



## مدل سازی حرکت نسبی بزرگ مقیاس دو ماهواره در مدار بیضوی

مهدی فکور<sup>1\*</sup>، فاطمه آموزگاری<sup>2</sup>، مجید بختیاری<sup>3</sup>

1- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه تهران، تهران

2- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی هوافضا، دانشگاه تهران، تهران

3- کارشناس ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران

\* تهران، صندوق پستی 14395-1561، mfakoor@ut.ac.ir

## چکیده

## اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 18 آبان 1395

پذیرش: 29 دی 1395

ارائه در سایت: 19 بهمن 1395

کلید واژگان:

حرکت نسبی بزرگ مقیاس

مدار بیضوی

اغتشاش  $j_2$ 

منظومه ماهواره‌ای

حرکت نسبی و الگوریتم تعیین وضعیت برای آرایش پرواز دو ماهواره در منظومه ماهواره‌ای مؤلفه‌های کلیدی هستند که بر کیفیت پرواز و بازدهی مأموریت اثر می‌گذارند. در این مقاله حرکت نسبی مداری دو ماهواره با دو مدار بیضوی کپلری دلخواه و در فاصله زیاد مورد بررسی قرار می‌گیرد، همچنین راه‌حلی دقیق و مؤثر براساس هندسه کروی برای مسئله حرکت نسبی ماهواره با در نظر گرفتن اغتشاش  $j_2$  که یکی از اغتشاشات مهم در مدارات ارتفاع پایین است ارائه می‌شود. روش هندسی مستقیم با استفاده از مختصات کروی برای رسیدن به این راه‌حل استفاده می‌شود. از این روش برای اندازه‌گیری فاصله بین هر دو ماهواره در منظومه ماهواره‌ای استفاده می‌شود. در این روش موقعیت نسبی و سرعت نسبی دو ماهواره براساس المان‌های مداری محاسبه می‌شوند. نتایج به‌دست‌آمده از شبیه‌سازی با استفاده از نرم‌افزار اس.تی.کی، مقایسه با نتایج حاصل از معادلات برای ماهواره‌های با خروج از مرکزهای متفاوت و بررسی دقت و خطای روش پیشنهادی نشان می‌دهد، راه‌حل به‌دست‌آمده با استفاده از روش هندسی، حرکت نسبی ماهواره را با دقت بالایی محاسبه می‌کند؛ بنابراین راه‌حل پیشنهادی برای مأموریت‌های فضایی قابل اجرا و مؤثر خواهد بود.

## Modeling of large scale relative motion of two satellites in elliptical orbit

Mahdi Fakoor<sup>1\*</sup>, Fatemeh Amozegary<sup>1</sup>, Majid Bakhtiari<sup>3</sup>

1- Faculty of New Sciences and Technologies, University of Tehran, Tehran, Iran.

3- Department of Mechanical Engineering, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran

\* P.O.B.14395- 1561 Tehran, Iran, mfakoor@ut.ac.ir

## ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 08 November 2016  
Accepted 18 January 2017  
Available Online 07 February 2017

**Keywords:**  
Large- scale relative motion  
elliptical orbit  
 $j_2$  perturbation  
satellite constellation

## ABSTRACT

For formation flying of two satellites in a satellite constellation, the relative motion and attitude determination algorithms are the key components affecting flight quality and mission efficiency. In this paper orbital relative motion of two satellites with arbitrary Keplerian elliptic orbit and at large distance will be analyzed and, also, exact and efficient solution for relative motion of the satellite with  $j_2$  perturbation which is one of the important perturbations in Low Earth Orbit (LEO) using spherical geometry is proposed. Direct geometric method using spherical coordinates is utilized to achieve this solution. In this method relative position and relative velocity of two satellites are calculated in the satellite constellation based on orbital elements. The obtained results from simulation with STK software, comparison of results with extracted results from equations for satellite with different eccentricity and analysis of the proposed method's accuracy and fault show that the solution obtained from the geometric method presents the relative motion of the satellite with high accuracy. Thus, the proposed solution will be applicable and effective for relative motion of constellation satellites in space missions.

## 1- مقدمه

حرکت نسبی ماهواره‌ها به عنوان رد فضایی یا مسیر یک ماهواره نسبت به ماهواره دیگر در میدان گرانشی تعریف می‌شود. مسئله کنترلی و دینامیکی حرکت نسبی ماهواره در میدان گرانشی مرکزی در مقایسه با مسائل مرتبط با سیستم‌های تک ماهواره‌ای بسیار چالش‌برانگیز است. حرکت نسبی ماهواره می‌تواند به دو بخش حرکت نسبی مقیاس بزرگ و کوچک تقسیم شود. مقیاس فاصله بین ماهواره‌ها در حرکت نسبی بزرگ تقریباً زیاد است؛ بنابراین مسئله دینامیکی سیستم بسیار پیچیده‌تر می‌شود. فاصله بین ماهواره‌ها در حرکت نسبی کوچک مقیاس بسیار کوچک‌تر است، در نتیجه معادلات حرکت نسبی ساده‌تر می‌شوند. مزیت سادگی معادلات

منظومه‌های ماهواره‌ای شامل مجموعه‌ای از ماهواره‌هایی است که جهت به انجام رساندن یک مأموریت مشترک در یک الگوی مداری خاص توزیع شده‌اند. از منظومه‌های ماهواره‌ای معمولاً برای به انجام رساندن مأموریت‌هایی با الزام پوشش سراسری منطقه هدف مانند مخابرات، موقعیت‌یابی و سنش از دور استفاده می‌گردد [1].

بررسی حرکت نسبی دو ماهواره در طراحی کنترلر مناسب و همین‌طور فراهم کردن الزامات زیرسیستم مخابراتی ماهواره‌ها جهت برقراری لینک بین‌ماهواره‌ای در منظومه‌های ماهواره‌ای الزامی است.

