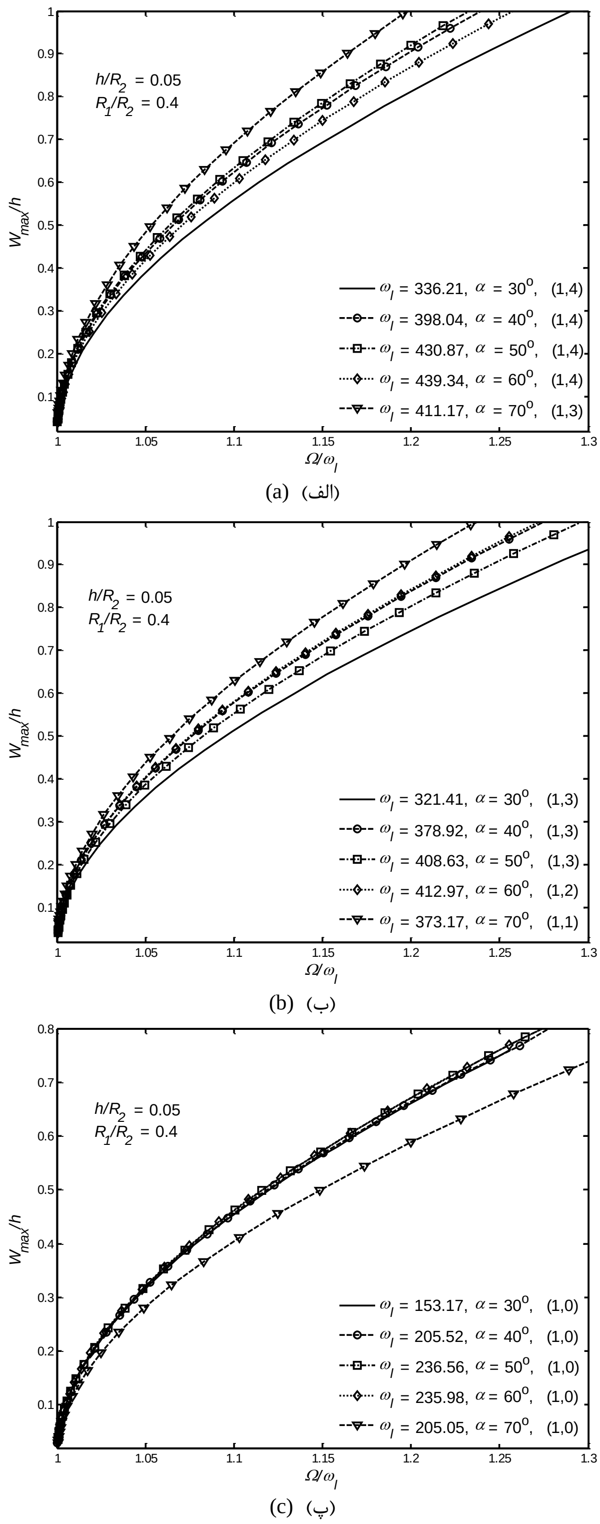


Fig. 4 Non-dimensional maximum deflection of conical shell versus frequency ratio for different (h/R_2) ratio, a) fully clamped, b) simply supported-clamped, c) fully simply supported

شکل 4 پاسخ فرکانسی ارتعاشات غیرخطی برای نسبت‌های متفاوت ضخامت به شعاع بزرگ مخروط (h/R_2): الف) گیردار-گیردار ج) ساده-گیردار د) ساده-ساده

تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول پوسته‌ی دانل، اصل جابجایی‌های مجازی مورد استفاده قرار گرفت. با به‌کارگیری روش‌های تربیع دیفرانسیلی تعمیم‌یافته وگلرکین عددی گسسته‌سازی در حوزه‌ی مکان و با استفاده از روش گسسته‌سازی شبکه‌بندی متناوب گسسته سازی بر روی زمان صورت

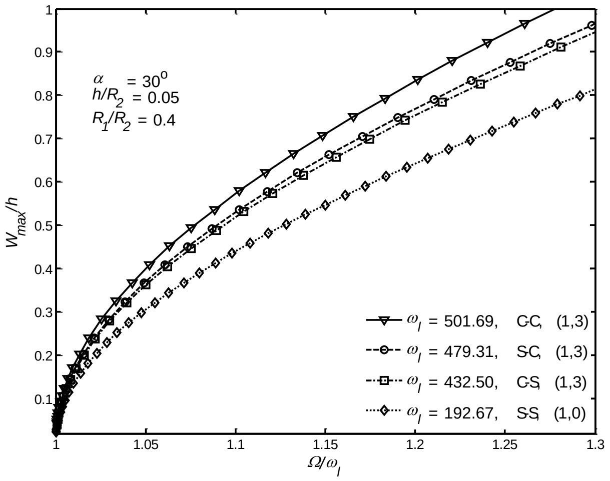


Fig. 5 Non-dimensional maximum deflection of conical shell versus frequency ratio for boundary conditions

