مجله مهندسی مکانیک مدرس، اردیبهشت 1396، دوره 17، شماره 2، ص‌ص 77-84

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

مطالعه تحلیلی فرآیند الکتروگرمایی آند در یک رانشگر پلاسمایی مغناطیسی

مهدی آهنگر[1*]، اکرم صدیق[2]

1- استادیار، مهندسی هوافضا، دانشگاه شهید بهشتی، تهران
2- کارشناس ارشد، مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی خواجه نصیر طوسی، تهران
*تهران، صندوق‌پستی 19839-4716، m_ahangar@sbu.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 15 آبان 1395
پذیرش: 19 دی 1395
ارائه در سایت: 10 بهمن 1395

کلید واژگان:
جریان پلاسما
غلاف آند
شار حرارتی
پارامتر هال
میدان مغناطیسی

چکیده

در این پژوهش، مشخصه‌های الکتروگرمایی آند به‌صورت تحلیلی مورد مطالعه قرار گرفته است. برای این منظور دو زیرناحیه جریان پلاسمای شبه‌خنثی و غیرخنثی در نزدیکی دیواره الکترود در نظر گرفته شده‌اند. برای ناحیه غیرخنثی یک رابطه بین افت ولتاژ و چگالی جریان با استفاده از معادلات بقای جرم و مومنتوم الکترون ارائه شده است. همچنین، برای تعیین افت ولتاژ و چگالی جریان در زیرناحیه جریان شبه‌خنثی، روابطی مبتنی بر معادلهٔ میدان مغناطیسی القایی و قانون اهم استخراج شده است. الگوریتم حل پیشنهادی مبتنی بر ارضای شرط پیوستگی جریان است که با استفاده از روش سعی و خطا همگرا می‌گردد. به منظور اعتبارسنجی الگوریتم تحلیلی توسعه داده شده، رانشگر پلاسمایی مغناطیسی دانشگاه پرینستون با جریان تخلیه الکتریکی 8 کیلوآمپر و دبی‌های جرمی ورودی 4 و 24 گرم بر ثانیه مطالعه شده است. نتایج تحلیلی به‌دست آمده نشان می‌دهد که تحت دبی‌های جرمی ورودی 4 و 24 گرم بر ثانیه به ترتیب، مقادیر شار حرارتی در بازه 480 تا 1350 و 400 تا 1490 وات بر سانتی‌متر مربع ، چگالی جریان الکتریکی در بازه 24 تا 90 و 33 تا 140 آمپر بر سانتی‌متر مربع و افت ولتاژ در بازه 5.8 تا 11 و 4.9 تا 6 ولت تغییر می‌کنند. الگوریتم تحلیلی، شار حرارتی، چگالی جریان الکتریکی و افت ولتاژ در امتداد لبه آند را مشابه داده‌های تجربی پیش‌بینی کرده است. مشاهده شده که چگالی جریان و شار حرارتی در نزدیکی وسط لبه آند، جایی که افت ولتاژ آند کمینه شده، بیش‌ترین مقدار خود را اختیار کرده است. با استفاده از قانون دوم ترمودینامیک نشان داده شد که تابع چگالی احتمال سرعت موثر دارای توزیع گاوسی است. بنابراین، تحت این شرایط انتروپی بیشینه شده و در نتیجه نمودارهای چگالی جریان و شار حرارتی قله‌ای شکل شده‌اند.

Analytical Investigation of Anode Electrothermal Process in a MPD Thruster

Mahdy Ahangar[1*], Akram Sedigh[2]

1- Department of Aerospace Engineering, Shahid Beheshti University, Tehran, Iran
2- Faculty of Aerospace Engineering, University of K.N.Toosi, Tehran, Iran
*P.O.B. 19839-4716, Tehran, Iran, m_ahangar@sbu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 05 November 2016
Accepted 08 January 2017
Available Online 29 January 2017

Keywords:
Plasma Flow
Anode Sheath
Heat Flux
Hall Parameter
Magnetic Field

ABSTRACT

In this research, the electrothermal characteristics of anode have been analytically investigated by considering two subzones including the quasi-neutral and non-neutral plasma flow near the anode surface. A correlation between current density and anode fall voltage has been derived by using the continuity and momentum equations for electron in the non-neutral plasma subzone. Also, two relations have been deduced from the magnetic field induction equation and Ohm's law to determine the current densities and voltage drops in the quasi-neutral plasma subzone. The suggested solution algorithm has been based on the satisfaction of current continuity condition to be converged by a trial and error method. The Princeton benchmark thruster has been investigated for the discharge current of 8 kA with mass flow rates of 4 and 24 gr/s to evaluate the developed algorithm. The obtained analytical results show that under operating conditions with mass flow rates of 4 and 24 g/s, the heat flux values are respectively in the range of 480 to1350 and 400 to1490 W/cm2, the current densities vary from 24 to 90 and from 33 to 140 A/cm2, and also the anode falls change from 5.8 to 11 and 4.9 to 6 V. The analytical algorithm has predicted the heat fluxes, current densities, and anode falls along the anode face in good agreement with measurements. It has been seen that the heat flux and current density around the anode mid-lip, where the anode fall has its minimum value, have been maximized. By using the second thermodynamic law, it has been shown that the probability density function of effective velocity has a Gaussian distribution. Therefore, under this circumstance, entropy has been maximized, and consequently the heat flux and current density profiles have been taken the summit form.

1- مقدمه

در میان انواع سامانه‌های پیشرانش الکتریکی، رانشگرهای مغناطیسی پلاسمایی[1] به‌دلیل قابلیت تولید سرعت گازهای خروجی بالاتر، برای کاربردهای فضایی هم‌چون مانورهای مداری و ماموریت‌های بین سیاره‌ای

[1] MagnetoPlasmaDynamic Thrusters

Please cite this article using:

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

M. Ahangar, A. Sedigh, Analytical Investigation of Anode Electrothermal Process in a MPD Thruster, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 2, pp. 77-84, 2017 (in Persian)

مناسب می‌باشند. طرحواره این رانشگر در "شکل 1" نشان داده شده است. در این رانشگر، جریان گاز به فضای بین یک الکترود آند حلقوی و الکترود کاتد استوانه‌ای شکل تزریق می‌گردد. به واسطهٔ اعمال اختلاف ولتاژ توسط یک منبع تغذیه، جریان گاز عبوری در رانشگر یونیزه شده و جریان پلاسمای شبه خنثی[1] (که در آن چگالی تعداد ذرات الکترون و یون با هم برابر می‌باشند) تشکیل می‌گردد. با تخلیهٔ جریان الکتریکی چند هزار آمپری در گاز یونیزه شده یک میدان مغناطیسی محیطی براساس قانون آمپر، القا می‌گردد. نیروی لورنتز حاصل از اندرکنش جریان الکتریکی و میدان مغناطیسی، به گاز یونیزه شده شتاب وارد کرده و باعث تولید نیروی پیشران می‌شود.

یکی از محدودیت‌های رانشگرهای مغناطیسی پلاسمایی وقوع افت ولتاژ در مجاورت الکترود آند (افت آند[2]) است که به تبع آن بار حرارتی وارد بر دیوارهٔ این الکترود افزایش می‌یابد و این موضوع سبب خوردگی و کاهش طول عمر آن می‌شود. علاوه‌بر این، بخشی از توان ایجاد شده توسط منبع تغذیه که باید صرف شتابدهی جریان پلاسما شود، به‌صورت افت گرمایی تلف می‌شود.

