مجله مهندسی مکانیک مدرس، فروردین 1396، دوره 17، شماره 1، ص‌ص 353-364

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

ارائه مدل جامع برای محاسبه بارهای آیرودینامیک ناپایای تراکم‌ناپذیر- تراکم‌پذیر زیرصوت با استفاده از توابع اندیسی

مهدی نجاتی[1]، سعید شکراللهی[2*]، شاهرخ شمس[3]

1- دانشجوی دکتری، مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران
2- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران
3- استادیار، مهندسی هوافضا، دانشگاه تهران، تهران
* تهران، 1678815611، s_shokrollahi@mut.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 18 مهر 1395
پذیرش: 10 دی 1395
ارائه در سایت: 28 دی 1395

کلید واژگان:
بارهای آیرودینامیکی ناپایا
جریان تراکم‌ناپذیر/ تراکم پذیر مادون صوت
توابع آیرودینامیک اندیسی

چکیده

برای محاسبه بارهای آیرودینامیکی ناپایا در جریان‌های تراکم‌ناپذیر و تراکم‌پذیر زیرصوت با استفاده از مفهوم توابع اندیسی مدل جدیدی ارائه می‌شود. توابع اندیسی، بیانگر بارهای آیرودینامیکی یک بالواره، ناشی از تغییر پله در زاویه حمله و نرخ پیچش می‌باشند. برای تعیین بارهای آیرودینامیکی درجریان تراکم‌ناپذیر وجود یک تابع اندیسی کفایت می‌نماید، درحالی که برای توصیف آنها در جریان تراکم‌پذیر به چهار تابع اندیسی مستقل نیاز است. در صورت مشخص بودن توابع اندیسی می‌توان با استفاده از اصل جمع آثار پاسخ‌های این توابع و انتگرال دوهامل، بارهای آیرودینامیکی ناپایای یک بالواره در حرکتی دلخواه را تعیین کرد. با هدف یکپارچه‌سازی روابط آیرودینامیک برای همه محدوده‌های جریان زیرصوت یعنی بازه ماخ صفر تا ماخ 0.8، تقریبی جدید و کارآمد از توابع اندیسی با استفاده از عبارت‌های تحلیلی و داده‌های عددی موجود ارائه می‌شود، که علاوه بر تابعیت پیوسته از عدد ماخ دارای شکل مناسبی برای انتقال آنها به سایر نقاط روی بالواره می‌باشد. با کاهش ضرایب تابع عدد ماخ از 7 به 4 در توابع اندیسی متداول، تعداد ضرایب لازم برای توصیف کامل بارهای آیرودینامیکی از 28 به 16 تقلیل می‌یابد. سپس، با بهره‌گیری از این توابع اندیسی، نمایشی نوین و مناسب مسائل آیروالاستیک از بارهای آیرودینامیکی در محدوده جریان‌های تراکم‌ناپذیر و تراکم‌پذیر زیرصوت توسعه داده می‌شود. همچنین بر اساس تئوری نواری و اصلاح شیب منحنی برآ، مدل آیرودینامیک مذکور برای بال سه‌بعدی تعمیم می‌یابد. به‌منظور اعتبار سنجی مدل آیرودینامیکی، نمودارهای توابع اندیسی توسعه‌یافته با نمودارهای موجود در سایر مراجع در اعداد ماخ مختلف مقایسه و مطابقت خوبی بین آنها مشاهده می‌شود.

A comprehensive model to compute incompressible-subsonic compressible unsteady aerodynamic loads using indicial functions

Mahdi Nejati[1], Saeed Shokrollahi[1*], Shahrokh Shams[2]

1- Department of Aerospace Engineering, Malek-Ashtar University of Technology, Tehran, Iran.
2- Department of Aerospace Engineering, Faculty of New Sciences and Technologies, University of Tehran, Tehran, Iran.
* P.O.B. 1678815611 Tehran, Iran, s_shokrollahi@mut.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 09 October 2016
Accepted 30 December 2016
Available Online 17 January 2017

Keywords:
Unsteady aerodynamic loads
Incompressible/subsonic compressible flow
Indicial aerodynamic functions

ABSTRACT

In this paper, a novel model based on the indicial functions concept is presented to calculate the unsteady aerodynamic loads in the incompressible and subsonic compressible flow. Indicial functions represent the two-dimensional airfoil response to a unit step change in the angle of attack or the pitch rate about the reference axis. In contrast to the incompressible flow where the aerodynamic loads can be determined in terms of a single indicial function, four indicial aerodynamic functions are required to find them in the compressible one. If the indicial functions are known, the unsteady loads can then be obtained through the superposition of indicial responses using Duhamel's integral for any arbitrary motion. For the purpose of combining the aerodynamic loads for the entire subsonic flow speed range, i.e. $0 \leq M \leq 0.8$, new, efficient and Mach dependent approximations of the indicial functions are presented by using the analytical as well as numerical data. Using four instead of seven Mach dependent coefficients in the common indicial functions, the required coefficient are decreased from 28 to 16 to fully describe the aerodynamic loads. Utilizing the indicial functions, a novel and convenient form of unsteady aerodynamic loads and the corresponding state-space representation are presented, having a unified formulation in incompressible and subsonic compressible flight speed regimes. Based on the strip theory as well as the modified lift curve slope, the finite span effect of 3D wings is also included. The generated indicial functions are validated against available results, which shows a good agreement.

1- مقدمه

Please cite this article using:

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

M. Nejati, S. Shokrollahi, Sh. Shams, A comprehensive model to compute incompressible-subsonic compressible unsteady aerodynamic loads using indicial functions, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 1, pp. 353-364, 2017 (in Persian)

موضوع کلیدی برای تحلیل آیروالاستیسیته موفق، مدل‌سازی صحیح و کارآمد بارهای آیرودینامیکی ناپایا در حرکت یا تغییر شکل جسم آیرودینامیکی می‌باشد. بارهای آیرودینامیکی را می‌توان بر مبنای انواع مختلف از تئوری‌های آیرودینامیکی از قبیل تئوری نواری، روش شبکه گردابی ناپایا[1]، تئوری پاسخ اندیسی[2] و تکنیک‌های مدرن آیرودینامیکی ،دینامیک سیالات محاسباتی اویلر یا نویر-استوکس استخراج نمود. بارهای آیرودینامیکی بسته به کاربرد می‌توانند در حوزه فرکانس یا زمان بیان شوند. نمایش بارهای آیرودینامیکی در حوزه فرکانس به لحاظ تعیین مرز پایداری فلاتر و تحلیل پایداری با استفاده از رویکرد مقادیر ویژه مفید می‌باشد. با این‌حال به منظور بررسی پاسخ دینامیکی سیستم‌های آیروالاستیک، تحلیل آیروالاستیک غیر خطی یا بکارگیری سیستم کنترلی حلقه بسته، نمایش نیروهای آیرودینامیکی ناپایا در حوزه زمان اجتناب ناپذیر خواهد بود. حل‌های کلاسیکی برای نیروی برآ و گشتاور پیچشی آیرودینامیک دوبعدی توسط تئودورسن، گرینبرگ و وگنر در حوزه‌های فرکانس و زمان ارائه شده‌اند [1]. با توجه به فرض حرکت هارمونیک ساده، تئوری‌های ارائه شده توسط تئودورسن و گرینبرگ تنها در مرز فلاتر اعتبار داشته و روش حل را نیز به محدوده فرکانس محدود می‌نمایند. از طرفی با توجه به اثرات تراکم پذیری جریان بر تحلیل‌های آیروالاستیک، پاسخ اندیسی بدست آمده در حوزه زمان توسط وگنر نیز دارای کاربرد محدود می‌باشد. اگر چه، در حال حاضر به کمک پیشرفت روش‌های عددی نظیر روش شبکه گردابی ناپایا، و دینامیک سیالات محاسباتی می‌توان با جزئیات بسیار و دقت بالا پاسخ آیرودینامیک ناپایای یک بالواره را به یک تاریخچه زمانی خاص از نیرو بدست آورد، اما به دلیل پیچیدگی‌های ذاتی این روش‌ها و نیز لزوم در اختیار داشتن مراجع محاسباتی گسترده، استفاده روش‌های مذکور برای تحلیل مسائل آیروالاستیسیته متداول ناکارآمد یا بعضاً غیر عملی می‌باشد [1]. از این‌رو، با توجه به لزوم در اختیار داشتن مدل آیرودینامیک ناپایا در حوزه زمان که اثرات تراکم پذیری جریان و تغییرات دلخواه در زاویه حمله یا نرخ پیچش را بر داشته و از طرف دیگر منجر به ارائه مدل محاسباتی مناسب و به نسبت ساده از کوپلینگ مدل آیرودینامیک ناپایا با مدل سازه در بررسی‌های آیروالاستیک گردد، محققان را به استفاده از روش‌های تقریبی مبتنی بر توابع اندیسی سوق داده است [2-5]. پاسخ اندیسی یک مفهوم ریاضی است که به صورت مستقیم نمی‌تواند از آزمایش بدست آید. برای جریان تراکم‌ناپذیر غیر لزج، حل‌های تحلیلی به‌شکل بسته برای پاسخ‌های اندیسی وجود دارند [4]. اما برای جریان تراکم پذیر مادون صوت چنین حل‌هایی در تمامی زمان‌ها موجود نیستند. بااینحال، نتایج تقریبی می‌توانند به‌صورت معکوس از پاسخ آیرودینامیک به واسطه حرکت نوسانی در حوزه فرکانس بدست آیند [6]. بنا به تعریف، تابع اندیسی، پاسخ به یک اغتشاش ناگهانی بیان شده با تابع پله بین دو حالت پایا می‌باشد. در صورتیکه تابع اندیسی مشخص بوده و تئوری خطی نیز معتبر باشد، آنگاه می‌توان بارهای آیرودینامیکی ناپایا برای هر تغییر دلخواه در پارامترهای موثر (زاویه حمله، نرخ پیچش) را به واسطه اصل جمع آثار و با استفاده از انتگرال دوهامل بدست آورد [4]. از مزایای رویکرد توابع اندیسی آیرودینامیکی می‌توان به توصیف دقیق ویژگی‌های آیرودینامیکی در رژیم‌های سرعت پروازی تراکم‌پذیر/ناپذیر، محاسبه بارهای آیرودینامیکی ناپایا در حرکت‌های دلخواه زمانی و امکان تقریب زدن توابع اندیسی با استفاده از رابطه‌های تحلیلی، دینامیک سیالات محاسباتی یا نتایج تجربی اشاره نمود [7]. این رویکرد علاوه بر ارائه فرمولاسیون آیرودینامیکی یکتا در جریان‌های تراکم پذیر و ناپذیر، می‌تواند ابزار مناسبی برای تحلیل مسائل آیروالاستیک در حوزه زمان و فرکانس باشد. برای مسائل تحلیل پایداری در جریان تراکم پذیر می‌توان با فرایندی مشابه مبتنی بر توسعه توابع تئودورسن از توابع اندیسی حوزه زمان استفاده نمود. این فرایند با به کار گیری تبدیلات لاپلاس امکان پذیر می‌باشد. روش‌های مبتنی بر توابع اندیسی برای بالواره دو بعدی توسعه داده شده‌اند. با اینحال با استفاده از آیرودینامیک تئوری نوار اصلاح شده و لحاظ نمودن اثرات نسبت منظری بال، سوئیپ و شیب منحنی برآ می‌توان آنرا به مسائل سه بعدی نیز تعمیم داد [8,4]. مازلسکی [10,9] و مازلسکی و دریشلر [11] با استفاده از داده‌های دایتز و ارتباط متقابل میان نیروی برآی آیرودینامیکی روی بالواره نوسانی در جریان تراکم‌پذیر مادون صوت و پاسخ اندیسی توانستند توابع پاسخ اندیسی تقریبی به شکل نمایی شامل چهار جمله برای اعداد ماخ 0.5، 0.6 و 0.7 را بدست آوردند. لومکس [3] نتایج تحلیلی دقیقی برای پاسخ اندیسی ایجاد شده ناشی از تغییر پله در زاویه حمله و نرخ پیچش در جریان تراکم پذیر مادون صوت را در بازه زمانی محدود ارائه نمود. داول [12] با رویکردی مشابه مازلسکی، با استفاده از آیرودینامیک حوزه فرکانس و به طور مستقیم نمایش حوزه زمان پاسخ اندیسی را به شکل مجموعی از توابع نمایی برای جریان‌های تراکم‌ناپذیر و تراکم‌پذیر مادون‌صوت ارائه نمود. لیشمان [1] با تفکیک پاسخ‌های نیروی برآ و گشتاور اندیسی به دو مؤلفه غیرچرخشی و چرخشی، پاسخ اندیسی کل به تغییرات پله واحد در زاویه حمله و نرخ پیچش در جریان تراکم‌پذیر را بر حسب توابع نمایی شامل سه جمله تقریب زد. برخلاف رویکرد تراکم‌ناپذیر که مقدار اولیه پاسخ ضربه با استفاده از ملاحظات جرم ظاهری تعیین می‌گردید، مقدار اولیه پاسخ اندیسی با استفاده از تئوری پیستون بدست می‌آید. این مقدار متناظر با بخش غیر چرخشی، به سرعت با زمان از بین می‌رود در حالیکه بخش چرخشی جریان خیلی سریع تا مقدار حالت پایا رشد می‌نماید. لیشمان در ادامه با استفاده از توابع اندیسی آیرودینامیکی، نمایش فضای حالت بارهای ناپایا به واسطه نیروی دلخواه را برای استفاده در تحلیل‌های آیروالاستیک ارائه نمود [13]. انگیزه اصلی استفاده از تکنیک فضای حالت، افزودن معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه اول توصیف کننده آیرودینامیک ناپایا به معادلات دینامیک سازه‌ای حاکم بر حرکت بالواره و سپس تحلیل پایداری سیستم آیروالاستیک حاصله با استفاده از رویکرد تحلیل مقدار ویژه یا انتگرال‌گیری زمانی می‌باشد. ارائه دقیق پاسخ اندیسی مستلزم وجود پاسخ آیرودینامیک روی محدوده وسیعی از فرکانس‌های کاهش یافته است. به دلیل مشکلات خاصی که در استخراج پاسخ اندیسی از داده‌های آزمایشگاهی برای فرکانس‌های کاهش یافته بالا مطرح بودند، رویکرد دیگری برای ارائه تقریب‌های تعمیم‌یافته از پاسخ اندیسی مادون‌صوت با استفاده از داده‌های تجربی و به کمک حل‌های دقیق توسط لیشمان ارائه شد [6]. گرچه او از این رویکرد برای ارائه پاسخ نیروی برآی اندیسی به واسطه زاویه حمله و نرخ پیچش استفاده نموده است، امابه صورت مشابه‌ای می‌توان پاسخ گشتاور اندیسی متناظر را نیز بدست آورد. با استفاده از مفهوم تابع اندیسی، لیشمان [14] تاثیر حرکت دلخواه فلپ لبه فرار را نیز بر نیروی برآی ناپایا روی یک بالواره در جریان تراکم‌پذیر مادون‌صوت بررسی نمود. مارزوکا و همکاران [16,15] توابع اندیسی و بارهای آیرودینامیک متفاوتی در محدوده‌های سرعت پروازی تراکم‌پذیر مادون‌صوت، گذرصوتی خطی شده، مافوق صوت و ابرصوتی در دو حوزه زمان و فرکانس سازگار با تحلیل‌های آیروالاستیک

