مجله مهندسی مکانیک مدرس، فروردین 1396، دوره 17، شماره 1، ص‌ص 284-292

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

بررسی تأثیر ترم‌های غیرخطی بر رزونانس پارامتریک تیر تحت عبور جرم‌های متوالی

مصطفی پیرمرادیان[1*]، حسین کریم‌پور[2]

1- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد خمینی‌شهر، خمینی‌شهر

2- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه اصفهان، اصفهان

* خمینی‌شهر، صندوق پستی 84175-119، pirmoradian@iaukhsh.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 09 آبان 1395

پذیرش: 26 آذر 1395

ارائه در سایت: 26 دی 1395

کلید واژگان:

تیر-جرم متحرک

اصل همیلتون تعمیم‌یافته

روش مقیاس‌های چندگانه

تشدید پارامتریک

پدیده پرش

چکیده

در این مقاله، پایداری دینامیکی تیری با تکیه‌گاه‌های ساده که تحت عبور متوالی جرم‌ها قرار گرفته است با در نظر گرفتن عبارت‌های غیرخطی در تحلیل، مورد مطالعه و بررسی قرار می‌گیرد. چنین شرایط بارگذاری متناوبی روی تیر، در تحلیل مسائلی مانند حرکت وسایل نقلیه از روی پل-ها، حرکت قطارهای سریع‌السیر از روی ریل‌ها، فرآیند ماشین‌کاری، خطوط انتقال سیال و لوله‌ی انواع سلاح پدیدار شده و لذا بررسی آن از نقطه‌نظر عملی حایز اهمیت است. عبور متناوب جرم‌ها از روی تیر به پیدایش معادله‌ای با ضرایب متغیر با زمان پریودیک می‌انجامد. با به-کارگیری اصل همیلتون تعمیم‌یافته برای سیستم‌های جرم متغیر و در نظر گرفتن تمامی ترم‌های شتاب جرم‌های عبوری و همچنین فرضیه‌ی تغییر شکل بزرگ تیر، معادله‌ی حاکم بر مسأله استخراج می‌شود. به منظور مواجهه با وابستگی تغییر شکل‌های طولی و عرضی، فرض عدم کشیدگی صفحه‌ی میانی تیر در نظر گرفته می‌شود و تفسیر مناسبی جهت موجه بودن این فرض ارائه می‌گردد. روش مقیاس‌های چندگانه برای به دست آوردن نواحی پایدار و ناپایدار مسأله در صفحه‌ی پارامترها استفاده می‌شود. نتایج حاصل از به‌کارگیری این روش، تغییر رفتار کیفی را در پاسخ تیر بر اثر ترم‌های غیرخطی پیش‌بینی می‌کند. نتایج شبیه‌سازی‌های عددی متفاوت انجام شده، صحت نتایج حاصل از حل تحلیلی اغتشاشی را تأیید می‌کند.

Nonlinear Effects on Parametric Resonance of a Beam Subjected to Periodic Mass Transition

Mostafa Pirmoradian[1*], Hossein Karimpour[2]

1- Department of Mechanical Engineering, Khomeinishahr Branch Islamic Azad University, Khomeinishahr, Iran

2- Department of Mechanical Engineering, University of Isfahan, Isfahan, Iran

* P.O.B. 84175-119, Khomeinishahr, Iran, Pirmoradian@iaukhsh.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 30 October 2016
Accepted 16 December 2016
Available Online 15 January 2017

Keywords:
Beam-moving mass interaction
Extended Hamilton's principle
Method of multiple scales
Parametric resonance
Jump phenomenon

ABSTRACT

In this paper, dynamic stability of a simply supported beam excited by a sequence of moving masses is investigated by preserving nonlinear terms in the analysis. This type of loading is important in problems such as motion of vehicles on bridges, high-speed transportation on rails, machining processes, conveying pipelines and barrel dynamics, so its investigation is important from a practical viewpoint. The intermittent loading across the beam results in a periodic time-varying equation system. The effects of convective mass acceleration besides large deformation beam theory are both taken into account in the derivation of governing equations which are performed through adopting Hamilton's principle for mass-varying systems. In order to deal with the coupling between longitudinal and transversal deflections, the inextensibility assumption is implicitly introduced into the Hamiltonian formulation and an appropriate interpretation is presented to maintain this approximation reasonably. The method of multiple scales is implemented to find the domains of stability and instability of the problem in a parameter space. The results of applying the method forecast a qualitative change in beam behavior due to nonlinear terms. Results of different numerical simulations show the validity of the analytical approach obtained by the applied perturbation method.

1- مقدمه

برای تعیین عمر مفید سازه‌های مهندسی و هم‌چنین یافتن پاسخ ارتعاشی تجهیزات مکانیکی به‌منظور شناسایی مشخصه‌های آن‌ها، لازم و ضروری است که سیستم‌های فیزیکی با در نظر گرفتن تمامی ویژگی‌های متغیر با زمان و غیرخطی‌شان تحلیل و بررسی شوند. به‌عنوان مثال‌هایی از این قبیل می‌توان به ستون‌های تحت بارگذاری متناوب، سیستم‌های پیرو و بادامکی و به طور کلی مسایل قابل مدل‌سازی با لحاظ صریح عوامل متناوب اشاره نمود. در این راستا، بسیاری از سیستم‌های مهندسی را می‌توان به مثابه مسأله‌ی تیر انعطاف‌پذیری که تحت عبور جرم‌های متحرک است در نظر گرفت و مدلی ریاضی جهت بررسی آن‌ها ارائه کرد. بسیاری از کاربردهای عملی از قبیل حرکت وسایل نقلیه و قطارها از روی پل‌ها، جابجایی بار در امتداد جراثقیل‌ها، بازوی تلسکوپی رباتیکی، لوله‌های حامل سیال و همچنین عملیات سریع ماشین‌کاری روی شافت های بلند ، نمونه‌هایی از این سیستم‌ها هستند. از این رو، تعیین رفتار دینامیکی تیرهای تحت عبور جرم از دیرباز

Please cite this article using:

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

M. Pirmoradian, H. Karimpour, Nonlinear Effects on Parametric Resonance of a Beam Subjected to Periodic Mass Transition, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 1, pp. 284-292, 2017 (in Persian)

موضوع مورد علاقه‌ی تحقیق و تفحص بسیاری از دانشمندان و محققین بوده است. مرور جامعی از تحقیقات انجام شده در زمینه‌ی سازه‌های الاستیک تحت بارگذاری جرم‌های متحرک در مقاله‌ی مروری [1] آمده است.

تحقیق‌ها در زمینه‌ی مسأله‌ی رفتار دینامیکی تیر- جسم متحرک را می‌توان به طور کلی به دو گروه اصلی دسته‌بندی کرد. اولین دسته از این تحقیق‌ها به بررسی و تحلیل پاسخ زمانی یا فرکانسی تیر تحت عبور جرم می‌پردازد. دومین گروه اساسا بر تحلیل پایداری سیستم تمرکز دارد. این دسته از مطالعات شامل شناسایی آن دسته از پارامترهای سیستم است که به ازای آن‌ها در سیستم ناپایداری اتفاق می‌افتد و در نتیجه، تیر افزایش بی رویه‌ی دامنه را تجربه می‌کند.

با مروری بر مقالات ارائه شده در زمینه‌ی تحلیل پایداری دینامیکی تیرهای الاستیک تحت بارهای متحرک، مشاهده می‌شود که در بیشتر مطالعات به تحلیل مدل خطی سیستم پرداخته شده است. از این جمله می توان به تحقیقات اخیر پیرمرادیان و همکارانش [3,2] اشاره کرد. صرف‌نظر کردن از عبارت‌های غیرخطی در مدل کردن سیستم‌ها ممکن است به پیش بینی‌های غلط بیانجامد که می‌تواند در طراحی‌های مهندسی مشکل‌آفرین شود. برای مثال، وابستگی فرکانس به دامنه یا پدیده‌ی پرش پدیده‌هایی هستند که تنها در حوزه‌ی غیرخطی اتفاق می‌افتند. همچنین مدل‌های خطی توانایی توجیه و تفسیر رفتار دینامیکی سیستم‌ها را زمانی که پارامترهای سیستم (به‌عنوان مثال سرعت در لوله‌های حاوی سیال) به مقادیر بحرانی‌شان نزدیک می‌شوند ندارند.