جامع‌ترین مطالعات تجربی در زمینه فرآیند اتلافات حرارتی ناحیه آند توسط محققین دانشگاه پرینستون صورت گرفته است. ابرث [1] توانست با استفاده از سنجه الکتریکی لانگمور[3] مقادیر افت آند را در نزدیکی سطوح الکترود آند اندازه‌گیری نماید. کمیت افت آند توصیف‌کنندهٔ اختلاف پتانسیل بین دیواره آند و جریان پلاسما در فاصله 0.1 سانتی‌متری از سطح آند است. ابرث بیان کرد که افت آند در برگیرنده سهم اختلاف ولتاژ در هر دو زیرناحیه غلاف آند[4] و بخشی از جریان اصلی پلاسمای شبه خنثی می‌باشد. غلاف آند، ناحیه‌ای به ضخامت چند میکرومتر در مجاورت دیواره الکترود است که در آن جریان پلاسمای غیرخنثی[5] ایجاد می‌شود.در این نوع از جریان پلاسما، الکترون‌ها و یون‌ها با یکدیگر برابر نمی‌باشد. بنابراین با توجه به قانون گاوس الکتریکی، افت ولتاژ قابل توجهی در ناحیه مذکور به وجود می‌آید که با توجه به قانون اهم باعث افزایش تلفات گرمایی از نوع حرارت اهمی در مجاورت این ناحیه می‌شود.

از سوی دیگر در زیرناحیه جریان پلاسمای شبه خنثی، افت ولتاژ به دلیل اثر هال[6] ایجاد می‌شود. پارامتر هال الکترون در رانشگر پلاسمایی

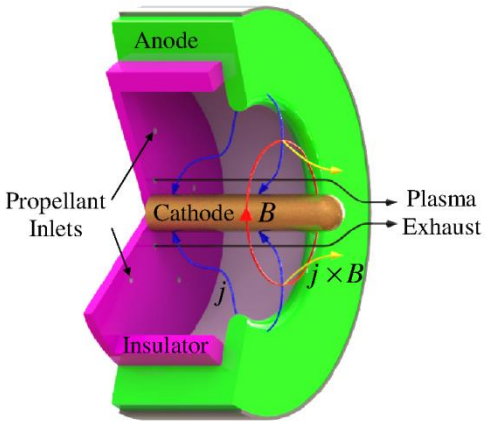

Fig. 1 Schematic of a typical MPD thruster

شکل 1 طرحواره یک رانشگر مغناطیسی پلاسمایی

[1] Quasi-neutral
[2] Anode fall
[3] Langmuir probe
[4] Anode sheath
[5] Non-neutral
[6] Hall effect

مغناطیسی که در آن میدان مغناطیسی کاملا محیطی[7] است به‌صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\Omega_e = \frac{|\mathrm{B}|}{en_e\eta} = \frac{|B_\theta|}{en_e\eta} = -\frac{B_\theta}{en_e\eta} \tag{1}$$

که B_θ میدان مغناطیسی محیطی، e بار الکتریکی الکترون، n_e چگالی تعداد ذرات الکترون و η مقاومت الکتریکی پلاسما می‌باشد. با توجه به این که مادهٔ الکترود آند دارای خاصیت رسانایی الکتریکی زیادی است، می‌توان از میدان الکتریکی در امتداد سطح آند صرف‌نظر کرد. لذا با چشم‌پوشی از سهم گرادیان فشار الکترون، قانون اهم در امتداد دیواره آند به‌صورت زیر ساده می‌گردد [2]،

$$j_z \approx -\frac{B_\theta}{en_e\eta} j_r = \Omega_e j_r \tag{2}$$

که j_z چگالی جریان الکتریکی محوری و j_r چگالی جریان الکتریکی شعاعی می‌باشد. نتایج تجربی گالیمور [3] و نتایج عددی آهنگر و همکاران [4] نشان می‌دهند که مقدار پارامتر هال در مجاورت الکترود آند از مرتبه یک می‌باشد. لذا مقدار جریان محوری حاصل از اثر هال قابل توجه است. از اندرکنش جریان الکتریکی محوری j_z با میدان مغناطیسی محیطی درونسو B_θ، مولفه‌ای از نیروی لورنتز در خلاف جهت شعاعی (به سمت الکترود کاتد) به وجود می‌آید که جریان پلاسما را از نزدیکی دیوارهٔ آند دور می‌کند. این امر باعث کاهش چگالی بار در ناحیهٔ پیرامون آند می‌شود. با توجه به لزوم پیوستگی جریان الکتریکی در سرتاسر رانشگر، در پاسخ به کمبود بارهای حامل جریان در ناحیه غلاف آند، میدان الکتریکی قابل توجهی در این ناحیه به وجود می‌آید تا با شتاب دادن بارهای حامل اثر کاهش چگالی آن‌ها جبران شده و در نهایت مقدار شار ذرات حامل ثابت باقی می‌ماند. این سازوکار موسوم به نظریه کمبود بارهای حامل[8] می‌باشد. بنابراین بایستی توجه داشت که اگرچه میدان الکتریکی تولید شده باعث حفظ شرط پیوستگی جریان الکتریکی می‌شود، اما افت ولتاژ قابل ملاحظه‌ای را در ناحیه غلاف به دنبال دارد.

در پژوهشی دیگر، صابر [5] شار حرارتی موضعی آند را با استفاده از دو روش مستقیم و غیرمستقیم اندازه‌گیری کرد. در روش مستقیم، با استفاده از ترموکوپل‌های تعبیه شده در ناحیه داخلی دیواره الکترود آند، مقادیر شار حرارتی تعیین شد. در روش غیرمستقیم، با به‌کارگیری مجموعه‌ای از سنجه‌های الکتریکی مقادیر ولتاژ، چگالی جریان الکتریکی و دمای الکترون در پلاسمای مجاور سطح آند اندازه‌گیری گردید. با استفاده از داده‌های به دست آمده، شار حرارتی توسط معادلهٔ زیر حاصل شد.

$$\dot{q}_a = j_a\left(V_a + \frac{5}{2}\frac{kT_e}{e} + \chi\right) + \dot{q}_c + \dot{q}_r \tag{3}$$

که j_a چگالی جریان موضعی آند، V_a افت آند، kT_e/e انرژی حرارتی ناشی از حرکت تصادفی الکترون‌ها، χ تابع کار، $\dot{q}_c$ شار جابه‌جایی پلاسما و $\dot{q}_r$ شار تشعشعی می‌باشد. نتایج تجربی به دست آمده در پژوهش مذکور نشان می‌دهد که در بازه جریان الکتریکی از 5.5 تا 44 کیلوآمپر با دبی جرمی گاز آرگون از 1 تا 48 گرم بر ثانیه مقدار نسبت توان اتلافی آند به توان ورودی رانشگر از 50% در 200 کیلووات به 10% در 20 مگاوات کاهش می‌یابد. در گسترهٔ عملکردی ذکر شده مقدار افت آند حدوداً بین 5 تا 50 ولت متغیر است. صابر نشان داد که زیرناحیه پلاسمای شبه خنثی تقریبا به فاصلهٔ 1 سانتی‌متر از سطح آند گسترش می‌یابد و ضخامت این ناحیه از ضخامت غلاف آند بیش‌تر است. بنابراین، سهم افت ولتاژ در زیرناحیه پلاسمای شبه

[7] Azimuthal
[8] Starvation of charge carriers

خنثی قابل‌توجه بوده و در مقایسه با سهم زیرناحیه غلاف قابل چشم‌پوشی نیست.

