مجله مهندسی مکانیک مدرس، فروردین 1396، دوره 17، شماره 1، ص‌ص 403-412

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

تحلیل اثر سرعت اعمال بار بر رشد ترک مورب در ورق با استفاده از تئوری پری-داینامیک

سید روح الله کاظمی[1*]، میثم شکوری[2]

1- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان، رشت

2- استادیار، مهندسی هوافضا، دانشگاه سمنان، سمنان

*رشت، صندوق پستی 3756، kazemi@guilan.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 16 آبان 1395

پذیرش: 13 دی 1395

ارائه در سایت: 29 دی 1395

کلید واژگان:

تئوری پری‌دینامیک

رشد ترک مورب

انتشار ترک

چندشاخه شدن

چکیده

یکی از مشکلاتی که در تحلیل ترک با روش‌های مرسوم وجود دارد وجود ناپیوستگی در ماده و شرایط خاص حاکم بر نوک ترک است. در سال‌های اخیر روشی بر مبنای مکانیک غیر محلی به‌نام «تئوری پری‌دینامیک» مطرح شده که روند تحلیل چنین سازه‌هایی را بهبود داده است. در این مدل، نقاطی از جسم که جابجایی یا هر کدام از مشتقات جابجایی در آنها ناپیوسته باشد، از سایر نقاط مادی متمایز نیستند. در این مقاله رشد یک ترک مورب در ورق تحت سرعت‌های مختلف کشش لبه‌ها مورد مطالعه قرار گرفته‌است. مدل رشد ترک با استفاده از تئوری پرداینامیک مدل‌سازی شده و نتایج حاصل با دیگر مطالعات، اعتبارسنجی شده است. همچنین اثر تغییر زاویه ترک و سرعت اعمال بار کششی در ورق بررسی شده است. نتایج حاصل نشان‌دهنده این است که تئوری پری‌دینامیک به خوبی قادر به مدل‌سازی رشد ترک مورب برای سرعت‌های مختلف کشش لبه‌ها است. همچنین نحوه رشد ترک علاوه بر زاویه ترک اولیه، وابستگی بسیاری به سرعت اعمال بار دارد، بطوریکه با افزایش سرعت اعمال بار پدیده چندشاخه شدن ترک اتفاق می‌افتد و ماده رفتار تردتری از خود بروز می‌دهد.

Effects of the speed of applying loads on the growth of inclined crack in plates using Peridynamic theory

Sayyed Roohollah Kazemi[1*], Meisam Shakouri[2]

1- Department of Mechanical Engineering, University of Guilan, Guilan, Iran

2- Department of Aerospace Engineering, Semnan University, Semnan, Iran

*P.O.B. 3756, Rasht, Iran, kazemi@guilan.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper

Received 06 November 2016

Accepted 02 Januray 2016

Available Online 18 January 2017

Keywords:

Peridynamic Theory

Inclined Crack Growth

Crack propagation

Branching

ABSTRACT

One of the main problems in the classical methods for analyzing crack is a discontinuity in materials and specific conditions at the crack tip. Existing computational methods for the modeling of fracture in a continuous body are based on the partial differential equations of classical continuum mechanics. These methods suffer from the inherent limitation that the spatial derivatives required do not exist at crack tips or along crack surfaces. To overcome this problem, Peridynamic theory (PD), which has been introduced in recent years, could be used to improve the analysis of cracked structures. In the present paper the crack growth and propagation in an inclined crack in the plate is studied. The governing equation is developed and solved using Peridynamic theory and the results are validated using other investigations. Effects of various pre-crack angles and speeds of load application are studied. As it will be illustrated, the PD theory can reasonably model an inclined crack growth and predict the complex phenomenon of crack linear growth or crack branching at various conditions of applying loads. In addition, the results show that the amount of crack growth can be increased by increasing the rate of loading.

1- مقدمه

تحلیل ترک و بررسی نحوه رشد آن در سازه‌های مختلف از موضوعات بسیار جذاب و مورد توجه محققین در شاخه‌های مختلف مهندسی مکانیک است. تا کنون روش‌ها و مطالعات گوناگونی برای بررسی این پدیده انجام شده و بررسی سرعت رشد ترک و مسیر رشد آن در شرایط مختلف بارگذاری و ساختاری از موارد توجه پژوهشگران است.

به عنوان نمونه در پژوهش گداتوس [1]، رشد پایدار و آرام ترک مورب در ورق تحت بار محوری با استفاده از معیار چگالی انرژی کرنشی مورد بررسی قرار گرفت. مطابق این تحقیق، میزان رشد آرام ترک را می‌توان با کاهش نرخ بارگذاری افزایش داد. آیت اللهی و علیها [2]، مطالعه عددی و تجربی روی یک آزمایش شکست، برای ورق مربعی با بارگذاری قطری انجام دادند. در این کار ضریب شدت تنش مورد محاسبه قرار گرفته‌است و مسیر رشد ترک نیز برای چیدمان آزمایش مربوطه قابل مشاهده است. همچنین در تحقیق دیگری، برای پیش‌بینی جهت رشد ترک و بار شکست، معیاری توسط سجادی و همکاران [3] معرفی شد. در این کار از تعریف یک تنش موثر و یک پارامتر مادی جدید استفاده شده است. بیان و کیم [4] نیز معیار دیگری در

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:

S. R. Kazemi, M. Shakouri, Effects of the speed of applying loads on the growth of inclined crack in plates using Peridynamic theory, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 1, pp. 403-412, 2017 (in Persian)

ارتباط با جهت ترک مورد بررسی قرار دادند. در کار آنها، معیار حداقل شعاع محدوده پلاستیک، برای مطالعه زاویه شروع رشد ترک خستگی مورد استفاده قرار گرفته است. اثر تنش سه محوره روی جهت رشد ترک مورب در [5] و نیز شاخه شاخه شدن ترک توسط اسمیت [6] مورد بررسی قرار گرفته است.

یکی از مشکلاتی که محققین در تحلیل ترک با روش‌های مرسوم با آن مواجه هستند وجود ناپیوستگی در ماده و شرایط خاص حاکم بر نوک ترک است. در سال 2000، سیلینگ [7] روشی را مطرح کرد که می‌تواند به خوبی تحلیل سازه‌های دارای ترک را بهبود دهد. در این مدل پیوسته، تمایزی برای نقاطی در جسم که ممکن است جابجایی یا هر کدام از مشتقات جابجایی در آن نقطه ناپیوسته باشند، وجود ندارد. ماهیت این مدل بر محاسبه نیرو در ذرات با استفاده از انتگرال‌گیری به جای مشتق‌گیری بنا نهاده شده‌است و چون مشتق مکانی مورد استفاده قرار نمی‌گیرد، معادلات حتی در نقاط یا سطوحی مانند نوک ترک که ناپیوستگی وجود دارد، همچنان برقرار باقی خواهند بود و این در حالی است که معادلات دیفرانسیل مکانیک محیط پیوسته در چنین نقاطی دارای اعتبار نیستند. این روش که در سال‌های اخیر مورد توجه بیشتری قرار گرفته است، تئوری پری‌دینامیک نام دارد.

تحقیقات زیادی روی مسایل مختلف مهندسی مکانیک با استفاده از تئوری پری‌دینامیک انجام شده است. بررسی رفتار سازه در مقابل بارهای ضربه‌ای و انفجاری یکی از حوزه‌هایی است که از این تئوری استفاده شده است. به عنوان نمونه می‌توان به بررسی آسیب ناشی از ضربه [8-10] و مدل‌سازی لایه‌های کامپوزیتی تحت بار انفجاری [11] اشاره کرد.

شاخه دیگری که این روش به صورت ویژه در آن مورد استفاده قرار گرفته است، بررسی شکست و آسیب در سازه‌های مختلف است. آسیب‌های مختلفی توسط محققین با استفاده از این روش مطالعه شده است. تورق و آسیب در مواد مرکب [12-15]، خوردگی [16] و بالاخره ترک و انتشار آن از آن جمله هستند.