در حالت کلی، معادلات با ضرایب متغیر با زمان حتی در حالت خطی دارای حل تحلیلی نیستند. با این وجود می‌توان خصوصیاتی را برای دسته خاصی از آن‌ها که سیستم‌های با ضرایب متناوب هستند آشکار ساخت. سیستم‌های متناوب پدیده‌های جالبی را برمی‌انگیزند که می‌توان به مکانیزم-های مختلف انتقال انرژی از قبیل تشدید پارامتریک و داخلی اشاره کرد. در مقایسه با سیستم‌های با تحریک خارجی که با منبع خارجی انرژی تحریک می‌شوند، تشدید داخلی می‌تواند در اثر تداخل مودهای غیرخطی یک سیستم در نسبت‌های فرکانسی خاصی رخ دهد. از طرف دیگر، تشدید پارامتریک معمولا در سیستم‌های خود تحریک اتفاق می‌افتد که آهنگ ضربان داخلی آنها مضربی از فرکانس‌های طبیعی سیستم می‌باشند.

در مطالعات انجام شده در حوزه‌ی غیرخطی، دسته‌ای از محققین با در نظر گرفتن تقریب‌های مرتبه سوم به مطالعه‌ی مسأله‌ی تیر-جرم متحرک پرداختند [5,4]. همچنین عوامل مختلف ایجاد عبارت‌های غیرخطی [7,6]، انواع بارگذاری از قبیل شبه‌استاتیکی و دینامیکی [8] و فرضیات مختلف بر چگونگی حرکت جرم (منفرد، دسته‌ای، شتاب‌دار یا با سرعت ثابت) مورد مطالعه قرار گرفت [9-11]. وانگ [11] و وایو و همکارانش [12] در مطالعاتشان عبارت‌های غیرخطی منتجه از انحنای بزرگ و کشیدگی صفحه‌ی میانی تیر را در نظر گرفتند. پورجمشیدیان و همکارانش [13] با استفاده از روش هموتوپی و همچنین پن و همکارانش [14] با استفاده از روش اغتشاشی، پاسخ‌های نیمه‌تحلیلی حاصل کردند و به تحلیل پدیده‌ی دو شاخگی و وابستگی فرکانس به دامنه پرداختند. با این وجود، با توجه به تحلیل‌های شبه‌استاتیکی که انجام دادند می‌توان با تردید به صحت و کاردبردی بودن نتایج آن‌ها نگریست.

مقالات ذکر شده در بالا نشان دهنده‌ی تحقیقات فراوان انجام شده در زمینه‌ی ارتعاشات تیر- جرم متحرک است. از منظر عملی، فرضیه‌ی خطی برای کاربردهای مهندسی کفایت می‌کند. این در حالی است که مطالعه‌ی دینامیک غیرخطی چنین مسأله‌ای قابل پیش‌بینی با استفاده از تحلیل خطی نبوده و انتظار کشف پدیده‌های ناشناخته در این سیستم می‌رود. تحقیق حاضر در برگیرنده‌ی مشخصه‌ی متغیر با زمان سیستم است که در نتیجه‌ی اثرات اندازه حرکت توالی جرم‌های متحرک است. نشان داده می‌شود که تشدید پارامتریک در کنار عبارت‌های غیرخطی منجر به بروز جنبه‌های جالبی از مسأله می‌شود که نقش مهمی در پایداری سیستم نیز ایفا می‌کند.

در این پژوهش، دینامیک غیرخطی تیر اویلر-برنولی با تکیه‌گاه‌های ساده که تحت عبور متوالی جرم‌ها قرار دارد تحلیل و بررسی می‌شود. تیر، یکنواخت با طول l، مساحت مقطع A، ممان اینرسی مقطع I، مدول یانگ E و جرم واحد طول ρ در نظر گرفته می‌شود و عبور متوالی جرم‌های یکسان m با سرعت ثابت U به نحوی است که به محض خروج یک جرم، نوبت جرم بعدی می-شود. ورود و خروج جرم‌ها سبب می‌شود که سیستم مورد مطالعه ماهیتا سیستمی با جرم متغیر محسوب شود. این سیستم‌ها را اصطلاحا سیستم‌های باز می‌نامند. اصل همیلتون متداول که در استخراج معادلات حرکت سیستم-ها به‌کار گرفته می‌شود تنها برای سیستم‌های بسته (سیستم‌هایی که جرم ثابت دارند و ذرات تشکیل دهنده‌ی آن‌ها تغییر نمی‌کنند) اعتبار دارد. بر خلاف سیستم‌های بسته‌ی پایستار که در غیاب نیروهای ناپایستار، انرژی آن ها ثابت است، این شرایط برای سیستم‌های باز لزوما منجر به پایستاری انرژی نمی‌شود. بنابراین لازم و ضروری است که این اصل برای سیستم‌هایی که ذرات تشکیل دهنده‌ی آن‌ها با گذشت زمان تغییر می‌کند تعمیم یابد. اگر چه تغییر شکل تیر در ناحیه‌ی خطی بررسی می‌شود و لذا قانون هوک صادق است، لیکن با در نظر گرفتن روابط کرنش-جابجایی غیرخطی که در نتیجه‌ی انحنای بزرگ تیر حاصل می‌شود و همچنین وابستگی جابجایی‌های طولی و عرضی، ترم‌های غیرخطی در معادله‌ی حاکم ظاهر می‌شود. فرض می‌شود که تیر دارای قید عدم کشیدگی است؛ یعنی طول صفحه‌ی میانی تیر قبل و بعد از تغییر شکل ثابت باقی می‌ماند. شرط عدم کشیدگی تیر توسط یک قید غیر انتگرال‌پذیر که تغییر شکل‌های محوری و عرضی را با یکدیگر مرتبط می‌کند، بیان می‌شود. این قید با استفاده از ضرایب لاگرانژ در بیان لاگرانژین سیستم وارد می‌شود.

2- مدل‌سازی ریاضی سیستم

2-1- اصل همیلتون تعمیم‌یافته برای سیستم‌های با جرم متغیر

همان‌گونه که بیان شد ورود و خروج جرم‌ها از سیستم منجر به اعمال-نگرش سیستم باز می‌شود به‌طوری‌که اثر اندازه حرکت جرم‌ها به هنگام ورود و خروج در اصل همیلتون باید لحاظ شود. "شکل 1"، مدلی از سیستم با مرزهای قابل نفوذ را نشان می‌دهد.

فرم تعمیم‌یافته‌ی اصل همیلتون برای سیستمی با جرم متغیر به صورت رابطه‌ی (1) بیان می‌شود [15].

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(L)_0 dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta H dt = 0 \qquad \text{(1- الف)}$$

$$\delta(L)_0 = \delta(KE - PE)_0 \qquad \text{(1- ب)}$$

$$\delta H = \delta W + \iint_{B_0(t)} (\rho_m \vec{u} \cdot \delta\vec{r})(\vec{V}_B - \vec{u}) \cdot \vec{n}\, ds \qquad \text{(1- ج)}$$

که L لاگرانژین سیستمی با حجم کنترل باز $R_0(t)$ و δW کار مجازی انجام شده روی این سیستم است.