گالیمور [3] هم‌چون صابر با استفاده از روش‌های مستقیم و غیرمستقیم مقادیر پارامترهای الکتروگرمایی فرآیند آند را برای پیشران‌های آرگون و هلیوم در رژیم‌های عملکردی مختلف اندازه‌گیری کرد. او برای اولین بار مقادیر افت آند را به‌صورت کمی با پارامتر هال الکترون و ضریب هدایت الکتریکی مرتبط ساخت. وابستگی‌های تجربی به‌دست آمده برمبنای دو احتمال توجیه گردید. نخست، ایجاد افت ولتاژ آند بدلیل وقوع اثر هال است که پیش‌تر برمبنای نظریه کمبود بارهای حامل الکتریکی در مجاورت آند تبیین گردید. دومین احتمال مبتنی‌بر سازوکار انتقال غیرعادی[1] ذرات پلاسماست که ناشی از پدیده ریزناپایداری[2] می‌باشد [6]. در این سازوکار، ریزناپایداری‌های موجود در جریان پلاسما که از برخورد امواج با ذرات باردار به وجود می آیند مانع از عبور الکترون‌های حامل جریان الکتریکی می‌شوند و در نتیجه مقاومت الکتریکی پلاسما به‌طور غیرعادی افزایش یافته و به تبع آن افت ولتاژ در نزدیکی آند زیاد می‌شود.

سه پژوهش تجربی ذکر شده [5,3,1]، دارای دو یافته مهم مشترک می‌باشند.

الف: نتایج شار حرارتی اندازه‌گیری شده نشان می‌دهد که مقدار بیشینهٔ این کمیت حدودا در ناحیهٔ میانی لبهٔ آند رخ می‌دهد.

ب: چگالی جریان الکتریکی به صورت معکوس با افت آند تغییر کرده و تقریبا در ناحیهٔ میانی لبهٔ آند جایی‌که افت آند کمینه می‌گردد، مقدار بیشینهٔ خود را اختیار می‌کند.

تاکنون، پژوهش‌های عددی محدودی در زمینه شبیه‌سازی عملکرد رانشگر دانشگاه پرینستون انجام شده است. کالدو [7] و سنکاران [8] با توسعهٔ کدهای عددی جداگانه‌ای که مبتنی بر حل معادلات هیدرودینامیک مغناطیسی می‌باشند، مشخصه‌های الکتریکی و هیدرودینامیکی جریان پلاسما در رانشگر دانشگاه پرینستون را شبیه‌سازی کردند. علی‌رغم نتایج عددی مناسب به‌دست آمده برای پارامترهایی نظیر سرعت، دما، میدان مغناطیسی، مشخصه‌های الکتروگرمایی ناحیهٔ آند به‌دلیل عدم به‌کارگیری مدل افت آند قابل محاسبه نبودند. اخیرا آهنگر و همکاران [4] با اضافه کردن مدل غلاف آند به یک کد حل‌گر معادلات هیدرودینامیک مغناطیسی [9] توانستند مشخصه‌های الکترومغناطیسی ناحیه آند را به‌صورت عددی شبیه‌سازی کنند. در این پژوهش برای اولین بار تغییرات چگالی جریان الکتریکی و افت ولتاژ موضعی در امتداد سطوح الکترود آند با تطابق خوبی در مقایسه با داده‌های تجربی پیش‌بینی شد.

اگرچه پژوهش‌های تجربی و عددی ذکر شده، مشخصه‌های الکتروگرمایی آند را به صورت کمی تعیین کرده‌اند، با این وجود ماهیت فیزیکی پدیده آند به‌صورت دقیق شناسایی نشده است. در واقع هنوز سوالات بی‌پاسخی در مورد جزئیات رفتار مشخصه‌های الکتروگرمایی آند وجود دارد. به‌طور مثال، دلیل رابطه معکوس بین چگالی جریان الکتریکی و افت ولتاژ چیست؟ چرا شار حرارتی و چگالی جریان در مکانی که افت ولتاژ کمینه می‌شود، بیش‌ترین مقادیر خود را اختیار می‌کند؟ بنابراین، پژوهش حاضر در نظر دارد تا برای اولین بار با ارائهٔ یک روند تحلیلی جزئیات فرآیند ناحیهٔ آند را بررسی نماید. برای این منظور، روابط بین افت ولتاژ و چگالی جریان الکتریکی برای هر یک از زیرناحیه‌های پلاسمای غیرخنثی و شبه‌خنثی استخراج شده و با به‌کارگیری معادلهٔ (3)، شار حرارتی در امتداد لبهٔ آند با تاکید بر ارضای شرط پیوستگی جریان محاسبه خواهد شد. درنهایت، با استفاده از مفهوم انتروپی تفاضلی، دلیل وقوع نقاط کمینه و بیشینه در منحنی‌های مربوط به توزیع پارامترهای مذکور توجیه خواهد شد. بنابراین، هدف اصلی پژوهش حاضر تعیین سه پارامتر کلیدی الکتروگرمایی (شار حرارتی، چگالی جریان الکتریکی و افت ولتاژ) موجود در ناحیه مجاور آند می‌باشد.

2- معادلات حاکم

مدل‌سازی فرآیند الکتروگرمایی مجاور الکترود آند نیازمند مجموعهٔ معادلاتی است که بتواند رفتارمشخصه‌های جریان پلاسما را توصیف نماید. بنابراین طبق نتایج ارائه شده توسط صابر [5] هر دو زیرناحیه غلاف آند و پلاسما شبه خنثی و اندرکنش آن‌ها باید در نظر گرفته شوند. در ادامه، فرضیات، معادلات حاکم بر هر یک از زیرنواحی مذکور و فرآیند حل آن‌ها ارائه می‌گردد.

2-1- تحلیل زیرناحیه پلاسمای شبه خنثی

طبق مطالعه‌های تجربی در رانشگرهای مغناطیسی پلاسمایی، مقادیر عدد رینولدز مغناطیسی و پارامتر هال در نزدیکی آند به‌ترتیب در محدوده 0.01 تا 0.1 و 1 تا 10 می‌باشند [3]. تحت این شرایط، معادله حالت پایدار میدان مغناطیسی القایی به‌صورت زیر قابل بیان می‌باشد:

$$\nabla \times (\mathrm{v} \times \mathrm{B}) = \frac{1}{\sigma}\nabla \times (\nabla \times \mathrm{B}) + \beta(\nabla \times [(\nabla \times \mathrm{B}) \times \mathrm{B}]) \approx 0 \tag{4}$$

که $\mathrm{v} = [u, 0, w]$ بردار سرعت، $\mathrm{B} = [0, B_\theta, 0]$ بردار شار مغناطیسی، $\beta = 1/en$ و σ هدایت الکتریکی پلاسما می‌باشند. در حالت پلاسمای شبه خنثی یک‌بعدی در طول آند، مولفه محیطی معادله (4) به‌صورت زیر ساده می‌گردد:

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} + 2k\psi\frac{d\psi}{dz} = 0 \tag{5}$$

به‌طوری که $k = \sigma\beta/r_a^2$ و $\psi = r_a B_\theta$ به‌عنوان تابع جریان در نظر گرفته می‌شود. در واقع پارامتر k در طول لبهٔ آند تغییر می‌کند، اما برای دست یافتن به حل تحلیلی می‌توان مقدار آن را ثابت در نظر گرفت [10]. با استفاده از رابطه ماکسول ($\mathrm{J} = \mu_0^{-1}(\nabla \times \mathrm{B})$)، بزرگی چگالی جریان به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$J(z) = \left|-\frac{1}{\mu_0 r_a}\frac{d\psi}{dz}\right| \tag{6}$$

با توجه به این‌که مقدار بیشینه چگالی جریان ($J_{\max}$) در ناحیه میانی لبه آند ($z = 0$) رخ می‌دهد،از معادلهٔ (6) خواهیم داشت:

$$\frac{d\psi}{dz}(0) = -\mu_0 r_a J_{\max} \tag{7}$$

$$\frac{d^2\psi}{dz^2}(0) = 0 \tag{8}$$

که در آن $J_{\max}$ با به‌کارگیری معادله (3) به‌صورت زیر قابل محاسبه می‌باشد:

$$J_{\max} = \frac{\dot{q}(0)}{\Phi_{\min} + \omega + \frac{5}{2}\frac{k_B T}{e}} \tag{9}$$