[1] UVLM: Unsteady Vortex-Lattice Method
[2] Indicial Response Theory

سطوح برآزای دو بعدی را توسعه دادند. آنها با استفاده از آیرودینامیک اندیسی ناپایای توسعه داده شده، پاسخ آیروالاستیک سطوح برآزای دوبعدی در جریان تراکم‌ناپذیر و تراکم‌پذیر شامل درجات آزادی حرکت انتقالی و پیچشی را بدست آوردند [16,17]. نظر به ماهیت غیرخطی آیرودینامیک در ناحیه گذر صوتی، مارزوکا و همکاران [18] با استفاده از ترکیب روش دینامیک سیالات محاسباتی و فرایند تحلیلی، نیروی برآ و گشتاور آیرودینامیکی را بر حسب توابع اندیسی خطی و غیر خطی در سرعت پروازی تراکم‌پذیر مادون صوت، مافوق صوت و گذر صوتی توسعه دادند. مارزوکا و همکاران [7] در تحقیقی جامع بارهای آیرودینامیکی یک بالواره دو درجه آزادی تحت درجات آزادی انتقال و پیچش با استفاده از روشی مبتنی بر توابع اندیسی خطی و غیرخطی به همراه دینامیک سیالات محاسباتی در رژیم‌های مختلف پروازی تراکم‌ناپذیر و تراکم‌پذیر را تعیین نمودند. همان‌طور که اشاره شد روش‌های مبتنی بر دینامیک سیالات محاسباتی نیز از روش‌های کارآمد تعیین پاسخ‌های اندیسی هستند. البته نتایج بدست آمده از این روش می‌بایست ابتدا با استفاده از نتایج تجربی و تئوری اعتبار سنجی گردند. پارامسواران و همکاران [19] با اعمال تغییری در حلگر اویلر/نویر استوکس به صورت مستقیم پاسخ‌های اندیسی یک بالواره به تغییرات پله در زاویه حمله و نرخ پیچش را محاسبه نمودند. میراندا و همکاران [20] به صورت عددی و با استفاده از روش شبکه گردابی پاسخ اندیسی بال در جریان مادون صوت تراکم‌پذیر به تغییر پله در زاویه حمله را استخراج نمودند. نتایج ایشان محدود به بال‌های نازک با زاویه حمله کوچک به دلیل استفاده از مدل ریاضی خطی می‌باشد. اثر عدد ماخ، نسبت منظری و زاویه سوئیپ بر پاسخ اندیسی از دیگر موضوعات بررسی شده در تحقیق مذکور است. در بیشتر مطالعات انجام شده، توابع اندیسی آیرودینامیکی تنها در مقادیر مشخصی از عدد ماخ تعیین (برای مثال، 0.5، 0.6، 0.7 و 0.8) شده‌اند. فرسادی و همکاران [21] تقریب نمایی جدیدی از توابع اندیسی وابسته به عدد ماخ در ناحیه تراکم‌پذیر و محدوده 0.5 تا 0.8 ماخ را ارائه نمودند. با استفاده از تقریب فوق به همراه نمایش فضای حالت بارهای آیرودینامیک، سینا و همکاران [22] پایداری و پاسخ بال‌های دارای سوئیپ کامپوزیتی در جریان تراکم‌پذیر مادون صورت را بررسی نمودند. فیروزآبادی و همکاران [23] با استفاده از آیرودینامیک مبتنی بر توابع اندیسی و داده‌های مارزوکا و همکاران [16] ، اثر نیروی پیشران روی پایداری آیروالاستیک بال کامپوزیتی دارای سوئیپ تحت جریان تراکم‌پذیر زیرصوت را مطالعه نمودند.

در این مقاله با بیان رویکردی متفاوت از توابع اندیسی، مدلی جدید از بارهای آیرودینامیکی ناپایا در جریان‌های تراکم‌ناپذیر و تراکم‌پذیر زیرصوت ارائه می‌شود، که برای مطالعه پاسخ و نیز پایداری مسائل مختلف آیروالاستیک سطوح برآزای دو و سه بعدی در حوزه زمان و فرکانس مناسب و کارآمد می‌باشد. برخلاف جریان تراکم‌ناپذیر که بارهای آیرودینامیکی تنها با یک تابع اندیسی نظیر تابع وگنر تعیین می‌شوند، در جریان تراکم‌پذیر به چهار تابع اندیسی برای تعریف نیروی برآ و گشتاور آیرودینامیکی نیاز است. از طرفی، وجود عبارات نمایی وابسته به ماخ در توابع اندیسی متداول، موجب پیچیدگی آنها در انتقال به سایر محورهای دوران بالواره و پی‌آمد آن روابط سنگین آیروالاستیک می‌شود. از اینرو، با هدف یکپارچه‌سازی روابط آیرودینامیک معتبر در تمامی محدوده زیر صوت، تقریب‌هایی نوین و کاربردی از توابع اندیسی مبتنی بر روابط تحلیلی و داده‌های عددی موجود ارائه می‌شود،که علاوه بر تابعیت پیوسته از عدد ماخ در محدوده صفر تا 0.8، دارای شکل مناسبی برای انتقال به مرکز دوران دلخواه روی بالواره می‌باشند.

سپس، با استفاده از جمع آثار پاسخ اندیسی و انتگرال دوهامل، نمایش‌هایی متفاوت از بارهای آیرودینامیکی، معتبر در کل محدوده جریان زیرصوت، برای حرکت دلخواه بالواره توسعه داده می‌شود. در ادامه، براساس تئوری نواری و نیز اصلاح شیب منحنی برآ، مدل آیرودینامیک مذکور برای بال سه‌بعدی تعمیم می‌یابد. به‌منظور اعتبار سنجی مدل آیرودینامیکی، نمودارهای توابع اندیسی توسعه یافته با نمودارهای موجود در سایر مراجع در اعداد ماخ مختلف مقایسه و مطابقت خوبی بین آنها مشاهده می‌شود. از جمله دست آوردهای تحقیق حاضر که در تمامی محدوده جریان تراکم‌ناپذیر تا تراکم‌پذیر مادون صوت معتبر می باشد، عبارتند از: 1- ارائه تقریبی متفاوت از ضرایب توابع اندیسی دارای تابعیت پیوسته از عدد ماخ به منظور دست‌یابی به نمایش یکسان پس از انتقال به سایر نقاط یا تغییر محور دوران. 2- نمایش تقریب جونز از تابع وگنر با چهار تابع اندیسی مجزا برحسب نیروی برآ و گشتاور پیچشی ناشی از تغییر ناگهانی در زاویه حمله و نرخ پیچش آن. 3- استفاده از عبارت‌های توانی یکسان و مستقل از عدد ماخ برای تمامی توابع اندیسی در اعداد ماخ مختلف و درنتیجه کاهش ضرایب وابسته به ماخ. 4- توسعه نمایشی کارآمد و یکتا از بارهای آیرودینامیکی ناپایا مبتنی بر توابع اندیسی با عبارت‌های نمایی مشابه در فضای حالت برای کوپل شدن به مدل سازه در مسائل آیروالاستیک. 5- تعمیم مدل آیرودینامیکی حاصله به مسائل بال سه‌بعدی.

2- بارهای آیرودینامیکی ناپایا

در صورتیکه پاسخ به تغییر پله در زاویه حمله یا نرخ پیچش (توابع اندیسی) مشخص بوده و تئوری خطی نیز معتبر باشد، آنگاه بارهای آیرودینامیکی ناپایا برای هر تغییر دلخواه در زاویه حمله یا نرخ پیچش را می‌توان به واسطه اصل برهم نهی آثار پاسخ و با استفاده از انتگرال دوهامل بدست آورد. در ادامه، مروری کوتاه بر توابع اندیسی پاسخ و بارهای آیرودینامیکی ناپایا حاصل از آنها در جریان‌های تراکم‌ناپذیر و تراکم‌پذیر مادون صوت آورده شده است.

2-1- رژیم سرعت پروازی تراکم‌ناپذیر

در جریان تراکم‌ناپذیر از تابع وگنر برای بیان نیروهای آیرودینامیکی ناپایا به واسطه تغییر پله واحد در زاویه حمله بالواره استفاده می‌شود [4]. برای کاربردهای عملی، تقریب‌های مختلفی از این تابع ارائه شده است که از میان آنها تقریب نمایی جونز تقریب دقیق‌تری از تابع وگنر را نمایش می‌دهد [24].

$$\phi(\tau) = 1 - 0.165e^{-0.0455\tau} - 0.335e^{-0.300\tau} \quad (1)$$

که در آن $\tau = Ut/b$ معرف زمان بی‌بعد می‌باشد. مؤلفه چرخشی نیروی برآی آیرودینامیکی تراکم‌ناپذیر برحسب تقریب نمایی جونز از تابع وگنر، رابطه (1)، برای حرکتی دلخواه به صورت رابطه (2) بیان می‌شود [4].

$$L_I^c(\tau) = \frac{C_{L_\alpha} qS}{U} \int_{-\infty}^{\tau} \frac{d}{d\sigma} \dot{w}_{3/4}(\sigma)\phi(\tau - \sigma)d\sigma \quad (2)$$

که در آن C_{L_α}، q، S، و U به ترتیب شیب منحنی ضریب برآ، فشار آیرودینامیکی، مساحت سطح برآزا و سرعت جریان آزاد بوده و سرعت فرو ریزش نیز با رابطه (3) در محل $3/4$ وتر تعیین می‌شود.

$$\dot{w}_{3/4}(\tau) = -\dot{h}(t) - b\left(\frac{1}{2} - a\right)\dot{\alpha}(t) - U\alpha(t) \quad (3)$$

که در آن h و α، به‌ترتیب بیانگر حرکت‌های انتقالی و دورانی بالواره، b طول نصف وتر بالواره و a موقعیت بی‌بعد محور الاستیک نسبت به میانه وتر می‌باشند. مؤلفه چرخشی گشتاور آیرودینامیکی تراکم‌ناپذیر حول محور دوران به فاصله ab پشت میانه وتر بالواره با رابطه (4) بیان می‌شود.

$$M_I^c(\tau) = b\left(\frac{1}{2}+a\right)L_I^c(\tau) \tag{4}$$

روابط (2) و (4) تنها در برگیرنده مؤلفه‌های چرخشی جریان هستند. به منظور بیان نیروهای آیرودینامیکی ناپایا در جریان تراکم‌ناپذیر مؤلفه‌های بخش غیرچرخشی جریان نیز بایستی لحاظ شوند. مؤلفه‌های غیرچرخشی نیروهای آیرودینامیکی تراکم‌ناپذیر با روابط (5) و (6) تعریف می‌شوند [4].

$$L_I^{nc}(\tau) = \frac{1}{2}\rho C_{L_\alpha} b^2\left[\ddot{h}(t) - ab\ddot{\alpha}(t) + U\dot{\alpha}(t)\right] \tag{5}$$

$$M_I^{nc}(\tau) = \frac{1}{2}\rho C_{L_\alpha} b^3\left[a\ddot{h}(t) - b\left(\frac{1}{8}+a^2\right)\ddot{\alpha}(t) - U\left(\frac{1}{2}-a\right)\dot{\alpha}(t)\right] \tag{6}$$

که در آن مشتقات نسبت به زمان فیزیکی، t، می‌باشند.