Fig. 1 The beam-moving mass problem as a varying-mass system within a control volume

شکل 1 مسأله‌ی تیر و جرم متحرک به‌عنوان یک سیستم جرم متغیر با حجم کنترل

عبارت انتگرال در معادله‌ی (1) را می‌توان به عنوان کار مجازی حاصل از ممنتوم شار در نتیجه‌ی عبور جرم‌ها $\left(\rho_m \vec{u}\cdot\delta\vec{r}\right)$ از سطح باز $B_0(t)$ تفسیر کرد که با سرعت نسبی $\left(\vec{V}_B-\vec{u}\right)\cdot\vec{n}$ به حجم کنترل وارد و یا از آن خارج می‌شود. جریان جرمی را می‌توان به مثابه جریان ترافیک وسایل نقلیه‌ی عبوری از روی تیر دانست. انتقال ممنتوم مجازی در هر دو انتهای تیر در نتیجه‌ی ورود و خروج جرم‌ها را می‌توان طبق آنچه در ادامه بیان می‌شود توضیح داد. قابل ذکر است که جرم متحرک در طول مسیر حرکتی‌اش نمی‌تواند جابجایی مجازی داشته باشد. این بدان علت است که حرکت جرم از پیش توصیف شده است (حرکت از سمت چپ تیر به سمت راست آن با سرعت ثابت). سرعت جرم در دو حد نهایی‌اش (ورود به تیر و خروج از آن) برابر با $\vec{u}=\vec{R}+U\vec{t}$ است که $\vec{R}$ و $\vec{t}$ به ترتیب بردارهای جابجایی و مماس یکه در دو انتهای تیر هستند. سرعت نسبی عبور از مرزهای سطوح برابر با $\left(\vec{u}-\vec{V}_B\right)\cdot\vec{n}=\pm U$ است. بنابراین معادله‌ی (1) به‌صورت معادله‌ی (2) بیان می‌شود.

$$H=0+\iint_{S_i(t)\cup S_e(t)}\rho_m(\vec{u}\cdot\delta\vec{r})\left(\vec{V}_B-\vec{u}\right)\cdot\vec{n}\,ds = \left(-mU\left(\dot{\vec{r}}+U\vec{t}\right)\cdot\delta\vec{r}\right)\Big|_{x=0}^{x=l} \tag{2}$$

که عبارت آخر بیان‌گر انتقال ممنتوم مجازی از سطح کنترل است و mU جریان ترافیک را در هر لحظه بیان می‌کند.

برای تیر با تکیه‌گاه‌های ساده، هیچ جابجایی مجازی در دو انتها وجود ندارد ($\delta\vec{r}=0$). بنابراین عبارت انتهایی در معادله‌ی (2) در این حالت برابر صفر خواهد شد ولی این عبارت برای انتهای آزاد تیر یک سر گیردار حتما باید لحاظ شود. بنابراین قابل ذکر است که اگر برای تیر یک سر گیردار از اصل همیلتون متداول که برای سیستم‌های بسته اعتبار دارد استفاده شود، عبارت مذکور در محاسبات ظاهر نشده و در نتیجه معادلات حرکت حاصل شده صحیح نخواهد بود. نهایتا، با در نظر گرفتن ملاحظات اخیر، معادله‌ی (1) به فرم معادله‌ی (3) خلاصه می‌شود.

$$\int_{t_1}^{t_2}\delta(L)_0 dt=0 \tag{3}$$

2-2- استخراج معادلات حاکم

با توجه به معادله‌ی (3)، به منظور استخراج معادله‌ی حاکم بر حرکت تیر، اصل همیلتون مطابق رابطه‌ی (4) برای سیستم به‌کار گرفته می‌شود.

$$\int_{t_1}^{t_2}\delta(L)_0 dt=\int_{t_1}^{t_2}\delta(KE-PE+C)dt=0 \tag{4}$$

که C به منظور برآورده کردن فرض عدم کشیدگی تیر بیان شده است. با اعمال روابط کرنش-جابجایی فون‌کارمن و صفر قرار دادن کرنش تار خنثی، فرض قید عدم کشیدگی منجر به معادله قیدی (5) میان متغیرهای میدان جابجایی می‌شود.

$$u'=-\frac{1}{2}v'^2 \tag{5}$$

که $u=u(x,t)$ و $v=v(x,t)$ به ترتیب بیانگر جابجایی‌های طولی و عرضی تیر هستند. در این‌جا علامت پرایم برای نشان دادن مشتق‌گیری نسبت به پارامتر (x) استفاده شده است. قابل ذکر است که با توجه به رابطه‌ی اخیر v و u، به ترتیب از مرتبه‌های $O(\varepsilon)$ و $O(\varepsilon^2)$ می‌باشند. این موضوع در ساده‌سازی تحلیل با نگه‌داشتن ترم‌های تا مرتبه $O(\varepsilon^4)$ در عبارت‌های انرژی به‌کار گرفته می‌شود و با در نظر گرفتن این مطلب، معادلات (6) و (7) برای ترم‌های انرژی پتانسیل و جنبشی سیستم حاصل می‌شوند.

$$PE=\frac{1}{2}\int_0^l EI\left(v''^2(1+2u')+-2v'v''u''\right)dx+mgv|_{x=Ut} \tag{6}$$

$$KE=\frac{1}{2}\int_0^l \rho A(\dot{u}^2+\dot{v}^2)dx +\frac{1}{2}m\left(U^2+\dot{u}^2+\dot{v}^2+2U\dot{v}v'+2U\dot{u}(1+u')\right)\Big|_{x=vt} \tag{7}$$

قابل ذکر است که در بیان سرعت جرم، هم مولفه سرعت نسبی‌اش نسبت به تیر و هم تأثیر سرعت ناشی از حرکت تیر لحاظ شده است. قید عدم کشیدگی تیر با استفاده از معادله‌ی (8) در همیلتونین وارد می‌شود.

$$C=\int_0^l \lambda(x,t)\left(u'+\frac{1}{2}v'^2\right)dx \tag{8}$$

که ضریب لاگرانژ $\lambda(x,t)$ برای اعمال شرط عدم کشیدگی، داخل اصل تغییرات معرفی شده است. پس از استخراج مقدار تغییراتی همیلتونین، با توجه به این‌که δu، δv و $\delta\lambda$ متغیرهای مجازی مستقل از یکدیگر می‌باشند، عبارت‌های (9) تا (12) حاصل می‌شوند.

$$\rho\ddot{u}-EI\left(v''^2\right)'-EI(v'v'')''-\left(\lambda(1+u')\right)' +(m\ddot{u}+2mU\dot{u}'+mU^2u'')|_{x=Ut}=0 \tag{9}$$

به همراه شرط مرزی طبیعی:

$$EIv''^2\big|_{x=l}+EI(v'v'')'|_{x=l}+\lambda(1+u')|_{x=l}=0 \tag{10}$$

و

$$\rho A\ddot{v}+EIv^{(4)}-EI\left(v''v'^2\right)''-\frac{EI}{2}\left(v''\left(v'^2\right)'\right)' +\frac{EI}{2}\left(v'\left(v'^2\right)'\right)''-(\lambda v')' +(m\ddot{v}+2mU\dot{v}'+mU^2v'')|_{x=Ut} =mg\delta(x-Ut) \tag{11}$$

به همراه رابطه:

$$\left[EIv''+2EIu'v''-EIv'u''\right]_{x=0}^{x=l}=0 \tag{12}$$

که به صورت خودبه‌خود با توجه به شرایط فیزیکی مسأله در دو انتها برآورده می‌شود. همچنین انجام تغییرات نسبت به پارامتر λ تنها منجر به معادله قید می‌گردد. با توجه به قید عدم کشیدگی، می‌توان معادلات حاکم را به تنها یک معادله تقلیل نمود. بدین منظور می‌توان ضریب لاگرانژ $\lambda(x,t)$ را با انتگرال‌گیری از معادله‌ی (9) روی بازه‌ی $[x,l]$ به‌دست آورده و با ترکیب کردن با معادلات (11) و (12)، معادله‌ی (13) را نتیجه گرفت.

$$\rho A\ddot{v}+EIv^{(4)}+EI((v'v'')'v')' -\left(\int_s^l\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_0^x\frac{\rho}{2}v'^2ds\right)dxv'\right)' +(m\ddot{v}+2mU\dot{v}'+mU^2v'')|_{x=Ut}=mg\delta(x-Ut) \tag{13}$$

دقت شود که از نوشتن ترم‌های مرتبه بالاتر با توجه به این که جرم m نیز از مرتبه‌ی $O(\varepsilon)$ است صرف‌نظر شده است.