در این رابطه $\dot{q}(0)$ مقدار شار حرارتی در مکانی است که افت آند کم‌ترین مقدار خود را اختیار می‌کند ($z = 0$). با اعمال شرایط (7) و (8) بر معادلهٔ (5) تابع جریان به شکل زیر در می‌آید:

$$\psi = \sqrt{\frac{\mu_0 r_a J_{\max}}{k}}\tanh\left(z\sqrt{\mu_0 r_a k J_{\max}}\right) \tag{10}$$

[1] Anomalous transport mechanism
[2] Micro-instabilities

با جایگذاری معادلهٔ (10) در معادلهٔ (6)، مقدار چگالی جریان از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$J(z) = J_{\max}\left[1 - \tanh^2\left(z\sqrt{\mu_0 r_a k J_{\max}}\right)\right] \tag{11}$$

به‌منظور افزایش سازگاری نتایج تحلیلی با داده‌های تجربی، پارامتر k برحسب $J_{\max}$ و $J_{\min}$ که به‌ترتیب برابر با مقدار چگالی جریان الکتریکی در پایین‌دست و بالادست لبه آند ($z = \pm L$) است (شکل 2)، قابل محاسبه می‌باشد. بر این اساس معادلهٔ (11) به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود.

$$J(z) = \frac{J_{\max}}{\cosh^2\left[\frac{z}{L}\tan^{-1}\left(1 - \frac{J_{\min}}{J_{\max}}\right)\right]} \tag{12}$$

با استفاده از قانون اهم و جایگذاری معادله (6) در آن، شدت میدان الکتریکی به‌صورت زیر قابل بیان است.

$$E(z) = \left|-\frac{\beta}{\mu_0 r_a^2}\psi\frac{d\psi}{dz}\right| \tag{13}$$

درنهایت، با جایگزینی معادله (10) در معادله (13) و انتگرال‌گیری از آن، پتانسیل الکتریکی زیرناحیه پلاسمای شبه خنثی (φ) به‌صورت زیر حاصل می‌گردد.

$$\varphi(z) = \frac{\beta\mu_0 L^2 J_{\max}^2}{2\left[\tan^{-1}\left(1 - \frac{J_{\min}}{J_{\max}}\right)\right]^2} \tanh^2\left[\left(\frac{z}{L}\right)\tanh^{-1}\left(\sqrt{1 - \frac{J_{\min}}{J_{\max}}}\right)\right] \tag{14}$$

2-2- تحلیل زیرناحیه غلاف پلاسمای غیرخنثی

در ناحیه غلاف آند، اندازه چگالی تعداد ذرات الکترون بیش‌تر از چگالی تعداد ذرات یون‌ها می‌باشد. بنابراین، جریان الکتریکی عمدتا ناشی از شار الکترون‌ها است [1]. علاوه براین، فرض می‌شود که الکترون دارای توزیع ماکسول بوده و می‌توان از رابطه تعادلی بولتزمن برای محاسبه چگالی استفاده کرد [3]:

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{e\phi}{k_B T}\right) \tag{15}$$

که n_0 چگالی تعداد ذرات الکترون در لبه غلاف می‌باشد. بنابراین، تحت شرایط ذکر شده، مولفه‌های معادله اندازه حرکت دوبعدی جریان الکترون مغناطیسی شده پایا در زیرناحیه غلاف به صورت زیر قابل محاسبه می‌باشد [11]:

$$mn\left(u\frac{\partial u}{\partial r} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = -k_B T\frac{\partial n}{\partial r} + en\frac{\partial \phi}{\partial r} + enwB_\theta - mvnu \tag{16}$$

$$mn\left(u\frac{\partial w}{\partial r} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = -k_B T\frac{\partial n}{\partial z} + en\frac{\partial \phi}{\partial z} - enuB_\theta - mvnw \tag{17}$$

در معادلات فوق، دمای الکترون ثابت فرض می‌شود. با مشتق‌گیری از معادلات (16) و (17) در راستای z و r و سپس کم کردن دو معادله به‌دست آمده از یکدیگر، معادله زیر حاصل خواهد شد:

$$\frac{m}{e}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(u\frac{\partial u}{\partial r} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial r}\left(u\frac{\partial w}{\partial r} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right] = \left[\frac{\partial(wB_\theta)}{\partial z} + \frac{\partial(uB_\theta)}{\partial r}\right] - \frac{1}{\beta}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r}\right) \tag{18}$$

به‌طور کلی ضخامت زیرناحیه غلاف در حدود چند ده میکرومتر می‌باشد [3]. بنابراین، این ناحیه به عنوان لایه‌ای بسیار نازک در نظر گرفته می‌شود و می‌توان فرض کرد که $r^{-1}\partial(uB_\theta)/\partial r \approx \partial(uB_\theta)/\partial r$. از این‌رو، اولین عبارت در سمت راست معادله (18) با توجه به معادله (4) حذف می‌گردد. با تعریف $f = \partial u/\partial z - \partial w/\partial r$ و $\tilde{\nabla} = [\partial/\partial r, 0, \partial/\partial z]$ معادلهٔ (18) به

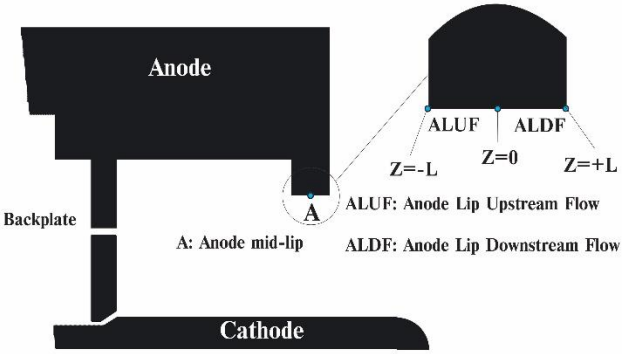

Fig. 2 Schematic of the Understudied Anode (reproduced from Ref. [3])

شکل 2 طرحواره آند تحت مطالعه (بازتولید شده از مرجع [3])

صورت زیر بازنویسی می‌شود.

$$\tilde{\nabla}\cdot(fv) = -\frac{e}{m\beta}f \tag{19}$$

معادلهٔ فوق در صورتی‌که $f = 0$ باشد، برقرار است. در این صورت داریم

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial r} \tag{20}$$

با جایگذاری معادله (20) در معادلات (16) و (17) و سپس انتگرال‌گیری از مجموع دو معادلهٔ به دست آمده، معادله زیر حاصل می‌شود

$$\frac{m}{e}(u^2 + w^2) = -\frac{2k_B T}{e}\ln n + 2\phi + \int(wB_\theta dr - uB_\theta dz) - \frac{1}{\beta}\int(wdz + udr) + c \tag{21}$$

که در آن c ثابت معادله انتگرال می‌باشد. با استفاده از قضیه گرین، انتگرال‌های اول و دوم در سمت راست معادله (21) به‌ترتیب براساس معادلات (4) و (20) حذف می‌شوند. با توجه به تعریف اندازه چگالی جریان در ناحیه غلاف

$$J_{\text{sh}} = en\sqrt{u^2 + w^2} \tag{22}$$

معادله (21) به شکل زیر در می‌آید.

$$\frac{J_{\text{sh}}^2}{(en)^2} = -\frac{2k_B T}{m}\ln n + \frac{2e}{m}\phi + c \tag{23}$$

ثابت c برحسب این واقعیت که کمینه افت آند ($\Phi_{\min} = \phi_{\min}$) در جایی‌که مقدار چگالی جریان الکتریکی بیشینه می‌باشد رخ می‌دهد، قابل محاسبه می‌باشد. در نتیجه، معادله (23) به فرم زیر بازنویسی می‌شود.

$$J_{\text{sh}} = en_0\exp\left(-\frac{e\phi}{k_B T}\right) \times \sqrt{\left(\frac{J_{\max}}{en_0}\right)^2\exp\left(\frac{2e\phi_{\min}}{k_B T}\right) + \frac{4e}{m}(\phi - \phi_{\min})} \tag{24}$$

معادله (24) توصیف کنندهٔ رابطهٔ بین پتانسیل الکتریکی و چگالی جریان الکتریکی در ناحیه غلاف آند است. مقدار پتانسیل الکتریکی در طول لبه آند را می‌توان با به‌کارگیری معادله پواسون به دست آورد.