همان‌گونه که پیش‌تر اشاره شد، مطالعه رفتار ترک در سازه‌ها که در این مقاله نیز مورد توجه قرار دارد از مباحث قابل توجهی است که با استفاده از تئوری پری‌دینامیک می‌تواند مورد بررسی قرار بگیرد و تاکنون نیز مورد توجه برخی محققین واقع شده‌است. به عنوان نمونه، آگوای و همکاران [17]، انتشار ترک در فیلم نازک چند لایه را با کمک این تئوری مورد مطالعه قرار دادند. همچنین قاجاری و همکارانش [18] به بررسی رشد ترک در مواد ارتوتروپیک پرداختند و یا در تحقیق دیگری بریتنفلد و همکاران [19]، از تئوری «پری‌دینامیک غیرمعمول حالت پایه[1]» برای بررسی مسایل ترک ساکن استفاده کرده‌اند.

با توجه به اینکه تئوری غیرمحلی پری‌دینامیک، در سال‌های اخیر مورد توجه قرار گرفته، قابلیت این روش را در مساله ترک به‌خوبی نشان داده است. یکی از مسائلی که تاکنون در استفاده از این روش مغفول مانده، بررسی اثر سرعت بارگذاری در شروع، رشد و گسترش ترک در نمونه است. این مساله از آنجا مهم می‌شود که مواد تحت اثر سرعت بارگذاری، خواص مختلفی از خود بروز می‌دهند. بنابراین نیاز است تا از قابلیت‌های این روش در بررسی پاسخ سازه در سرعت‌های مختلف بارگذاری استفاده شود. در این مقاله پس از ارایه مقدمات، در بخش بعد اصول تئوری پری‌دینامیک توضیح داده شده است. در بخش سوم مساله مورد بررسی معرفی شده و در بخش چهارم نتایج به دست آمده ارایه گردیده و در نهایت جمع‌بندی مربوطه آورده شده‌است.

2- تئوری‌های غیرمحلی

تئوری غیرمحلی در محیط پیوسته در واقع حد واسطی بین مکانیک محیط‌های پیوسته کلاسیک و دینامیک مولکولی است. در مکانیک کلاسیک، حالت ماده تنها متاثر از نقاط مجاور آن است در حالی که در مکانیک غیرمحلی، حالت یک نقطه از تمام نقاطی که در فاصله مشخص از آن هستند تاثیر می‌پذیرد. با بی‌نهایت شدن شعاع تاثیر، نظریه غیرمحلی تبدیل به نوع پیوسته دینامیک مولکولی می‌شود. تفاوت بین تئوری‌های محلی، غیرمحلی و دینامیک مولکولی در شکل 1 نشان داده شده است.

همانگونه که مشاهده می‌شود، هر نقطه x با تمام نقاط در فاصله δ از خود ارتباط دارد. نقاط موجود در فاصله δ از یک نقطه، خانواده x نامیده شده و با H_x نمایش داده می‌شوند. تعداد نقاط در همسایگی یک نقطه در مکانیک کلاسیک به‌ترتیب برابر با 3، 5 و 7 نقطه (با درنظر گرفتن خود نقطه) در تحلیل‌های یک، دو و سه بعدی است.

نسخه‌های مختلفی از تئوری غیرمحلی با درنظرگرفتن مرتبه‌های بالاتر شیب جابه‌جایی و انتگرال فضایی معرفی شده‌اند. کارهای اولیه توسط ارینگن و ادلن [21] و ارینگن [23,22] تئوری غیرمحلی را بر مبنای قوانین تعادل و روابط ترمودینامیکی معرفی کرد. معادلات حاصل در این کارها نسبتا پیچیده بودند. آن‌ها در تحقیقات بعدی با درنظر گرفتن خواص غیرمحلی در روابط ساختاری و نگه‌داشتن روابط تعادل و انرژی جنبشی در حالت محلی، معادلات حاصل را ساده‌تر کردند [24]. در حال حاضر، بسیاری از تئوری‌های غیرمحلی از این روش استفاده می‌کنند. در واقع، مدل‌های انتگرالی غیرمحلی در مکانیک محیط پیوسته شامل یک رابطه ساختاری هستند که در آن نیروها (تنش) در یک نقطه به جابه‌جایی (کرنش) در نقاط همسایگی خود با استفاده از توابع وزنی مشخص مرتبط می‌شوند. از سوی دیگر، مدل غیرمحلی گرادیانی علاوه بر مشتق مرتبه اول کرنش در روابط ساختاری مکانیک محلی، مشتقات مرتبه بالاتر را برای محاسبه میدان در نقاط مجاور یک نقطه استفاده می‌کند. هر دو نوع تئوری غیرمحلی دارای پارامتری به عنوان طول مشخصه هستند که می‌تواند به پارامترهای فیزیکی مانند اندازه دانه، اندازه ناحیه شکست و یا اندازه منافذ مرتبط شود.

تئوری غیرمحلی همچنین برای بررسی رشد ترک نیز به کار گرفته شده است. ارینگن و کیم [26,25] نشان دادند که به دلیل ماهیت غیرمحلی، میدان تنش در جلوی نوک ترک محدود است و به یک مقدار نهایی می‌رسد، در صورتی که در تئوری‌های محلی در نوک ترک مقدار تنش بی‌نهایت به دست می‌آید. همچنین آنها [25]، معیاری به عنوان شکست طبیعی پیشنهاد کردند که بیشینه تنشی را که اتم‌های مجاور را به هم متصل نگه می‌دارد مشخص می‌کند. این معیار می‌تواند در تمام نقاط در جسم استفاده شود. پس

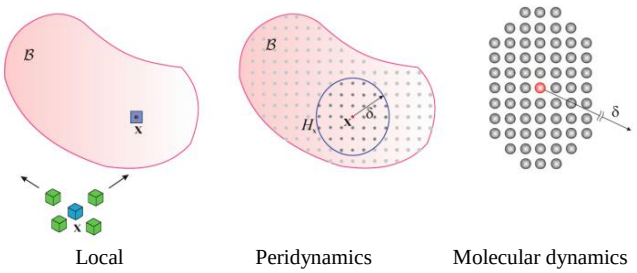


Fig. 1 Relationship between local and nonlocal continuum models [20]

شکل 1 ارتباط مدل‌های محلی و غیرمحلی [20].

[1] non-ordinary state-based peridynamics

از آن، اریـنگن و همکـاران [24] از روش غیرمحلـی بـرای مـدل‌سـازی تـرک استفاده کردند. اگرچه استفاده از تئوری غیرمحلی بـه تـنش هـای محـدود در نوک ترک منجر می‌شود اما همچنـان مشـتقات جابـه‌جـایی در روابـط وجـود داشت.

3- تئوری پری‌دینامیک

تئوری پری‌دینامیک جزو دسته تئوری‌های غیرمحلی قرار می‌گیرد زیرا ذرات مادی در فواصل محدود می‌توانند با هم اندرکنش داشته باشند. اما برخلاف سایر تئوری‌های غیرمحلی در این تئوری، مشتق‌گیری مادی حذف شده و به جای آن معادلات به شکل انتگرالی بنا نهاده شده‌است [7].