در این‌جا پس از استخراج معادله‌ی ارتعاش غیرخطی تیر، به تفسیر عبارت‌های $\left(\lambda(1+u')\right)'$ و $(\lambda v')'$ که به ترتیب در معادلات (9) و (11) ظاهر شده‌اند پرداخته می‌شود. همان‌گونه که در "شکل 2" نشان داده شده است

این عبارت‌ها مولفه‌های افقی و عمودی یک نیروی محوری توزیع شده، $\lambda(x,t)$، در طول المان دیفرانسیلی تیر هستند. تصور کنید که تکیه‌گاه سمت راست مشاهده شده در "شکل 2" نیز به صورت مفصلی (در مقابل غلتکی) می‌بود. تیر در اثر تغییر شکل خمشی در صفحه‌ی xy و انحراف از وضعیت اولیه‌ی خود باید بتواند افزایش طول بدهد.بنابراین مسأله‌ی ارتعاش تیر اویلر-برنولی دارای دو درجه آزادی محوری و عرضی است که می‌توان با اعمال قید عدم تغییر طول یا عدم جابجایی تکیه‌گاه تقلیل نمود. در این مسأله، در واقع با اعمال بارگذاری محوری ($\lambda(x,t)$) در طول تیر، وسیله‌ی تأمین این قید فراهم گردید.

3-2- گسسته سازی تیر پیوسته

پس از استخراج معادله دیفرانسیل پاره‌ای حرکت، روش گالرکین به منظور کاهش این معادله به معادلات دیفرانسیل عادی به‌کار گرفته می‌شود. بدین منظور، پاسخ به‌صورت مجموعه‌ای از مودهای حرکتی به‌صورت رابطه‌ی (14) بسط داده می‌شود.

$$v(x,t)=\sum_{i=1}^{n}\phi_i(x)\bar{q}_i(t) \tag{14}$$

که $\bar{q}_i(t)$ مختصه‌ی تعمیم‌یافته‌ی مطابق با i-امین تابع شکل مودال $\phi_i(x)$ است. توابع مودی که شرایط مرزی اساسی تیر با تکیه‌گاه‌های ساده را برآورده کنند می‌توان به صورت رابطه‌ی (15) در نظر گرفت.

$$\phi_i(x)=\sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right),\qquad (i=1,2,3,\dots) \tag{15}$$

با در نظر گرفتن خاصیت تعامد این توابع مودال، معادله دیفرانسیل پاره‌ای حرکت (معادله‌ی (13)) به مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل عادی حاکم بر مختصه‌های مودال، به صورت معادله‌ی (16) تبدیل می‌شود.

$$\mathrm{M}(t)\ddot{\vec{q}}(t)+\mathrm{B}(t)\dot{\vec{q}}(t)+\mathrm{K}(t)\vec{q}(t)+\mathrm{F}(\vec{q},\dot{\vec{q}},\ddot{\vec{q}})=\vec{f}(t) \tag{16}$$

برای مود اول ارتعاشی تیر اویلر-برنولی غیرخطی، معادله‌ی (16) به فرم معادله‌ی (17) استخراج می‌شود.

$$(1+2\varepsilon\sin^2(\tau))\ddot{q}(\tau)+4\varepsilon\sin(\tau)\cos(\tau)\,\dot{q}(\tau)+(\delta-2\varepsilon\sin^2(\tau))q(\tau)+\varepsilon\gamma f_{n\ell}=2\varepsilon g^*\sin(\tau) \tag{17-الف}$$

$$f_{n\ell}=\frac{\pi^2}{2}\left(\delta q^3+\frac{8\pi^2-9}{24}\left(q\dot{q}^2+q^2\ddot{q}\right)\right) \tag{17-ب}$$

که پارامترهای بی‌بعد استفاده شده به صورت رابطه‌ی (18) تعریف می‌شوند.

$$\varepsilon\triangleq\frac{m}{\rho Al},\quad \tau\triangleq\frac{\pi Ut}{l},\quad \delta\triangleq\frac{\pi^2EI}{\rho AU^2l^2},\quad g^*\triangleq\frac{lg}{\pi^2U^2},\quad \sqrt{\varepsilon}q\triangleq\frac{\bar{q}}{l} \tag{18}$$

روش‌های اغتشاشی بایستی در قالب معادلات بی‌بعد شده اعمال گردند تا جملات از نظر مرتبه قابل مقایسه و دسته‌بندی شوند. همچنین ضمن بی‌بعدسازی معادلات، پارامترها از نظر تأثیرگذاری گروه‌بندی شده و امکان مطالعه‌ی تأثیر آن‌ها روی مسأله مهیا می‌گردد که اگر قرار باشد رابطه‌ای از این میان به‌صورت نیمه تحلیلی استخراج شود، با کمترین تعداد آزمایش (یا

Fig. 2 Schematic of the distributed force applied for satisfying the constraint of inextensibility

شکل 2 شمایی از توزیع نیروی محوری موردنیاز جهت تأمین قید عدم تغییر طول

شبیه‌سازی عددی) ممکن گردد. در این مسأله، متغیرهای مستقل و متغیرهای وابسته به صورت معنی‌دار به نحو زیر بی‌بعد گشتند:

$\tau\triangleq\pi Ut/l$: از این حیث که حرکت به‌صورت متناوب با دوره تناوب $T_p=l/U$، مصادف با عبور هر متحرک از عرصه پل، می‌باشد زمان بر حسب آن سنجیده می‌شود.

$\varepsilon\triangleq m/\rho Al$: نسبت جرمی متحرک و سازه تحریک شده، اساس تحلیل اغتشاشی را تشکیل می‌دهد و همان عدد بی‌بعدی است که بسط جملات بر حسب آن صورت می‌پذیرد.

$\delta\triangleq\pi^2EI/\rho AU^2l^2\sim(\omega_{n1}/\omega)^2$: مربع نسبت فرکانس طبیعی اول خمشی تیر به فرکانس اصلی تحریک را نشان می‌دهد.

$g^*\triangleq lg/\pi^2U^2$: به نوعی نسبت نیروی جاذبه به نیروی اینرسی وارد بر متحرک می‌باشد.

$\sqrt{\varepsilon}q\triangleq\bar{q}/l$: متغیر مودال بی‌بعد شده است که تبدیل اضافی $\sqrt{\varepsilon}$ جهت تجمیع تمامی ترم‌های غیرخطی در پوشش ضریب ε در معادله منظور می‌گردد.

پارامتر γ: به منظور دنبال کردن اثر عوامل غیرخطی و مجزا کردن آنها از اثرات ترم‌های متغیر با زمان، مخصوصاً به معادله اضافه شده است.

با توجه به نحوه‌ی بارگذاری نوبه‌ای تیر، ضرایب معادله‌ی (17) به صورت متغیر با زمان و با دوره‌ی تناوب $T_p=l/U$ هستند. بنابراین برای انعکاس این مطلب، با نوشتن بسط فوریه‌ی ضرایب معادله‌ی (17)، معادله‌ی (19) نتیجه می‌شود.

$$\begin{aligned}&\left(1+\varepsilon(1-\cos(2\tau))\right)\ddot{q}(\tau)+2\varepsilon\sin(2\tau)\,\dot{q}(\tau)\\&\qquad+\left(\delta-\varepsilon(1-\cos(2\tau))\right)q(\tau)\\&\qquad+\varepsilon\gamma\frac{\pi^2}{2}\left(\delta q^3+\frac{8\pi^2-9}{24}(q\dot{q}^2+q^2\ddot{q})\right)\\&=2\varepsilon g^*\left(\frac{2}{\pi}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(1-4k^2)}\cos(2k\tau)\right)\end{aligned} \tag{19}$$