2-2- رژیم سرعت پروازی تراکم‌پذیر مادون صوت

مطالعات بسیاری روی جریان تراکم‌پذیر زیرصوت به منظور بیان عبارات تحلیلی از توابع اندیسی انجام شده است [15,11,10,5,3,1] راهکار عملی برای پیش‌بینی بارهای آیرودینامیکی به واسطه حرکت‌های کوچک دلخواه از یک بالواره در پرواز مادون صوت، استفاده از جمع آثار انتگرال فوریه از نتایج تئوری برای نوسان‌های هارمونیک ساده می‌باشد. بدین منظور، ابتدا توابع اندیسی برای درجات آزادی مهم بال یعنی انتقال عمودی و پیچشی با فرض عدم تغییر شکل مقاطع در طول وتر تعیین می‌شوند. سپس از انتگرال برهم نهی دوهامل برای استخراج نیروهای برآ و ممان برای حرکت‌های کلی استفاده می‌شود. در تئوری آیرودینامیک ناپایای تراکم‌ناپذیر، الگوی جریان مبتنی بر دو بخش غیر چرخشی و چرخشی می‌باشد. منشاء بخش غیرچرخشی که اثر جرم ظاهری یا اینرسی نیز نامیده می‌شود، شتاب نا صفر بال می‌باشد. هوای اطراف بال دارای جرمی محدود است که منجر به نیروهای اینرسی مخالف شتاب می‌شود. در سیال تراکم‌پذیر با سرعت صوت محدود، الگوهای جریان غیر چرخشی نمی‌توانند خودشان را به سرعت با تغییرات شرایط مرزی تنظیم نمایند. نیروی برآ و ممان غیر چرخشی که تنها در بعضی نقاط قابل محاسبه می‌باشند، به شتاب‌ها و سرعت‌های لحظه‌ای بال بستگی نداشته اما متاثر از سابقه زمانی خود هستند. از اینرو، مجزا نمودن بخش‌های چرخشی و غیر چرخشی جریان مزیتی ندارد. در واقع، دلیل اصلی چنین رویکردی در جریان تراکم‌ناپذیر آن است که بارهای غیر چرخشی در شروع حرکت ضربه‌ای نامحدود می‌شوند. اما به‌واسطه میرا شدن ضربه در جریان تراکم‌پذیر، تکینی مذکور در حذف می‌شود. بنابراین در آیرودینامیک تراکم‌پذیر، مفهوم جرم ظاهری بی معنی است [22,16,4]. برخلاف حالت تراکم‌ناپذیر، چرخش حول بالواره در طول وتر در جریان تراکم‌پذیر تنها توسط سرعت عمودی در نقطه سه چهارم وتر تعیین نمی‌شود. این بدان معنی است که دو تابع اندیسی، یکی برای انتقال عمودی و دیگری برای سرعت پیچشی، جایگزین تابع وگنر می‌شوند. از اینرو، چرخش حول بالواره توسط مجموعه‌ای شامل چهار تابع اندیسی بیان می‌شود. سرعت فروریزش w_a ذرات سیال در تماس با یک بال تحت تاثیر حرکت‌های انتقالی h و دورانی α با رابطه (7) بیان می‌شود (شکل 1). توجه شود که اگر چه در مسائل آیروالاستیک محور دوران در محل محور الاستیک قرار می‌گیرد، در حال حاضر محور چرخش به طور موقت روی لبه حمله واقع است.

$$w_a(x,t) = -\dot{w}(t) - \dot{\alpha}(t)x \tag{7}$$

که درآن عبارت $\dot{w}(t)$، با رابطه (8) بیان می‌شود.

$$\dot{w}(t) = \dot{h}(t) + U\alpha(t) \tag{8}$$

سرعت فرو ریزش شامل دو بخش با محتوای مختلف، یعنی مقداری ثابت بر حسب عبارت‌های $\dot{h}$ و $U\alpha$ و مقداری متغیر بر حسب عبارت $\dot{\alpha}$ در امتداد وتر، می‌باشد. از این‌رو می‌بایست به صورت جداگانه اثرات این عبارات در تعیین بارهای آیرودینامیکی لحاظ گردند. در یک سرعت ماخ مشخص، نیروی برآ و ممان پیچشی اندیسی (حول محور دوران) کل در نتیجه تغییر پله در زاویه حمله α و نرخ پیچش $\dot{\alpha}$ برای شروع حرکت متناظر با زمان $t = 0$ به‌صورت روابط (9) و (10) تعریف می‌شوند [4].

$$\bar{L}(\tau) = \frac{C_{L_\alpha} qS}{U}\left[\dot{w}(\tau)\bar{\phi}_{c\alpha}(\tau) + 2b\dot{\alpha}(\tau)\bar{\phi}_{cq}(\tau)\right] \tag{9}$$

$$\bar{M}_y(\tau) = \frac{C_{L_\alpha} qSc}{U}\left[\dot{w}(\tau)\bar{\phi}_{cm}(\tau) + 2b\dot{\alpha}(\tau)\bar{\phi}_{cmq}(\tau)\right] \tag{10}$$

که در آن c طول وتر بالواره و توابع اندیسی $\bar{\phi}_{c\alpha}(\tau)$، $\bar{\phi}_{cm}(\tau)$ و $\bar{\phi}_{cq}(\tau)$ و $\bar{\phi}_{cmq}(\tau)$ به‌ترتیب بیانگر توابع اندیسی برآ و گشتاور خمشی ناشی از تغییر پله در زاویه حمله و نرخ پیچش حول لبه حمله می‌باشند. توجه شود که علامت بالانویس خط تیره، نشان دهنده کمیت‌ها در لبه حمله می‌باشد. در صورت مشخص بودن توابع اندیسی، با استفاده از اصل جمع آثار و نیز انتگرال دوهامل، نیروی برآ و گشتاور آیرودینامیکی حول لبه حمله برای حرکت کوچک و دلخواه بال را می‌توان با روابط (11) و (12) بیان نمود.

$$\bar{L}(\tau) = \frac{C_{L_\alpha} qS}{U}\int_{-\infty}^{\tau}\left[\frac{d}{d\sigma}\dot{w}(\sigma)\bar{\phi}_{c\alpha}(\tau-\sigma) + 2b\frac{d\dot{\alpha}(\sigma)}{d\sigma}\bar{\phi}_{cq}(\tau-\sigma)\right]d\sigma \tag{11}$$

$$\bar{M}_y(\tau) = \frac{C_{L_\alpha} qSc}{U}\int_{-\infty}^{\tau}\left[\frac{d}{d\sigma}\dot{w}(\sigma)\bar{\phi}_{cm}(\tau-\sigma) + 2b\frac{d\dot{\alpha}(\sigma)}{d\sigma}\bar{\phi}_{cmq}(\tau-\sigma)\right]d\sigma \tag{12}$$

در هر محدوده پروازی که در آن توابع اندیسی در دسترس باشند، معادلات کلی (11) و (12) را می‌توان برای محاسبه نیروی برآ و گشتاور آیرودینامیکی ناپایا بکار برد. برای تعیین بارهای آیرودینامیکی ناپایا که در محلی به فاصله ab پشت میانه وتر بالواره قرار گرفته است، از قوانین انتقال گشتاور استفاده می‌گردد. اساس این انتقال مبتنی بر مشابه بودن سرعت زاویه‌ای حول محور گذرنده از محور دوران جدید با سرعت زاویه‌ای حول محور $x = 0$ بعلاوه انتقال عمودی مقطع به مقدار $\dot{h}_0 = -b\dot{\alpha}(a+1)$ می‌باشد [4]. پس از انجام محاسبات مربوط به انتقال محور دوران، روابط مشابه‌ای با معادلات (11) و (12) برای بارهای آیرودینامیکی ناپایا بدست می‌آیند، با این تفاوت که توابع اندیسی تشکیل دهنده آنها بایستی با استفاده از روابط (13) تا (16) اصلاح شوند.

$$\phi_{c\alpha}(\tau) = \bar{\phi}_{c\alpha}(\tau) \tag{13}$$

$$\phi_{cM}(\tau) = \bar{\phi}_{cm}(\tau) + \frac{1}{2}(a+1)\bar{\phi}_{c\alpha}(\tau) \tag{14}$$

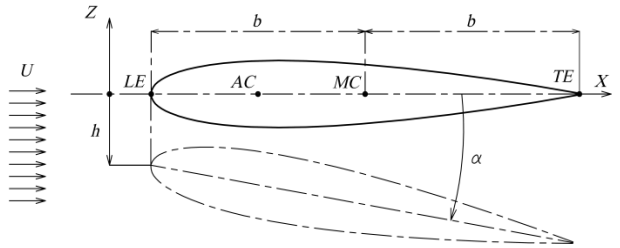

Fig. 1 Vertical translation and pitching about an axis through the leading edge

شکل 1 حرکت انتقال عمودی و پیچشی بال حول محور گذرنده از لبه حمله

$$\phi_{cq}(\tau)=\bar{\phi}_{cq}(\tau)-\frac{1}{2}(a+1)\bar{\phi}_{c\alpha}(\tau) \tag{15}$$

$$\phi_{cmq}(\tau)=\bar{\phi}_{cmq}+\frac{1}{2}(a+1)\left(\bar{\phi}_{cq}-\bar{\phi}_{cm}\right)-\frac{1}{16}(a+1)^2\bar{\phi}_{c\alpha} \tag{16}$$

با استفاده از توابع اندیسی انتقال یافته، بارهای ناپایای آیرودینامیکی تراکم‌پذیر مطابق با روابط (17) و (18) بازنویسی می‌شوند.

$$L_c(\tau)=\frac{C_{L_\alpha}qS}{U}\int_{-\infty}^{\tau}\left[\frac{d\dot{w}(\sigma)}{d\sigma}\phi_{c\alpha}(\tau-\sigma)+2b\frac{d\dot{\alpha}(\sigma)}{d\sigma}\phi_{cq}(\tau-\sigma)\right]d\sigma \tag{17}$$

$$M_c(\tau)=\frac{C_{L_\alpha}qSc}{U}\int_{-\infty}^{\tau}\left[\frac{d\dot{w}(\sigma)}{d\sigma}\phi_{cm}(\tau-\sigma)+2b\frac{d\dot{\alpha}(\sigma)}{d\sigma}\phi_{cmq}(\tau-\sigma)\right]d\sigma \tag{18}$$

چنانچه اشاره شد، فعالیت‌های مهمی در راستای توسعه عبارت‌های تحلیلی مناسب برای توابع اندیسی در جریان‌های تراکم‌پذیر زیرصوت انجام شده است که ما حصل آنها نمایش‌های مختلفی از تقریب توابع اندیسی آیرودینامیک ناپایا می‌باشد [21,16,11,10,1]. به دلیل جنبه‌های مختلف محاسباتی شامل کارآیی و سهولت در تحلیل‌های آیروالاستیک، نقطه اشتراک تمامی آنها بیان شکل نمایی توابع بوده و از جمله تفاوت‌های آنها می‌توان به تعداد جملات، روش استخراج ضرایب به منظور نزدیک شدن به داده‌های تجربی و محدوده اعتبار توابع تقریبی اندیسی اشاره نمود. در این مقاله، و به منظور محاسبات عملی آتی، توابع اندیسی $\bar{\phi}_{c\alpha}(\tau)$، $\bar{\phi}_{cm}(\tau)$، $\bar{\phi}_{cq}(\tau)$ و $\bar{\phi}_{cmq}(\tau)$ برای جریان تراکم‌پذیر زیرصوت حول لبه حمله به شکل عمومی بیان شده با رابطه (19) می‌باشند.

$$\bar{\phi}(\tau,\mathrm{M})=\sum_{j=0}^{3}\bar{b}_j(\mathrm{M})e^{-\bar{\beta}_j(\mathrm{M})\tau} \tag{19}$$

ضرایب موجود در توابع اندیسی به صورت عددی در مقادیر ماخ مشخصی تعیین شده‌اند [21,16,11,10,1]. اما همان‌طور که در بخش بعد نشان داده خواهد شد، این ضرایب به دلایلی نظیر نمایش نادرست، محدود بودن به اعداد ماخ مشخص، در بر نگرفتن تمامی محدوده جریان تراکم‌ناپذیر تا تراکم‌پذیر به منظور ارائه فرمولاسیون یکتا و نهایتاً ارائه نمایشی مفید و کارآمد در محاسبات آیروالاستیک (به خصوص در فضای حالت) نیازمند اصلاح و تغییر می‌باشند.