Please cite this article using:

M. Fakoor, F. Amozegary, M. Bakhtiari, Modeling of large scale relative motion of two satellites in elliptical orbit, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 2, pp. 187-198, 2017 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

حرکت نسبی کوچک مقیاس سبب سادگی مسئله دینامیکی مرتبط می‌شود. پیچیدگی مربوط به حرکت نسبی بزرگ مقیاس بسیار زیاد است. این پیچیدگی نیز سبب می‌شود که سیستم‌های شامل حرکت نسبی بزرگ مقیاس عموماً به شبیه‌سازی رایانه‌ای و انتگرال‌گیری عددی معادلات حرکت وابسته باشد [2].

برای برنامه‌ریزی مأموریت، طراحی منظومه و همچنین فهم چگونگی طراحی جهت آنتن برای ارتباط بین ماهواره‌ای، ابزارها یا سنسورها بررسی حرکت نسبی ماهواره یا مشاهده چگونگی حرکت ماهواره از ماهواره مشاهده‌گر اهمیت دارد. در بررسی حرکت نسبی بزرگ مقیاس نمی‌توان فقط به شبیه‌سازی‌های رایانه‌ای متکی بود. همچنین برای آزمایش سیستم‌های کنترلی طراحی‌شده در منظومه ماهواره‌ای به ابزارهای تحلیلی قابل اجرا نیاز است. هدف این مقاله تلاش مطالعه ویژگی‌های هندسی و توسعه ابزارهای تحلیلی در حرکت نسبی ماهواره است.

تئوری‌های حرکت نسبی ماهواره با معادلات حرکت استنتاج‌شده برای این کاربردها توسط کلاهسی و ویلتشیر در سال 1960 ارائه شد [3]. مدار ماهواره مرجع دایروی در نظر گرفته شده است. از آن‌جا که مختصات مدار نسبی در مقایسه با شعاع مدار مرجع کوچک است معادله حاصل از حرکت خطی خواهد بود. لودن (1963) فرم بهبود یافته‌ای از حرکت نسبی شامل خروج از مرکز مدار مرجع را ارائه داد [4]. اسکانر-همپل (1965) حرکت نسبی در مدار مرجع بیضوی را در نظر گرفتند [5]. کارتر (1990) راه‌حل لودن را گسترش داد [6]. گریسون (1995) بدون در نظر گرفتن اغتشاشات، راه‌حل فرم بسته‌ای از معادلات حرکت نسبی خطی‌سازی‌شده برای مدار بیضوی را ارائه داد [7]. پس از آن کچیچاین (1997) فرمولاسیون دقیقی از مدار بیضوی کلی تجزیه و تحلیل حرکت نسبی در حضور عامل ناهمگنی و پخی زمین و درگ (کشش) اتمسفری را ارائه و توسعه داد [8]. معادلات حاصله این مطالعه به استفاده از انتگرال‌گیری عددی در هر زمان نیاز دارند. سدویک (1999) و همکارانش تابع نیروی پتانسیل اثر ناهمگنی و پخی زمین را به طرف راست معادلات هیل اعمال کردند [9]. ملتون (2000) راه‌حل تقریبی گسترش ماتریس حالت گذر در توان‌های خروج از مرکز را با نمایش صریح زمان توسعه داد [10]. شیگارت (2002) از معادلات سدویک پیروی کرد و راه‌حل‌های تحلیلی را یافت [11].

تئوری‌های متعدد دیگری از حرکت نسبی ماهواره به نوشته‌ها در دهه‌های اخیر اضافه شده است. بررسی مختصری از تئوری‌های حرکت نسبی ماهواره‌ها توسط آلفرند و یان (2005) منتشر شد [12]؛ این بررسی تئوری‌های مختلف حرکت نسبی را م ارزیابی و مقایسه کرده است. از جمله این تئوری‌ها می‌توان از معادلات هیل، ماتریس حالت گذر جیم-آلفرند، ماتریس حالت گذر با خروج از مرکز کوچک، ماتریس حالت گذر بدون اثر ناهمگنی و پخی زمین، روش کره واحد و روش غیرخطی آلفرند-یان نام برد. ارزیابی نتایج نشان داد که روش کره واحد و روش غیرخطی آلفرند-یان بالاترین دقت را برای تمام خروج از مرکزها و اندازه‌های مدار نسبی دارند. روش کره واحد توسط ویدالی (2002) ارائه شد، همچنین بیان تحلیلی دقیقی از المان‌های دیفرانسیل مداری در مسائل حرکت نسبی دست‌یافته است. [13]. آلفرند-یان (2004) روش هندسی را برای حرکت نسبی غیرخطی به کار برد، در این روش اثر پخی زمین در نظر گرفته شد [14].

مطالعات متعددی درخصوص درک هندسه مدار نسبی و پیکربندی آن می‌توان یافت. گارفیل و همکارانش (2006) مسائل حرکت نسبی متریک و

مانیفولد را مطالعه کردند. مدار نسبی در شکل پارامتری در تقریب مرتبه اول موقعیت نسبی اجزاء باقی می‌ماند [15]. جینگ و همکارانش (2008) فصل مشترک سه صفحه مختصات را برای حرکات شعاعی در مسیر متقاطع بررسی و مدار نسبی را با استفاده از اشکال ویژه در صفحه مختصات طراحی کردند. نوایی و همکارانش (2011) حرکت نسبی دو ماهواره در 4 مدل آرایش پروازی را با در نظر گرفتن تغییر پارامتر خروج از مرکز بررسی کردند [17]. زاینده و فنی (2014) مشاهده‌گر مد لغزشی و پس‌خور حالت را پیشنهاد کرده‌اند و پایداری کنترلر تحت اغتشاش ثابت شده است. این تحقیق آنالیز تئوری روش طراحی کنترلر را براساس مشاهده‌گر مد لغزشی ارائه می‌دهد [18].