3- وجود پدیده پاسخ هم‌زمان

از خاصیت‌های معادلات دیفرانسیل با ضرایب پریودیک می‌توان به وجود زبانه‌های ناپایداری در صفحه پایداری پارامترهای آن‌ها اشاره کرد. معادله‌ی اخیر حاصل شده، نوع خاصی از معادله‌ی هیل است که امکان وجود زبانه‌های ناپایداری برای آن اثبات و مشخص شده است [16]. برای حالت $\gamma=0$، معادله‌ی حاصل بیان‌گر ارتعاشات خطی تیر تحت عبور جرم است که کریم‌پور و همکارانش [17] در تحلیل پایداری سیستم مدنظر، وجود پدیده‌ی پاسخ هم‌زمان را نیز تحلیل و امکان وقوع آن را بررسی کردند. پدیده‌ی پاسخ هم‌زمان در واقع بیان کننده‌ی وجود دو پاسخ مستقل سیستم در ازای یک مقدار خاص از پارامترها است. در سیستم‌هایی که این پدیده اتفاق می‌افتد، دو منحنی گذاری که بایست یک زبانه‌ی ناپایداری را ایجاد کنند بر یکدیگر منطبق شده و در نتیجه، زبانه‌ی ناپایدار ناپدید می‌شود. ان‌جی و رند [18] یک فنر غیرخطی به مدل فیزیکی یک صفحه‌ی نازک اضافه کردند تا اثر جمله‌ی غیرخطی را روی سیستمی که پدیده‌ی پاسخ هم‌زمان در آن رخ می‌دهد بررسی کنند. آن‌ها نتیجه‌گیری کردند که عبارت غیرخطی مرتبه دو بر خلاف جمله مرتبه سه، می‌تواند پایداری مبدأ را تحت تأثیر قرار دهد. در [17]، امکان رخ دادن پدیده‌ی پاسخ هم‌زمان برای مسأله‌ی تیر جرم متحرک بررسی و تحلیل شد. با این وجود، نشان داده شد که این ویژگی منحصر بفرد می‌تواند با ایجاد تغییری اندک در مدل سیستم به چالش کشیده شود. برای نمونه، با اعمال نیروی محوری نوسانی اغتشاشی $p\cos(2\tau)$ به مدل، دیگر

شرایط وقوع پدیده‌ی پاسخ هم‌زمان فراهم نبوده و نواحی ناپایداری مجددا در صفحه‌ی پارامترهای مسأله پدیدار می‌گردند که نشان از حساسیت این پدیده دارد. با لحاظ کردن تمامی اثرات ذکر شده، معادله‌ی حاکم بر مسأله به شکل معادله‌ی (20) حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned}&\big(1+\varepsilon(1-\cos(2\tau))\big)\ddot{q}(\tau)+2\varepsilon(\mu+\sin(2\tau))\dot{q}(\tau)\\&+(\delta-\varepsilon+(\varepsilon+K)\cos(2\tau))q(\tau)\\&+\varepsilon\gamma\frac{\pi^2}{2}\left(\delta q^3+\frac{8\pi^2-9}{24}(q\dot{q}^2+q^2\ddot{q})\right)=0\end{aligned}\tag{20}$$

که $K\triangleq\delta(p/p_{cr})$ و $p_{cr}\triangleq\pi^2EI/l^2$ است و μ برای مدل کردن اثر استهلاک در معادله اضافه شده است.

4- تحلیل پایداری سیستم غیرخطی

به منظور بررسی تأثیر ترم‌های غیرخطی بر تشدید پارامتریک، با توجه به این مطلب که معادله‌ی (20) تفاوت زیادی از حالت خطی‌اش ندارد، حل تقریبی مرتبه اولی از معادله با استفاده از روش‌های مقیاس‌های چندگانه ارائه می‌شود. به‌منظور بررسی شرایط پایداری سیستم، با دنبال کردن این روش تقریبی، معادلات مدولاسیون حاکم بر دامنه و فاز پاسخ به دست آورده می‌شوند. برای این منظور، با تعریف مقیاس‌های زمانی متفاوت $T_i=\varepsilon^i\tau$ ، $i=0,1,2,\dots$ و مشتقات پاره‌ای متناظر $D_i\triangleq\partial/\partial T_i$ ، ابزارهای لازم به صورت رابطه‌ی (21) تولید می‌شوند.

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau}&=\frac{\partial}{\partial T_0}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial T_1}+\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial T_2}+\cdots\\&=D_0+\varepsilon D_1+\varepsilon^2D_0+\cdots\\\frac{d^2}{d\tau^2}&=\frac{\partial^2}{\partial {T_0}^2}+2\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial T_0\partial T_1}+\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2}{\partial {T_1}^2}+2\frac{\partial^2}{\partial T_0\partial T_2}\right)+\cdots\\&=D_0^2+2\varepsilon D_0D_1+\varepsilon^2(D_1^2+2D_0D_2)+\cdots\end{aligned}\tag{21}$$

با توجه به کوچک بودن ε ، انتظار می‌رود که ترم‌های غیرخطی تغییراتی در پاسخ خطی ایجاد کند و لذا می‌توان بسط یکنواختی به فرم رابطه‌ی (22) برای پاسخ در نظر گرفت [16].

$$q(\tau;\varepsilon)=q_0(T_0,T_1,T_2,\dots)+\varepsilon q_1(T_0,T_1,T_2,\dots)+\cdots\tag{22}$$

با قرار دادن روابط (21) و (22) در (20) و معادل قرار دادن جملات هم مرتبه‌ی ε، روابط (23) و (24) حاصل می‌شود.

$$\varepsilon^0:\ D_0^2q_0+\delta q_0=0,\tag{23}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon^1:\ &D_0^2q_1+\delta q_1=\big(1-(1+K)\cos(2T_0)\big)q_0\\&-2D_0D_1q_0-(1-\cos(2T_0))D_0^2q_0\\&-2(\mu+\sin(2T_0))D_0q_0\\&-\gamma\frac{\pi^2}{2}\left(\delta q_0^3+\frac{8\pi^2-9}{24}(q_0(D_0q_0)^2+q_0^2D_0^2q_0)\right)\end{aligned}\tag{24}$$

پاسخ معادله‌ی مرتبه صفر را می‌توان به صورت رابطه‌ی (25) نوشت.

$$q_0=A(T_1)\exp(i\omega T_0)+\bar{A}(T_1)\exp(-i\omega T_0)\tag{25}$$

که در معادله‌ی اخیر، $\omega\triangleq\sqrt{\delta}$ است. با جایگذاری این پاسخ در معادله‌ی مرتبه اول، رابطه‌ی (26) نتیجه می‌شود.

$$\begin{aligned}&D_0^2q_1+\omega^2q_1=\\&\left(-2i\mu\omega A+A+A\omega^2-2i\omega D_1A+\pi^2\left(\frac{\pi^2}{3}-\frac{15}{8}\right)\gamma\omega^2A^2\bar{A}\right)\\&\exp(i\omega T_0)\\&+\left(-\frac{1}{2}\bar{A}\omega^2+\bar{A}\omega-\frac{1}{2}K\bar{A}-\frac{1}{2}\bar{A}\right)\exp[i(2-\omega)T_0]\\&+\left(-\frac{1}{2}A\omega^2-A\omega-\frac{1}{2}KA-\frac{1}{2}A\right)\exp[i(2+\omega)T_0]\\&+\left(\frac{\pi^4}{3}-\frac{7\pi^2}{8}\right)\gamma\omega^2A^3\exp(3i\omega T_0)+cc.\end{aligned}\tag{26}$$

که $cc.$ برای بیان مزدوج مختلط عبارت قبلی‌اش استفاده شده است و همچنین $\bar{A}$ بیان‌کننده‌ی مزدوج مختلط A است. برای تحلیل تشدید پارامتریک اولیه که برای $\omega\approx1$ اتفاق می‌افتد، پارامتر تنظیم σ با رابطه‌ی (27) برای انحراف پارامتر ω از مقدار یک تعریف می‌شود.

$$1=\omega+\varepsilon\sigma\tag{27}$$

برای این‌که معادله‌ی (26) برای q_1 حل‌پذیر باشد باید جملاتی از این معادله که تولید عبارت سکولار می‌کنند حذف شوند که در نتیجه رابطه‌ی (28) حاصل می‌شود.

$$\left(-2i\mu\omega A+A+A\omega^2-2i\omega D_1A+\pi^2\left(\frac{\pi^2}{3}-\frac{15}{8}\right)\gamma\omega^2A^2\bar{A}\right)=0\tag{28}$$