شکل 5 پاسخ فرکانسی ارتعاشات غیرخطی در شرایط مرزی مختلف

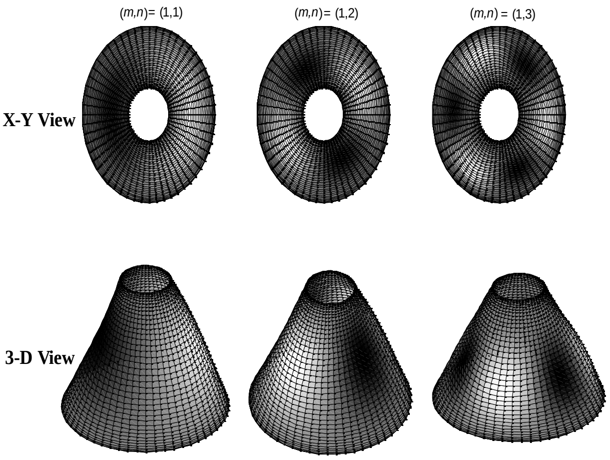


Fig. 6 Mode shapes of the conical shell for different circumferential (n) wave numbers

شکل 6 شکل مودهای ارتعاشی پوسته‌ی مخروطی به‌ازای تعداد موج‌های محیطی (n) مختلف

پذیرفت و در نهایت پاسخ فرکانسی ارتعاشات غیرخطی پوسته‌های مخروطی با استفاده از روش طول-کمان به دست آمد. با ارائه‌ی نتایج عددی اثرات عواملی هم‌چون نسبت ضخامت به شعاع، نست شعاع‌های کوچک به بزرگ، زاویه‌ی رأس مخروط و شرایط مرزی مختلف بر ارتعاشات غیرخطی پوسته‌های مخروطی مورد بررسی قرار گرفت. مشاهده گردید که تغییر شکل مود ارتعاشی غالب پوسته، تأثیر قابل توجهی بر اثرات سخت‌شوندگی و ارتعاشات غیرخطی دارد. هم‌چنین از مهم‌ترین نتایج به‌دست آمده می‌توان به موارد زیر اشاره نمود.

- با افزایش نسبت ضخامت به شعاع (h/R_2)، در صورتی که شکل مود ارتعاشی و تعداد موج‌های طولی و محیطی پوسته تغییر نکند، اثرات سخت شوندگی افزایش یافته و چنانچه شکل مود ارتعاشی و تعداد موج‌های محیطی دچار تغییر شود اثرات سخت‌شوندگی کاهش می‌یابد. علت تغییر ناگهانی الگوی اثرات سخت شوندگی را می‌توان در تغییر ناگهانی سفتی سازه جست و جو کرد. به این معنی که تغییر شکل مود ارتعاشی غالب بر الگوی تغییر سفتی سازه به طور مستقیم تأثیر می‌گذارد.

- با افزایش نسبت شعاع کوچک به شعاع بزرگ پوسته‌ی مخروطی (R_1/R_2)، در تکیه‌گاه‌های گیردار-گیردار و ساده-گیردار چنانچه شکل مود ارتعاشی و تعداد موج‌های طولی و محیطی ثابت باقی بمانند، اثرات سخت‌شوندگی در پوسته کاهش می‌یابد اما چنانچه شکل مود ارتعاشی دست‌خوش تغییر شود، اثرات سخت‌شوندگی با افزایش همراه خواهد بود. هم‌چنین در تکیه‌گاه ساده-ساده شکل مود ارتعاشی غالب متقاران محوری بوده و با افزایش نسبت R_1/R_2 اثرات سخت‌شوندگی در این شرط مرزی به طور پیوسته افزایش می‌یابد. لذا می‌توان چنین نتیجه گرفت که با تغییر شکل مود ارتعاشی غالب پوسته در شرایط مرزی گیردار-گیردار و ساده-گیردار سفتی سازه ناگهان دستخوش تغییر می‌شود اما در تکیه‌گاه ساده-ساده که شکل مود ارتعاشی متقارن محوری و بدون تغییر باقی می‌ماند سفتی سازه از الگوی یکنواختی پیروی می‌کند.
- با افزایش نیم زاویه‌ی رأس مخروط (α)، از 30 درجه تا 70 درجه مشاهده می‌شود که اثرات سخت‌شوندگی در شرایط مرزی گیردار-گیردار و ساده-گیردار به طور متناوب ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد. در تکیه‌گاه ساده-ساده شکل مود ارتعاشی غالب، متقارن محوری بوده و با افزایش α، اثرات سخت‌شوندگی به طور پیوسته زیاد می‌شود.
- با تغییر شرایط مرزی اثرات سخت‌شوندگی به ترتیب در تکیه‌گاه‌های گیردار-گیردار، ساده-گیردار و ساده-ساده روند افزایشی را طی می‌کند. این موضوع نشان می‌دهد که هر چه در مرزها برای پوسته محدودیت بیشتری ایجاد شود اثرات سخت‌شوندگی با کاهش بیشتری همراه است.
- در تکیه‌گاه ساده-ساده با تغییر پارامترهای هندسی شکل مود ارتعاشی غالب بدون تغییر و به صورت متقارن محوری بوده و با افزایش تمامی پارامترهای هندسی در این شرط مرزی اثرات سخت شوندگی با افزایش همراه است.