این تئوری را می‌توان نسخه‌ی پیوسته‌ای از دینامیک مولکولی دانست. از آنجایی که در این مدل پیوسته، محاسبه نیرو در ذرات با استفاده از انتگرال-گیری به جای مشتق‌گیری بنا نهاده شده و از مشتق مکانی استفاده نمی‌شود، وجود ناپیوستگی احتمالی در جابجایی (یا مشتقات آن) برخی نقاط موجب ایجاد تمایزی برای این نقاط نخواهد شد و معادلات حتی در نقاط یا سطوحی که ناپیوستگی وجود دارد، همچنان برقرار باقی خواهند بود. براساس این تئوری، شتاب هر ذره $\mathbf{x}$ در پیکربندی مرجع، در زمان t را می‌توان از رابطه زیر تعیین کرد [27]:

$$\rho\ddot{\mathrm{u}}(\mathrm{x}_k,t)=\int_{H_{\mathrm{x}_{(k)}}}\mathrm{t}(\mathrm{u}(\mathrm{x}_j,t)-\mathrm{u}(\mathrm{x}_k,t),\mathrm{x}_j-\mathrm{x}_k)\mathrm{d}V_{\mathrm{x}_k}+\mathrm{b}(\mathrm{x}_k,\mathrm{t}) \quad (1)$$

که در آن H_x یک همسایگی از x_k، u بردار میدان جابجایی، b میدان چگالی نیروی حجمی، ρ چگالی جرمی در پیکربندی مرجع، و t تابع نیروی جفتی است که مقدار آن بردار نیرویی است که ذره x_k بر ذره x_j اعمال می-کند (شکل 2). اندرکنش فیزیکی مستقیم موجود بین دو ذره x_j و x_k باند[1] نامیده می‌شود. موقعیت نسبی این دو ذره با ξ_{kj} و جابجایی نسبی آنها با η_{kj} نشان داده می‌شود، یعنی [20]:

$$\xi_{kj}=\mathrm{x}_j-\mathrm{x}_k \quad (2)$$

$$\eta_{kj}=\mathrm{u}(\mathrm{x}_j,t)-\mathrm{u}(\mathrm{x}_k,t) \quad (3)$$

باید توجه داشت که $\eta+\xi$ نشان دهنده بردار مکان نسبی بین ذرات (پس از تغییر وضعیت) است [27]. برای ماده داده شده شعاع مثبتی به اندازه □ در نظر گرفته می‌شود که معین کننده محدوده همسایگی موثر در اندرکنش نیروها است. همچنین میزان نسبت تغییر طول بین دو نقطه مادی، که از این پس در این متن «کشیدگی» نامیده می‌شود، مطابق رابطه زیر معرفی می‌شود [20]:

$$s_{kj}=\frac{|\mathrm{y}_j-\mathrm{y}_k|-|\mathrm{x}_j-\mathrm{x}_k|}{|\mathrm{x}_j-\mathrm{x}_k|} \quad (4)$$

که در آن y_k و y_j معرف موقعیت مکانی جدید ذره‌هایی است که پیش از تغییر شکل، به ترتیب در موقعیت‌های x_k و x_j قرار داشتند.

ذره مادی x_k با نقاط داخل همسایگی‌اش (H_{x_k}) اندرکنش دارد و از تغییر شکل جمعی این مواد تاثیر می‌پذیرد، به این ترتیب بردار چگالی نیرویی t_{kj} ایجاد می‌شود که بر ذره مادی x_k اثر می‌کند. این نیرو، نیرویی است که از سوی ذره مادی x_j اعمال می‌شود.

اگر نیرویی که ذره x_k بر x_j وارد می‌کند با نیرویی که ذره x_j بر x_k وارد می‌کند، از نظر اندازه با هم برابر و در یک راستا نیز در نظر گرفته شوند

[1] bond

(شکل 3)، تئوری پری‌دینامیک مورد استفاده «پری‌دینامیک باندی[2]» نامیده می‌شود. اگر این دو نیرو در یک راستا بوده ولی اندازه آنها با هم برابر نباشد، به تئوری مربوطه «پری‌دینامیک معمول حالت پایه[3]» گفته می‌شود و سرانجام اگر این دو نیرو از نظر اندازه با هم برابر نبوده و در یک راستا نیز قرار نداشته باشند، از عبارت «پری‌دینامیک غیرمعمول حالت پایه» استفاده می-شود [20]. در این مقاله از تئوری پری‌دینامیک باندی استفاده شده‌است. برای مطالعه بیشتر در مورد دو تئوری دیگر می‌توان به برخی تحقیقات انجام شده مراجعه نمود [33-28,20,19].

با توجه به این که مساله‌های مورد بررسی در این پژوهش به رشد ترک در یک ورق می‌پردازد و دارای ماهیت دوبعدی هستند بنابراین در ادامه به بررسی روابط تئوری پری‌دینامیک باندی در حالت دوبعدی پرداخته شده‌است [20].

برای حل مساله ترک دو بعدی، کل صفحه‌ی ورق به صورت نقاط مادی در نظر گرفته می‌شود. همسایگی هر یک از این نقاط به صورت دایره‌ای

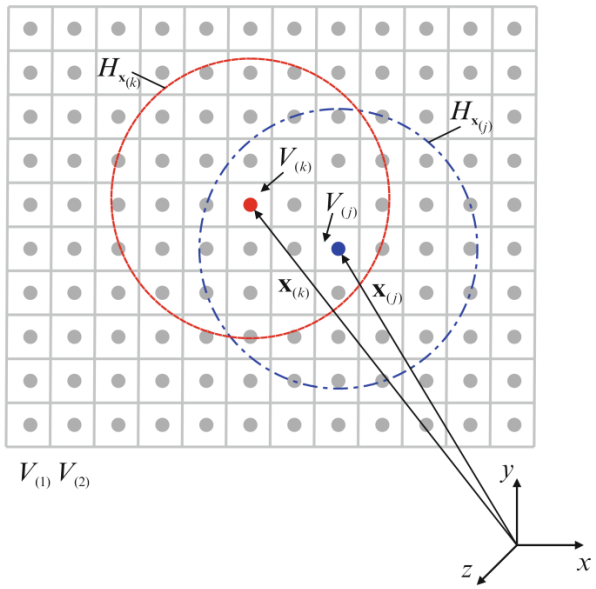


Fig. 2 Peridynamic material points and their horizon [20]

شکل 2 نحوه قرارگیری ذرات و همسایگی مربوط به هر ذره در تئوری پری-داینامیک [20].

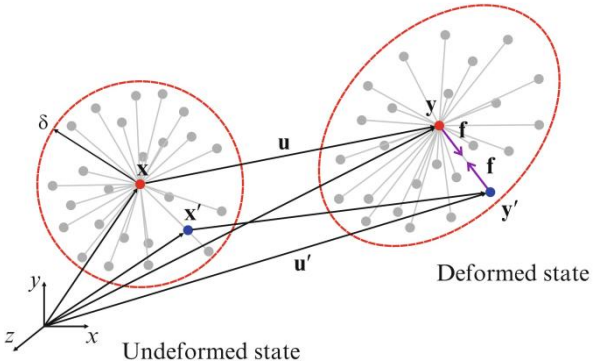


Fig. 3 Deformation of PD material points x and x′, and developing equal and opposite pairwise force densities [20].

شکل 3 تغییر شکل ذرات پری‌دینامیک x و x′، و نمایی از جفت نیروی مخالف و مساوی [20].

[2] bond-based peridynamics
[3] ordinary state-based peridynamics

(استوانه‌ای با ارتفاع برابر ضخامت ورق) به شعاع δ در نظر گرفته می‌شود که تعدادی از نقاط اطراف نقطه مورد نظر را در بر گرفته است. انتگرال‌گیری نسبت به زمان از معادلات پری‌داینامیک به صورت صریح و با استفاده از روش تفاضل پس‌رو یا پیش‌رو انجام می‌گیرد. بنابراین معادله (1) را می‌توان به شکل زیر نوشت [20]:

$$\rho \ddot{u}_k^n = \sum_{j=1}^{N} \left(\bar{t}_{kj}^n - \bar{t}_{jk}^n\right)\left(v_j V_j\right) + b_k^n \qquad (5)$$

که در آن v_j ضریب اصلاح حجم بوده و $\bar{t}_{kj}^n$ نیز معرف نیروی اندرکنش اصلاح شده پری‌دینامیک در گام زمانی شماره n است که برای مساله مورد بررسی به شکل زیر در می‌آید [20]:

$$\bar{t}_{kj}^n = \frac{\xi_{kj} + \eta_{kj}^n}{\left|\xi_{kj} + \eta_{kj}^n\right|} \times 2b\delta G_{kj} s_{kj}$$
$$\bar{t}_{jk}^n = -\bar{t}_{kj}^n \qquad (6)$$

در رابطه بالا، G_{kj} معرف ضریب اصلاح سطح[1] است که در ادامه معرفی شده‌است. همچنین b یک پارامتر پری‌داینامیک است که عبارت است از [20]:

$$b = \frac{6\mu}{\pi h \delta^4} \qquad (7)$$

که در آن μ مدول برشی است.