این معادله، شرایط لازم برای دامنه‌ی مختلط A را برای این‌که پاسخ پریودیکی برای معادله‌ی (26) حاصل شود بیان می‌کند. با قرار دادن $A=a\exp(i\varphi)/2$ در رابطه‌ی (28)، که $a=a(T_1)$ و $\varphi=\varphi(T_1)$ ، توابع حقیقی هستند، قسمت‌های حقیقی و موهومی جدا شده و به صورت روابط (29) و (30) حاصل می‌شوند.

$$\omega a'=-\mu a\omega-\frac{1}{4}Ka\sin(2\sigma T_1-2\varphi)\tag{29}$$

$$\begin{aligned}\omega a\varphi'=&-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}a\omega^2-\frac{\pi^2}{8}\left(\frac{\pi^2}{3}-\frac{15}{8}\right)\gamma\omega^2a^3\\&+\frac{1}{4}Ka\cos(2\sigma T_1-2\varphi)\end{aligned}\tag{30}$$

که علامت پرایم برای بیان مشتق‌گیری نسبت به T_1 به‌کار گرفته شده است. جمع‌بندی تمامی عملیات اخیر، منجر به یک حل تقریبی حول تشدید اولیه به صورت رابطه‌ی (31) گردید.

$$q=a\cos(\tau-\psi)\tag{31}$$

که متغیر $\psi=\sigma T_1-\varphi$ به منظور حذف صریح زمان از معادلات مدولاسیون و تبدیل آن‌ها به شکل روابط (32) و (33) تعریف شده است.

$$a'=-\mu a-\frac{1}{4}Ka\sin(2\psi)\tag{32}$$

$$\psi'=\sigma+1+\frac{\pi^2}{8}\left(\frac{\pi^2}{3}-\frac{15}{8}\right)\gamma a^2-\frac{1}{4}K\cos(2\psi)\tag{33}$$

دقت می‌شود که عوامل غیرخطی (که با γ همراه هستند) به‌صورت مستقیم بر دامنه‌ی پاسخ تأثیر نمی‌گذارند و تأثیر آن بر دامنه به‌صورت غیرمستقیم و از طریق تغییر فاز می‌باشد.

حالات تعادل معادلات اخیر با قرار دادن $a'=\psi'=0$ حاصل می‌شود که برای داشتن پاسخ غیربدیهی، منجر به معادلات (34) و (35) می‌شود.

$$\sin(2\psi)=-\frac{4\mu}{K}\tag{34}$$

$$\cos(2\psi)=\frac{4}{K}\left(\sigma+1+\frac{\pi^2}{8}\left(\frac{\pi^2}{3}-\frac{15}{8}\right)\gamma a^2\right)\tag{35}$$

با حذف کردن ψ از معادلات (34) و (35)، دامنه‌ی حالت ماندگار پاسخ برای تقریب مرتبه‌ی اول به صورت رابطه‌ی (36) حاصل می‌شود.

$$a^2=\frac{8}{\gamma_1}\left(-1-\sigma\pm\sqrt{\left(\frac{K}{4}\right)^2-\mu^2}\right)\tag{36}$$

که $\gamma_1=\gamma\pi^2(\pi^2/3-15/8)$ است.

5- تحلیل پایداری سیستم غیرخطی

برای این‌که پاسخ حالت ماندگار وجود داشته باشد باید a^2 در معادله‌ی (36) و همچنین جمله‌ی ظاهر شده در زیر علامت رادیکال، عبارت‌های مثبت باشند، بنابراین می‌توان رابطه‌ی (37) را تعریف کرد.

$$2\mu \le \frac{K}{2} \tag{37}$$

به عبارتی برای داشتن پاسخ پریودیک، دامنه‌ی نیروی بازگرداننده‌ی (K) باید بزرگتر از دو برابر ضریب استهلاک باشد (یادآوری می‌شود که ضریب استهلاک با توجه به معادله‌ی (20) برابر 2μ در نظر گرفته شده است). علاوه بر این، حالات متفاوتی برای دامنه‌ی پاسخ a به وجود خواهد آمد که در رابطه‌ی (38) نمایش داده شده‌اند.

$$\begin{cases} 1+\sigma < -\sqrt{\left(\frac{K}{4}\right)^2-\mu^2} \rightarrow \left(\text{ناحیه I}\right) \text{دو پاسخ} \\ |1+\sigma| < \sqrt{\left(\frac{K}{4}\right)^2-\mu^2} \rightarrow \left(\text{ناحیه II}\right) \text{یک پاسخ} \\ 1+\sigma > \sqrt{\left(\frac{K}{4}\right)^2-\mu^2} \rightarrow \left(\text{ناحیه III}\right) \text{پاسخی وجود ندارد} \end{cases} \tag{38}$$

این شرایط باعث ایجاد تفاوت‌هایی در پاسخ سیستم با توجه به پارامترهای انتخابی مسأله می‌شود. در ادامه، پایداری پاسخ‌های ممکن با توجه به این نواحی مجزا بررسی خواهد شد.

هر نقطه‌ی منفرد، متناظر با یک پاسخ پریودیک حالت ماندگار معادله‌ی غیرخطی حاکم است. بنابراین بررسی پایداری پاسخ حالت ماندگار دقیقا همان مسأله‌ی تعیین طبیعت نقاط منفرد از طریق ماتریس خطی‌شده‌ی ضرایب معادلات (32) و (33) است. ماتریس ضرایب مد نظر به صورت رابطه‌ی (39) حاصل می‌شود.

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{K}{2}a_0\cos(2\psi_0) \\ \frac{\gamma_1}{4}a_0 & \frac{K}{2}\sin(2\psi_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{K}{2}a_0\cos(2\psi_0) \\ \frac{\gamma_1}{4}a_0 & -2\mu \end{bmatrix} \tag{39}$$

که زیرنویس صفر نشان‌دهنده‌ی مقادیر متناظر با حالت تعادل سیستم است. مقادیر ویژه‌ی A عبارتند از:

$$\lambda_{1,2} = -\mu \pm \left[\mu^2 - Ka_0^2\frac{\gamma_1}{8}\cos\left(2\psi_0\right)\right]^{\frac{1}{2}} \tag{40}$$

اگر $\cos(2\psi_0)$ مثبت باشد نقطه‌ی تعادل یک نقطه پایدار می‌باشد و در صورتی که منفی شود نقطه‌ی تعادل یک نقطه‌ی زینی بوده و پایدار نیست. می‌توان نشان داد زمانی که دو نقطه‌ی تعادل برای پاسخ وجود دارد، برای پاسخ با دامنه‌ی کوچکتر، $\cos(2\psi_0)$ منفی و بنابراین ناپایدار و همچنین برای پاسخ با دامنه‌ی بزرگتر، $\cos(2\psi_0)$ مثبت بوده و لذا پایدار است. هنگامی که تنها یک پاسخ وجود دارد، $\cos(2\psi_0)$ مثبت بوده و در نتیجه پاسخ پایدار است. برای بحث و تحلیل بیشتر، معادله‌ی دامنه‌ی حالت ماندگار به صورت معادله‌ی (41) بازنویسی می‌شود.

$$a^2 = \frac{8}{\hat{\gamma}_1}\left(-\varepsilon - \hat{\sigma} \pm \frac{1}{4}\sqrt{\varepsilon^2K^2 - (4\hat{\mu})^2}\right) \tag{41}$$

که پارامترهای $\hat{\sigma} = \varepsilon\sigma$، $\hat{\gamma}_1 = \varepsilon\gamma_1$ و $\hat{\mu} = \varepsilon\mu$ مخصوصا و برای وارد کردن پارامتر ε در معادله تعریف شده‌اند. در تحلیل‌هایی که در این‌جا آورده می‌شود فرکانس تحریک، ثابت در نظر گرفته می‌شود در حالی که تغییرات روی فرکانس طبیعی و حول تشدید اولیه انجام می‌گیرد. هر چند به سادگی می‌توان تحلیل‌ها را با کمی تغییر در ظاهر معادله، برای تغییرات فرکانس تحریک انجام داد.