6- فهرست علایم

B	ماتریس توابع پایه
$\mathrm{D}_{\zeta}^{(r)}$	عمل‌گر مشتق‌گیر مرتبه‌ی r در راستای ζ
$\mathrm{D}_{\theta}^{(r)}$	عمل‌گر مشتق‌گیر مرتبه‌ی r در راستای θ
$\mathrm{D}_{\tau^*}^{(r)}$	عمل‌گر مشتق‌گیر مرتبه‌ی r نسبت به زمان
E	مدول الاستیسیته (Nm^{-2})
h	ضخامت (m)
I	ماتریس یکه
K	ماتریس سفتی
K_{nl}	ماتریس سفتی غیرخطی
k_s	ضریب تصحیح برشی
L	طول یال پوسته‌ی مخروطی
M	ماتریس جرم
M_{ij}	گشتاورهای خمشی
m	تعداد موج‌های طولی
m_g	تعداد نقاط گرهی در راستای x
n	تعداد موج‌های محیطی
n_g	تعداد نقاط گرهی در راستای θ
N_g	تعداد کل نقاط گرهی روی مکان
N_t	تعداد دنقاط گرهی روی زمان
N_{ij}	نیروهای منتجه
q	بردار مختصات تعمیم‌یافته
Q	بردار مجهولات شامل جابجایی‌ها
R_1	شعاع کوچک مخروط (m)
R_2	شعاع بزرگ مخروط (m)
s	شعاع مخروط در سطح مقطع دلخواه (m)
$\bar{s}$	شعاع بی‌بعد مخروط در سطح مقطع دلخواه
S_{ζ}	عمل‌گر انتگرال‌گیر در راستای ζ
S_{θ}	عمل‌گر انتگرال‌گیر در راستای θ
t	زمان (s)
T^*	دوره‌ی تناوب (s)
τ	دوره‌ی تناوب بی‌بعد
u	جابجایی طولی صفحه‌ی میانی
v	جابجایی محیطی صفحه‌ی میانی
w	جابجایی شعاعی صفحه‌ی میانی
$\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$	فرم بی‌بعد متغیرهای u, v, w
x	محور مختصات طولی
z	محور مختصات شعاعی
Z	بخش‌های غیرخطی معادلات
$\bar{Z}$	بخش‌های غیرخطی بی‌بعد شده‌ی معادلات

علایم یونانی

θ	محور مختصات محیطی
ψ	دوران سطح میانی حول محور θ
ϕ	دوران سطح میانی حول محور x
ε_{ij}	کرنش
σ_{ij}	تنش
ν	ضریب پوآسون
ρ	چگالی (kgm^{-3})
Π_T	انرژی جنبشی
Π_s	انرژی کرنشی
Π_P	کار نیروهای خارجی
ω	فرکانس طبیعی
ω_{nl}	فرکانس ارتعاشات غیرخطی
Ω^*	فرکانس غیرخطی بی‌بعد
λ, μ	ضرایب ساختاری لامه
α	نیم زاویه‌ی رأس مخروط
κ	نسبت شعاع بزرگ به طول مخروط
ζ	محور مختصات طولی بی‌بعد
η	نسبت طول به ضخامت مخروط

7- پیوست

7- الف- عبارت‌های غیرخطی در رابطه‌ی (18)

$$Z_1 = A_{11} w_{,x} w_{,xx} + A_{12}\left(\frac{w_{,\theta} w_{,x\theta}}{s^2} - \frac{w_{,\theta}^2 \sin\alpha}{s^3}\right) + A_{55}\left(\frac{w_{,\theta} w_{,x\theta}}{s^2} + \frac{w_{,x} w_{,\theta\theta}}{s^2}\right)$$