همان‌طور که مشاهده می‌شود پارامتر پری‌داینامیک b به δ و در نتیجه به محدوده همسایگی موثر هر ذره وابسته است. مقدار بیان شده در بالا برای حالتی است که تمام محدوده همسایگی در داخل جسم قرار گرفته باشد. مقدار این ضریب برای ذراتی که در نزدیک سطوح آزاد قرار دارند باید اصلاح شود. مقدار این ضریب اصلاح سطح (G_{kj}) را می‌توان با انتگرال‌گیری عددی از چگالی انرژی کرنشی و انبساط در هر نقطه مادی داخل جسم در شرایط یک بارگذاری ساده و مقایسه مقدار حاصل با مقدار معادل به دست آمده از روابط کلاسیک مکانیک محیط پیوسته تعیین کرد [20].

با توجه به مطالعات انجام شده مقدار مناسب برای δ کمی بیش از 3Δ در نظر گرفته شده است که Δ معرف فاصله طولی یا عرضی بین نقاط مادی است. باید توجه داشت که اگر برای افزایش دقت، میزان Δ کاهش داده شود، مقدار طول گام‌های زمانی نیز متناسب با آن باید کاهش داده شود که این منجر به طولانی‌تر شدن زمان حل خواهد شد [20].

4- ایجاد و رشد ترک

در تئوری پری‌داینامیک، ترکی که از قبل در ماده وجود دارد را می‌توان با حذف اندرکنش بین ذرات ماده در محدوده‌ی ترک مدل کرد. برای مدل کردن ایجاد یا رشد ترک هم می‌توان به این صورت عمل نمود که وقتی کشیدگی بین دو ذره k و j یعنی s_{kj}، از مقداری بحرانی مثل s_c تجاوز کند، اندرکنش بین این دو ذره از بین می‌رود. مقدار s_c را می‌توان برحسب مقدار بحرانی نرخ آزادسازی انرژی (G_c) بیان کرد [20]. به این ترتیب می‌توان تابع μ را به صورت زیر تعریف کرد [20]:

$$\mu(x_j - x_k, t) = \begin{cases} 1 \quad \text{if} \quad s_{kj}(x_j - x_k, t) < s_c & 0 < t \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \qquad (8)$$

در طول روند حل جابجایی هریک از نقاط ماده و به دنبال آن کشیدگی بین دو ذره k و j یعنی s_{kj}، محاسبه و با مقدار بحرانی مقایسه می‌شود که اگر از این مقدار تجاوز کند، تابع μ برابر صفر قرار گرفته و اندرکنش بین دو ذره از بین می‌رود. براساس تابع μ می‌توان معیار «آسیب موضعی» را به صورت زیر تعریف کرد [20]:

$$\varphi(x,t) = 1 - \frac{\int_H \mu(\acute{x} - x, t)\, d\acute{V}}{\int_H d\acute{V}} \qquad (9)$$

مقدار φ می‌تواند از صفر تا 1 تغییر کند که مقدار صفر به معنای سالم بودن همه پیوندها با ذره x و مقدار 1 به معنای از بین رفتن همه پیوندها با این ذره خواهد بود. می‌توان مقدار مناسبی را به عنوان معیار تشخیص بروز جدایش یا ترک در نقاط مختلف ماده در نظر گرفت و با محاسبه مقدار φ در هر گام از حل تعیین کرد که جدایش در کدام قسمت از ماده رخ داده است. در این مقاله مقدار φ در هنگام جدایش برابر 0.38 در نظر گرفته شده است. در واقع اینگونه در نظر گرفته شده است که برای رشد ترک، تنها نیاز به از بین رفتن 38 درصد از پیوندهای یک نقطه با نقاط اطرافش است تا جدایش و به دنبال آن رشد ترک در ماده رخ دهد. در صورتی که شعاع همسایگی بی‌نهایت فرض شود، مقدار φ برابر 0.5 خواهد شد (شکل 4) [20].

5- ورق مربعی تحت کشش لبه‌ها

در این پژوهش با اعمال سرعت‌های مختلف کشش بر لبه‌های یک ورق مربع شکل، نحوه رشد ترک موربی که از قبل در ورق وجود داشته است، مورد بررسی قرار گرفته‌است. ترک در مرکز ورق قرار داشته و برای بررسی اثر سرعت کشش لبه‌ها روی نحوه رشد آن، لبه‌های بالا و پایین ورق با سرعت‌های مختلف کشیده می‌شود. همچنین نحوه رشد ترک به ازای دو زاویه مختلف ترک نسبت به محور عمودی مورد بررسی قرار گرفته‌است (شکل 5).

به این منظور یک ورق مربعی شکل با ابعاد 20 سانتی متر با ترکی در مرکز و به طول $(2a)$ برابر با 5.08 میلی‌متر، با دو زاویه 30 و 60 درجه نسبت به محورعمودی (β) در نظر گرفته شده است. مشخصات مکانیکی در نظر گرفته شده برای ورق مورد نظر مطابق جدول 1 است که مشابه فولاد بررسی شده در [1] می‌باشد.

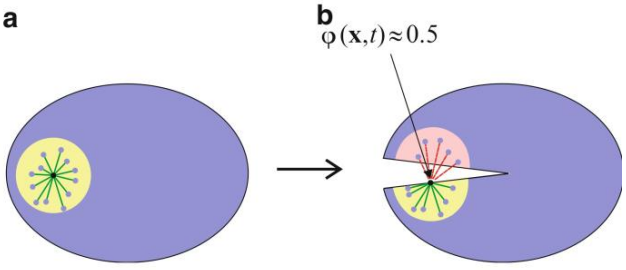


Fig. 4 (a) All interactions are intact (no damage); (b) half of the terminated interactions create a crack [20].

شکل 4 a) همه پیوندها سالم هستند (عدم آسیب)، b) نیمی از پیوندها قطع شده است (وقوع ترک) [20].

جدول 1 مشخصات مکانیکی ماده مورد بررسی [1]

Table 1 Mechanical properties of studied material [1]

مشخصات مکانیکی	واحد	مقدار
E	GPa	206.84
ν	-	1/3
k_{Ic}	MPa√m	183.5

[1] surface correction factor

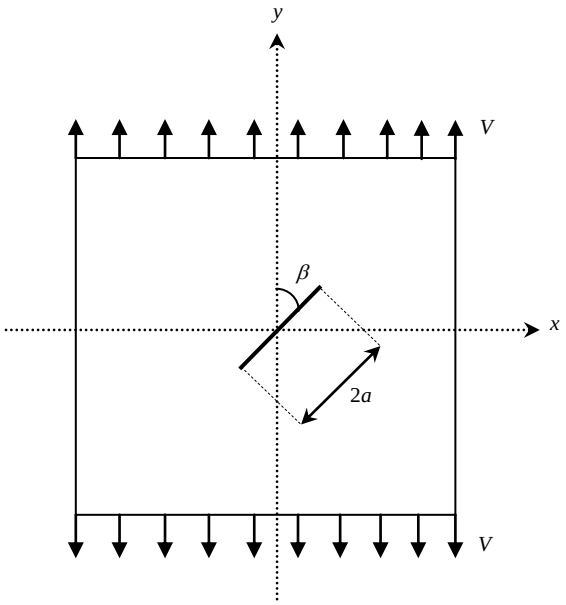


Fig. 5 plate with a inclined crack under tension with various velocities
شکل 5 نمایی از ورق دارای ترک مورب تحت سرعت اعمالی در لبه‌ها.

در هریک از این حالات لبه‌های بالایی و پایینی ورق با سه سرعت 2، 10 و 50 متر بر ثانیه تحت کشش قرار گرفته و با اعمال تغییراتی در کد موجود برای اعمال روش پری‌داینامیک [20]، وضعیت ترک در گام‌های متعددی تعیین و مراحل رشد ترک به دست می‌آید. در این تحلیل تعداد نقاط مادی در هریک از راستاهای طولی و عرضی، 500 نقطه در نظر گرفته شده است. همچنین برای جلوگیری از وقوع ترک در نزدیکی لبه‌ها از بروز و رشد ترک در یک چهارم بالایی و پایینی ورق جلوگیری شده‌است [20].