دو نوع روش برای تشریح حرکت نسبی بین ماهواره‌ها ارائه شده است: نخستین روش استفاده از موقعیت و سرعت نسبی ماهواره هدف نسبت به ماهواره پایه است. کلاهسی و ویلتشیر از این روش برای استخراج معادلات خود بهره برده‌اند [3]. روش‌های بهبود یافته‌ای براساس معادلات کلاهسی-ویلتشیر توسط کارلگرا و لوتز [19]، شیگارت و سدویک [11]، وادی و همکاران [20] و سدویک و همکاران [9] ارائه شده است. راه‌حل تحلیلی با شکل ساده‌ای برای معادلات کلاهسی-ویلتشیر وجود دارد. این سادگی برای آنالیزهای کمی و کیفی و طراحی قانون کنترلی مفید است. این معادلات دارای معیابی نیز است. در نظر گرفتن زمین به عنوان کره کامل، دایروی فرض کردن مدار ماهواره هدف و همچنین محاسبه نکردن اثرات ترم‌های غیرخطی و اغتشاشات گرانشی از جمله این معایب است. تمام این عوامل کاربرد معادلات را محدود می‌کند. برای نمونه این روش به طور معمول برای مسئله ملاقات دو ماهواره با مدت زمان کوتاه مناسب است، زیرا دقت طولانی مدت در این مسئله برخلاف آرایش پروازی چندان حائز اهمیت نیست. خطای ناشی از این فرضیات در طولانی مدت برای آرایش پروازی قابل پذیرش نیست. برای نمونه اغتشاش پخی زمین<sup>1</sup> فضاپیماهای نزدیک زمین نقش بسیار مهمی در طولانی مدت ایفا می‌کند؛ بنابراین اهمیت بسیاری دارد و باید در نظر گرفته شود [15]. راه‌حل‌های تحلیلی با دقت بیشتر برای حرکت نسبی به کمینه کردن مصرف سوخت و بیشینه کردن طول عمر نیاز دارند [16].

برخی روش‌های بهبودیافته این معادلات تلاش کرده‌اند که اغتشاش پخی زمین را به معادلات حرکت نسبی اضافه کنند؛ بنابراین اثر این اغتشاش محاسبه می‌شود. یافتن راه‌حل برای معادلات به‌دست‌آمده دشوار است. در روش دوم از پارامترهای دیگری مانند المان‌های مداری ماهواره پایه و ماهواره هدف برای توضیح شکل مدار نسبی و موقعیت ماهواره‌ها نسبت به یکدیگر استفاده می‌شود. در مقایسه با روش اول، معادلات حرکت نسبی حاصل از این روش فرم جبری دارند و می‌توانند برای آنالیز مسائل اغتشاشی استفاده شوند. با این حال، هنوز هم آسان نیست که از معادلات حرکت نسبی برای آنالیز اغتشاشات استفاده شود، به این دلیل که در نظر گرفتن اغتشاشات موجب پیچیدگی معادلات نسبی خواهد شد. علاوه بر این شکل مدار نسبی و پارامترهایی که تغییرات مدار نسبی تحت اغتشاشات را شرح می‌دهند با استفاده از المان‌های مداری آنالیز می‌شوند. به طور خلاصه، روش المان‌های مداری روش ایده‌آلی برای آنالیز کنترل مدار نسبی نیست. با وجود این که این دو روش کاربرد وسیعی در حوزه حرکت نسبی دارند و توسط بسیاری از محققان استفاده شده‌اند، هنوز هم راه‌های خوبی برای آنالیز اغتشاشات در مدارات نسبی نیستند [23]. برای پرهیز از حل مستقیم این معادلات پیچیده از روش دیگری به نام روش هندسی استفاده می‌شود. در این روش موقعیت

<sup>1</sup>  $J_2$

نسبی و سرعت نسبی دو ماهواره براساس المان‌های مداری بیان می‌شوند [22].

در این مقاله حرکت نسبی ماهواره با در نظر گرفتن اغتشاش پخی زمین با استفاده از راه‌حل‌های هندسه کروی در مختصات کروی مورد مطالعه قرار می‌گیرد و مدارات به صورت بیضوی در نظر گرفته می‌شوند. نتایج یک راه‌حل تحلیلی کامل از حرکت نسبی ماهواره در طراحی آرایش پروازی و منظومه ارائه می‌دهد. روش هندسی برای استنتاج معادلات حرکت به کمک راه‌حل‌های مثلثات کروی مورد استفاده قرار گرفته است [2].

در بخش 2 معادلات حاصل به صورت زوایای سمتی و فراز بیان می‌شوند که موقعیت زوایای نسبی ماهواره هدف را نشان می‌دهند. در بخش 3 زوایای سمتی و فراز به مختصات متعامد مربوط به بردارهای موقعیت و سرعت نسبی تبدیل می‌شوند و با استفاده از آن‌ها شتاب و سرعت زوایای و شتاب زوایای نسبی به دست می‌آیند. معادلات حرکت را با استفاده از این راه‌حل استخراج کرده و در بخش 4 دقت مدل ارزیابی می‌شود. اعتبار مدل پیشنهادی از مقایسه دقت و بهره‌وری مدل‌سازی برای سه ماهواره هدف با خروج از مرکزهای متفاوت در مقایسه با شبیه‌سازی مدل با نرم‌افزار اس‌تی‌کی<sup>1</sup> نتیجه می‌شود.

## 2- مدار کپلری در سیستم مختصات کروی

هدف از این بخش توسعه معادلات حرکت نسبی ماهواره از طریق تفسیر هندسی مستقیم تصویر مدار کپلری روی کره است (کره سماوی، کره زمین، یا کره واحد)، که با استفاده از مختصات کروی مدار کپلری روی کره سماوی تصویر می‌شود.

مدار کپلری معمولاً توسط المان‌های مداری کلاسیک برای نمایش حالت در فضا مشخص می‌شود. مجموعه شش المان مداری به صورت رابطه (1) است.

$$[a, e, \Omega, i, \omega, v] \quad (1)$$

نیم محور اصلی،  $a$ ، و خروج از مرکز،  $e$ ، دو المان اول از لیست بالاست که اندازه و شکل مداری را شرح می‌دهند. عناصر بعدی،  $\Omega$ ،  $i$  و  $\omega$ ، جهت‌گیری صفحه مداری را تعیین می‌کنند. آخرین المان مداری کلاسیک آنومالی صحیح است،  $v$ ، که تعیین می‌کند که اکنون ماهواره در چه موقعیت زوایای نسبت به پریجی قرار دارد. شکل 1 نشان می‌دهد که چگونه  $\Omega$ ،  $i$ ،  $\omega$ ،  $v$ ، عناصر مداری مربوط به زاویه، مدار کپلری را از مرکز زمین شرح می‌دهند.