$$
\begin{aligned}
Z_2 = {} & \frac{A_{12} w_{,x} w_{,x\theta}}{s} + \frac{A_{11} w_{,\theta} w_{,\theta\theta}}{s^3} + \frac{A_{55} w_{,\theta} w_{,xx}}{s} \\
& + A_{55}\left(\frac{w_{,x} w_{,x\theta}}{s} - \frac{w_{,x} w_{,\theta}\sin\alpha}{s^2}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Z_3 = {} & \frac{A_{12} w_{,x}^2}{2s} + \frac{A_{11} w_{,\theta}^2}{2s^3} + A_{11} u_{,xx} w_{,x} \\
& + A_{12}\left(\frac{u_{,x} w_{,x}\sin\alpha}{s} - \frac{u w_{,x}\sin^2\alpha}{s^2}\right) \\
& + A_{11} u_{,x} w_{,xx} + \frac{A_{12} u\, w_{,xx}\sin\alpha}{s} \\
& + A_{12}\left(\frac{v_{,x\theta} w_{,x}}{s} - \frac{v_{,\theta} w_{,x}\sin^2\alpha}{s^2}\right) \\
& + \frac{A_{12} v_{,\theta} w_{,xx}}{s} \\
& + A_{12}\left(\frac{w_{,x} w_{,x}\cos\alpha}{s} - \frac{w w_{,x}\sin\alpha\cos\alpha}{s^2}\right) \\
& + \frac{A_{12} w w_{,xx}\cos\alpha}{s} + A_{11} w_{,x}^2 w_{,xx} \\
& + A_{12}\left(\frac{w_{,x} w_{,\theta} w_{,x\theta}}{s^2} - \frac{w_{,x} w_{,\theta}^2\sin\alpha}{s^3}\right) \\
& + \frac{A_{11} w_{,x}^2 w_{,xx}}{2} + \frac{A_{12} w_{,\theta}^2 w_{,xx}}{2s^2} \\
& + A_{55}\left(\frac{u_{,x\theta} w_{,\theta}}{s^2} - \frac{u_{,\theta} w_{,\theta}\sin\alpha}{s^3}\right) \\
& - A_{55}\left(\frac{v_{,x}\, w_{,\theta}\sin\alpha}{s^2} - \frac{v\, w_{,\theta}\sin\alpha}{s^3}\right) \\
& + \frac{A_{55} v_{,xx} w_{,\theta}}{s} \\
& + A_{55}\left(\frac{w_{,x} w_{,\theta} w_{,x\theta}}{s^2} + \frac{w_{,\theta}^2 w_{,xx}}{s^2} - \frac{w_{,x} w_{,\theta}^2\sin\alpha}{s^3}\right) + \frac{A_{55} u_{,\theta} w_{,\theta\theta}}{s^3} \\
& - \frac{A_{55} v w_{,\theta\theta}\sin\alpha}{s^3} + \frac{A_{55} v_{,x} w_{,\theta\theta}}{s^2} \\
& + \frac{A_{55} w_{,x} w_{,\theta} w_{,\theta\theta}}{s^3} - \frac{A_{55} u_{,\theta} w_{,\theta}\sin\alpha}{s^3} \\
& + \frac{A_{55} v w_{,\theta}\sin^2\alpha}{s^3} - \frac{A_{55} v_{,x} w_{,\theta}\sin\alpha}{s^2} \\
& - \frac{A_{55} w_{,x} w_{,\theta}^2\sin\alpha}{s^3} + \frac{A_{55} u_{,\theta\theta} w_{,x}}{s^2} \\
& - \frac{A_{55} v_{,\theta} w_{,x}\sin\alpha}{s^2} + \frac{A_{55} v_{,x\theta} w_{,x}}{s} \\
& + A_{55}\left(\frac{w_{,x} w_{,\theta} w_{,x\theta}}{s^2} + \frac{w_{,x}^2 w_{,\theta\theta}}{s^2}\right) \\
& + \frac{A_{55} u_{,\theta} w_{,x\theta}}{s^2} - \frac{A_{55} v w_{,x\theta}\sin\alpha}{s^2} \\
& + \frac{A_{55} v_{,x} w_{,x\theta}}{s} + \frac{A_{55} w_{,x} w_{,\theta} w_{,x\theta}}{s^2} \\
& + \frac{A_{12} u_{,x\theta} w_{,\theta}}{s^2} + \frac{A_{11} u_{,\theta} w_{,\theta}\sin\alpha}{s^3} \\
& + \frac{A_{11} v_{,\theta\theta} w_{,\theta}}{s^3} + \frac{A_{11} w_{,\theta}^2\cos\alpha}{s^3} \\
& + \frac{A_{12} w_{,x} w_{,\theta} w_{,x\theta}}{s^2} + \frac{A_{11} w_{,\theta}^2 w_{,\theta\theta}}{s^4} \\
& + \frac{A_{12} u_{,x} w_{,\theta\theta}}{s^2} + \frac{A_{11} u\, w_{,\theta\theta}\sin\alpha}{s^3} \\
& + \frac{A_{11} v_{,\theta} w_{,\theta\theta}}{s^3} + \frac{A_{11} w w_{,\theta\theta}\cos\alpha}{s^3} \\
& + \frac{A_{12} w_{,x}^2 w_{,\theta\theta}}{2s^2} + \frac{A_{11} w_{,\theta}^2 w_{,\theta\theta}}{2s^4}
\end{aligned}
$$