6- اعتبارسنجی

برای بررسی اعتبار نتایج به دست آمده، زاویه شروع رشد ترک با نتایج تحقیق [1] مقایسه شده است. شکل 6 زاویه شروع رشد ترک را در مقایسه با مقاله ذکر شده نشان داده است. از آنجا که در این مرجع تنها شروع ترک مورد مطالعه قرار گرفته است مسیر رشد ترک (بخصوص در زاویه 30 درجه) با مقدار مقاله کمی متفاوت است اما همانگونه که مشاهده می‌شود، زوایای شروع رشد ترک تطابق بسیار خوبی با هم دارند. این موضوع توانایی روش پری‌داینامیک را در تحلیل شروع و رشد ترک به‌خوبی نشان می‌دهد و بنابراین می‌توان از نتایج به‌دست آمده برای بررسی اثر سرعت اعمال بار بر نحوه رشد ترک استفاده کرد. این کار در ادامه مقاله انجام شده است.

7- بررسی اثرات سرعت و زاویه ترک

در ادامه، اثرات سرعت کشش لبه‌ها و زاویه ترک اولیه، بر نحوه رشد ترک مورد بررسی قرار گرفته است. در شکل‌های 7 و 8، نحوه رشد ترک برای کشش لبه‌ها با سرعت 2 متر بر ثانیه و زاویه ترک (β) برابر 30 و 60 درجه در طول مسیر شروع و رشد ترک نمایش داده شده است. همانطور که در این دو شکل مشاهده می‌شود، در این حالت‌ها با گذشت زمان ترک در یک مسیر تک شاخه رشد کرده و این روند تا جدایش کامل ادامه پیدا می‌کند. همچنین همان‌گونه که قابل انتظار است با توجه به نزدیکی بیشتر حالت $\beta=60$ به مود اول رشد ترک، در این حالت ترک با سرعت بیشتری (نسبت زاویه ترک برابر 30 درجه) رشد کرده و کامل می‌شود.

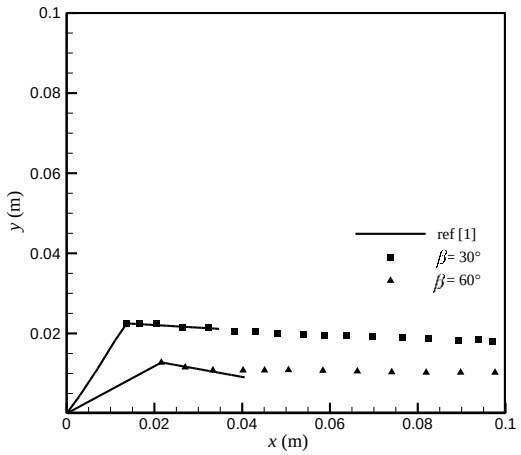
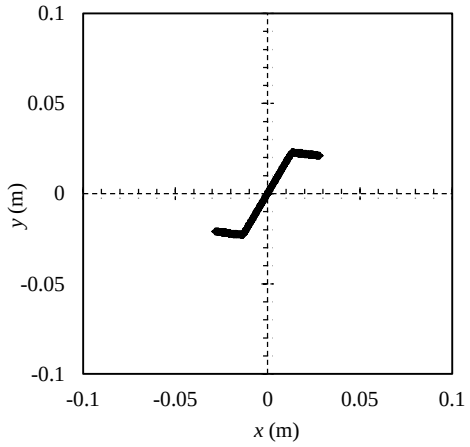
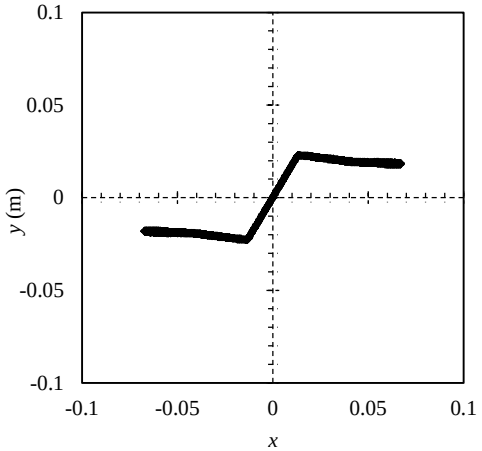


Fig. 6 Comparison of the presented Initial crack growth angle with [1].
شکل 6 مقایسه زاویه شروع رشد ترک با مرجع [1].

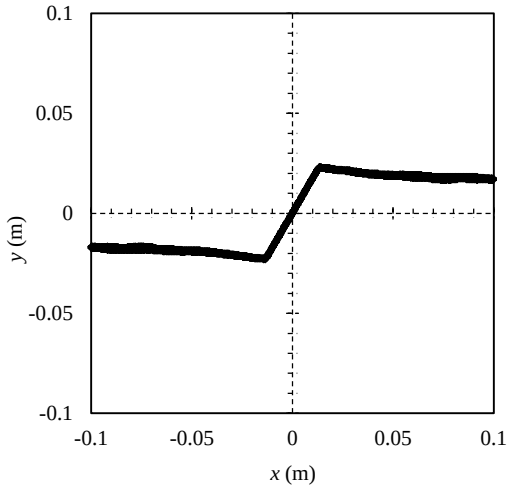
در شکل‌های 9 و 10، نحوه رشد ترک برای کشش لبه‌ها با سرعت 10 متر بر ثانیه به ترتیب برای دو زاویه ترک 30 و 60 درجه نشان داده شده است. در این مورد نیز مشابه وضعیتی که در کشش با سرعت 2 متر بر ثانیه رخ داد، با گذشت زمان ترک در یک مسیر تک شاخه رشد می‌کند. اما در انتهای مسیر و قبل از جدایش کامل، ایجاد شاخه‌ای جدید در مسیر ترک مشاهده می‌شود. این موضوع نشان می‌دهد که سرعت اعمال بار کششی تاثیر فراوانی در نحوه رشد ترک و شکست نمونه دارد.



a) time steps=5000



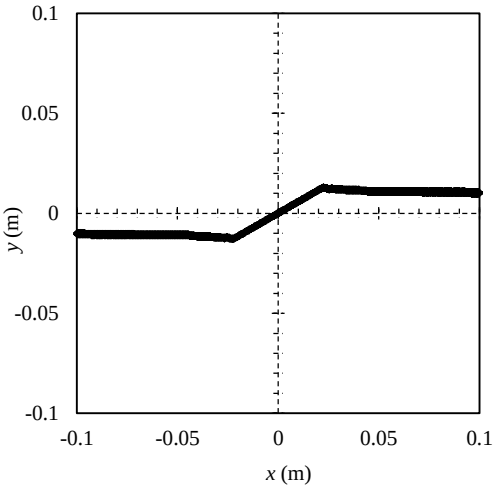
b) time steps=5500



c) time steps=6000

Fig. 7 Crack growth under the velocity boundary condition of 2 m/s (β=30)

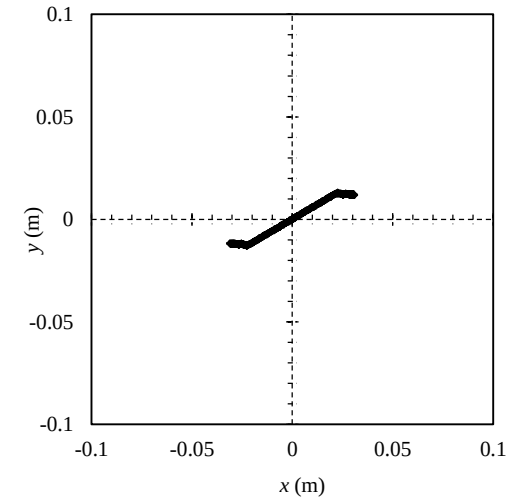
شکل 7 رشد ترک تحت کشش لبه با سرعت 2 متر بر ثانیه (β=30°).