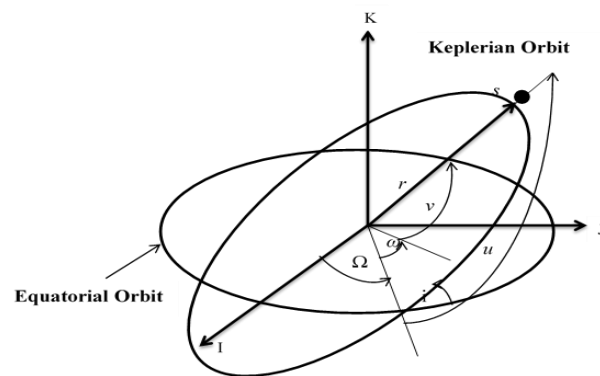


Fig. 1 Keplerian orbit elements

شکل 1 المان‌های مداری

تغییرات المان‌های مداری با در نظر گرفتن اغتشاش پخی زمین به شرح روابط (2) است [17].

$$a = a_0 \quad (2a)$$

$$e = e_0 \quad (2b)$$

$$i = i_0 \quad (2c)$$

$$\Omega = \Omega_0 - \frac{3nR_e^2 j_2 \cos i}{2p^2} t \quad (2d)$$

$$\omega = \omega_0 - \frac{3nR_e^2 j_2}{4p^2} (4 - 5 \sin^2 i) t \quad (2e)$$

$$M = M_0 + nt + \frac{3nR_e^2 j_2}{4p^2 \sqrt{1-e^2}} (2 - 3 \sin^2 i) t \quad (2f)$$

از مقادیر (3) برای ثوابت در معادلات بالا استفاده می‌شود.

$$p = a(1 - e^2), \quad j_2 = 0.00108263,$$

$$R_e = 6378, \quad n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}, \quad \mu = 398600 \quad (3)$$

سیستم مختصات کروی در فضا می‌تواند برای نمایش تصویر مدار کپلری روی کره استفاده شود. زاویه بین خط مستقیم از مرکز زمین به  $\delta$  و تصویر این خط روی صفحه  $IJ$  به‌عنوان زاویه فراز  $\delta$ ، در شکل 2، تعریف می‌شود. زاویه بین تصویر و محور  $I$  به‌عنوان زاویه سمتی  $\alpha$  تعریف می‌شود. اگر تصویر مدار کپلری را با  $\alpha$  و  $\delta$  نمایش دهیم،  $\alpha$  و  $\delta$  می‌توانند به صورت تابعی از المان‌های مداری به صورت روابط (5,4) بیان شوند.

$$\alpha = f(v; i, \Omega; \omega) \quad (4)$$

$$\delta = g(v; i, \Omega; \omega) \quad (5)$$

سیستم مختصات کروی در فضا زوایای  $\alpha$  و  $\delta$  و فاصله شعاعی  $r$  ماهواره را تعیین می‌کنند.

فاصله شعاعی  $r$  به صورت رابطه (6) نوشته می‌شود.

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos v} \quad (6)$$

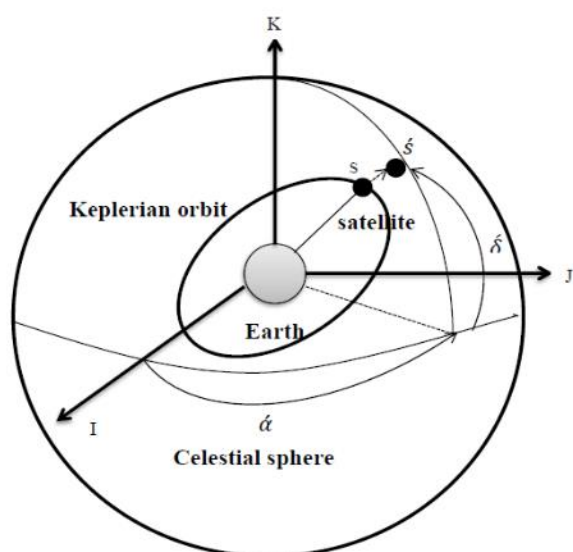


Fig. 2 projection of a Keplerian orbit on celestial sphere

شکل 2 تصویر مدار کپلری در کره سماوی

<sup>1</sup> STK

صفحه مداری در  $I_p$  است. از مثلث کروی  $\Delta\Omega_B\Omega_T I_p$  برای محاسبه  $i_R$  استفاده می‌شود.  $i_R$  با اختلاف بین زاویه میل دو مدار مساوی نیست ( $i_R \neq i_T - i_B$ )، باید قانون کسینوس‌ها برای زوایای مثلثاتی رابطه (9) استفاده شود.

$$\cos i_R = \cos i_B \cos i_T + \sin i_B \sin i_T \cos \Delta\Omega \quad (9)$$

در آن گرهِ صعودی نسبی به صورت رابطه (10) تعریف می‌شود.

$$\Delta\Omega = \Omega_T - \Omega_B \quad (10)$$

نخست زوایای ماهواره هدف نسبت به ماهواره پایه برحسب المان‌های مداری مربوط به زاویه (یعنی  $\Omega, \omega, i, v$ ) استخراج می‌شوند. از شکل 4 مثلث کروی  $\Delta\Omega_B\Omega_T I_p$  برای به‌دست آوردن  $\varphi_B$  و  $\varphi_T$  استفاده می‌شود. شکل 4 مشخصات دقیق مثلث کروی را نشان می‌دهد.