7-ب- پارامترهای بی‌بعد رابطه‌ی (25)

$$
\begin{aligned}
&\bar{K}_{11} = a_{11}\partial_{\zeta\zeta} + a_{12}\left(\frac{\partial_\zeta \sin\alpha}{\bar{s}} - \frac{\sin^2\alpha}{\bar{s}^2}\right) + \frac{a_{55}\partial_{\theta\theta}}{\bar{s}^2}, \\
&\bar{K}_{12} = a_{12}\left(\frac{\partial_{\zeta\theta}}{\bar{s}} - \frac{\partial_\theta \sin^2\alpha}{\bar{s}^2}\right) - \frac{a_{55}\partial_\theta \sin\alpha}{\bar{s}^2} + \frac{a_{55}\partial_{\zeta\theta}}{\bar{s}}, \\
&\bar{K}_{13} = a_{12}\left(\frac{\partial_\zeta \cos\alpha}{\bar{s}} - \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\bar{s}^2}\right), \\
&\bar{K}_{21} = \frac{a_{55}\partial_{\zeta\theta}}{\bar{s}} + \frac{a_{12}\partial_{\zeta\theta}}{\bar{s}} + \frac{(a_{11}-a_{55})\partial_\theta \sin\alpha}{\bar{s}^2}, \\
&\bar{K}_{22} = -a_{55}\left(\frac{\partial_\zeta \sin\alpha}{\bar{s}} - \frac{\sin^2\alpha}{\bar{s}^2}\right) + a_{55}\partial_{\zeta\zeta} + \frac{a_{11}\partial_{\theta\theta}}{\bar{s}^2}, \\
&\bar{K}_{23} = \frac{a_{11}\partial_\theta \cos\alpha}{\bar{s}^2} + \frac{k_s a_{55}\partial_\theta}{\bar{s}^2}, \qquad \bar{K}_{25} = \frac{\eta k_s a_{55}}{\bar{s}}, \\
&\bar{K}_{31} = -\frac{a_{12}\partial_\zeta}{\bar{s}} - \frac{a_{11}\sin\alpha}{\bar{s}^2}, \qquad \bar{K}_{32} = \frac{a_{11}\partial_\theta}{\bar{s}^2}, \\
&\bar{K}_{33} = k_s a_{55}\partial_{\zeta\zeta} + \frac{k_s a_{55}\partial_{\theta\theta}}{\bar{s}^2} + \frac{a_{11}\cos\alpha}{\bar{s}^2} \\
&\bar{K}_{34} = k_s\eta a_{55}\psi_\zeta, \qquad \bar{K}_{35} = \frac{k_s\eta a_{55}\partial_\theta}{\bar{s}}, \\
&\bar{K}_{43} = -k_s\eta a_{55}\partial_\zeta, \qquad \bar{K}_{53} = -\frac{k_s\eta a_{55}\partial_\theta}{\bar{s}} \\
&\bar{K}_{44} = d_{11}\partial_{\zeta\zeta} + d_{12}\left(\frac{\partial_\zeta \sin\alpha}{\bar{s}} - \frac{\sin^2\alpha}{\bar{s}^2}\right) + \frac{d_{55}\partial_{\theta\theta}}{\bar{s}^2} \\
&\qquad - k_s\eta^2 a_{55}, \\
&\bar{K}_{45} = d_{12}\left(\frac{\partial_{\zeta\theta}}{\bar{s}} - \frac{\partial_\theta \sin\alpha}{\bar{s}^2}\right) - \frac{d_{55}\partial_\theta \sin\alpha}{\bar{s}^2} + \frac{d_{55}\partial_{\zeta\theta}}{\bar{s}}, \\
&\bar{K}_{54} = d_{55}\left(\frac{\partial_{\zeta\theta}}{\bar{s}} - \frac{\partial_\theta \sin\alpha}{\bar{s}^2}\right) + \frac{d_{12}\partial_{\zeta\theta}}{\bar{s}} + \frac{d_{11}\partial_\theta \sin\alpha}{\bar{s}^2}, \\
&\bar{K}_{55} = -d_{55}\left(\frac{\partial_{,\zeta} \sin\alpha}{\bar{s}} - \frac{\sin^2\alpha}{\bar{s}^2}\right) + d_{55}\partial_{,\zeta\zeta} + \frac{d_{11}\partial_{,\theta\theta}}{\bar{s}^2} \\
&\qquad - k_s\eta^2 a_{55,} \\
&\bar{K}_{14} = \bar{K}_{15} = \bar{K}_{24} = \bar{K}_{41} = \bar{K}_{42} = \bar{K}_{51} = \bar{K}_{52} = 0 \\
&\bar{Z}_1 = \frac{1}{\eta}\left\{a_{11}\bar{w}_{,\zeta}\bar{w}_{,\zeta\zeta} + a_{12}\left(\frac{\bar{w}_{,\theta}\bar{w}_{,\zeta\theta}}{\bar{s}^2} - \frac{\bar{w}_{,\theta}^2\sin\alpha}{\bar{s}^3}\right)\right. \\
&\qquad \left. + a_{55}\left(\frac{\bar{w}_{,\theta}\bar{w}_{,\zeta\theta}}{\bar{s}^2} + \frac{\bar{w}_{,\zeta}\bar{w}_{,\theta\theta}}{\bar{s}^2}\right)\right\}, \\
&\bar{N}_{xx} = \left[a_{11}\bar{u}_{,x} + \frac{a_{12}\bar{u}\sin\alpha}{\bar{s}}\right] + \left[\frac{a_{12}\bar{v}_{,\theta}}{\bar{s}}\right] + \left[\frac{a_{12}\bar{w}\cos\alpha}{\bar{s}}\right], \\
&\bar{M}_{xx} = \left[d_{11}\psi_{,\zeta} + \frac{d_{12}\psi\sin\alpha}{\bar{s}}\right] + \left[\frac{d_{12}\phi_{,\theta}}{\bar{s}}\right]
\end{aligned}
$$