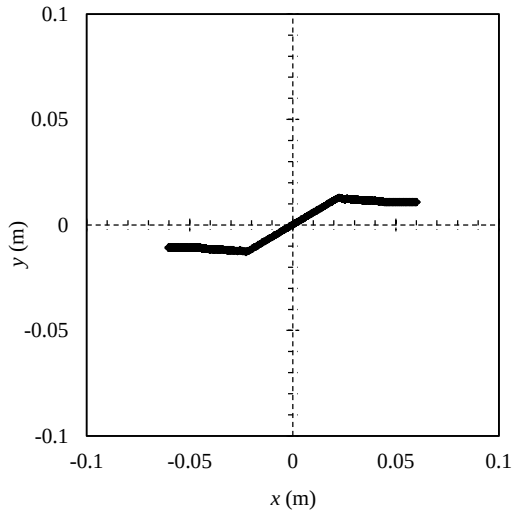
c) time steps=5000

Fig. 8 Crack growth under the velocity boundary condition of 2 m/s (β=60)

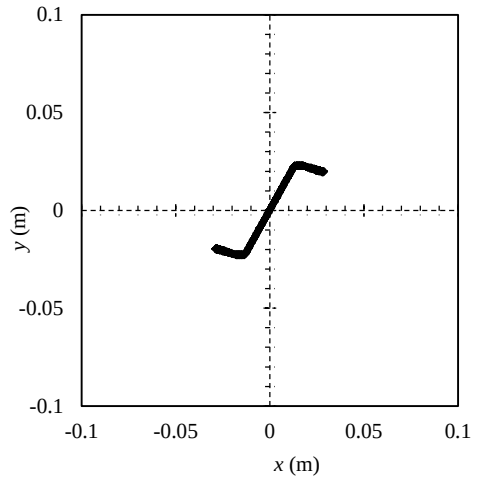
شکل 8 رشد ترک تحت کشش لبه با سرعت 2 متر بر ثانیه (β=60°).



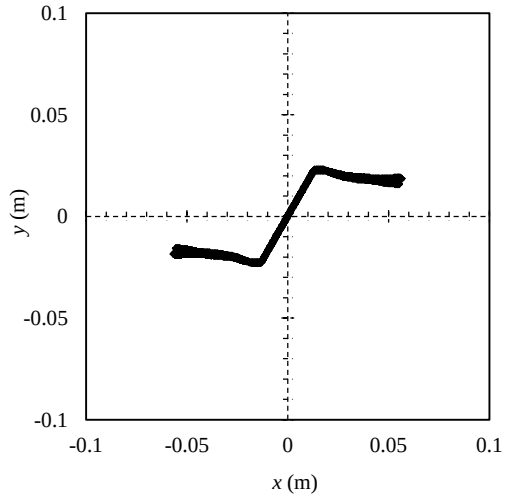
a) time steps=4000



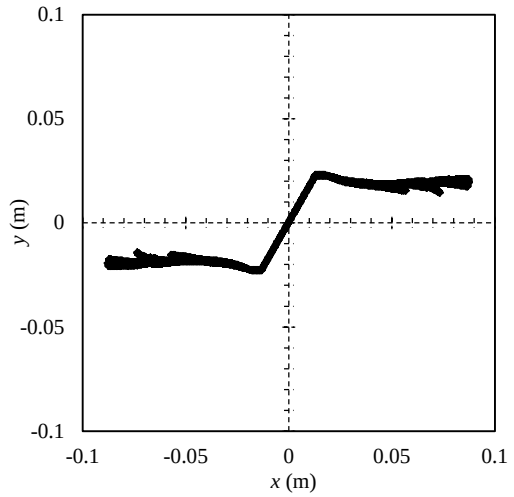
b) time steps=4500



a) time steps=1300



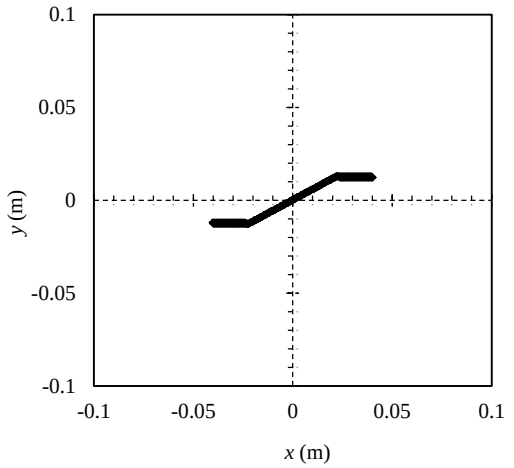
b) time steps=1600



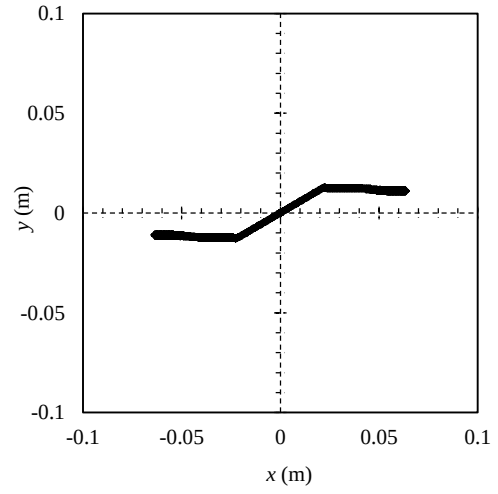
c) time steps=1900

Fig. 9 Crack growth under the velocity boundary condition of 10 m/s (β=30)

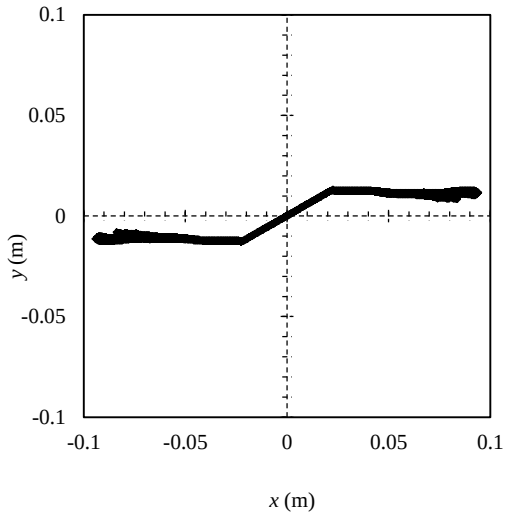
شکل 9 رشد ترک تحت کشش لبه با سرعت 10 متر بر ثانیه (β=30°).



a) time steps=1000



b) time steps=1300



c) time steps=1600

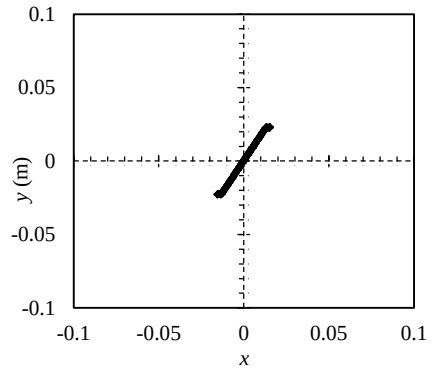
Fig. 10 Crack growth under the velocity boundary condition of 10 m/s (β=60)

شکل 10 رشد ترک تحت کشش لبه با سرعت 10 متر بر ثانیه (β=60°).

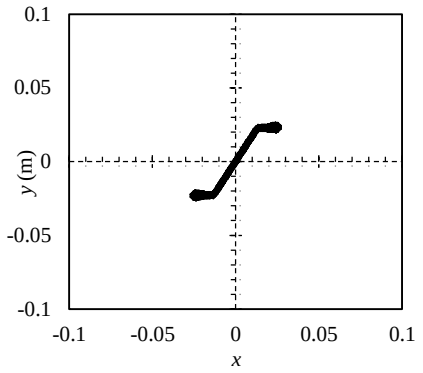
هنگامی که سرعت کشش لبه‌ها به طور قابل ملاحظه‌ای افزایش می‌یابد، نسبت به کشش با سرعت‌های کم، نحوه رشد ترک تغییرات قابل ملاحظه‌ای پیدا می‌کند. همان‌طور که در شکل‌های 11 و 12 دیده می‌شود، پس از یک رشد خطی کوتاه (شکل‌های 11-a و 12-a)، نوک ترک به صورت «دمبلی شکل» در می‌آید (شکل‌های 11-b و 12-b) و به دنبال آن مسیر تک شاخه رشد ترک به صورت چند شاخه در آمده (شکل‌های 11-c و 12-c) و در نهایت با گستردگی شاخه‌ها، جدایش کامل می‌شود (شکل‌های 11-d و 12-d).