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = \frac{e}{\varepsilon_0}n_0\exp\left(-\frac{e\phi}{k_B T}\right) \tag{25}$$

با استفاده از شرط $\phi = \phi_{\min}$ و $\partial\phi/\partial z = 0$ در $z = 0$ و انتگرال‌گیری از معادله (25) رابطهٔ زیر برای تعیین مقادیر پتانسیل الکتریکی حاصل می‌شود

$$\phi = \phi_{\min} + \frac{2k_B T}{e}\ln\left(\cosh\left[\exp\left(-\frac{e\phi_{\min}}{2k_B T}\right)\frac{z}{\sqrt{2}\lambda_D}\right]\right) \tag{26}$$

که در آن λ_D طول دبای[1] می‌باشد و مقدار آن نوعا از مرتبه 1 میکرومتر است [3]. به‌منظور افزایش تطابق نتایج تحلیلی با داده‌های تجربی، مقدار طول دبای برحسب $\phi_{\min}$ و $\Phi_{\max}$ (که به ترتیب میزان افت آند در گوشه پایین‌دست و بالادست لبه آند $z=\pm L$ می‌باشد) قابل محاسبه است. بر این اساس معادله (26) به فرم زیر بازنویسی می‌شود:

$$\phi=\phi_{\min}+\frac{2k_BT}{e}\ln\left(\cosh\left[\left(\frac{z}{L}\right)\tanh^{-1}\sqrt{1-\exp\left(-\frac{e\Delta\phi}{k_BT}\right)}\right]\right) \tag{27}$$

در معادله (27)، $\Delta\phi=\Phi_{\max}-\phi_{\min}-\varphi(\pm L)$ است. با استفاده از معادله (3)، $\Phi_{\max}$ به فرم زیر محاسبه می‌شود:

$$\Phi_{\max}=\frac{\dot{q}_{\min}}{J_{\min}}-\left(\omega+\frac{5}{2}\frac{k_BT}{e}\right) \tag{28}$$

که در آن $\dot{q}_{\min}$ شار حرارتی در گوشه پایین‌دست و بالادست لبه آند می‌باشد. در نهایت، چگالی جریان الکتریکی در طول لبه آند با جایگذاری معادله (27) در معادله (24) بدست می‌آید.

3-2- الگوریتم حل

با توجه به مباحث بیان شده در بخش قبلی، فرآیند حل جهت تعیین شار حرارتی آند به‌صورت ذیل می‌باشد:

1- مقادیر $\dot{q}_{\min}$، $\dot{q}(0)$، $\phi_{\min}$ (به‌عنوان شروط مرزی) و T با استفاده از داده‌های تجربی تعیین شده و سپس $J_{\max}$ توسط معادله (9) محاسبه می‌شود.

2- مقدار $J_{\min}$ را حدس زده و سپس $\Phi_{\max}$ با استفاده از معادله (28) محاسبه می‌گردد.

3- افت‌های پتانسیل الکتریکی در زیر نواحی پلاسمای شبه خنثی و غلاف آند به ترتیب با استفاده از معادلات (14) و (27) به‌دست می‌آیند.

4- به‌منظور ارضای شرط پیوستگی چگالی جریان الکتریکی، توزیع چگالی جریان در ناحیه پلاسمای شبه خنثی که از معادله (12) به‌دست آمده باید با مقدار آن در زیرناحیه غلاف که از معادله (24) حاصل شده، برابر باشد.

5- در صورت عدم ارضای شرط پیوستگی چگالی جریان الکتریکی تمامی محاسبات از گام دوم به بعد تکرار خواهد شد. شار حرارتی در طول سطح آند با استفاده از معادله (3) محاسبه شده و افت کلی آند و چگالی جریان به ترتیب از گام‌های سوم و چهارم به‌دست می‌آید. روندنمای الگوریتم حل در "شکل 3" قابل مشاهده است.

3- نتایج و بحث

به‌منظور اعتبارسنجی الگوریتم تحلیلی توسعه داده شده، رانشگر آزمایشگاهی دانشگاه پرینستون با پیشرانه آرگون تحت شرایط کاری $I_{\rm dis}^2/\dot{m}=2.67,16\ ({\rm kA})^2{\rm s/gr}$ که به ترتیب توسط صابر و گالیمور مورد مطالعه تجربی قرار گرفته، مدل‌سازی شده است. همان‌طور که در "شکل 2" ملاحظه می‌شود، رانشگر دارای محفظه تخلیه الکتریکی استوانه‌ای شکل از جنس آلومینیوم به طول 5 سانتی‌متر، قطر داخلی 15 سانتی‌متر و قطر خارجی 18.8 سانتی‌متر می‌باشد. سطح داخلی این محفظه توسط تیوبی از جنس پیرکس با ضخامت 1 سانتی‌متر پوشیده شده است. هم‌چنین