حال قانون سینوس‌ها به مثلث کروی به صورت رابطه (11) اعمال می‌شود تا  $\sin \varphi_B$  محاسبه شود.

$$\sin \varphi_B = \frac{\sin \Delta\Omega \sin i_T}{\sin i_R} \quad (11)$$

با استفاده از قانون کسینوس‌ها برای زوایا در مثلث کروی  $\Delta\Omega_B\Omega_T I_p$ ، رابطه هندسی دیگری برای محاسبه  $\cos \varphi_B$  در رابطه (12) خواهیم یافت.

$$\cos \varphi_B = \frac{\cos(180 - i_T) + \cos i_B \cos i_R}{\sin i_B \sin i_R} \quad (12)$$

با تقسیم رابطه (11) بر رابطه (12)، رابطه (13) خواهیم داشت.

$$\varphi_B = \tan^{-1} \left[ \frac{\sin \Delta\Omega \sin i_B \sin i_T}{-\cos i_T + \cos i_B \cos i_R} \right] \quad (13)$$

برای محاسبه  $\sin \varphi_T$ ، قانون سینوس‌ها نیز برای مثلث کروی شکل 4 به صورت رابطه (14) استفاده می‌شود.

$$\sin \varphi_T = \frac{\sin \Delta\Omega \sin i_B}{\sin i_R} \quad (14)$$

همچنین با استفاده از قوانین کسینوس‌ها می‌توان رابطه (15) را به‌دست آورد.

$$\cos \varphi_T = \frac{\cos i_B + \cos(180 - i_T) \cos i_R}{\sin(180 - i_T) \sin i_R} \quad (15)$$

رابطه (14) را بر (15) تقسیم کنیم حاصل به صورت رابطه (16) است.

$$\varphi_T = \tan^{-1} \left[ \frac{\sin \Delta\Omega \sin i_B \sin i_T}{\cos i_B - \cos i_T \cos i_R} \right] \quad (16)$$

در این مورد ما یک کره سماوی که قطب‌های  $P_B$  و  $P_T$  ماهواره پایه قطب‌های جغرافیایی اش است می‌سازیم، در شکل 5 نشان داده شده است. در کره سماوی دو مثلث کروی  $\Delta P_B P_T I_p$  و  $\Delta T H I_p$  را داریم. باید توجه داشت که زاویه  $P_B P_T I_p$  همیشه صرف نظر از زاویه میل هر یک از دو ماهواره 90 درجه است. زاویه  $T P_B I_p$  با استفاده از قانون سینوس‌ها معادل زاویه  $\theta_T$  است. از این‌رو، زاویه  $P_B P_T I_p$  با کم کردن  $\theta_T$  از 90 درجه به دست می‌آید. کمان‌های

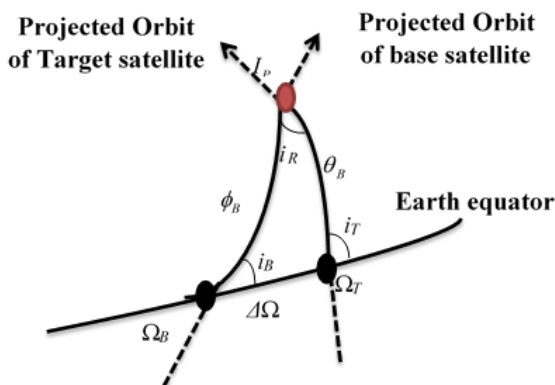


Fig. 4 spherical triangle for computing  $\varphi_B$  and  $\varphi_T$

شکل 4 مثلث کروی برای محاسبه  $\varphi_B$  و  $\varphi_T$

چنانچه مختصات ماهواره را در سیستم مختصات متعامد نشان دهیم، تبدیل از سیستم مختصات کروی به سیستم مختصات متعامد ( $IJK$ ) منجر به رابطه (7) می‌شود.

$$r_{IJK} = \begin{pmatrix} r \cos \delta \cos \alpha \\ r \cos \delta \sin \alpha \\ r \sin \delta \end{pmatrix} \quad (7)$$

در بخش پسین زوایای  $\alpha$  و  $\delta$  به صورت زوایای وابسته به المان‌های مداری با استفاده از تفسیر هندسی مستقیم بیان می‌شوند.

### 3- مدل‌سازی هندسی مدار نسبی

در این بخش بردارهای سرعت و موقعیت نسبی ماهواره هدف نسبت به ماهواره پایه به صورت هندسی به‌دست می‌آیند. زیرنویس B نشان‌دهنده ماهواره پایه و زیرنویس T نشان‌دهنده ماهواره هدف است. مدار کپلری دو ماهواره همان‌طور که در شکل 3 دیده می‌شود برای تفسیر هندسی روی کره تصویر شده است.

قطب‌های  $P_B$  و  $P_T$  قطب‌های مداری ماهواره‌ها را نشان می‌دهند. در شکل 3 خط پر نشان‌دهنده صفحه استوایی و نقطه چین روی کره نشان‌دهنده تصویر مدار کپلری دو ماهواره است. تصویر نقطه تقاطع دو صفحه مداری روی سطح کره با  $I_p$  نشان داده می‌شود و موقعیت نسبی ماهواره هدف T نسبت به ماهواره پایه B با زاویه سمتی  $\alpha$  و زاویه فراز  $\delta$  بیان می‌شود. زاویه  $\alpha$  در نقطه H بر زاویه  $\delta$  عمود است. آرگومان عرض جغرافیایی برای انتقال بین المان‌های مداری و موقعیت‌های زاویه‌ای روی کره معرفی می‌شود. آرگومان عرض جغرافیایی برابر با طول کمان از گرهِ صعودی تا موقعیت زاویه‌ای کنونی ماهواره است. آرگومان عرض جغرافیایی می‌تواند به صورت رابطه (8) بیان شود.

$$u_j = \varphi_j + \theta_j = \omega_j + v_j, j=B, T \quad (8)$$

کمان‌های  $\varphi_j$  و  $\theta_j$  به ترتیب فاصله گرهِ صعودی،  $\Omega_j$  از نقطه  $I_p$ ، و از  $I_p$  تا موقعیت زاویه‌ای کنونی ماهواره هستند. پارامتر کلیدی زاویه برای به‌دست‌آوردن حرکت نسبی ماهواره میل نسبی  $i_R$  است، که زاویه بین دو