3-2- نمایش حوزه فرکانس از بارهای آیرودینامیکی

در صورتی که تنها تعیین مرز ناپایداری فلاتر در حوزه فرکانس مورد نظر باشد، نمایش بارهای آیرودینامیکی ناپایا در حوزه مذکور سودمند خواهد بود. نیروهای آیرودینامیکی مادون صوت تراکم‌پذیر برای حرکت‌های نوسانی و پیچشی دلخواه حول محور الاستیک که به فاصله ab از میانه وتر بال به سمت لبه فرار قرار گرفته است را می‌توان در فضای انتقال یافته لاپلاس تحت شرایط اولیه صفر با روابط (20) و (21) نشان داد.

$$L(s)=\frac{C_{L_\alpha}qS}{U}s\{[sh(s)+U\alpha(s)]\phi_{c\alpha}(s)+2bs\alpha(s)\phi_{cq}(s)\} \tag{20}$$

$$M(s)=\frac{C_{L_\alpha}qSc}{U}s\{[sh(s)+U\alpha(s)]\phi_{cm}(s)+2bs\alpha(s)\phi_{cmq}(s)\} \tag{21}$$

که در آن s متغیر انتقال لاپلاس و توابع اندیسی جدید نیز در فضای انتقال یافته لاپلاس بیان می‌شوند. به منظور بیان نیروهای آیرودینامیکی در حوزه فرکانس، روابط (22) و (23)، جایگزینی $s\rightarrow ik$ در روابط (20) و (21) اعمال می‌شود [16].

$$L(s)=C_{L_\alpha}qSk^2\left\{\left[i\frac{\alpha(k)}{k}-\frac{h(k)}{U}\right]\phi_{c\alpha}(ik)-2b\frac{\alpha(k)}{U}\phi_{cq}(ik)\right\} \tag{22}$$

$$M(s)=C_{L_\alpha}qSck^2\left\{\left[i\frac{\alpha(k)}{k}-\frac{h(k)}{U}\right]\phi_{cm}(ik)-2b\frac{\alpha(k)}{U}\phi_{cmq}(ik)\right\} \tag{23}$$

که در آن k فرکانس کاهش یافته می‌باشد. با استفاده از ارتباط میان تابع تئودورسن $C(F,G)$ و $\Phi(ik)$ در جریان تراکم‌ناپذیر [25]، می‌توان برای جریان تراکم‌پذیر نیز تعاریف متناظری مشابه تابع تئودورسن با توابع اندیسی مطابق با رابطه (24) ارائه نمود.

$$C_{c\alpha}[F_{c\alpha};G_{c\alpha}]=F_{c\alpha}(k)+G_{c\alpha}(k)=ik\int_0^\infty\phi_{c\alpha}(t)e^{-ik\frac{Ut}{b}}dt=ik\Phi_{c\alpha}(ik) \tag{24}$$

روابط مشابه‌ای را می‌توان میان توابع $C_{cm}[F_{cm};G_{cm}]$، $C_{cq}[F_{cq};G_{cq}]$ و $C_{cmq}[F_{cmq};G_{cmq}]$ به ترتیب با توابع اندیس ϕ_{cm}، ϕ_{cq} و ϕ_{cmq} بر قرار نمود. به تعبیری می‌توان توابع $C_{c\alpha}(k)$، $C_{cm}(k)$، $C_{cq}(k)$ و $C_{cmq}(k)$ را مشابه تراکم‌پذیر از تابع تئودورسن $C(k)$ در حرکت نوسانی انتقالی و پیچشی از نیروی برآ و گشتاور آیرودینامیکی دانست.

3- تقریب‌های توابع اندیسی برای جریان ناپایا

یک راهکار موثر و عملی برای تحلیل مسائل آیروالاستیک شامل مباحث پایداری، پاسخ دینامیکی و کنترل، استفاده از رویکرد فضای حالت می‌باشد. از اینرو هدف ارائه نمایش مناسب و معتبر از تقریب نمایی توابع اندیس برای انتقال نیروی برآ و گشتاور آیرودینامیکی مادون صون در جریان تراکم‌پذیر/ناپذیر به فضای حالت است. به منظور نمایش توابع پاسخ اندیسی ناپایا بر حسب اعداد ماخ پیوسته که تمامی محدوده جریان‌های تراکم‌ناپذیر تا تراکم‌پذیر مادون صوت را شامل گردد، تلفیقی از داده‌های تقریبی موجود در مراجع [11,10]، مقادیر اولیه و مجانبی [4] و نیز نتایج تحلیلی دقیق [26] به همراه ساده‌سازی‌ها و ترفندهای ریاضی مورد استفاده قرار می‌گیرند.

3-1- مقادیر اولیه و مجانبی (حدی)

گرچه هیچ یک از توابع اندیسی را نمی‌توان به‌طور دقیق در تمام محدوده زمان بی‌بعد به‌صورت توابعی مشخص یافت، اما مقادیر اولیه و مجانبی آنها قابل محاسبه می‌باشند [4]. مقادیر آغازین این توابع، روابط (25) و (26)، معادل کمیت‌های متناظر برای حرکت هارمونیک در فرکانس بی‌نهایت هستند. و از این‌رو، با استفاده از انتگرال فوریه می‌توانند محاسبه شوند. البته این کمیت‌ها با استفاده از تئوری پیستون به‌صورت ساده‌تری نیز قابل تعیین می‌باشند.

$$\bar{\phi}_{c\alpha}(0)=\frac{2}{\pi\mathrm{M}},\qquad \bar{\phi}_{cq}(0)=\frac{1}{\pi\mathrm{M}} \tag{25}$$

$$\bar{\phi}_{cm}(0)=\frac{-1}{\pi\mathrm{M}},\qquad \bar{\phi}_{cmq}(0)=\frac{-2}{3\pi\mathrm{M}} \tag{26}$$

که در آن M عدد ماخ می‌باشد. مقادیر مجانبی بیان شده با روابط (27) و (28)، بیانگر کمیت‌های اندیسی نیروهای برآ و گشتاور پیچشی بالواره در حرکت پایا می‌باشند که با ضرب نمودن مقادیر مشابه تراکم‌ناپذیر آنها در ضریب پرانتل-گلارت بدست می‌آیند [4].

$$\bar{\phi}_{c\alpha}(\infty)=\frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{M}^2}},\qquad \bar{\phi}_{cq}(\infty)=\frac{3}{4\sqrt{1-\mathrm{M}^2}} \tag{27}$$

$$\bar{\phi}_{cm}(\infty)=\frac{-1}{4\sqrt{1-\mathrm{M}^2}},\qquad \bar{\phi}_{cmq}(\infty)=\frac{-1}{4\sqrt{1-\mathrm{M}^2}} \tag{28}$$

با استفاده از روابط تحلیلی (25) تا (28) و نیز داده‌های مازلسکی [11] و مارزوکا [16] به همراه رابطه (19)، مقادیر اولیه و مجانبی توابع اندیسی $\phi_{c\alpha}(\tau)$، $\phi_{cm}(\tau)$، $\phi_{cq}(\tau)$ و $\phi_{cmq}(\tau)$ در اعداد ماخ 0.5 و 0.7 محاسبه و در جدول‌های 1 و 2 آورده شده‌اند. با مقایسه نتایج مندرج در این جدول‌ها، می‌توان به صحت داده‌های ارائه شده توسط مازلسکی [11] پی برد.

با این‌حال، مقادیر ابتدایی و مجانبی توابع اندیسی مستخرج از داده‌های مارزوکا [16] با مقادیر متناظر تحلیلی مطابقت ندارند. این عدم تطابق در داده‌های ارائه شده در اعداد ماخ 0.6 و 0.8 نیز مشاهده می‌شود. بنابراین، در صحت ضرایب تقریب‌زننده توابع اندیسی تراکم‌پذیر مادون صوت که در جدول یک از مرجع مذکور آورده شده‌اند، تردید وجود دارد.

3-2- توابع اندیسی تحلیلی

لومکس [3] با استفاده از تغییر پله در زاویه حمله و نیز نرخ پیچش توانست توابع اندیسی را برای بازه زمانی هر چند کوتاه به صورت تحلیلی نمایش دهد. او و همکارانش [26] با حل معادلات موج در جریان تراکم‌پذیر ناپایای دوبعدی، توزیع فشار روی بالواره در بازه زمانی $0\le\tau\le 2\mathrm{M}/(\mathrm{M}+1)$ را محاسبه نمودند. با استفاده از این توزیع فشار، نیروی برآ و گشتاور به صورت تابعی از زمان و همچنین توابع اندیسی بی بعد استخراج شدند. روابط (29) تا (32) بیانگر توابع اندیسی در محدوده مذکور می‌باشند.

$$\bar{\phi}_{c\alpha}(\tau)=\frac{2}{\pi\mathrm{M}}\left[1-\frac{\tau}{2\mathrm{M}}(1-\mathrm{M})\right] \tag{29}$$

$$\bar{\phi}_{cm}(\tau)=\frac{-1}{\pi\mathrm{M}}\left[1-\frac{\tau}{2\mathrm{M}}(1-\mathrm{M})+\frac{\tau^2}{8\mathrm{M}}(\mathrm{M}-2)\right] \tag{30}$$

$$\bar{\phi}_{cq}(\tau)=\frac{1}{\pi\mathrm{M}}\left[1-\frac{\tau}{2\mathrm{M}}(1-\mathrm{M})+\frac{\tau^2}{4\mathrm{M}}\left(1-\frac{\mathrm{M}}{2}\right)\right] \tag{31}$$

$$\bar{\phi}_{cmq}(\tau)=\frac{-2}{3\pi\mathrm{M}}\left[1-\frac{3\tau}{4\mathrm{M}}(1-\mathrm{M})+\frac{3\tau^2}{32\mathrm{M}^2}(1-\mathrm{M})^2+\frac{\tau^3}{16\mathrm{M}^3}\left[\mathrm{M}+\frac{1}{4}(1-\mathrm{M})^3\right]\right] \tag{32}$$

جدول 1 مقادیر اولیه و مجانبی توابع اندیسی در ماخ 0.5

Table 1 Initial and asymptotic value of indicial functions of M=0.5

تابع اندیسی	تحلیلی و مازلسکی [11]		مارزوکا [16]	
	مقدار اولیه	مقدار مجانبی	مقدار اولیه	مقدار مجانبی
$\phi_{c\alpha}(\tau)$	1.273	1.155	1.293	1.155
$\phi_{cm}(\tau)$	-0.637	-0.289	0.101	0.289
$\phi_{cq}(\tau)$	0.637	0.866	-0.011	0.289
$\phi_{cmq}(\tau)$	-0.424	-0.289	-0.105	0

جدول 2 مقادیر اولیه و مجانبی توابع اندیسی در ماخ 0.7

Table 2 Initial and asymptotic value of indicial functions of M=0.7

تابع اندیسی	تحلیلی و مازلسکی [11]		مارزوکا [16]	
	مقدار اولیه	مقدار مجانبی	مقدار اولیه	مقدار مجانبی
$\phi_{c\alpha}(\tau)$	0.910	1.400	0.930	1.400
$\phi_{cm}(\tau)$	-0.455	-0.350	0.041	0.350
$\phi_{cq}(\tau)$	0.455	1.052	0.001	0.350
$\phi_{cmq}(\tau)$	-0.303	-0.350	-0.073	0

3-3- توابع اندیسی تقریبی

همان‌طور که پیشتر بیان شد، بر خلاف جریان تراکم‌ناپذیر، توابع اندیسی در جریان تراکم‌پذیر مادون‌صوت را نمی‌توان جز برای مقادیر خاصی از زمان، به صورت تحلیلی بیان نمود. از اینرو، تعیین پاسخ اندیسی در بازه میانی $(2\mathrm{M}/(\mathrm{M}+1)\le\tau\le\infty)$ موضوع اغلب تحقیق‌ها بوده است. یک روش کارآمد برای پیش‌بینی توابع اندیسی استفاده از اصل برهم نهی انتگرال فوریه است. با فرض ارتباط خطی میان حرکت (ورودی) و بارهای آیرودینامیکی (خروجی)، می‌توان روابط مناسبی را برای بالواره در جریان تراکم‌پذیر مبتنی بر مقایسه مستقیم با حالت تراکم‌ناپذیر استخراج نمود. پایه و اساس این روش ارتباط نتایج عددی بدست آمده برای حرکت نوسانی بالواره در حوزه فرکانس به حوزه زمان می‌باشد. به‌منظور برقراری یک ارتباط معکوس منتج به پاسخ اندیسی دقیق، بایستی پاسخ‌های آیرودینامیکی در تعداد کافی از فرکانس‌های نوسانی در دسترس باشد [1]. مازلسکی و دریشلر [11,10]، انتگرال‌های ارتباط دهنده توابع فرکانسی به توابع اندیسی برای اعداد ماخ 0.5، 0.6 و 0.7 را به صورت عددی محاسبه نمودند. توابع اندیسی ارائه شده توسط آنها، مشابه رابطه (19) می‌باشد، اما ضرایب تشکیل دهنده توابع در یک محل واحد (مثلاً لبه حمله) ارائه نشده‌اند. برای انتقال توابع اندیسی مرجع [11] به لبه حمله از روابط انتقال بیان شده با روابط (33) و (34) استفاده می‌شود.

$$\bar{\phi}_{cm}(\tau)=\phi_{cm}(\tau)-\frac{1}{4}\phi_{c\alpha}(\tau) \tag{33}$$

$$\bar{\phi}_{cq}(\tau)=\phi_{cq_{3/4}}(\tau)+\frac{3}{4}\phi_{c\alpha}(\tau) \tag{34}$$

$$\bar{\phi}_{cmq}(\tau)=\phi_{cmq_{3/4}}(\tau)+\frac{3}{4}\phi_{cm}(\tau)-\frac{1}{4}\phi_{cq_{3/4}}(\tau)-\frac{3}{16}\phi_{c\alpha}(\tau) \tag{35}$$

که در آن ϕ_{cm} تابع اندیسی گشتاور ناشی از تغییر پله در زاویه حمله و $\phi_{cq_{3/4}}$ و $\phi_{cmq_{3/4}}$ به ترتیب بیانگر توابع اندیسی برآ و گشتاور ناشی از تغییر پله در نرخ پیچش حول نقطه 3/4 وتر می باشند. توجه شود که بازوی توابع اندیسی گشتاور حول مرکز آیرودینامیکی واقع است. با استفاده از روابط (33) تا (35)، مقادیر توابع اندیسی واقع در لبه حمله در سه عدد ماخ مشخص می‌باشند. حال با استفاده از داده‌های فوق و رویکردی که در ادامه خواهد آمد می‌توان توابع اندیسی را در بازه گسترده‌تری از اعداد ماخ بدست آورد.