[1] Debye length

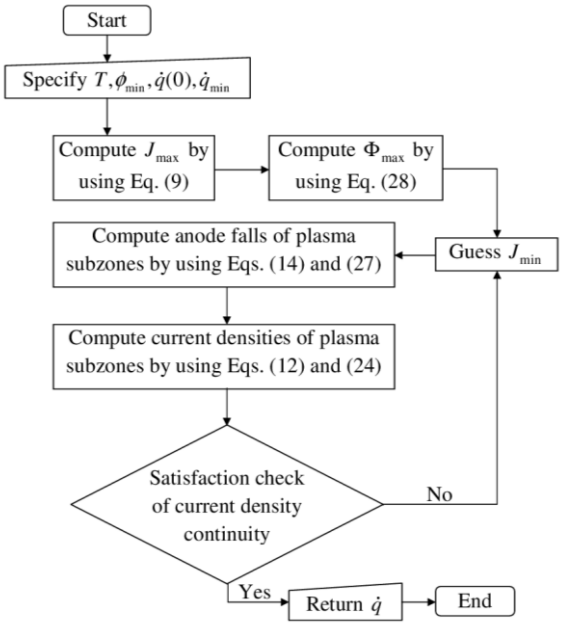

Fig. 3 Schematic flowchart describing the solution algorithm

شکل 3 نمودار روندنمای فرآیند حل

جنس کاتد از تنگستن بوده و دارای طول 10 سانتی‌متر و قطر 1.8 سانتی‌متر می‌باشد. توزیع شار حرارتی در امتداد لبهٔ آند در "شکل 4" و"شکل 5" قابل مشاهده می‌باشد. در این نمودار، طول لبهٔ آند بر محور افقی نگاشت شده‌اند. بر این اساس، مکان‌های 0.008- و 0.008+ متر بر روی نمودار به‌ترتیب نشان‌دهندهٔ گوشهٔ بالادستی و پائین‌دستی لبهٔ آند و نقطهٔ صفر وسط لبهٔ آند می‌باشند. داده‌های تجربی توسط مجموعه‌ای از ترموکوپل‌های تعبیه شده بر دیوارهٔ آند اندازه‌گیری شده‌اند. نتایج تحلیلی به‌دست آمده تطابق خوبی با مقادیر اندازه‌گیری شده دارند. در جریان تخلیه الکتریکی 8 کیلوآمپر با دبی‌های جرمی 4 و 24 گرم برثانیه، مقادیر بیشینه شار حرارتی در وسط لبه آند به ترتیب در حدود 1350 و 1490 وات بر سانتی‌مترمربع می‌باشند. مقادیر مذکوردر گوشه بالادست لبه آند به 480 و 400 وات بر سانتی‌مترمربع و در گوشه پایین دست لبه آند به 640 و 660 وات بر سانتی‌مترمربع کاهش می‌یابند. همان‌طور که ملاحظه می‌شود اختلاف مقادیر به‌دست آمده با داده‌های تجربی در لبهٔ پایین‌دست آند در مقایسه با لبهٔ بالادست آند کمتر بوده و نتایج تحلیلی کاملا در محدوده نوار خطای[2] داده‌های تجربی قرار گرفته‌اند. علت اختلاف مشاهده شده در بخش بالادست لبهٔ آند به این دلیل است که مقدار عدد رینولدز مغناطیسی برخلاف فرضیات صورت گرفته در بخش 2-1 اندکی بیش‌تر از 0.1 (حدود 0.2 تا 0.3) به‌دست می‌آید. تحت این شرایط به‌دلیل در نظر نگرفتن سهم جابه‌جایی در معادلهٔ میدان مغناطیسی، گرادیان خطوط میدان مغناطیسی نسبتاً شدیدتر شده و این به معنای بزرگ‌تر شدن مقادیر چگالی جریان الکتریکی است. بنابراین، ارضای شرط پیوستگی برای مقادیر بزرگ‌تر جریان نیازمند برقراری میدان الکتریکی قوی‌تر در ناحیه غلاف بوده که به تبع آن افت ولتاژ افزایش بیش‌تری خواهد داشت. در نتیجه مقادیر شار حرارتی در بخشی از بالادست لبه آند بیش‌تر از مقادیر تجربی پیش‌بینی شده است. با این وجود، نتایج تحلیلی روند صعودی شار حرارتی در ناحیهٔ مذکور را به خوبی نشان می‌دهد.

[2] Error bar

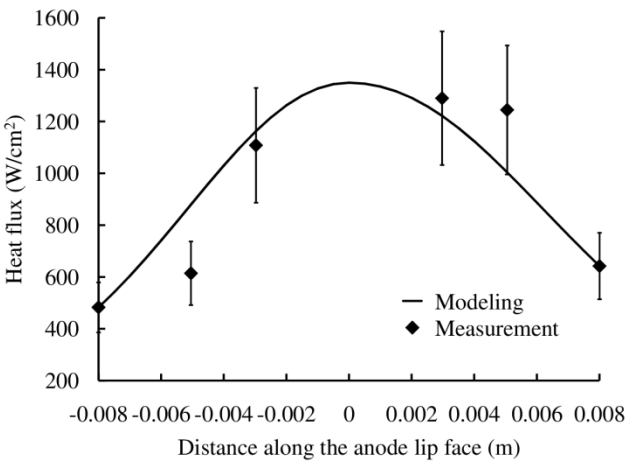

Fig. 4 Comparison of calculated and measured [3] heat fluxes for $I_{\rm dis}^2/\dot{m} = 16\ \ ({\rm kA})^2{\rm s/gr}$

شکل 4 مقایسه شار حرارتی محاسبه شده با داده‌های تجربی [3] برای $I_{\rm dis}^2/\dot{m} = 16\ \ ({\rm kA})^2{\rm s/gr}$

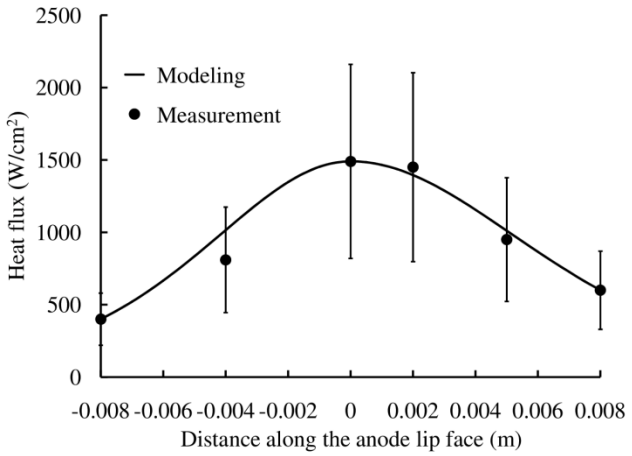

Fig. 5 Comparison of calculated and measured [5] heat fluxes for $I_{\rm dis}^2/\dot{m} = 2.67\ ({\rm kA})^2{\rm s/gr}$

شکل 5 مقایسه شار حرارتی محاسبه شده با داده‌های تجربی [5] برای $I_{\rm dis}^2/\dot{m} = 2.67\ ({\rm kA})^2{\rm s/gr}$

همان‌طور که مشاهده شد، شار حرارتی در وسط لبهٔ آند جایی که چگالی جریان به‌دست آمده در "شکل 6" و "شکل 7" بیشینه شده، بیش‌ترین مقدار خود را اختیار کرده است. چگالی جریان محاسبه شده سازگاری خوبی با مقادیر اندازه‌گیری شده داشته و در محدوده داده‌های تجربی قرار دارد. در دبی‌های جرمی 4 و 24 گرم بر ثانیه، چگالی جریان الکتریکی محاسبه شده در گوشه بالادست لبه آند به ترتیب برابر با 24 و 33 آمپر بر سانتی‌مترمربع می‌باشد. این مقادیر در وسط لبه آند به 90 و 140 آمپر بر سانتی‌مترمربع افزایش یافته و سپس در گوشه پایین‌دست لبه آند به 32 و 53 آمپر بر سانتی‌مترمربع کاهش می‌یابند. ملاحظه می‌شود که نمودار چگالی جریان الکتریکی به‌صورت قله‌ای[1] است. برای یافتن دلیل این امر، می‌توان قانون دوم ترمودینامیک را برای ناحیهٔ غلاف به کار بست. بر این اساس، با استفاده از معادلهٔ (24)، نرخ تولید شار انتروپی ($\Delta\dot{S}'' = \int T^{-1} J d\phi$)، به‌صورت زیر قابل محاسبه است.

$$\Delta\dot{S}'' = \frac{en_0}{T}\int \exp\left(-\frac{e\phi}{k_B T}\right)\sqrt{\frac{4e}{m}\phi + U_B^2}\,d\phi \tag{29}$$

[1] Peak- shaped

در رابطه فوق داریم:

$$U_B = \sqrt{\left(\frac{J_{\max}}{en_{\rm sh}}\right)^2 \exp\left(\frac{2e\phi_{\min}}{k_B T}\right) - \frac{4e}{m}\phi_{\min}} \tag{30}$$

با تعریف سرعت موثر، $U = \sqrt{4e/m\,\phi + U_B^2}$ و استفاده از سرعت حرارتی الکترون، $U_T = \sqrt{2k_B T/m}$، معادله (29) به شکل زیر در می‌آید.

$$\Delta\dot{S}'' = \frac{mn_0 U_B^2}{2T}\frac{\left(-\int g(U)\ln[g(U)]\,dU\right)}{\left(-g(U_B)\ln[g(U_B)]\right)} \tag{31}$$

در رابطه بالا داریم:

$$g(U) = \exp\left(-\frac{U^2}{2U_T^2}\right) \tag{32}$$

که تابع چگالی احتمال بوده و دارای توزیع گاوسی (یا نرمال) است. این امر اثبات شده است که انتگرال موجود در رابطهٔ (31) که در ترمودینامیک آماری موسوم به انتروپی تفاضلی[2] است زمانی بیشینه می‌گردد که تابع چگالی احتمال آن دارای توزیع نرمال باشد [12]. بنابراین می‌توان نتیجه