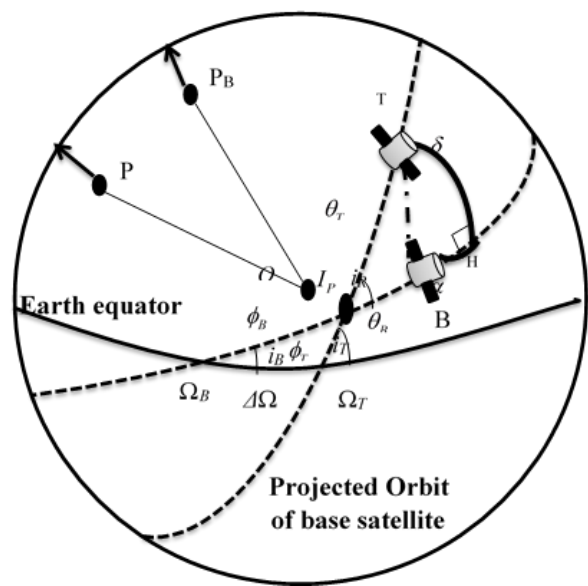


Fig. 3 geometry for modeling the relative motion on the surface of a sphere

شکل 3 هندسه برای مدل‌سازی حرکت نسبی در سطح یک کره

$$\begin{aligned}\alpha &= -\theta_B + \frac{-i_R \sin i_R \tan \theta_T + \theta_T \cos i_R (1 + \tan^2 \theta)}{1 + (\cos i_R \tan \theta_T)^2} \\ \delta &= \frac{i_R \cos i_R \sin \theta_T + \theta_T \sin i_R \cos \theta_T}{\sqrt{1 + (\sin i_R \sin \theta_T)^2}}\end{aligned}\quad (25)$$

مشتق گرفتن از  $\delta$  در رابطه (24) مستقیم نتایج تکنیکی در زوایای خاص دارد؛ بنابراین مشخصه مثلثاتی در طول مشتق‌گیری  $\delta$  در رابطه (25) برای پرهیز از تکنیکی به کار برده می‌شود.

مشتق  $i_R$  و  $\theta_j$  و  $\phi_B$  و  $\phi_T$  ماهواره‌ها به صورت (26-29) است.

$$i_R = \frac{\Delta\Omega \sin i_B \sin i_T \sin \Delta\Omega}{\sin i_R} \quad (26)$$

$$\theta_j = \omega_j + \psi_j - \phi_j, j = B, T \quad (27)$$

$$\begin{aligned}\phi_B &= \frac{(\Delta\Omega \cos \Delta\Omega \sin i_B \sin i_T)(-\cos i_T + \cos i_B \cos i_R)}{(-\cos i_T + \cos i_B \cos i_R)^2 + (\sin \Delta\Omega \sin i_B \sin i_T)^2} \\ &+ \frac{(i_R \sin i_R \cos i_B)(\sin \Delta\Omega \sin i_B \sin i_T)}{(-\cos i_T + \cos i_B \cos i_R)^2 + (\sin \Delta\Omega \sin i_B \sin i_T)^2}\end{aligned}\quad (28)$$

$$\begin{aligned}\phi_T &= \frac{(\Delta\Omega \cos \Delta\Omega \sin i_B \sin i_T)(\cos i_B - \cos i_T \cos i_R)}{(\cos i_B - \cos i_T \cos i_R)^2 + (\sin \Delta\Omega \sin i_B \sin i_T)^2} \\ &- \frac{(i_R \sin i_R \cos i_T)(\sin \Delta\Omega \sin i_B \sin i_T)}{(\cos i_B - \cos i_T \cos i_R)^2 + (\sin \Delta\Omega \sin i_B \sin i_T)^2}\end{aligned}\quad (29)$$

می‌توان حرکت نسبی ماهواره هدف را با استفاده از محاسبات پیشین  $\alpha$  و  $\delta$  در مختصات متعامد شرح داد. شعاع مداری ماهواره پایه  $r_B$  و شعاع مداری ماهواره هدف  $r_T$  است. ما فریم چرخش ماهواره پایه،  $F_R$  را برای توضیح حرکت نسبی ماهواره هدف نسبت به ماهواره پایه معرفی می‌کنیم. مرکز زمین به‌عنوان مبدأ قرار داده می‌شود و جهت‌گیری  $F_R$  با بردارهای واحد  $\{e_1, e_2, e_3\}$  نشان داده می‌شود. جهت بردار واحد  $e_1$  در جهت شعاع‌مداری بردار پایه و بردار  $e_3$  در جهت عمود بر صفحه مداری بردار پایه قرار داده می‌شود، همچنین بردار واحد  $e_2$  براساس قانون دست راست به‌دست می‌آید، بنابراین فریم چرخش ماهواره پایه با بردارهای واحد رابطه (30) نشان داده می‌شود.

$$\hat{e}_1 = \frac{r_B}{|r_B|}, \quad \hat{e}_3 = \frac{r_B \times r_B}{|r_B \times r_B|}, \quad \hat{e}_2 = \hat{e}_3 \times \hat{e}_1 \quad (30)$$

بردارهای موقعیت ماهواره‌های پایه و هدف در دستگاه  $F_R$  به صورت بردارهای (31) نوشته شوند.

$$\begin{aligned}\hat{r}_B &= (r_B \ 0 \ 0)^T \\ \hat{r}_T &= (r_T \cos \delta \cos \alpha \quad r_T \cos \delta \sin \alpha \quad r_T \sin \delta)^T\end{aligned}\quad (31)$$

بردار موقعیت نسبی  $\hat{r}$  (32) از تفاضل دو بردار بالا به دست می‌آید.

$$\hat{r} = \begin{pmatrix} r_T \cos \delta \cos \alpha - r_B \\ r_T \cos \delta \sin \alpha \\ r_T \sin \delta \end{pmatrix} \quad (32)$$

بردار (33) سرعت نسبی  $\hat{v}$  با مشتق‌گیری زمانی از رابطه (30) به‌دست می‌آید.

$$\hat{v} = \begin{pmatrix} \dot{r}_T \cos \delta \cos \alpha - r_T \dot{\delta} \sin \delta \cos \alpha - r_T \dot{\alpha} \cos \delta \sin \alpha - \dot{r}_B \\ \dot{r}_T \cos \delta \sin \alpha - r_T \dot{\delta} \sin \delta \sin \alpha + r_T \dot{\alpha} \cos \delta \cos \alpha \\ \dot{r}_T \sin \delta + r_T \dot{\delta} \cos \delta \end{pmatrix} \quad (33)$$

مشتق  $r_j$  به صورت رابطه (34) است.

$$\dot{r}_j = \frac{\dot{v}_j p_j e_j \sin v_j}{(1 + e_j \cos v_j)^2}, j = B, T \quad (34)$$

معادلات نسبی حرکت در روابط (32) و (33) راه‌حل دقیقی برای حرکات نسبی ماهواره هستند.