برای جفت مشخص $(\hat{\mu},\hat{\gamma}_1)$، صفحه‌ی پارامترهای $\varepsilon - \hat{\sigma}$ با استفاده از منحنی‌های $\hat{\sigma} = -\varepsilon \pm \frac{1}{4}\sqrt{(\varepsilon K)^2 - (4\hat{\mu})^2}$ و $\varepsilon = 4\hat{\mu}/K$ به سه ناحیه‌ی مجزا مطابق "شکل 3" تقسیم می‌شود. دقت می‌شود که مرز این نواحی مستقل از ضریب عامل غیرخطی $\hat{\gamma}_1$ است. این امر بیان می‌کند که نگاره‌ی ناپایداری مشابه با حالت مسأله خطی متناظر است. در واقع، در غیاب ترم‌های غیرخطی منحنی ناپایداری برای مسأله‌ی خطی در پژوهشی اخیرا مورد بررسی و ترسیم شده است [17]. با این وجود، پاسخ سیستم به طور حتم همان‌گونه که در ادامه نشان داده می‌شود تحت تأثیر ترم‌های غیرخطی قرار می‌گیرد.

برخلاف سیستم خطی که پایداری آن مستقل از دامنه است، به نظر می‌آید که رفتار سیستم غیرخطی کاملا به دامنه وابسته است. در ناحیه‌ی I، پاسخ سیستم غیرخطی به یک اغتشاش اولیه ممکن است میرا شود و یا به یک پاسخ پریودیک پایدار انجامد. این در حالی است که با انتخاب پارامترهای جرم عبوری از این ناحیه، پاسخ سیستم خطی به هر شرط اولیه‌ای میرا می‌شود. در ناحیه‌ی II، پاسخ سیستم خطی به هر شرط اولیه‌ی غیرصفر به صورت نامحدود رشد می‌کند در حالی که پاسخ سیستم غیرخطی نهایتا محدود خواهد شد. با توجه به وابستگی فرکانس به دامنه برای سیستم غیرخطی، وقتی که دامنه‌ی پاسخ رشد می‌کند سیستم از حالت تشدید خارج شده و در نتیجه پاسخ محدود باقی می‌ماند. به نظر می‌آید که پاسخ سیستم برای پارامترهای انتخابی از ناحیه‌ی III، برای هر شرایط اولیه‌ی دلخواهی بدون توجه به دامنه‌ی آن میرا می‌شود.

نتایج در صفحه پارامتری "شکل 3" پایداری را برحسب جرم و سرعت بی‌بعد متحرک بیان می‌نماید. آن‌طور که پیدا است به ازای مقدار معین جرم متحرک، محدوده مشخصی از سرعت‌های بحرانی (حد بالا و پائین) وجود خواهد داشت که البته رفتار سیستم غیرخطی به چگونگی روند رسیدن به سرعت‌های مزبور (مرزهای ناحیه بحرانی) بستگی خواهد داشت. این محدوده با کاهش مقدار جرم متحرک باریک‌تر شده تا اینکه از یک حد به پائین دیگر وضعیت بحرانی به ازای هیچ سرعتی رخ نخواهد داد.

6- صحت‌سنجی با نتایج عددی و توجیهات فیزیکی

در این‌جا فرض می‌شود که با ثابت نگه داشتن پارامتر ε، پارامتر $\hat{\sigma}$ بطور پیوسته تغییر کند. همان‌طور که از "شکل 4" مشخص است در فاصله‌ی A_1 و A_2، پاسخ بدیهی صفر و پاسخ با دامنه‌ی بزرگتر رابطه‌ی (41) هر دو پایدار بوده و لذا دو پاسخ متفاوت (با توجه به جهت افزایش یا کاهش فرکانس) قابل حصول است. افزایش بیشتر پارامتر تنظیم باعث ناپایدار شدن پاسخ با دامنه‌ی

Fig. 3 Solution regions in the plane of parameters

شکل 3 نواحی مختلف پاسخ در صفحه‌ی پارامترها

صفر می‌شود و منجر به وقوع پرشی در دامنه (از A_2 به A_2') می‌شود. با افزایش بیشتر فرکانس، دامنه‌ی تنها پاسخ موجود به صورت مداوم کاهش یافته تا به مقدار صفر برسد، به قسمی که برای نقاط فراتر از A_3، دیگر پاسخ نوسانی دایمی وجود ندارد.

به منظور بررسی صحت نتایج حاصل شده اخیر، در "شکل 5" تغییرات زمانی دامنه‌ی ارتعاشات سیستم غیرخطی تیر-جرم متحرک با انتخاب مقادیر $\varepsilon = 0.01$، $\mu = 0.1$ و $\gamma = 1$ برای پارامترهای مسأله ترسیم شده است. این در حالی است که فرکانس به‌طور پیوسته و البته تا حصول پاسخ مانا افزایش داده شده است.

شکل نوسانات همان گونه که انتظار می‌رفت و پیش‌بینی می‌شد مشابه مسیر $A_1 - A_2 - A_2' - A_3'$ از "شکل 4" حاصل شده است. مشاهده می‌شود که در $\sigma = -1.21$ پرشی در دامنه‌ی ارتعاشی سیستم از دامنه‌ی صفر به $a = 0.5$ اتفاق افتاده است. این پرش معادل با پرش مشاهده شده در "شکل 4" از نقطه‌ی A_2 به A_2' است.

Fig. 4 Frequency response of the nonlinear system around $\omega = 1$

شکل 4 پاسخ فرکانسی سیستم غیرخطی حول $\omega = 1$

Fig. 5 Time history illustrating jump in amplitude for a mass ratio of $\varepsilon = 0.01$ while detuning frequency upward

شکل 5 تاریخچه زمانی پرش دامنه برای نسبت جرمی $\varepsilon = 0.01$ در جاروب صعودی فرکانس

براساس پدیده‌ی شناخته‌شده‌ی پرش انتظار می‌رود تغییرات پاسخ سیستم نسبت به تغییر پارامتر تنظیم $\hat{\sigma}$ در مسیرهای رفت و برگشت با یکدیگر متفاوت باشد. آن‌گونه که در "شکل 5" مشاهده شد با افزایش پارامتر تنظیم، پرشی در دامنه‌ی پاسخ رویت گردید ولی با برگرداندن تدریجی همین پارامتر به مقدار اولیه‌ی خود، شکلی متفاوت از پاسخ مطابق "شکل 6" حاصل می‌شود. با توجه به شکل مشاهده می‌شود که در ابتدا، دامنه‌ی a برابر صفر است تا پارامتر $\hat{\sigma}$ به مقدار -0.76 برسد. این مقدار معادل با مقدار $\hat{\sigma}$ برای نقطه‌ی A_3 در "شکل 4" است. با کاهش بیشتر پارامتر $\hat{\sigma}$ مشاهده می‌شود که دامنه‌ی ارتعاشی به صورت پیوسته افزایش می‌یابد. در این حالت بر خلاف مسیر افزایشی پارامتر $\hat{\sigma}$، دیگر سقوطی در محل پرش قبلی به دامنه‌ی صفر اتفاق نمی‌افتد.

در "شکل 7"، دامنه‌ی نوسانات مانای سیستم a، برحسب نسبت جرم بار عبوری به جرم تیر ε، با ثابت نگه داشتن پارامتر $\hat{\sigma}$ ترسیم شده است. همان‌گونه که مشاهده می‌شود به محض ورود به مرزهای نواحی پایدار و ناپایدار، پدیده‌ی پرش اتفاق می‌افتد. با استفاده از این شکل می‌توان تغییرات a را وقتی که ε به آهستگی از صفر افزایش می‌یابد دنبال کرد. تا رسیدن به نقطه‌ی B_3، دامنه‌ی پایدار مخالف صفر برای پاسخ سیستم وجود ندارد. در نقطه‌ی B_3، پاسخ بدیهی صفر ناپایدار شده و افزایش جزیی در مقدار ε در این نقطه، سبب جهش ناگهانی دامنه تا نقطه B_3' می‌شود. قابل ذکر است که پرش مذکور مربوط به بخش ماندگار پاسخ می‌باشد و گذر دامنه از این ناپیوستگی در واقع طی نوساناتی گذرا اتفاق می‌افتد. افزایش بیشتر ε، باعث کاهش تدریجی دامنه‌ی پاسخ تا رسیدن به دامنه‌ی صفر در نقطه B_4 و نقاط بعدی می‌شود.