7-پ- اجزای ماتریس ضرایب وزنی روش تربیع دیفرانسیلی تعمیم‌یافته

ضرایب وزنی مشتق مرتبه‌ی r در روش تربیع دیفرانسیلی تعمیم‌یافته با در نظر گرفتن توزیع نقاط گسسته به صورت $[X_1 \quad \cdots \quad X_N]$ عبارت است از [20]:

$$
D_{ij}^{(r)} =
\begin{cases}
I_{ij}, & r = 0 \\
\dfrac{\mathcal{P}(X_i)}{(X_i - X_j)\mathcal{P}(X_j)}, \ \mathcal{P}(X_i) = \displaystyle\prod_{k=1;\, i\neq k}^{N} (X_i - X_k), \ i,j = 1, \ i \neq j, & r = 1 \\
\begin{cases}
r\left[D_{ij}^{(1)} D_{ii}^{(r-1)} - \dfrac{D_{ij}^{(r-1)}}{x_i - x_j}\right], & i \neq j \\
-\displaystyle\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{N} D_{ik}^{(r)}, & i = j
\end{cases} & i,j = 1,\ldots,N, \ r \geq 2
\end{cases}
$$

7-ت- ماتریس‌های تعریف شده در رابطه‌ی (31)

$$\mathrm{K}=\begin{bmatrix} \mathrm{k}_{11} & \mathrm{k}_{12} & \mathrm{k}_{13} & \mathrm{k}_{14} & \mathrm{k}_{15} \\ \mathrm{k}_{21} & \mathrm{k}_{22} & \mathrm{k}_{23} & \mathrm{k}_{24} & \mathrm{k}_{25} \\ \mathrm{k}_{31} & \mathrm{k}_{32} & \mathrm{k}_{33} & \mathrm{k}_{34} & \mathrm{k}_{35} \\ \mathrm{k}_{41} & \mathrm{k}_{42} & \mathrm{k}_{43} & \mathrm{k}_{44} & \mathrm{k}_{45} \\ \mathrm{k}_{51} & \mathrm{k}_{52} & \mathrm{k}_{53} & \mathrm{k}_{54} & \mathrm{k}_{55} \end{bmatrix},$$

که:

$$\mathrm{k}_{11}=a_{11}\mathrm{I}_\theta\otimes\mathrm{D}_\zeta^{(2)}+a_{12}\left(\frac{\mathrm{I}_\theta\otimes\mathrm{D}_\zeta^{(1)}\sin\alpha}{\bar{\mathrm{s}}}-\frac{\mathrm{I}_\theta\otimes\mathrm{I}_\zeta\sin^2\alpha}{\bar{\mathrm{s}}^2}\right)+\frac{a_{55}\mathrm{D}_\theta^{(2)}\otimes\mathrm{I}_\zeta}{\bar{\mathrm{s}}^2},$$

$$\mathrm{k}_{12}=a_{12}\left(\frac{\mathrm{D}_\theta^{(1)}\otimes\mathrm{D}_\zeta^{(1)}}{\bar{\mathrm{s}}}-\frac{\mathrm{D}_\theta^{(1)}\otimes\mathrm{I}_\zeta\sin^2\alpha}{\bar{\mathrm{s}}^2}\right)-\frac{a_{55}\mathrm{D}_\theta^{(1)}\otimes\mathrm{I}_\zeta\sin\alpha}{\bar{\mathrm{s}}^2}+\frac{a_{55}\mathrm{D}_\theta^{(1)}\otimes\mathrm{D}_\zeta^{(1)}}{\bar{\mathrm{s}}},$$

که $\bar{\mathrm{s}}=\langle\kappa+\bar{\mathrm{x}}\sin\alpha\rangle$ و علامت $\langle\ \rangle$ معرف شکل قطری شده‌ی یک ماتریس است. هم‌چنین فرم گسسته‌ی سایر مؤلفه‌های k_{ij} به طریق مشابه قابل محاسبه است.