همانطور که در شکل 11-d مشاهده می‌شود، ترک در جسم از مناطقی در مرزهای جسم نیز آغاز می‌شود. البته این ترک‌ها با تاخیر زمانی نسبت به نوک ترک پیدا شده و رشد می‌کنند. این موضوع به دلیل سرعت بالای اعمال بار بوده و زاویه ترک اولیه است که امکان ایجاد ترک سطحی و رشد آن را در ماده ترد افزایش می‌دهد. با افزایش سرعت اعمال بار و با توجه به زاویه اولیه ترک، احتمال شکست ماده ترد از نقاطی غیر از نوک ترک نیز وجود خواهد داشت. این موضوع در مرجع [34] با استفاده از نتایج آزمایش نشان داده شده است (شکل 14 در مرجع [34] را ببینید).

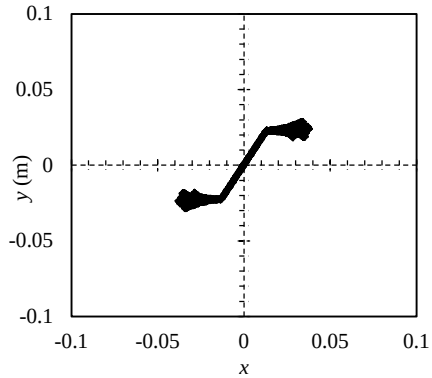
پیش‌بینی چندشاخگی رشد ترک بدون تغییری در معیارها و فقط با افزایش سرعت کشش را می‌توان یکی از نقاط قوت تئوری پری‌دینامیک دانست. لازم به ذکر است که موضوع چند شاخه شدن ترک بر اثر سرعت اعمال بار توسط محققان مختلف بررسی شده است [36,35]. اما یکی از بهترین روش‌ها برای بررسی موضوع رشد ترک و چند شاخه شدن آن، روش پری‌داینامیک است. ها و بوبارو [37] با استفاده از این روش توانستند مشخصات مختلف تخریب سازه، شامل شاخه‌ای شدن ترک، ناپایداری مسیر ترک و ... را همانطور که در آزمایش‌ها مشخص شده بود مشاهده کنند. همچنین آگوای و همکاران [38] نیز نتایج مدل پری‌داینامیک را با نتایج دیگر روش‌های عددی مقایسه کردند و نشان دادند که سرعت رشد ترک محاسبه شده از تمام روش‌ها به یکدیگر نزدیک است، اما پیش بینی روش پری-داینامیک از مسیرهای شکست که توانسته بود رفتار شاخه شدن در ابعاد ماکرو و میکرو را نشان دهد به مشاهدات تجربی نزدیک‌تر است.



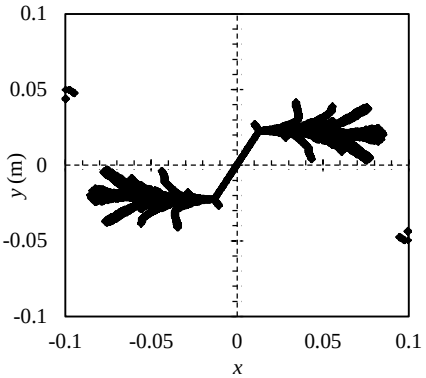
a) time steps=400



b) time steps=500



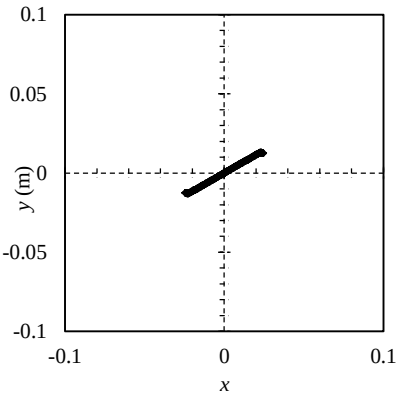
c) time steps=600



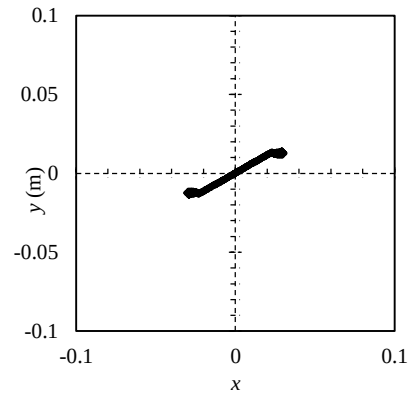
d) time steps=950

Fig. 11 Crack growth under the velocity boundary condition of 50 m/s (β=30)

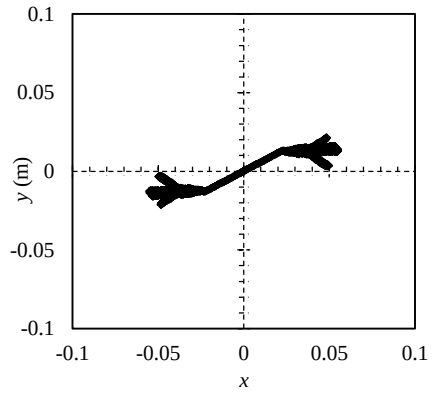
شکل 11 رشد ترک تحت کشش لبه با سرعت 50 متر بر ثانیه (β=30°).



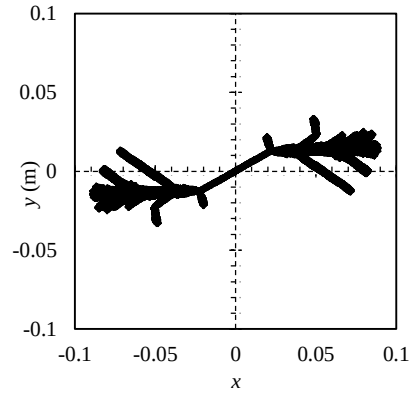
a) time steps=400



b) time steps=450



c) time steps=650



d) time steps=900

Fig. 12 Crack growth under the velocity boundary condition of 50 m/s (β=60)

شکل 12 رشد ترک تحت کشش لبه با سرعت 50 متر بر ثانیه (β=60°).

هرچه مسیر رشد ترک به حالت افقی نزدیک‌تر باشد، در واقع مود غالب در شکست نمونه، مود اول خواهد بود. با افزایش سرعت اعمال بار، به دلیل افزایش اثر مود دوم شکست، رشد ترک در نمونه از حالت "تک مسیر" به "چند شاخه" تبدیل می‌شود. این موضوع نشان دهنده این است که مواد در سرعت‌های بارگذاری بالا خواص تردتری از خود نشان می‌دهند [1].

8- نتیجه‌گیری

در این مقاله با استفاده از تئوری پری‌دینامیک، رشد یک ترک مورب در ورق با زوایای مختلف تحت سرعت‌های مختلف کشش لبه‌ها مورد مطالعه قرار گرفت. برای این کار ترکی با طول و زاویه مشخص نسبت به خط قائم در نمونه در نظر گرفته شد و بار کششی با سرعت‌های مختلف در نمونه اعمال شد. همان گونه که ملاحظه شد کشش لبه‌ها با سرعت پایین منجر به رشد خطی ترک گردید و زاویه رشد ترک به خوبی مورد پیش‌بینی قرار گرفت. اما در هنگام کشش لبه‌ها با سرعت بالا، وضعیت متفاوت از کشش با سرعت‌های کم بود که وضعیت جدید با «دمبلی» شدن در نوک رشد ترک و سپس چند شاخه شدن ترک، مورد مشاهده قرار گرفت. این موضوع اثر افزایش سرعت اعمال بار را در تردتر شدن ماده نشان می‌دهد.