در فرآیند معکوس و برای حالت کاهش ε، دامنه مطابق منحنی $DB_3'C$ افزایش می‌یابد. این بار وقتی که ε به مقدار متناظر با نقطه‌ی B_3' می‌رسد بدون این‌که جهش به سمت پایینی به سمت نقطه‌ی B_3 اتفاق افتد افزایش پیوسته‌ی دامنه تا نقطه‌ی C ادامه می‌یابد. در این نقطه با کاهشی جزیی در مقدار ε، مقدار دامنه جهش به سمت پایینی به نقطه B_2 داشته و در نتیجه دامنه صفر می‌شود.

Fig. 6 Time history illustrating amplitude growth for a mass ratio of $\varepsilon = 0.01$ while detuning frequency downward

شکل 6 تاریخچه‌ی زمانی رشد دامنه برای نسبت جرمی $\varepsilon = 0.01$ در جاروب نزولی فرکانس

Fig. 7 Variation of amplitude illustrating jumps with respect to mass ratio

شکل 7 تغییرات دامنه به صورت پرش به ازای تغییر در نسبت جرمی

7- نتیجه‌گیری و جمع‌بندی

در این مقاله، حرکت ارتعاشی تیری با تکیه‌گاه‌های ساده که تحت عبور متناوب جرم‌ها قرار گرفته است با استفاده از روش اغتشاشی مقیاس‌های چندگانه بررسی شد. معادلات حاکم بر مسأله با در نظر گرفتن مدل به عنوان سیستمی باز با مرزهای نفوذپذیر با استفاده از اصل تعمیم‌یافته‌ی همیلتون استخراج شد. به منظور کاهش مرتبه سیستم، ضریب لاگرانژی برای تأمین قید عدم کشیدگی صفحه‌ی میانی تیر معرفی شد. عبارت‌های غیرخطی و همچنین جملات متغیر با زمان در تحلیل در نظر گرفته شدند. وقوع پدیده‌ی پرش که از مشخصه‌های سیستم‌های غیرخطی است نشان داده شد. نتایج تحلیل‌های اغتشاشی نشان می‌دهد که حضور ترم‌های غیرخطی تأثیری بر مرز ناپایداری سیستم ندارد ولی پاسخ را در نزدیکی تشدید سیستم محدود می‌کند که به علت مشخصه‌ی وابستگی فرکانس به دامنه است. این حقیقت سبب می‌شود که موقعیت تشدید تغییر کرده و در نتیجه روند افزایشی دامنه متوقف شود. تطابق نتایج شبیه‌سازی‌های عددی با نتایج حاصل از روش اغتشاشی، تأیید کننده‌ی نتایج تحلیلی حاصل است.

8- فهرست علایم

A	مساحت مقطع تیر (m^2)
C	قید عدم کشیدگی تیر
E	مدول یانگ (Pa)
g	شتاب گرانش (ms^{-2})
I	ممان اینرسی تیر (m^4)
i	شماره‌ی مود ارتعاشی سیستم
KE	انرژی جنبشی سیستم
L	لاگرانژین سیستم
l	طول تیر (m)
m	جرم بارهای عبوری (kg)
PE	انرژی پتانسیل سیستم
q	مختصه‌ی تعمیم‌یافته
T_p	دوره تناوب سیستم
t	زمان (s)
U	سرعت بارهای عبوری (ms^{-1})
u	جابجایی طولی تیر (m)
v	جابجایی عرضی تیر (m)

علایم یونانی

γ	ترم مشخص‌کننده‌ی عوامل غیرخطی
ε	جرم بی‌بعد بارهای عبوری و پارامتر مقیاس کوچک
μ	ضریب استهلاک
ρ	جرم واحد طول تیر (kgm^{-1})
σ	پارامتر تنظیم
τ	زمان بی‌بعد
ϕ	تابع شکل مودال تیر
ω	فرکانس بی‌بعد تحریک پارامتریک

9- مراجع

[1] H. Ouyang, Moving-load dynamic problems: a tutorial (with a brief overview, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 25, No. 6, pp. 2039-2060, 2011.
[2] M. Pirmoradian, M. Keshmiri, H. Karimpour, Instability and resonance analysis of a beam subjected to moving mass loading via incremental harmonic balance method, *Journal of Vibroengineering*, Vol. 16, No. 6, pp. 2779-2789, 2014.
[3] M. Pirmoradian, M. Keshmiri, H. Karimpour, On the parametric excitation of a Timoshenko beam due to intermittent passage of moving masses: instability and resonance analysis, *Acta Mechanica*, Vol. 226, No. 4, pp. 1241-1253, 2015.
[4] Z. Hryniewicz, P. Kozioł, Wavelet-based solution for vibrations of a beam on a nonlinear viscoelastic foundation due to moving load, *Journal* of *Theoretical and Applied Mechanics*, Vol. 51, No. 1, pp. 215-224, 2013.
[5] A. Mamandi, M. H. Kargarnovin, Dynamic analysis of an inclined Timoshenko beam traveled by successive moving masses/forces with inclusion of geometric nonlinearities, *Acta Mechanica*, Vol. 218, No. 1, pp. 9-29, 2011.
[6] G. G. Adams, Critical speeds and the response of a tensioned beam on an elastic foundation to repetitive moving loads, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 37, No. 7, pp. 773-781, 1995.
[7] X. Xu, W. Xu, J. Genin, A non-linear moving mass problem, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 204, No. 3, pp. 495-504, 1997.
[8] R. T. Wang, T. H. Chou, Non-linear vibration of Timoshenko beam due to a moving force and the weight of beam, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 218, No. 1, pp. 117-131, 1998.
[9] Y. M. Wang, The dynamical analysis of a finite inextensible beam with an attached accelerating mass, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 35, No. 9-10, pp. 831-854, 1998.
[10] S. A. Q. Siddiqui, M. F. Golnaraghi, G. R., Heppler, Dynamics of a flexible beam carrying a moving mass using perturbation, numerical and time frequency analysis techniques, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 229, No. 5, pp. 1023-1055, 2000
[11] Y. M. Wang, The dynamic analysis of a beam-mass system due to the occurrence of two-component parametric resonance, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 258, No. 5, pp. 951–967, 2002.
[12] A. N. Yanmeni Wayou, R. Tchoukuegno, P. Woafo, Non-linear dynamics of an elastic beam under moving loads, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 273, No. 4-5, pp. 1101-1108, 2004.
[13] M. Poorjamshidian, J. Sheikhi, S. Mahjoub-Moghadas, M. Nakhaie, Nonlinear vibration analysis of the beam carrying a moving mass using modified homotopy, *Journal of Solid Mechanics*, Vol. 6, No. 4, pp. 389-396, 2014.
[14] L. Pan, N. Qiao, W. Lin, Y. Liang, Stability and local bifurcation in a simply-supported beam carrying a moving mass, *Acta Mechanica Solida Sinica*, Vol. 20, No. 2, pp. 123-129, 2007.
[15] D. B. McIver, Hamilton's principle for systems of changing mass, *Journal of Engineering Mathematics*, Vol. 7, No. 3, pp. 249-261, 1973.
[16] A. H. Nayfeh, D. T. Mook, *Nonlinear Oscillations*., pp. 273-302, New York: John Wiley, 1979.

[17] H. Karimpour, M. Pirmoradian, M. Keshmiri, Instance of hidden instability traps in intermittent transition of moving masses along a flexible beam, *Acta Mechanica*, Vol. 227, No. 4, pp. 1213-1224, 2016.

[18] L. Ng, R. Rand, Nonlinear effects on coexistence phenomenon in parametric excitation, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 31, No. 1, pp. 73-89, 2003.