3-4- ایجادتوابع اندیسی تقریبی به صورت تابع پیوسته از عدد ماخ

همان‌طور که بیان شد، توابع اندیسی تنها در اعداد ماخ مشخص و محدودی در دسترس می‌باشند [21,16,11,10,1]. به علاوه، وجود عبارات نمایی با توان‌های مختلف، باعث پیچیدگی توابع اندیسی انتقال یافته و در نتیجه بارهای آیرودینامیکی ناپایا می‌گردد که در نهایت به واسطه افزوده شدن به معادلات سازه‌ای غالباً حجیم در تحلیل‌های آیروالاستیک، ملاحظات محاسباتی بیشتری را مطالبه می‌نماید. از اینرو، برای دستیابی به توابع اندیسی که بازه گسترده‌تری را پوشش داده (ماخ صفر تا ماخ 0.8) و در ضمن دارای شکل ساده‌تری در انتقال و در نتیجه محاسبات آیروالاستیک باشند، رویکرد متفاوتی بر مبنی داده‌های موجود توسعه داده می‌شود.

طبق رابطه (19) برای مشخص شدن هر یک از توابع اندیسی به هفت ضریب تابع عدد ماخ نیاز است. بدون از دست دادن کلیات، با مستقل و معلوم فرض نمودن نمودن ضرایب نمایی توابع اندیسی ، می‌توان تعداد ضرایب مجهول را کاهش داد. در این تحقیق، دو رویکرد برای بیان ضرایب نمایی مطرح گردید. در رویکرد اول، ضرایب نمایی هر یک از چهار تابع اندیسی را می‌توان به صورت ثوابتی مستقل از عدد ماخ و مشابه با ضرایب نمایی جملات

مشابه آنها در عدد ماخ مشخصی (برای مثال، 0.5) در نظر گرفت. در رویکرد دوم که نتایج آن در این مقاله ارائه شده است، برای ساده‌سازی بیشتر به‌خصوص در انتقال توابع اندیسی به محل دلخواه روی بالواره، ضرایب نمایی تمامی توابع اندیسی به صورت ثوابتی مستقل از عدد ماخ، اما مشابه با ضرایب نمایی جملات متناظر $\phi_{c\alpha}$ در عدد ماخ مشخصی لحاظ می‌شوند. از اینرو، جملات توابع اندیسی پس از انتقال به مرکز دوران جدید بالواره، مشابه با جملات پیش از انتقال می‌باشند.

در هر دو رویکرد فوق، با لحاظ نمودن سه جمله تاخیری در هر یک از توابع اندیسی، بایستی در مجموع شانزده ضریب مجهول برای هر عدد ماخ تعیین گردند. بخشی از مجهولات مذکور با استفاده از روابط (25) تا (32) داده شده و برای تمامی بازه جریان تراکم‌پذیر مادون صوت معتبر هستند. به منظور دستیابی به سایر مجهولات، داده‌های مراجع [1] و [11] همراه با روابط انتقال (33) تا (35) استفاده می‌شوند. از آنجایی که این داده‌ها تنها در اعداد ماخ محدودی موجود هستند، از تکنیک‌های برون‌یابی یا درون‌یابی، بسته به نیاز، برای بدست آوردن معادلات مورد نیاز استفاده می‌شوند.

3-5- توابع اندیسی تراکم‌ناپذیر

پیشتر اشاره شدکه نیروهای آیرودینامیکی ناپایا در جریان تراکم‌ناپذیر تنها با استفاده از یک تابع اندیسی تعیین می‌گردند و این در حالی است که برای جریان تراکم‌پذیر به چهار تابع نیاز است. به منظور پیاده‌سازی رویکردی یکتا در تعیین بارهای آیرودینامیکی برای حل مسائل آیروالاستیک می‌توان تقریب جونز از تابع وگنر را به چهار تابع اندیسی تفکیک نمود به نحوی که تغییری در بارهای آیرودینامیکی حاصل از دو دیدگاه فوق حاصل نگردد. با استفاده از داده‌های عددی و نمودارهای مراجع [11,4]، به کارگیری روابط (13) تا (16) و نیز توجه به محور دوران و بازوی اعمال گشتاور، می‌توان توابع اندیسی مشابه‌ای در جریان تراکم‌ناپذیر به‌صورت روابط (36) تا (39) تعریف نمود.

$$\bar{\phi}_{I\alpha}(\tau) = 1 - 0.165e^{-0.0455\tau} - 0.355e^{-0.3\tau} \tag{36}$$

$$\bar{\phi}_{Im}(\tau) = -\frac{1}{4}\bar{\phi}_{I\alpha}(\tau) \tag{37}$$

$$\bar{\phi}_{Iq}(\tau) = \frac{3}{4}\bar{\phi}_{I\alpha}(\tau) \tag{38}$$

$$\bar{\phi}_{Imq}(\tau) = -\frac{3}{16}\bar{\phi}_{I\alpha}(\tau) - \frac{1}{16} \tag{39}$$

که در آن ($\bar{\phi}_{I\alpha}$، $\bar{\phi}_{Im}$) و ($\bar{\phi}_{Iq}$، $\bar{\phi}_{Imq}$) توابع اندیسی معادل ناشی از تغییر پله واحد به ترتیب در زاویه حمله و نرخ پیچش در لبه حمله برای جریان تراکم‌ناپذیر می‌باشند. همان‌طور که در بخش 3-4 اشاره شد، بیان توابع اندیسی به صورت توابعی با عبارات نمایی مشابه، باعث سهولت و اجتناب از پیچیدگی‌های ناشی از انتقال توابع اندیسی می‌شود. با استفاده از مقادیر اولیه، مجانبی و میانی توابع اندیسی ارائه شده با روابط (36) تا (39)، می‌توان توابع اندیسی معادلی برای جریان تراکم‌ناپذیر با عبارات نمایی مشابه با تابع اندیسی $\phi_{c\alpha}$ در ماخ 0.5 استخراج نمود، که در بخش نتایج با آنها اشاره خواهد شد.

4- توسعه بارهای آیردینامیکی اندیسی دوبعدی

در این بخش فرمولاسیونی مناسب و کارآمد از بارهای آیرودینامیکی ناپایا مبتنی بر توابع اندیسی با عبارت‌های نمایی مشابه برای تحلیل‌های ایروالاستیک در فضای حالت توسعه داده می‌شود. از سوی دیگر مباحث ارائه شده تا به اینجا که مبتنی بر توسعه آیرودینامیک اندیسی ناپایا روی مقاطع دوبعدی بوده است، با استفاده از مجموعه اصلاحاتی شامل به کارگیری تئوری آیرودینامیک نواری و نیز لحاظ نمودن اثرات نسبت منظری، نسبت منظری و شیب منحنی برآ به مسائل سه بعدی تعمیم می‌یابد.

4-1- نمایش بارهای آیردینامیکی متناسب با فضای حالت

انتقال معادلات آیروالاستیک به فضای حالت به دلیل ماهیت آنها که در بردارنده میرایی‌های آیرودینامیکی هستند، منجر به رویکرد مناسبی برای تحلیل مسائل ناپایستار می‌گردد. انگیزه اصلی به کارگیری روش‌های فضای حالت، استخراج معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه اول توصیف کننده بارهای آیرودینامیکی ناپایا است که با افزودن آنها به معادلات دینامیک سازه‌ای بالواره می‌توان پایداری و پاسخ‌های زمانی را با استفاده از تحلیل‌های مقدار ویژه یا انتگرال‌گیری مستقیم از معادلات آیروالاستیک حاکم بدست آورد. انعطاف پذیری و عمومیت روش فضای حالت در بیان آیرودینامیک ناپایا موجب کارآمدی و جذابیت آن برای تحلیل‌های آیروالاستیک می‌گردد.

استخراج توابع اندیسی با عبارت‌های نمایی مشابه، منجر به توابع اندیسی با شکل کلی داده شده با رابطه (19)، حتی پس از انتقال آنها به محل محور الاستیک می‌شود. لازم به ذکر است که در این حالت، فرایند انتقال با اصلاح ضرایب تشکیل دهنده توابع اندیسی طبق روابط (40) تا (43) انجام می‌شود.

$$b_{jc\alpha} = \bar{b}_{jc\alpha} \tag{40}$$

$$b_{jcm} = \bar{b}_{jcm} + \frac{1}{2}(a+1)\bar{b}_{jc\alpha} \tag{41}$$

$$b_{jcq} = \bar{b}_{jcq} - \frac{1}{2}(a+1)\bar{b}_{jc\alpha} \tag{42}$$

$$b_{jcmq} = \bar{b}_{jcmq} + \frac{1}{2}(a+1)\left(\bar{b}_{jcq} - \bar{b}_{jcm}\right) - \frac{1}{4}(a+1)^2\bar{b}_{jc\alpha} \tag{43}$$

که در آن عبارات $\bar{b}_j$ و b_j به ترتیب بیانگر ضرایب توابع اندیسی در مکان لبه حمله و محور الاستیک واقع در فاصله ab از میانه وتر بالواره می‌باشند. از اینرو، توابع اندیسی در محل محور الاستیک با رابطه (44) داده می‌شوند.

$$\phi_k(\tau, \mathrm{M}) = \sum_{j=0}^{3} b_{j,k}(\mathrm{M})e^{-\beta_j\tau} \tag{44}$$

که در آن ϕ_k معرف توابع اندیسی نیروی برآ و گشتاور آیرودینامیکی برای تغییر پله در زاویه حمله و نرخ پیچش یعنی به ترتیب $\phi_{c\alpha}$، ϕ_{cm}، ϕ_{cq} و ϕ_{cmq} می‌باشند. با فرض شروع حرکت از زمان $\tau = 0$، و همچنین استفاده از زمان واقعی t به جای زمان بی بعد τ، روابط (17) و (18) برای دوران بالواره حول محور الاستیک مطابق با روابط (45) تا (46) بازنویسی می‌شوند.

$$\begin{aligned} L(t) = \frac{C_{L_\alpha}qS}{U}\Big\{&\dot{w}(0)\phi_{c\alpha}(t) + 2b\dot{\alpha}(t)\phi_{cq}(0) \\ &+ \int_0^t \frac{d\dot{w}(\sigma)}{d\sigma}\phi_{c\alpha}(t-\sigma) \\ &+ 2b\int_0^t \frac{d\dot{\alpha}(\sigma)}{d\sigma}\phi_{cq}(t-\sigma)d\sigma\Big\} \end{aligned} \tag{45}$$

$$\begin{aligned} M_{ea}(t) = \frac{C_{L_\alpha}qSc}{U}\Big\{&\dot{w}(0)\phi_{cm}(t) + 2b\dot{\alpha}(t)\phi_{cmq}(0) \\ &+ \int_0^t \frac{d\dot{w}(\sigma)}{d\sigma}\phi_{cm}(t-\sigma) \\ &+ 2b\int_0^t \frac{d\dot{\alpha}(\sigma)}{d\sigma}\phi_{cmq}(t-\sigma)d\sigma\Big\} \end{aligned} \tag{46}$$

در ادامه، برای توسعه بارهای آیرودینامیکی در فضای حالت دو رویکرد متصور می‌باشد، که بسته به دیدگاه تحلیل‌گر در برخورد با مسئله آیروالاستیک می‌توان هریک از این رویکردها را به کار برد. در رویکرد اول، رابطه (44) در روابط (45) و (46) جایگذاری می‌شود. در این حالت بارهای آیرودینامیکی با روابط (47) و (48) توصیف می‌شوند.

$$L(t)=\frac{C_{L_\alpha}qS}{U}\{b_{0c\alpha}\dot{w}(t)+2bb_{0cq}\dot{\alpha}(t)+\dot{w}(0)\sum_{j=1}^{3}b_{ic\alpha}e^{-\beta_j\frac{U}{b}t}+2b\dot{\alpha}(0)\sum_{j=1}^{3}b_{icq}e^{-\beta_j\frac{U}{b}t}+\sum_{j=1}^{3}b_{jc\alpha}B_{iw}+2b\sum_{j=1}^{3}b_{jcq}B_{i\alpha}\} \quad (47)$$

$$M_{ea}(t)=\frac{C_{L_\alpha}qSc}{U}\{b_{0cm}\dot{w}(t)+2bb_{0cmq}\dot{\alpha}(t)+\dot{w}(0)\sum_{j=1}^{3}b_{jcm}e^{-\beta_j\frac{U}{b}t}+2b\dot{\alpha}(0)\sum_{j=1}^{3}b_{jcmq}e^{-\beta_j\frac{U}{b}t}+\sum_{j=1}^{3}b_{jcm}B_{jw}+2b\sum_{j=1}^{3}b_{jcmq}B_{j\alpha}\} \quad (48)$$

که در آن معادلات دیفرانسیل مرتبه اول حاکم بر پارامتر B با روابط (49) و (50) داده می‌شوند.

$$\dot{B}_{jw}(t)+\left(\beta_j\frac{U}{b}\right)B_{jw}(t)=\ddot{w}(t) \quad (49)$$

$$\dot{B}_{j\alpha}(t)+\left(\beta_j\frac{U}{b}\right)B_{j\alpha}(t)=\ddot{\alpha}(t) \quad (50)$$