همان طور که در شکل‌ها مشاهده می‌شود، در اغلب موارد هنگامی که زاویه ترک با افق کمتر است، ترک در تعداد گام‌های زمانی کمتری مراحل رشد خود را طی می‌کند که این مطلب با توجه به نزدیکی بیشتر این وضعیت با مود اول رشد ترک منطقی به نظر می‌رسد. به عنوان جمع‌بندی می‌توان گفت که تئوری پری‌دینامیک به خوبی قادر به مدل‌سازی پدیده رشد ترک برای سرعت‌های مختلف کشش لبه‌ها بوده و می‌تواند با اعمال معیارهای یکسان و بدون در نظر گرفتن شرایط خاصی برای سرعت‌های زیاد، وضعیت-های مختلف نحوه رشد ترک تحت سرعت‌های مختلف کشش را پیش‌بینی نماید.

9- مراجع

[1] E. Gdoutos, Mixed-mode crack growth predictions, *Engineering fracture mechanics*, Vol. 28, No. 2, pp. 211-221, 1987.

[2] M. Ayatollahi, M. Aliha, Analysis of a new specimen for mixed mode fracture tests on brittle materials, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 76, No. 11, pp. 1563-1573, 2009.

[3] S. Sajjadi, M. Ostad Ahmad Ghorabi, D. Salimi-Majd, A novel mixed-mode brittle fracture criterion for crack growth path prediction under static and fatigue loading, *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, Vol. 38, pp. 1372-1382, 2015.

[4] L.-C. Bian, K. S. Kim, The minimum plastic zone radius criterion for crack initiation direction applied to surface cracks and through-cracks under mixed mode loading, *International Journal of Fatigue*, Vol. 26, pp. 1169-1178, 2004.

[5] X. Kong, N. Schlüter, W. Dahl, Effect of triaxial stress on mixed-mode fracture, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 52, No. 2, pp. 379-388, 1995.

[6] E. Smith, Crack bifurcation in brittle solids, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 16, No. 5, pp. 329-336, 1968.

[7] S. A. Silling, Reformulation of elasticity theory for discontinuities and long-range forces, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 48, No. 1, pp. 175-209, 2000.

[8] C. Sun, Z. Huang, Peridynamic simulation to impacting damage in composite laminate, *Composite Structures*, Vol. 138, pp. 335-341, 2016.

[9] W. Hu, Y. Wang, J. Yu, C.-F. Yen, F. Bobaru, Impact damage on a thin glass plate with a thin polycarbonate backing, *International Journal of Impact Engineering*, Vol. 62, pp. 152-165, 2013.

[10] J. Lee, W. Liu, J.-W. Hong, Impact fracture analysis enhanced by contact of peridynamic and finite element formulations, *International Journal of Impact Engineering*, Vol. 87, pp. 108-119, 2016.

[11] C. Diyaroglu, E. Oterkus, E. Madenci, T. Rabczuk, A. Siddiq, Peridynamic modeling of composite laminates under explosive loading, *Composite Structures*, Vol. 144, pp. 14-23, 2016.

[12] Y. L. Hu, N. V. De Carvalho, E. Madenci, Peridynamic modeling of delamination growth in composite laminates, *Composite Structures*, Vol. 132, pp. 610-620, 2015.

[13] Y.-l. Hu, Y. Yu, H. Wang, Peridynamic analytical method for progressive damage in notched composite laminates, *Composite Structures*, Vol. 108, pp. 801-810, 2014.

[14] W. Hu, Y. D. Ha, F. Bobaru, Peridynamic model for dynamic fracture in unidirectional fiber-reinforced composites, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 217-220, pp. 247-261, 2012.

[15] B. Kilic, A. Agwai, E. Madenci, Peridynamic theory for progressive damage prediction in center-cracked composite laminates, *Composite Structures*, Vol. 90, pp. 141-151, 2009.

[16] Z. Chen, F. Bobaru, Peridynamic modeling of pitting corrosion damage, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 78, pp. 352-381, 2015.

[17] A. Agwai, I. Guven, E. Madenci, Crack propagation in multilayer thin-film structures of electronic packages using the peridynamic theory, *Microelectronics Reliability*, Vol. 51, pp. 2298-2305, 2011.

[18] M. Ghajari, L. Iannucci, P. Curtis, A peridynamic material model for the analysis of dynamic crack propagation in orthotropic media, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 276, pp. 431-452, 2014.

[19] M. S. Breitenfeld, P. H. Geubelle, O. Weckner, S. A. Silling, Non-ordinary state-based peridynamic analysis of stationary crack problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 272, pp. 233-250, 2014.

[20] E. Madenci, E. Oterkus, *Peridynamic theory and its applications*: Springer, 2014.

[21] A. C. Eringen, D. Edelen, On nonlocal elasticity, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 10, No. 3, pp. 233-248, 1972.

[22] A. C. Eringen, Linear theory of nonlocal elasticity and dispersion of plane waves, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 10, No. 5, pp. 425-435, 1972.

[23] A. C. Eringen, Nonlocal polar elastic continua, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 10, No. 1, pp. 1-16, 1972.

[24] A. C. Eringen, C. Speziale, B. Kim, Crack-tip problem in non-local elasticity, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 25, No. 5, pp. 339-355, 1977.

[25] A. C. Eringen, B. S. Kim, Stress concentration at the tip of crack, *Mechanics Research Communications*, Vol. 1, pp. 233-237, 1974.

[26] A. C. Eringen, B. Kim, On the problem of crack tip in nonlocal elasticity, *Continuum Mechanics Aspects of Geodynamics and Rock Fracture Mechanics*, ed: Springer, pp. 107-113, 1974.

[27] S. A. Silling, E. Askari, A meshfree method based on the peridynamic model of solid mechanics, *Computers & Structures*, Vol. 83, pp. 1526-1535, 2005.

[28] T. L. Warren, S. A. Silling, A. Askari, O. Weckner, M. A. Epton, J. Xu, A non-ordinary state-based peridynamic method to model solid material deformation and fracture, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 46, No. 5, pp. 1186-1195, 2009.

[29] J. O'Grady, J. Foster, Peridynamic beams: A non-ordinary, state-based model, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 51, No. 18, pp. 3177-3183, 2014.

[30] J. O'Grady, J. Foster, Peridynamic plates and flat shells: A non-ordinary, state-based model, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 51, No. 25-26, pp. 4572-4579, 2014.

[31] C. T. Wu, B. Ren, A stabilized non-ordinary state-based peridynamics for the nonlocal ductile material failure analysis in metal machining process, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 291, pp. 197-215, 2015.

[32] J. Amani, E. Oterkus, P. Areias, G. Zi, T. Nguyen-Thoi, T. Rabczuk, A non-ordinary state-based peridynamics formulation for thermoplastic fracture, *International Journal of Impact Engineering*, Vol. 87, pp. 83-94, 2016.

[33] E. Madenci, S. Oterkus, Ordinary state-based peridynamics for plastic deformation according to von Mises yield criteria with isotropic hardening, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 86, pp. 192-219, 2016.

[34]Y. F. Yang, C. A. Tang, K. W. Xia, Study on crack curving and branching mechanism in quasi-brittle materials under dynamic biaxial loading, *International Journal of Fracture*, Vol. 177, No. 1, pp. 53-72, 2012.
[35]J.-H. Song, H. Wang, T. Belytschko, A comparative study on finite element methods for dynamic fracture, *Computational Mechanics*, Vol. 42, pp. 239-250, 2008.
[36]X. Zhou, Y. Wang, Q. Qian, Numerical simulation of crack curving and branching in brittle materials under dynamic loads using the extended non-ordinary state-based peridynamics, *European Journal of Mechanics - A/Solids*, Vol. 60, pp. 277-299, 2016.
[37]Y. D. Ha, F. Bobaru, Characteristics of dynamic brittle fracture captured with peridynamics, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 78, No. 6, pp. 1156-1168, 2011.
[38]A. Agwai, I. Guven, E. Madenci, Predicting crack propagation with peridynamics: a comparative study, *International Journal of Fracture*, Vol. 171, No. 1, pp. 65-78, 2011.