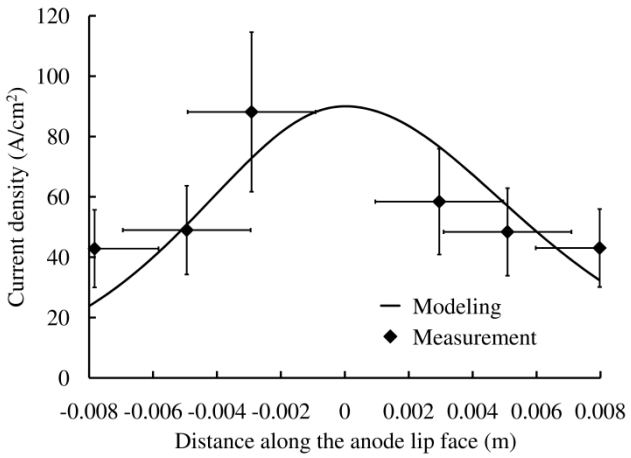

Fig. 6 Comparison of calculated and measured [3] current densities for $I_{\rm dis}^2/\dot{m} = 16\ ({\rm kA})^2{\rm s/gr}$

شکل 6 مقایسه چگالی جریان الکتریکی محاسبه شده با داده‌های تجربی [3] برای $I_{\rm dis}^2/\dot{m} = 16\ ({\rm kA})^2{\rm s/gr}$

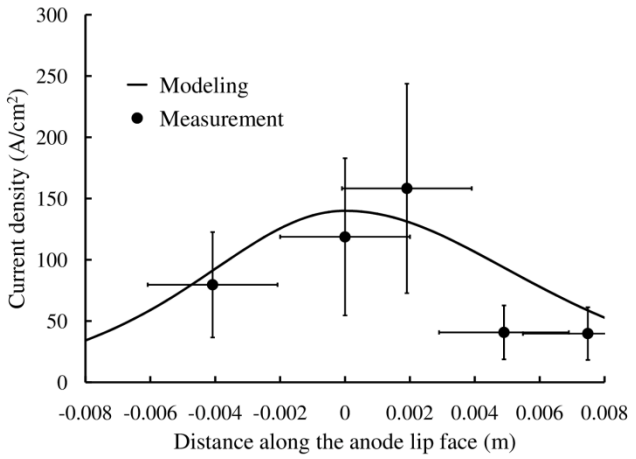

Fig. 7 Comparison of calculated and measured [5] current densities for $I_{\rm dis}^2/\dot{m} = 2.67\ ({\rm kA})^2{\rm s/gr}$

شکل 7 مقایسه چگالی جریان الکتریکی محاسبه شده با داده‌های تجربی [5] برای $I_{\rm dis}^2/\dot{m} = 2.67\ ({\rm kA})^2{\rm s/gr}$

[2] Differential entropy

گرفت که طبیعت زیرناحیه غلاف به‌گونه‌ای رفتار می‌کند که با قله‌ای شکل شدن چگالی جریان الکتریکی، تابع چگالی احتمال سرعت موثر دارای توزیع گاوسی شده و در نتیجه تولید انتروپی بیشینه گردد.

در "شکل 8" و "شکل 9" تغییرات افت آند در امتداد لبه آند با مقادیر اندازه‌گیری شده توسط سنجه الکتریکی و ترموکوپل، مقایسه شده است. نتایج تحلیلی به‌دست آمده سازگاری خوبی با نتایج تجربی دارند. مقدار کمینه افت ولتاژ به‌دست آمده به ازای دبی‌های جرمی 4 و 24 گرم بر ثانیه به ترتیب برابر 5.8 و 4.9 ولت می‌باشد. این مقادیر در گوشه بالادست لبه آند به 11 و 6 ولت و در گوشه پایین‌دست لبه آند به 8.2 و 5.7 ولت افزایش می‌یابند. ملاحظه می‌شود که در جریان تخلیه الکتریکی یکسان، در دبی جرمی کمتر، مقادیر تحلیلی افت آند بیش‌تر از مقادیر تجربی آن پیش‌بینی شده‌اند. دلیل اول این موضوع می‌تواند مربوط به مقادیر بزرگ عدد رینولدز مغناطیسی باشد که پیش‌تر بیان گردید. دلیل دوم این است که در دبی جرمی کمتر، مقادیر چگالی تعداد ذرات الکترون در مجاورت آند از شار الکترون تصادفی[1] کوچک‌تر است. از این‌رو، برای بقای شرط پیوستگی جریان الکتریکی، یک میدان الکتریکی در نزدیکی آند به‌وجود می‌آید تا شار الکترون را توسط دو مکانیزم مختلف در سطح مناسبی حفظ کند. در مکانیزم اول، به‌دلیل افزایش میدان الکتریکی در مجاورت سطح آند مقدار حرارت اهمی زیاد شده و در نتیجه نرخ یونیزاسیون بالا رفته و سطح تولید الکترون به حدی می‌رسد که شار الکترون موردنیاز مجددا به مقدار مکفی برسد. در مکانیزم دوم، جریان الکتریکی براساس هدایت الکتریکی مبتنی بر پدیده انتقال نفوذ غالب[2] صورت می‌گیرد. در این مکانیزم با نفوذ الکترون‌ها به ناحیه کم چگالی، کمبود شار الکترون تصادفی مرتفع می‌گردد. با توجه به این که در مدل تحلیلی ارائه شده، فرآیند یونیزاسیون در نظر گرفته نشده است، لذا افزایش در مقدار شار الکترون تنها براساس مکانیزم دوم صورت می‌گیرد. بنابراین، برای ارضای شرط پیوستگی جریان و تامین شار الکترون مورد نیاز، در حل تحلیلی میدان الکتریکی بزرگ‌تری تولید شده و در نتیجه مقدار افت ولتاژ آند در شرایط کم چگالی مقداری بیش‌تر از حالت واقعی پیش‌بینی می‌شود.

4- جمع‌بندی

الگوریتمی تحلیلی برای مطالعه مشخصه‌های جریان پلاسمای مجاور الکترود

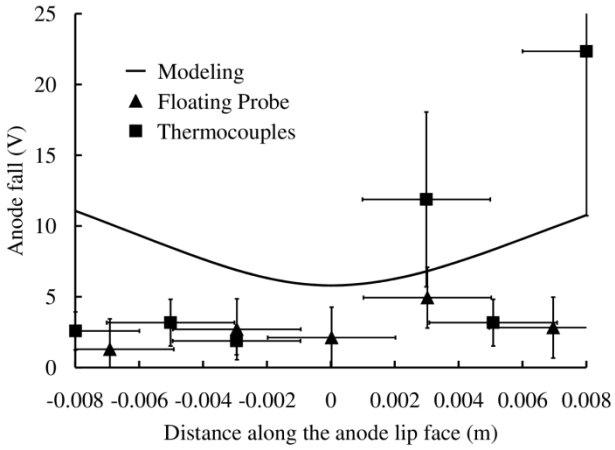

Fig. 8 Comparison of calculated and measured [3] anode falls for $I_{\rm dis}^2/\dot{m} = 16\ ({\rm kA})^2{\rm s/gr}$

شکل 8 مقایسه افت ولتاژ آند محاسبه شده با داده‌های تجربی [3] برای $I_{\rm dis}^2/\dot{m} = 16\ ({\rm kA})^2{\rm s/gr}$