در رویکرد دوم، با جایگذاری (44) در (45) و (46) و اعمال انتگرال‌گیری جزء به جزء، نمایشی دیگر از بارهای آیرودینامیکی بدست می‌آید.

$$L(t)=\frac{C_{L_\alpha}qS}{U}\{\dot{h}(t)\phi_{c\alpha}(0)+h(t)\dot{\phi}_{c\alpha}(0)-h(0)\dot{\phi}_{c\alpha}(t)+2b\dot{\alpha}(t)\phi_{cq}(0)+\left[U\phi_{c\alpha}(0)+2b\dot{\phi}_{cq}(0)\right]\alpha(t)-2b\alpha(0)\dot{\phi}_{cq}(t)+\sum_{j=1}^{3}\lambda_{h1j}B_{1j}+\sum_{j=1}^{3}\lambda_{\theta1j}B_{2j}\} \quad (51)$$

$$M_{ea}(t)=\frac{C_{L_\alpha}qSc}{U}\{\dot{h}(t)\phi_{cm}(0)+h(t)\dot{\phi}_{cm}(0)-h(0)\dot{\phi}_{cm}(t)+2b\dot{\alpha}(t)\phi_{cmq}(0)+\left[U\phi_{cm}(0)+2b\dot{\phi}_{cmq}(0)\right]\alpha(t)-2b\alpha(0)\dot{\phi}_{cmq}(t)+\sum_{j=1}^{3}\lambda_{h2j}B_{1j}+\sum_{j=1}^{3}\lambda_{\theta2j}B_{2j} \quad (52)$$

که عبارت‌های تشکیل دهنده آن‌ها با روابط (53) تا (58) داده می‌شوند.

$$\lambda_{h1j}=b_{jc\alpha}\left(\beta_j\frac{U}{b}\right)^2 \quad (53)$$

$$\lambda_{\theta1j}=b\beta_j\left(\frac{U}{b}\right)^2\left(2b_{jcq}\beta_j-b_{jc\alpha}\right) \quad (54)$$

$$\lambda_{h2j}=b_{jcm}\left(\beta_j\frac{U}{b}\right)^2 \quad (55)$$

$$\lambda_{\theta2j}=b\beta_j\left(\frac{U}{b}\right)^2\left(2b_{jcmq}\beta_j-b_{jcm}\right) \quad (56)$$

$$\dot{B}_{1j}(t)+\left(\beta_j\frac{U}{b}\right)B_{1j}(t)=h(t) \quad (57)$$

$$\dot{B}_{2j}(t)+\left(\beta_j\frac{U}{b}\right)B_{2j}(t)=\alpha(t) \quad (58)$$

این نوع نمایش نیروهای آیرودینامیکی ناپایا ضمن حذف عبارت‌های انتگرالی از روابط (45) و (46)، موجب کارآمدی و سهولت در افزودن آن‌ها به معادلات حاکم بر سازه و در نهایت انتقال معادلات آیروالاستیک حاصله به فضای حالت می‌گردد. در ضمن، به دلیل یکسان سازی نمایش توابع اندیسی جریان تراکم‌ناپذیر با تراکم‌پذیر، روابط ارائه شده برای تمامی محدوده تراکم‌ناپذیر تا مادون صوت تراکم‌پذیر معتبر می‌باشد.

4-2- تئوری نواری برای یک بال پیوسته

تئوری نواری به دلیل مدل‌سازی سریع و بازدهی محاسباتی بالا، به طور گسترده‌ای در طراحی مقدماتی استفاده می‌شود. در این تئوری، بال به‌صورت ترکیبی از چندین جزء (نوار) در امتداد دهانه آن در نظر گرفته می‌شود. ضریب برآ روی هر نوار در امتداد وتر از بال متناسب با زاویه حمله محلی $\alpha(y)$ بوده و در ضمن برآ روی یک نوار اثری روی دیگری ندارد. در شکل پایه‌ای این تئوری، نیروی برآ روی هر نوار مشابه حالتی فرض می‌گردد که نوار بخشی از بال دو بعدی با دهانه نامحدود بوده و از این‌رو، ضمن استفاده از ویژگی‌های مقطعی بالواره از اثرات ریشه و نوک بال صرفه‌نظر می‌شود. نیروی برآی کل وارد بر یک بال، با انتگرال‌گیری از اثر تمامی نوارها تعیین می‌شود.

$$L=\frac{1}{2}\rho_\infty U^2cC_{l_\alpha}\int_0^s\alpha(y)dy \quad (59)$$

در واقعیت، مقدار نیروی برآ در نوک بال به صفر می‌رسد. از اینرو، لازم است به منظور کاهش نیروی برآ در امتداد دهانه بال و به سمت نوک آن، نیروی برآی حاصل از تئوری نوار اصلاح گردد. این عمل با استفاده از توابع فرضی مدل کننده تغییر شیب منحنی برآ در طول دهانه، از قبیل روابط (60) و (61)، میسر می‌شود[27].

$$C^w{}_{L_\alpha}(y)=\bar{C}_{L_\alpha}\left[1-\left(\frac{y}{s}\right)^2\right] \quad (60)$$

$$C^w{}_{L_\alpha}(y)=\bar{C}_{L_\alpha}\cos\left(\frac{\pi y}{2s}\right) \quad (61)$$

4-3- تصحیح شیب منحنی برآ

به منظور لحاظ نمودن اثرات ناشی از تراکم‌پذیری، بال محدود یا سوئیپ می‌توان اصلاحات دیگری نیز بر ضرایب آیرودینامیکی اعمال می‌شود. با افزایش عدد ماخ، تراکم‌پذیری هوا تاثیر بیشتری روی نیروهای آیرودینامیکی داشته و شیب منحنی برآ مطابق با رابطه (62) کاهش می‌یابد [27].

$$C_{l_\alpha}^c=\frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{M}^2}}C_{l_\alpha} \quad (62)$$

کاهش نسبت منظری AR نیز بر طبق رابطه (63) منجر به کاهش شیب منحنی برآ در بال با دهانه محدود می‌شود [27].

$$C_{l_\alpha}^{AR}=\frac{C_{l_\alpha}}{1+C_{l_\alpha}/(\pi AR)} \quad (63)$$

به منظور اصلاح شیب منحنی برآ که همزمان اثرات تراکم‌پذیری و نیز دهانه محدود بال را در بر داشته باشد، از رابطه (64) استفاده می‌شود [28].

$$C_{L_\alpha}=C_{l_\alpha}\frac{AR}{\sqrt{(1-\mathrm{M}^2)}AR+2} \quad (64)$$

بنابراین، برای تعمیم آیرودینامیک دوبعدی به آیرودینامیک سه‌بعدی می‌توان از ترکیب یکی روابط (60) تا (61) با رابطه (64) برای بیان شیب منحنی برآ استفاده نمود.

5- اعتبارسنجی و نتایج

5-1- اعتبارسنجی

به دلیل ماهیت مستقل چهار تابع اندیسی توصیف کننده نیروهای آیرودینامیکی و نیز محدودیت داده‌های در دسترس از سایر مراجع لازم است تا صحت و اعتبارسنجی تقریب‌های ارائه شده به طور جامع بررسی شود. بدین منظور، با یکسان‌سازی شرایط و مقیاس داده‌ها، نمودارهای توابع اندیسی توسعه داده شده با نمودارهای موجود در مراجع [21,11,4,1] برای اعداد ماخ مشابه مقایسه می‌شوند. در شکل 2، نمودار تابع اندیسی $\phi_{c\alpha}$ حاصل از تقریب توسعه داده‌شده در این مقاله به‌همراه نمودارهای مراجع [11,1] آورده شده است. لازم به ذکر است، با توجه به بازه نتایج ارائه شده توسط مرجع [1]، بررسی وضعیت همپوشانی مقادیر مجانبی و نیز انطباق کامل نتایج، به

نمودارهای شکل 2 محدود می‌شود. با اینحال به لحاظ کیفی، نمودارها رفتار مشابه‌ای را ازخود نشان می‌دهند. به منظور مقایسه نتایج با داده‌های فرسادی و همکاران [21] و نیز مازلسکی [11]، تقریب توابع اندیسی $\phi_{c\alpha}$ و ϕ_{cm} در اعداد ماخ 0.5 و 0.7 در شکل‌های 3 و 4 نمایش داده شده‌اند. با توجه به محدود بودن داده‌های موجود در مقادیر مشابه‌ای از اعداد ماخ، مقایسه بیشتر نتایج به نمودارهای ارائه شده توسط مازلسکی [11] محدود می‌شود. بدین منظور نمودارهای مربوط به چهار تابع اندیسی که با استفاده از داده‌های توسعه داده شده در ماخ‌های صفر، 0.5، 0.6 و 0.7 تقریب زده شده‌اند، در شکل‌های 5 تا 8 با داده‌های مازلسکی به لحاظ کیفی و کمی مقایسه می‌گردند. با توجه به نمودارهای مذکور می‌توان به مطابقت بسیار خوب توابع

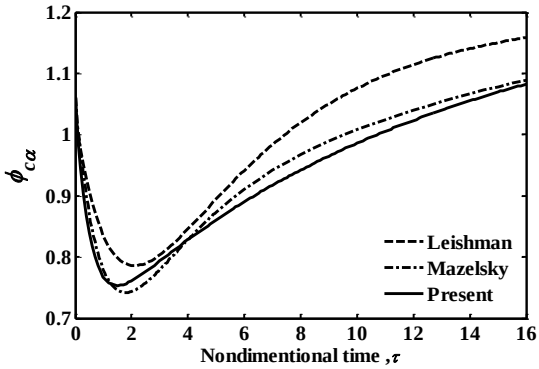

Fig. 2 Comparison of the indicial function $\phi_{c\alpha}$ at Mach number of 0.6 with Leishman [1] and Mazelsky [11]

شکل 2 مقایسه توابع اندیسی $\phi_{c\alpha}$ در ماخ 0.6 با مراجع [11,1]

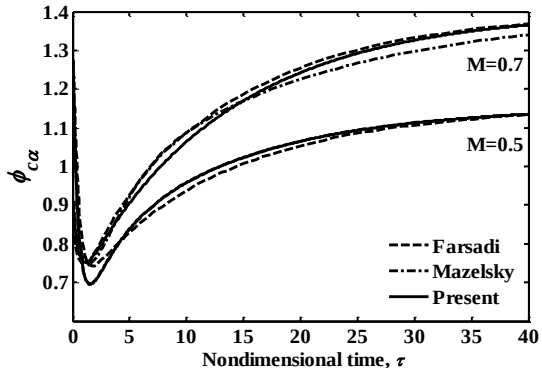

Fig. 3 Comparison of the indicial function $\phi_{c\alpha}$ at Mach number of 0.5 and 0.7 with Farsadi [21] and Mazelsky [11]

شکل 3 مقایسه تابع اندیسی $\phi_{c\alpha}$ در اعداد ماخ 0.5 و 0.6 با مراجع [21,11]

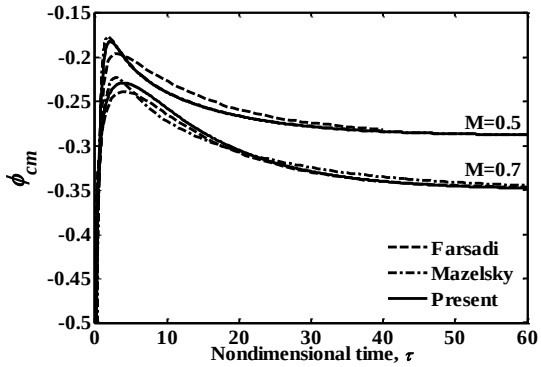

Fig. 4 Comparison of the indicial function ϕ_{cm} at Mach number of 0.5 and 0.7 with Farsadi [21] and Mazelsky [11]

شکل 4 مقایسه توابع اندیسی ϕ_{cm} در ماخ 0.5 و 0.6 با مراجع [21,11]

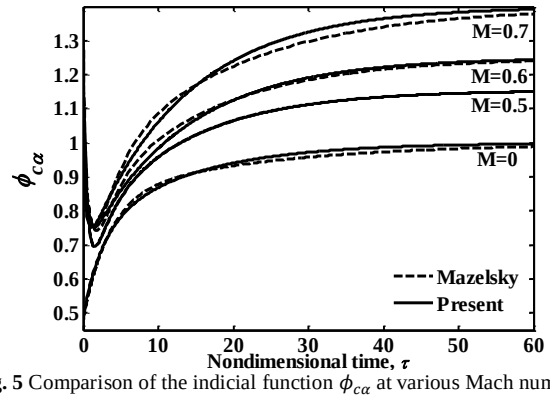

Fig. 5 Comparison of the indicial function $\phi_{c\alpha}$ at various Mach number with Mazelski [11]

شکل 5 مقایسه تابع اندیسی $\phi_{c\alpha}$ در اعداد ماخ مختلف باداده‌های مازلسکی [11]

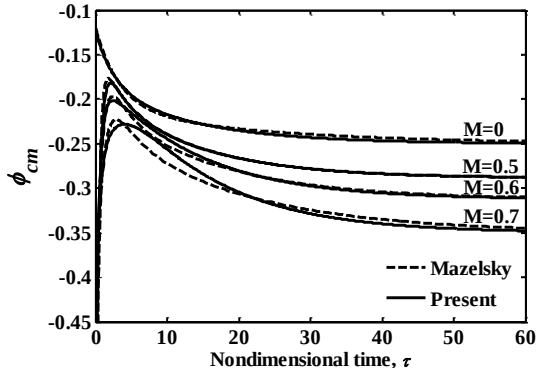

Fig. 6 Comparison of the indicial function ϕ_{cm} at various Mach number with Mazelski