$$\mathrm{M}=-\langle\bar{I}_0\mathrm{I}_\theta\otimes\mathrm{I}_\zeta\quad\bar{I}_0\mathrm{I}_\theta\otimes\mathrm{I}_\zeta\quad\bar{I}_0\mathrm{I}_\theta\otimes\mathrm{I}_\zeta\quad\bar{I}_2\mathrm{I}_\theta\otimes\mathrm{I}_\zeta\quad\bar{I}_2\mathrm{I}_\theta\otimes\mathrm{I}_\zeta\rangle,$$

$$\mathrm{K}_{nl}(\mathrm{X})=\left[\mathrm{K_U}(\mathrm{X})^\mathrm{T},\mathrm{K_V}(\mathrm{X})^\mathrm{T},\mathrm{K_W}(\mathrm{X})^\mathrm{T},\mathrm{K_\psi}(\mathrm{X})^\mathrm{T},\mathrm{K_\phi}(\mathrm{X})^\mathrm{T}\right]^\mathrm{T},$$

$$\begin{aligned}\mathrm{K_U}(\mathrm{X})&=\frac{1}{\eta}\Bigg[\frac{a_{12}\left(\left(\mathrm{I}_\theta\otimes\mathrm{D}_\zeta^{(1)}\right)\mathrm{W}^v\right)\circ\left(\left(\mathrm{D}_\theta^{(1)}\otimes\mathrm{D}_\zeta^{(1)}\right)\mathrm{W}^v\right)}{\bar{\mathrm{s}}}\\&+a_{11}\frac{\left(\left(\mathrm{D}_\theta^{(1)}\otimes\mathrm{I}_\zeta\right)\mathrm{W}^v\right)\circ\left(\left(\mathrm{D}_\theta^{(2)}\otimes\mathrm{I}_\zeta\right)\mathrm{W}^v\right)}{\bar{\mathrm{s}}^3}\\&+a_{55}\Bigg(\frac{\left(\left(\mathrm{I}_\theta\otimes\mathrm{D}_\zeta^{(1)}\right)\mathrm{W}^v\right)\circ\left(\left(\mathrm{D}_\theta^{(1)}\otimes\mathrm{D}_\zeta^{(1)}\right)\mathrm{W}^v\right)}{\bar{\mathrm{s}}}\\&+\frac{\left(\left(\mathrm{D}_\theta^{(1)}\otimes\mathrm{I}_\zeta\right)\mathrm{W}^v\right)\circ\left(\left(\mathrm{I}_\theta\otimes\mathrm{D}_\zeta^{(2)}\right)\mathrm{W}^v\right)}{\bar{\mathrm{s}}}\\&-\frac{\left(\left(\mathrm{I}_\theta\otimes\mathrm{D}_\zeta^{(1)}\right)\mathrm{W}^v\right)\circ\left(\left(\mathrm{D}_\theta^{(1)}\otimes\mathrm{I}_\zeta\right)\mathrm{W}^v\right)\sin\alpha}{\bar{\mathrm{s}}^2}\Bigg)\Bigg],\end{aligned}$$

که I_ζ و I_θ ماتریس‌های یکه بوده و علامت $\circ$ معرف ضرب هادامارد[1] است.

$\mathrm{K_V}(\mathrm{X})$، $\mathrm{K_W}(\mathrm{X})$، $\mathrm{K_\psi}(\mathrm{X})$ و $\mathrm{K_\phi}(\mathrm{X})$ نیز به طریق مشابه قابل محاسبه هستند

7- ث- عمل‌گر انتگرال‌گیری در رابطه‌ی (37)

$$\int_{\xi_1}^{\xi_{n_g}}h(\xi)d\xi=\left(\sum_{r=0}^{n_g-1}\widetilde{\mathrm{X}}^{(r)}\mathrm{D}_\xi^{(r)}\right)\mathrm{h}=\mathrm{S}_\xi\mathrm{h},$$

$$\mathrm{S}_\xi=\left[\mathrm{S}_\xi\right]_{1\times n_g}=\left(\sum_{r=0}^{n_g-1}\widetilde{\mathrm{X}}^{(r)}\mathrm{D}_\xi^{(r)}\right),$$

$$\widetilde{\mathrm{X}}^{(r)}=\left[\frac{(\xi_2-\xi_1)^{r+1}}{2^{r+1}(r+1)!},\dots,\frac{(\xi_{i+1}-\xi_i)^{r+1}-(\xi_{i-1}-\xi_i)^{r+1}}{2^{r+1}(r+1)!},\dots,-\frac{(\xi_{N-1}-\xi_N)^{r+1}}{2^{r+1}(r+1)!}\right],\quad i=2,3,\dots,n_g-1$$

که $\mathrm{D}_\xi^{(r)}$ عمل‌گر مشتق‌گیر یا ضرایب وزنی مرتبه‌ی r در روش تربیع دیفرانسیلی تعمیم‌یافته بوده و h برداری سطونی با تعداد n_g مؤلفه است که شامل مقادیر گرهی تابع دلخواه $h(\xi)$ در $\xi_j,\ j=1,2,\dots,n_g$ می‌باشد.