[1] Random electron flux
[2] Diffusion-dominated-transportphenomenan

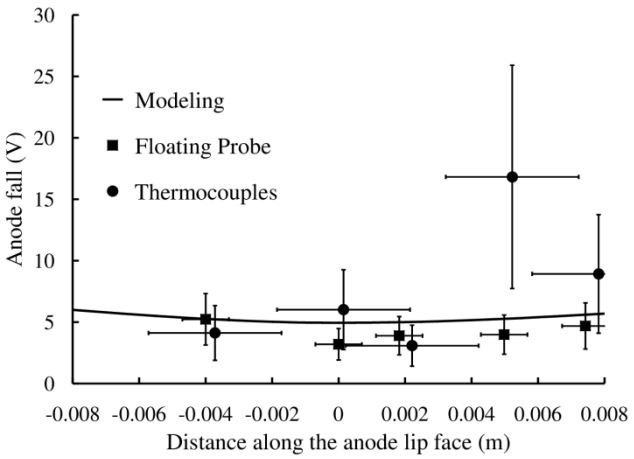

Fig. 9 Comparison of calculated and measured [5] heat fluxes for $I_{\rm dis}^2/\dot{m} = 2.67\ ({\rm kA})^2{\rm s/gr}$

شکل 9 مقایسه افت ولتاژ آند محاسبه شده با داده‌های تجربی [5] برای $I_{\rm dis}^2/\dot{m} = 2.67\ ({\rm kA})^2{\rm s/gr}$

آند با در نظر گرفتن زیر نواحی غیرخنثی و شبه‌خنثی ارائه شد. با به کارگیری مدل ارائه شده، فرآیند الکتروگرمایی آند مربوط به رانشگر آزمایشگاهی دانشگاه پرینستون مورد مطالعه و بررسی قرار گرفت. شار حرارتی محاسبه شده تطابق خوبی با داده‌های تجربی نشان داد و در وسط لبه آند جایی که چگالی جریان الکتریکی بیشینه شد، مقدار حداکثر خود را پیدا کرد. اختلاف اندک بین نتایج تحلیلی و تجربی با بررسی فرضیات اعمال شده و مکانیزم‌های تولید افت آند توجیه شدند. هم‌چنین نتایج به‌دست آمده نشان دادند که با افزایش (کاهش) چگالی جریان الکتریکی در امتداد لبه آند، افت ولتاژ کاهش (افزایش) یافت. لذا مقاومت تفاضلی جریان پلاسما که به صورت مشتق افت آند به چگالی جریان الکتریکی تعریف می‌شود، منفی است. دلیل این موضوع این است که توزیع ماکسول-بولتزمن الکترون‌ها منجر به توزیع قله‌ای شکل چگالی جریان الکتریکی می‌شود که به تبع آن با ایجاد یک تابع چگالی احتمال گاوسی برای سرعت موثر، تولید آنتروپی بیشینه می‌شود. تحت این شرایط توزیع افت ولتاژ دره‌ای شکل شده و دارای نقطه کمینه می‌گردد. از این‌رو، در نزدیکی وسط لبه آند، شار الکترون موردنیاز عمدتاً بدلیل افزایش شار حرارتی تامین می‌گردد. در حالی که در نزدیکی گوشه‌های لبه آند، تامین شار الکترون موردنیاز مبتنی است بر افزایش میدان الکتریکی و شتابدهی الکترون‌ها که در نتیجه افت ولتاژ در این نواحی افزایش می‌یابد.

اگرچه با توسعهٔ مدل تحلیلی ارائه شده، جزییات فرآیند الکتروگرمایی آند به خوبی تجزیه و تحلیل شد اما همان‌طور که پیش‌تر اشاره گردید، اثرات فرآیند یونیزاسیون در مدل بیان شده موضوعی است که می‌تواند در مطالعات آتی مدنظر قرار بگیرد. هم‌چنین با در نظر گرفتن اثرات پدیده گرمایونی[3] در مدل ارائه شده، می‌توان الگوریتم مذکور را برای مطالعهٔ مشخصه‌های الکتروگرمایی الکترود کاتد استفاده کرد.

5- فهرست علائم

B	بردار میدان مغناطیسی (T)
e	بار الکتریکی الکترون (1.602×10^{-19} C)
E	بزرگی میدان الکتریکی ($\rm Vm^{-1}$)
J	بردار چگالی جریان الکتریکی ($\rm Am^{-2}$)
L	نیمه طول لبه آند (m)

[3] Thermionic effect

I_{dis} جریان تخلیه کل (kA)

k_B ثابت بولتزمن (1.381×10^{-23} JK^{-1})

$\dot{m}$ نرخ جریان جرمی پیشران (grs^{-1})

m جرم الکترون (9.1094×10^{-31} kg)

n چگالی تعداد ذرات الکترون (m^{-3})

$\dot{q}$ شار حرارتی (wm^{-2})

r_a شعاع آند (m)

T دمای الکترون (K)

u سرعت شعاعی (ms^{-1})

w سرعت محوری (ms^{-1})

علایم یونانی

ε_0 ثابت گذردهی الکتریکی خلاء (8.85×10^{-12} Fm^{-1})

μ_0 نفوذپذیری مغناطیسی خلا ($4\pi\times10^{-7}$ VsA^{-1}m^{-1})

φ افت ولتاژ پلاسمای شبه خنثی (V)

ϕ افت ولتاژ ناحیه غلاف (V)

Φ افت آند (V)

χ تابع کار (V)

زیرنویس‌ها

Sh غلاف

θ جهت محیطی

6- مراجع

[1] R.C. Oberth, *Anode Phenomena in High-Current Discharges*, PhD Thesis, Princeton University, New Jersy,1970.

[2] M. Ahangar, *Numerical simulation of fluid flow in magnetoplasmadynamic thruster*, PhD Thesis, Department of Aerospace Engineering, K. N. Toosi University of Technology, Tehran, 2015. (in Persian فارسی)

[3] A.D. Gallimore, *Anode Power Deposition in Coaxial MPD Thrusters*, PhD Thesis, Princeton University, Princeton, New Jersey, 1992.

[4] M. Ahangar, R. Ebrahimi, and M. Shams, Numerical Investigation of Plasma Behavior and Anode Sheath in a Magnetoplasmadynamic Thruster, *Journal of Propulsion and Power*, Vol. 32, No. 2, pp. 420-430, 2016.

[5] A.J. Saber, *Anode Power in a Quasi-Steady MPD Thruster*, PhD Thesis, Princeton University, New Jersy,1974.

[6] Choueiri, Anomalous resistivity and heating in current-driven plasma thrusters, *Physics of Plasmas*, Vol. 6, No. 5, pp. 2290–2306, 1999.

[7] G. Caldo, E. Y. Choueiri, A. J. Kelly, R. G. Jahn, An MPD Code with Anomalous Transport, *22nd International Electric Propulsion Conference*, Viareggio, Italy, pp. 91-101, 1991.

[8] K. Sankaran, *Simulation of Plasma Flows in Self-Field Lorentz Force Accelerators*, PhD Thesis, Princeton University, New Jersey, 2005.

[9] M. Ahangar, R. Ebrahimi, M. Shams, Numerical Simulation of Non-Equilibrium Plasma Flow in a Cylindrical MPD Thruster Using a High-Order Flux-Difference Splitting Method, *Acta Astronautica*, Vol. 103, pp. 129–141, 2014.

[10] I. Kimura, Current Distribution on the Electrodes of MPD Arcjets, *AIAA Journal*, Vol. 20, No. 7, pp. 889-892, 1982.

[11] M. Mitchner, C.H. Kruger, *Partially Ionized Gases*, Original Edition, pp.180-181, New York: Wiley, 1973.

[12] D. Arovas, *Lecture notes on thermodynamics and statistical mechanics*, Accessed on 14 November 2013; http://physics.ucsd.edu/students/courses/spring2010/physics210a/lectures.html.