شکل 6 مقایسه تابع اندیسی ϕ_{cm} در اعداد ماخ مختلف باداده‌های مازلسکی

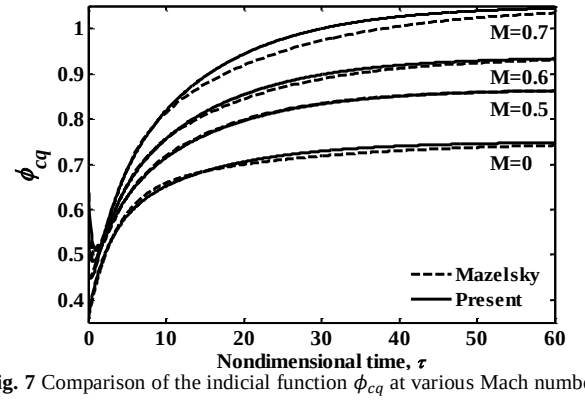

Fig. 7 Comparison of the indicial function ϕ_{cq} at various Mach number with Mazelski

شکل 7 مقایسه تابع اندیسی ϕ_{cq} در اعداد ماخ مختلف باداده‌های مازلسکی

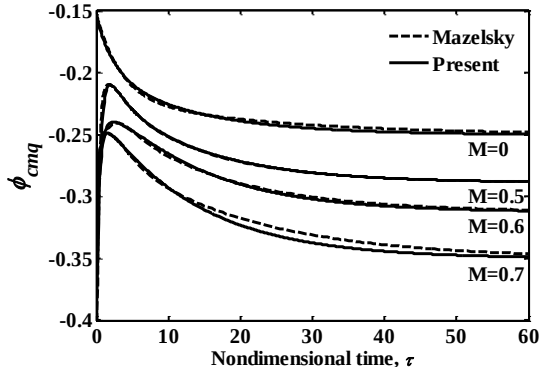

Fig. 8 Comparison of the indicial function ϕ_{cmq} at various Mach number with Mazelski

شکل 8 مقایسه تابع اندیسی ϕ_{cmq} در اعداد ماخ مختلف باداده‌های مازلسکی

اندیسی در ماخ 0.5 پی برد. این نتیجه به دلیل استفاده از توان‌های مشابه قابل انتظار است. در سایر اعداد ماخ، همان‌طور که در شکل‌های مذکور نیز قابل رویت می‌باشد، نمودارها دارای مقادیر ابتدایی و انتهایی مشابهی هستند. اما، در مقادیر زمانی میانی اختلاف‌هایی جزئی مشاهده می‌شود که از جمله دلایل آن می‌توان به رویکرد اتخاذ شده، یعنی استفاده از ضرایب توانی مستقل از عدد ماخ، اشاره نمود.

2-5- نتایج

با توجه به صحه‌گذاری نتایج تقریب توسعه داده شده از توابع اندیسی تراکم‌پذیر با استفاده از مقایسه نتایج در اعداد ماخ صفر، 0.5، 0.6 و 0.7، حال می‌توان تقریب توسعه داده شده مذکور را برای تمامی بازه جریان تراکم‌ناپذیر تا تراکم‌پذیر مادون صوت تعمیم داد. طبق بررسی‌های صورت گرفته در اعدادماخ کمتر از 0.2، رفتار بسیار نزدیکی از توابع اندیسی تراکم‌پذیر با توابع اندیسی مشابه آنها در حالت تراکم‌ناپذیر مشاهده می‌شود [1]. البته همان‌طور که پیشتر نیز اشاره شد، برخلاف مقادیر نامحدود توابع اندیسی تراکم‌ناپذیر در شروع حرکت، توابع اندیسی تراکم‌پذیر دارای مقدار محدودی هستند. با اینحال با توجه به داده‌های بدست آمده برای اعداد ماخ کمتر از 0.2، می‌توان از ضرایب توابع اندیسی ایجاد شده در عدد ماخ صفر برای بیان نیروی برآ و گشتاور آیرودینامیکی ناپایا در مسائل مربوط به آیروالاستیسیته استفاده نمود.

در شکل‌های 9 تا 12 ضرایب توابع اندیسی نیروی برآ و گشتاور آیرودینامیکی ناپایای تراکم‌پذیر برای تغییر پله واحد در زاویه حمله و نرخ پیچش، یعنی به ترتیب توابع $\phi_{c\alpha}(\tau)$، $\phi_{cm}(\tau)$، $\phi_{cq}(\tau)$ و $\phi_{cmq}(\tau)$ تعریف شده با رابطه (44)، در محدوده اعداد ماخ $0.2 \le M \le 0.8$ به صورت نمودارهایی تابع عدد ماخ آورده شده‌اند. همان‌طور که اشاره شد برای اعدادماخ کمتر از 0.2، می‌توان از توابع اندیسی تراکم‌ناپذیر برای استخراج بارهای آیرودینامیکی ناپایا استفاده نمود. بدین منظور، ضرایب مربوط به توابع اندیسی تراکم‌ناپذیر در جدول 3 آورده شده‌اند.

یادآور می‌شود که در توسعه توابع اندیسی در هر دو جریان تراکم‌ناپذیر و تراکم‌پذیر زیرصوت از توان‌های نمایی مستقل از عدد ماخ و مشابه با توان‌های تابع اندیسی برآ به‌واسطه تغییر پله واحد در زاویه حمله برای عدد ماخ 0.5، جدول 4، استفاده شده است. پس از استخراج ضرایب توابع اندیسی که بخشی از آنها در قالب جدول‌های 5 و 6 ارائه شده است، می‌توان با استفاده از رابطه (44) توابع اندیسی برآ و گشتاور آیرودینامیکی حول لبه حمله در تمامی

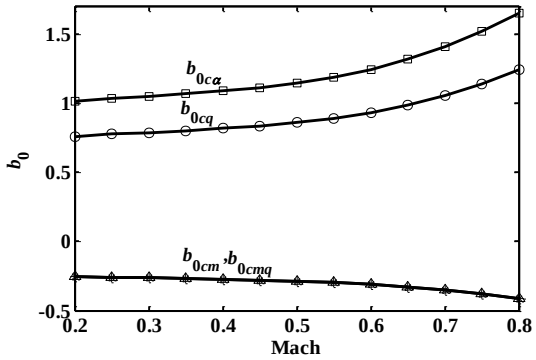

Fig. 9 b_0 Coefficients of the indicial functions due to plunging and pitching at $0.2 \le M \le 0.8$

شکل 9 ضرایب b_0 تقریب توابع اندیسی تراکم‌پذیر به واسطه حرکت‌های نوسانی انتقالی و پیچشی در محدوده اعداد ماخ $0.2 \le M \le 0.8$

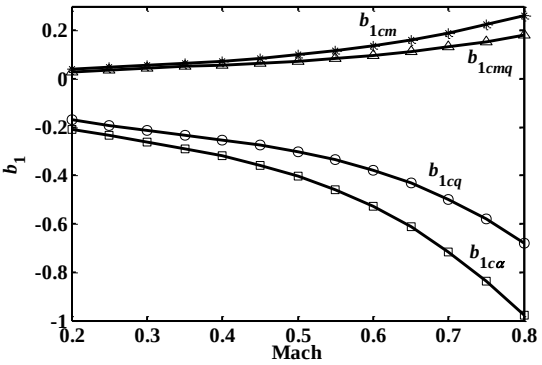

Fig. 10 b_1 Coefficients of the indicial functions due to plunging and pitching at $0.2 \le M \le 0.8$

شکل 10 ضرایب b_1 تقریب توابع اندیسی تراکم‌پذیر به واسطه حرکت‌های نوسانی انتقالی و پیچشی در محدوده اعداد ماخ $0.2 \le M \le 0.8$

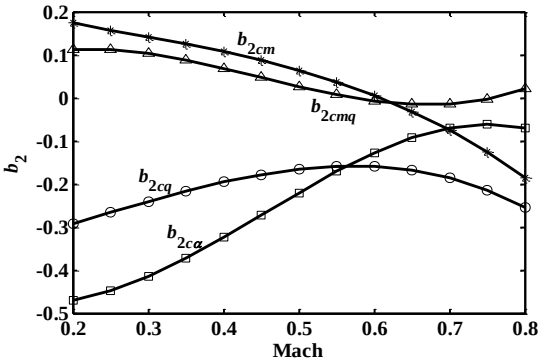

Fig. 11 b_2 Coefficients of the indicial functions due to plunging and pitching at $0.2 \le M \le 0.8$

شکل 11 ضرایب b_2 تقریب توابع اندیسی تراکم‌پذیر به واسطه حرکت‌های نوسانی انتقالی و پیچشی در محدوده اعداد ماخ $0.2 \le M \le 0.8$

محدوده تراکم‌پذیر مادون صوت را ترسیم نمود. خلاصه‌ای از جمع‌بندی نتایج بدست آمده برای اعداد ماخ محدود و در بازه صفر تا 0.8، توسط شکل‌های 13 تا 16 نمایش داده شده‌اند.

6- نتیجه‌گیری

در این مقاله، مدلی جدید از بارهای آیرودینامیکی ناپایا با استفاده از مفاهیمی نظیر توابع اندیسی، اصل جمع آثار پاسخ و انتگرال دوهامل برای حرکت

جدول 3 ضرایب تقریب زننده برآ و گشتاور اندیسی در ماخ صفر

Table 3 Coefficients for approximating the indicial lift and moment at Mach numbers M=0.0

تابع اندیسی	b_0	b_1	b_2	b_3
$\phi_{1c\alpha}$	1	-0.2679	-0.2274	-0.0247
ϕ_{1cm}	-0.25	0.067	0.0568	0.0062
ϕ_{1cq}	0.75	-0.201	-0.1706	-0.0185
ϕ_{1cmq}	-0.25	0.0502	0.0426	0.0046

جدول 4 ضرایب توانی تقریب زننده برآ و گشتاور اندیسی

Table 4 Exponential coefficients for approximating the indicial lift and moment

تابع اندیسی	β_0	β_1	β_2	β_3
$\phi_{c\alpha}$	0	0.0754	0.3720	1.890

جدول 5 ضرایب تقریب زننده توابع برآ و گشتاور اندیسی به واسطه تغییر ناگهانی زاویه حمله در چند عدد ماخ تراکم‌پذیر مختلف

Table 5 Coefficients for approximating the indicial lift and moment functions due to a sudden change in angle of attack for several subsonic Mach numbers

عدد ماخ	ضرایب تابع اندیسی $\phi_{c\alpha}$				ضرایب تابع اندیسی ϕ_{cm}			
	b_0	b_1	b_2	b_3	b_0	b_1	b_2	b_3
0.0	1.0000	-0.2679	-0.2274	-0.0247	-0.2500	0.0670	0.0568	0.0062
0.2	1.0206	-0.2124	-0.4820	2.8569	-0.2552	0.0386	0.1808	-1.5558
0.3	1.0483	-0.2566	-0.3982	1.7286	-0.2621	0.0569	0.1325	-0.9883
0.4	1.0911	-0.3140	-0.3316	1.1461	-0.2728	0.0735	0.1049	-0.7014
0.5	1.1547	-0.4055	-0.2493	0.7733	-0.2887	0.0995	0.0721	-0.5195
0.6	1.2500	-0.5450	-0.0836	0.4396	-0.3125	0.1400	-0.0006	-0.3574
0.7	1.4003	-0.6896	-0.1080	0.3067	-0.3501	0.1863	-0.0728	-0.2182
0.8	1.6667	-0.9982	-0.0546	0.1820	-0.4167	0.2646	-0.1798	-0.0661

جدول 6 ضرایب تقریب زننده توابع برآ و گشتاور اندیسی به واسطه تغییر ناگهانی نرخ پیچش یک بالواره تحت دوران حول لبه حمله در اعداد ماخ مختلف

Table 6 Coefficients for approximating the indicial lift and moment functions due to a sudden change in pitching rate for an airfoil rotating about its leading edge for several subsonic Mach numbers

عدد ماخ	ضرایب تابع اندیسی ϕ_{cq}				ضرایب تابع اندیسی ϕ_{cmq}			
	b_0	b_1	b_2	b_3	b_0	b_1	b_2	b_3
0.0	0.7500	-0.2010	-0.1706	-0.0185	-0.2500	0.0502	0.0426	0.0046
0.2	0.7655	-0.1772	-0.2874	1.2907	-0.2552	0.0328	0.1183	-0.9570
0.3	0.7862	-0.2032	-0.2510	0.7290	-0.2621	0.0423	0.0950	-0.5827
0.4	0.8183	-0.2495	-0.1996	0.4266	-0.2728	0.0545	0.0748	-0.3871
0.5	0.8660	-0.3113	-0.1581	0.2400	-0.2887	0.0767	0.0409	-0.2533
0.6	0.9375	-0.3839	-0.1516	0.1285	-0.3125	0.1023	-0.0282	-0.1152
0.7	1.0502	-0.4808	-0.2097	0.0950	-0.3501	0.1209	-0.0024	-0.0716
0.8	1.2500	-0.6984	-0.2350	0.0813	-0.4167	0.1931	0.0088	-0.0506