محاسبه  $\hat{a}$  با مشتق گرفتن از بردار  $\hat{v}$  بسیار آسان است. بردار شتاب  $\hat{a}$  به صورت رابطه (35) به‌دست می‌آید.

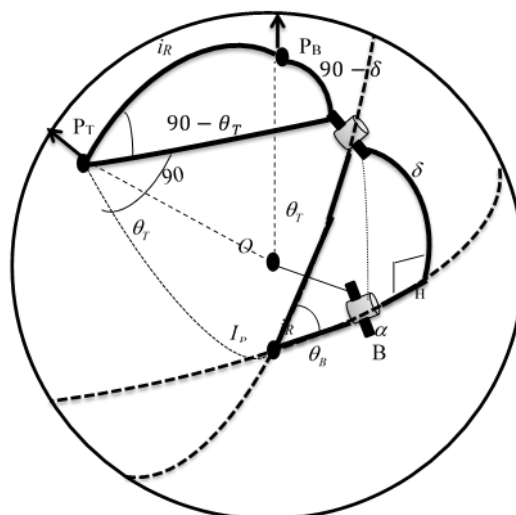


Fig. 5 geometry for computing  $\alpha$  and  $\delta$  [2]

شکل 5 هندسه محاسبه  $\alpha$  و  $\delta$  [2]

$P_B H$  و  $P_T T$  همواره 90 درجه است؛ بنابراین کمان  $P_B T$  را می‌توان با کم کردن  $\delta$  از 90 درجه یافت.

زاویه  $\delta$  از مثلث کروی  $\Delta P_B P_T I_P$  به‌دست می‌آید. با به‌کار بردن قانون کسینوس‌ها برای ضلع‌های مثلث کروی به رابطه (17) می‌رسیم.

$$\begin{aligned}\cos(90 - \delta) &= \sin i_R \cos(90 - \theta_T) \\ \sin \delta &= \sin i_R \sin \theta_T\end{aligned}\quad (17)$$

زاویه  $\delta$  از رابطه (18) به‌دست می‌آید.

$$\delta = \sin^{-1}[\sin i_R \sin \theta_T] \quad (18)$$

زاویه  $\alpha$  با به‌کاربردن قانون کسینوس‌ها برای اضلاع دو طرف مثلث کروی  $\Delta T H I_P$  روابط (19,20) را نتیجه می‌دهد.

$$\cos \theta_T = \cos \delta \cos(\theta_B + \alpha) \quad (19)$$

$$\cos \delta = \cos \theta_T \cos(\theta_B + \alpha) + \sin \theta_T \sin(\theta_B + \alpha) \cos i_R \quad (20)$$

رابطه (21) را با جای‌گزینی  $\cos \delta$  از رابطه (20) در (19) خواهیم داشت.

$$\tan(\theta_B + \alpha) = \frac{\sin \theta_T \cos i_R}{\cos \theta_T} \quad (21)$$

زاویه  $\alpha$  از رابطه (22) به‌دست می‌آید.

$$\alpha = -\theta_B + \tan^{-1} \left[ \frac{\sin \theta_T \cos i_R}{\cos \theta_T} \right] \quad (22)$$

با استفاده از تعریف آرگومان عرض جغرافیایی در رابطه (8)، زوایای  $\alpha$  و  $\delta$  به صورت روابط (23,24) به دست می‌آیند.

$$\begin{aligned}\alpha &= (\phi_B - \omega_B - v_B) + \tan^{-1}[\cos i_R \tan(\omega_T + v_T - \phi_T)] \\ 0 &\leq \alpha \leq 360\end{aligned}\quad (23)$$

$$\begin{aligned}\delta &= \sin^{-1}[\sin i_R \sin(\omega_T + v_T - \phi_T)] \\ -90 &\leq \delta \leq 90\end{aligned}\quad (24)$$

برای تجزیه و تحلیل ساده حرکت نسبی ماهواره می‌توان مستقیم از زوایای  $\alpha$  و  $\delta$  برای تعیین موقعیت زوایای ماهواره هدف نسبت به ماهواره پایه استفاده کرد [2].

تا رابطه (24) در نظر گرفتن اغتشاش  $J_2$  تأثیری در معادلات ندارند و معادلات مشابه معادلات مرجع [2] است، ولی در ادامه متغیربودن با زمان  $\Omega, \omega, v$  سبب تغییر در معادلات و واقعی‌تر شدن نتایج می‌شود.

مشتق  $\alpha$  و  $\delta$  با توجه به در نظر گرفتن اغتشاش  $J_2$  و در نتیجه متغیر با زمان بودن  $\Omega, \omega, v$  به صورت رابطه (25) به‌دست می‌آید.

بردارهای جهتی واحد به صورت رابطه (46) به دست می‌آید.

$$\omega_r = \dot{p} \times \hat{p} \quad (46)$$

بردار شتاب زاویه‌ای نسبی  $\dot{\omega}_r$  با مشتق از رابطه (46) به صورت رابطه (47) بیان می‌شود.

$$\dot{\omega}_r = -\frac{1}{|r|}(2(\hat{p}^T v)\omega_r - \hat{p} \times \hat{a}) \quad (47)$$

از راه‌حل‌های حرکت نسبی ماهواره در حضور اغتشاش  $J_2$  استفاده می‌شود، روابط (47,46) مسیر مرجع دقیقی از بردارهای سرعت و شتاب زاویه‌ای نسبی برای مسئله ردیابی بین ماهواره‌ها فراهم می‌کنند.