[1] Hadamard product

8- مراجع

[1] A. Leissa, *Vibration of shells*, Washington: NASA-SP-288, pp. 31-45, 1973.
[2] C. Shu, An efficient approach for free vibration analysis of conical shells, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 38, No. 8-9, pp. 935-949, 1996.
[3] Ö. Civalek, An efficient method for free vibration analysis of rotating truncated conical shells, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 83, No. 1, p. 1–12, 2006.
[4] EJ. Goldberg, JL. Bogdanoff, L. Marcus, On the calculation of the axisymmetric, *The Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 32, No. 6, pp. 738-42, 1960.
[5] A. Kalnins, Free vibration of rotationally symmetric shells, *The Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 36, No. 7, pp. 1355-65, 1964.
[6] T. Irie, G. Yamada, Y. Kaneko, Free vibration of a conical shell with variable, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 82, No. 1, pp. 83-94, 1982.
[7] T. Irie, G. Yamada, Y. Kaneko, Natural frequencies of truncated conical shells, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 92, No.3, pp. 447-53, 1984.
[8] L. Tong, Free vibration of composite laminated conical shells, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 35, No. 1, pp. 47-61, 1993.
[9] L. Tong, Free vibration of orthotropic conical shells, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 31, No. 5, pp. 719-733, 1993.
[10] K.Y. Lam, Li Hua, On free vibration of a rotating truncated circular orthotropic conical shell, *Composites Part B: Engineering*, Vol. 30, No. 2, p. 135–144, 1999.
[11] K.Y. Lam, Li Hua, Vibration analysis of a rotating truncated circular conical shell, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 34, No. 17, pp. 2183-2197, 1997.
[12] L. Hua, Frequency analysis of rotating truncated circular orthotropic conical shells with different boundary conditions, *Composites Science and Technology*, Vol. 60, No. 16, pp. 2945–2955, 2000.
[13] D. J. Wilkins, C. W. Bert, D. M. Egle, Free vibrations of orthotropic sandwich conical shells with various boundary conditions, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 13, No. 2, pp. 211-228, 1970.
[14] A. H. Sofiyev, N. Kuruoglu, H. M. Halilov, The vibration and stability of non-homogeneous orthotropic conical shells with clamped edges subjected to uniform external pressures, *Applied Mathematical Modeling*, Vol. 34, No. 7, pp. 1807-1822, 2010.
[15] Guoyong Jin, , Xianglong Ma, Shuangxia Shi, Tiangui Ye, Zhigang Liu, A modified Fourier series solution for vibration analysis of truncated conical shells with general boundary conditions, *Applied Acoustics*, Vol. 85, pp. 82–96, 2014.
[16] A. H. Sofiyev, On the vibration and stability of shear deformable FGM truncated conical shells subjected to an axial load, *Composites Part B: Engineering*, Vol. 80, pp. 53-62, 2015.
[17] S. Kamarian, M. Salim, R. Dimitri, F. Tornabene, Free vibration analysis of conical shells reinforced with agglomerated Carbon Nanotubes, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 108, pp. 157-165, 2016.
[18] D. Van Dung, H. T. Thiem, Research on Free Vibration Frequency Characteristics of Rotating Functionally Graded Material Truncated Conical Shells with Eccentric Functionally Graded Material Stringer and Ring Stiffeners, *Latin American Journal of Solids & Structures*, Vol. 13, No. 14, pp. 2379-2405, 2016.
[19] C.S. Xu, Z.Q. Xia, C.Y. Chia, Non-linear theory and vibration analysis of laminated truncated, thick, conical shells, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 31, No. 2, pp. 139-154, 1996.
[20] Y.M. Fu, C.P. Chen, Non-linear vibration of elastic truncated conical moderately thick shells in large overall motion, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 36, No. 5, pp. 763–771, 2001.
[21] C. Chena, L. Dai, Nonlinear vibration and stability of a rotary truncated conical shell with intercoupling of high and low order modals, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 14, No. 1, pp. 254–269, 2009.
[22] A. Sofiyev, The non-linear vibration of FGM truncated conical shells, *Composite Structures*, Vol. 94, No. 7, pp. 2237-2245, 2012.
[23] C. Shu, *Differential quadrature and its application in engineering*, London: Springer, pp, 95-122, 2000.
[24] L. Trefethen, *Spectral Methods in MATLAB*, England: Oxford, pp, 17-28, 2000.
[25] R. Ansari, E. Hasrati, M. Faghih Shojaei, R. Gholami, A. Shahabodini, Forced vibration analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates using a numerical strategy, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, Vol. 69, pp. 294-305, 2015.
[26] H. D. Mittelmann, A pseudo-arclength continuation method for nonlinear eigenvalue problems, *SIAM journal on numerical analysis*, Vol. 23, No. 5, pp. 1007-1016, 1986.
[27] H.S. Shen, Nonlinear vibration of shear deformable FGM cylindrical shells surrounded by an elastic medium, *Composite Structures*, Vol. 94, No.3, pp. 1144-1154, 2012.
[28] K.K. Raju & G.V Rao, Large amplitude asymmetric vibrations of some thin shells of revolution, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 44, No. 3, pp. 327-333, 1976.