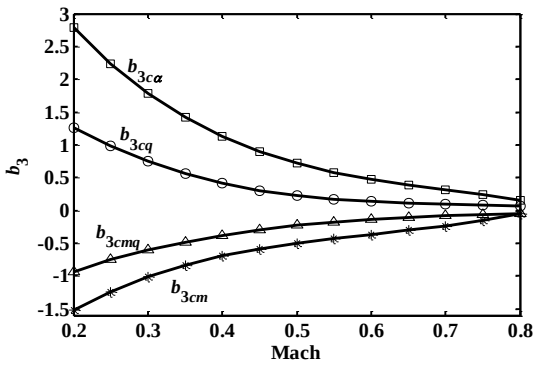

Fig. 12 b_3 Coefficients of the indicial functions due to plunging and pitching at $0.2 \le M \le 0.8$

شکل 12 ضرایب b_3 تقریب توابع اندیسی تراکم‌پذیر به واسطه حرکت‌های نوسانی انتقالی و پیچشی در محدوده اعداد ماخ $0.2 \le M \le 0.8$

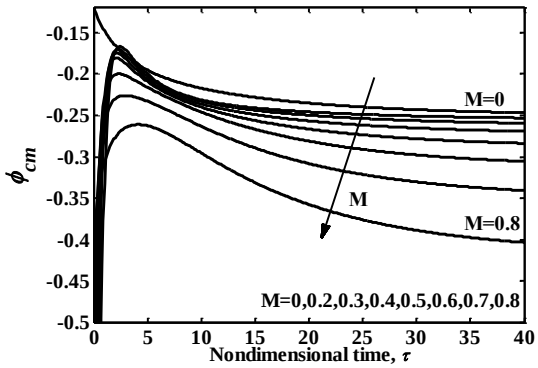

Fig. 14 The indicial moment functions due to a sudden change in angle of attack at various Mach number

شکل 14 توابع اندیسی گشتاور ناشی از تغییر ناگهانی در زاویه حمله برای اعداد ماخ مختلف

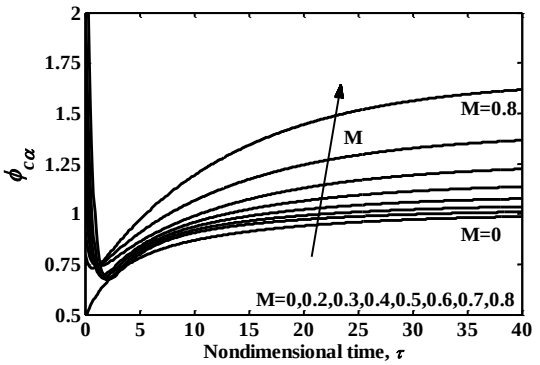

Fig. 13 The indicial lift functions due to a sudden change in angle of attack at various Mach number

شکل 13 توابع اندیسی برآ ناشی از تغییر ناگهانی در زاویه حمله برای اعداد ماخ مختلف

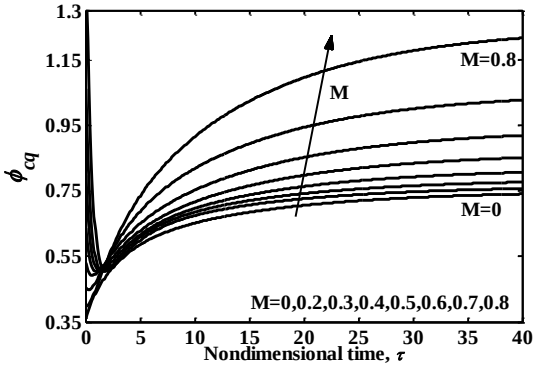

Fig. 15 The indicial lift functions due to a sudden change in pitching rate at various Mach number

شکل 15 توابع اندیسی برآ ناشی از تغییر ناگهانی در نرخ پیچش برای اعداد ماخ مختلف

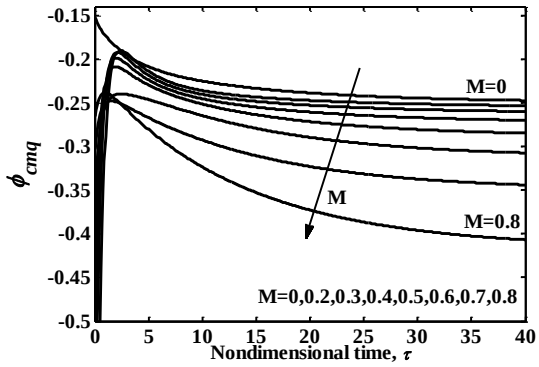

Fig. 16 The indicial moment functions due to a sudden in pitching rate at various Mach number

شکل 16 توابع اندیسی گشتاور ناشی از تغییر ناگهانی در نرخ پیچش برای اعداد ماخ مختلف

دلخواه یک بالواره در جریان تراکم‌ناپذیر و تراکم‌پذیر مادون صوت ارائه شده است. با استفاده از عبارت‌های تحلیلی و داده‌های عددی موجود، تقریب‌هایی نوین از توابع اندیسی برای تمامی محدوده جریان زیر صوت محاسبه شده‌اند که علاوه بر تابعیت پیوسته از عدد ماخ دارای شکل مناسبی برای انتقال به سایر نقاط روی بالواره می‌باشند. توابع اندیسی توسعه داده شده در بردارنده چهار ضریب تابع عدد ماخ و سه ثابت نمایی می‌باشند. از آنجاییکه برای توصیف کامل بارهای آیرودینامیکی ناپایا از چهار تابع اندیسی استفاده می‌شود، بنابراین تعداد ضرایب تابع عدد ماخ مورد نیاز نسبت به روش‌های متداول از 28 ضریب به 16 ضریب کاهش یافته‌اند. از مزایای قابل توجه توابع اندیسی ایجاد شده، می‌توان به مستقل بودن ضرایب عبارت‌های نمایی آنها از عدد ماخ و در نتیجه سهولت انتقال توابع اندیسی به مرکز دوران دلخواه روی بالواره، در دسترس بودن آنها در تمامی بازه عدد ماخ صفر تا ماخ 0.8 و نیز ارائه نمایشی مناسب و یکپارچه از روابط آیرودینامیکی برای کوپل شدن به مدل سازه در تمامی محدوده زیر صوت (تراکم‌پذیر/ناپذیر) اشاره نمود. با توجه به ضرورت بیان تقریبی از تابع وگنر مشابه با توابع اندیسی تراکم‌پذیر، چهار تابع اندیسی معادل با تابع اندیسی توصیف شده با تقریب جونز استخراج شده‌اند. از سوی دیگر، رویکرد اتخاذ شده در توسعه توابع اندیسی منجر به بارهای آیرودینامیکی ناپایا با فرمولاسیونی یکتا برای جریان‌های تراکم‌ناپذیر و تراکم‌پذیر مادون صوت در حوزه زمان و فرکانس شده است که در تحلیل‌های پاسخ و نیز مباحث پایداری مسائل آیروالاستیک به ویژه در فضای حالت، مفید و بسیار کارآمد می‌باشند. با توجه به نتایج حاصل نشان داده شد که برای اعداد ماخ کمتر از 0.2 می‌توان از توابع اندیسی تراکم‌ناپذیر با دقت مناسبی برای مدل‌سازی جریان تراکم‌پذیر و تعیین بارهای آیرودینامیکی ناپایا استفاده نمود. به علاوه، گرچه بارهای آیرودینامیکی مذکور برای سطوح برآزای دو بعدی توسعه داده شده‌اند، اما با استفاده از تئوری نواری و اعمال اصلاحات در شیب منحنی برآ، اثرات بال سه‌بعدی با نسبت منظری محدود در مدل بدست آمده لحاظ شده است.

7- مراجع

[1] J. Leishman, Validation of approximate indicial aerodynamic functions for two-dimensional subsonic flow, *Journal of Aircraft*, Vol. 25, No. 10, pp. 914-922, 1988.

[2] M. Tobak, On the use of the indicial-function concept in the analysis of unsteady motions of wings and wing-tail combinations, *NACA Technical Note*, No. 1188, 1954.

[3] H. Lomax, *Indicial aerodynamics*, AGARD Manual of Aeroelasticity, Pt. II, Chapter 6, Nov. 1960.

[4] R. L. Bisplinghoff, H. Ashley, R. L. Halfman, *Aeroelasticity*, pp. 323-353, New York: Dover Publications, 1996.

[5] G. J. Leishman, *Principles of helicopter aerodynamics*, pp. 446-476 New york: Cambridge university press, 2006.

[6] J. Leishman, Indicial lift approximations for two-dimensional subsonic flow as obtained from oscillatory measurements, *Journal of Aircraft*, Vol. 30, No. 3, pp. 340-351, 1993.

[7] P. Marzocca, L. Librescu, D. Kim, I. Lee, S. Schober, Development of an indicial function approach for the two-dimensional incompressible/compressible aerodynamic load modelling, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*, Vol. 221, No. 3, pp. 453-463, 2007.

[8] Z. Qin, *Vibration and Aeroelasticity of Advanced Aircraft Wings Modeled as Thin-Walled Beams-Dynamics, Stability and Control*, PhD Thesis, Virginia Polytechnic Institute , 2001.

[9] B. Mazelsky, Numerical determination of indicial lift of a two-dimensional sinking airfoil at subsonic Mach numbers from oscillatory lift coefficients with calculations for Mach number 0.7, *NACA Technical Note*, No. 2562, 1951.

[10] B. Mazelsky, Determination of Indicial Lift and Moment of a Two-Dimensional Pitching Airfoil at Subsonic Mach Numbers From Oscillatory Coefficients With Numerical Calculations for a Mach Number of 0.7, *NACA Technical Note*, No. 2613, 1952.

[11] Mazelsky, J. A. Drischler, Numerical determination of indicial lift and moment functions for a two-dimensional sinking and pitching airfoil at Mach numbers 0.5 and 0.6, *NACA Technical Note*, No. 2739, 1952.

[12] E. H. Dowell, A simple method for converting frequency domain aerodynamics to the time domain, *NASA Technical Memorandum*, No. 81844, 1980.

[13] J. Leishman, K. Nguyen, State-space representation of unsteady airfoil behavior, *AIAA journal*, Vol. 28, No. 5, pp.836-844, 1990.

[14] J. G. Leishman, Unsteady lift of a flapped airfoil by indicial concepts, *Journal of Aircraft*, Vol. 31, No. 2, pp. 288-297, 1994.

[15] P. Marzocca, L. Librescu, G. Chiocchia, Unsteady aerodynamics in various flight speed regimes for flutter/dynamic response analyses, *Proceedings of 18th AIAA Applied Aerodynamic Conference*, Denver, Colorado, pp. 491-501, August 14-17, 2000

[16] P. Marzocca, L. Librescu, G. Chiocchia, Aeroelastic response of a 2-D airfoil in a compressible flow field and exposed to blast loading, *Aerospace Science and Technology*, Vol. 6, No. 4, pp. 259-272, 2002.

[17] P. Marzocca, L. Librescu, G. Chiocchia, Aeroelastic response of 2-D lifting surfaces to gust and arbitrary explosive loading signatures, *International Journal of Impact Engineering*, Vol. 25, No. 1, pp. 41-65, 2001.

[18] P. Marzocca, L. Librescu, D.-H. Kim, I. Lee, , Linear/nonlinear unsteady aerodynamic modeling of 2-D lifting surfaces via a combined CFD/analytical approach, *Proceedings of the 44th AIAA/ASME/ASCE/AHS Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*, Norfolk, Virginia, April 7-10, 2003

[19] V. Parameswaran, J. D. Baeder, Indicial aerodynamics in compressible flow-direct computational fluid dynamic calculations, *Journal of Aircraft*, Vol. 34, No. 1, pp. 131-133, 1997.

[20] I. F. Miranda, P. A. de Oliveira Soviero, Indicial response of thin in a compressible subsonic flow, *Proceedings of 18th International congress of Mechanical Engineering*, Ouro Preto, MG, November 6-11, 2005.

[21] T. Farsadi, J. Javanshir, Expansion of Indicial Function Approximations for 2-D Subsonic Compressible Aerodynamic Loads, *Proceedings of the ASME 2012 International Mechanical Engineering Congress and Exposition*, Houston, Texas, pp. 519-528, November 9-15, 2012.

[22] S. Sina, T. Farsadi, H. Haddadpour, Aeroelastic Stability and Response of Composite Swept Wings in Subsonic Flow Using Indicial Aerodynamics, *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 135, No. 5, pp. 051019, 2013.

[23] R. Firouz-Abadi, A. Askarian, P. Zarifian, Effect of thrust on the aeroelastic instability of a composite swept wing with two engines in subsonic compressible flow, *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 36, pp. 18-31, 2013.

[24] S. Shams, M. Sadr, H. Haddadpour, An efficient method for nonlinear aeroelasticy of slender wings, Nonlinear Dynamics, Vol. 67, No. 1, pp. 659-681, 2012.

[25] S. L. Brunton, C. W. Rowley, Empirical state-space representations for Theodorsen's lift model, *Journal of Fluids and Structures*, Volume 38, pp. 174-186, 2013.

[26] H. Lomax, Two-and three-dimensional unsteady lift problems in high-speed flight, *NACA Technical Note*, No. 1077, 1952.

[27] J. R. Wright, J. E. Cooper, *Introduction to aircraft aeroelasticity and loads*, pp. 76-80, England: John Wiley & Sons, 2008.

[28] Ü. Gülçat, *Fundamentals of modern unsteady aerodynamics*, pp. 8-11, Berlin: Springer, 2015.