#### 4- دقت مدل هندسی مدار نسبی ارائه شده

یک ماهواره پایه و سه ماهواره هدف نمونه با المان‌های مداری مشخص را برای ارزیابی دقت مدل هندسی پیشنهادی در نظر گرفته و نتایج حاصل از شبیه‌سازی و محاسبات عددی را مقایسه خواهیم کرد، مقادیر خطا را به دست می‌آوریم.

پارامترهای مداری یک ماهواره پایه و سه ماهواره هدف نمونه در جدول 1 نشان داده شده است. زوایا برحسب درجه بیان شده و مقیاس نیم‌محور اصلی براساس کیلومتر است.

المان‌های مداری یک ماهواره پایه و سه ماهواره هدف نمونه براساس حرکت نسبی بزرگ مقیاس انتخاب شده است.

شبیه‌سازی ماهواره پایه و هدف 1 با نرم‌افزار اس.تی.کی در شکل 6 نشان داده شده است.

نتایج موقعیت، سرعت، شتاب، سرعت زاویه‌ای و شتاب زاویه‌ای نسبی حاصل از شبیه‌سازی با استفاده از نرم‌افزار اس.تی.کی ماهواره پایه و هدف 1 و نتایج حاصل از معادلات با استفاده از نرم‌افزار متلب به ترتیب در شکل‌های 7-11 مقایسه شده است.

جدول 1 پارامترهای مداری

Table 1 parameters of the orbit elements

| ماهواره | a    | e     | i  | $\Omega$ | $\omega$ | M0 | روز |
|---------|------|-------|----|----------|----------|----|-----|
| پایه    | 7000 | 0.01  | 30 | 50       | 45       | 10 | 5   |
| هدف 1   | 8000 | 0.001 | 70 | 120      | 20       | 60 | 5   |
| هدف 2   | 8000 | 0.15  | 70 | 120      | 20       | 60 | 5   |
| هدف 3   | 8000 | 0.1   | 70 | 120      | 20       | 60 | 5   |

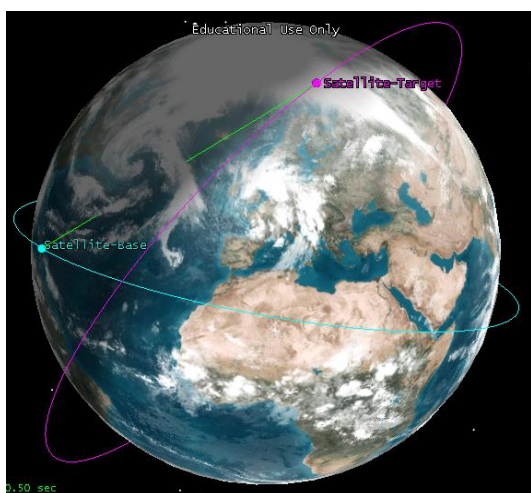


Fig. 6 simulation of base and target satellite 1 in STK

شکل 6 شبیه‌سازی ماهواره پایه و هدف 1 در STK

$$\hat{a} = \begin{bmatrix} \cos \delta \cos \alpha (\ddot{r}_r - r_r(\delta^2 + \alpha^2)) - \sin \delta \cos \alpha (r_r \ddot{\delta} + 2\dot{r}_r \dot{\delta}) - \\ \cos \delta \sin \alpha (r_r \ddot{\alpha} + 2\dot{r}_r \dot{\alpha}) + \sin \delta \sin \alpha (2r_r \dot{\alpha} \dot{\delta}) - \ddot{r}_B \\ \cos \delta \sin \alpha (\ddot{r}_r - r_r(\delta^2 + \alpha^2)) - \sin \delta \sin \alpha (r_r \ddot{\delta} + 2\dot{r}_r \dot{\delta}) + \\ \cos \delta \cos \alpha (r_r \ddot{\alpha} + 2\dot{r}_r \dot{\alpha}) - \sin \delta \cos \alpha (2r_r \dot{\alpha} \dot{\delta}) \\ \ddot{r}_T \sin \delta + 2\dot{r}_T \dot{\delta} \cos \delta + r_r(\ddot{\delta} \cos \delta - \delta^2 \sin \delta) \end{bmatrix} \quad (35)$$

با استفاده از  $\hat{a}$  پیشنهادی و  $\hat{r}$  و  $\hat{v}$ ،  $\omega_r$  و  $\dot{\omega}_r$  مطلوب به دست می‌آید. بردار جهتی واحد  $\hat{p}$  ماهواره هدف نسبت به ماهواره پایه برای محاسبه  $\omega_r$  و  $\dot{\omega}_r$  مورد نیاز است. بردار واحد  $\hat{p}$  برحسب بردار  $\hat{r}$  به صورت رابطه (36) تعریف می‌شود.

$$\hat{p} = \frac{r}{|r|} \quad (36)$$

و مشتق  $\dot{\hat{p}}$  به صورت رابطه (37) به دست می‌آید.

$$\dot{\hat{p}} = \frac{1}{|r|}(v - (\hat{p}^T v)\hat{p}) \quad (37)$$

اکنون  $\dot{\hat{p}}$  و  $\hat{p}$  را برحسب  $\hat{r}$  و  $\hat{v}$  داریم، و رابطه دیفرانسیل سینماتیک  $\dot{\hat{p}}$  به صورت رابطه (38) نوشته می‌شود.

$$\dot{\hat{p}} = \omega_r \times \hat{p} \quad (38)$$

اصل همیلتونین را در رابطه (38) به کار برده و می‌تواند به صورت رابطه (39) گسترش یابد.

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= -\omega_{r3}p_2 + \omega_{r2}p_3 \\ \dot{p}_2 &= +\omega_{r3}p_1 - \omega_{r1}p_3 \\ \dot{p}_3 &= -\omega_{r2}p_1 + \omega_{r1}p_2 \end{aligned} \quad (39)$$

هر جزء از  $\omega_r$  در رابطه (39) به صورت منحصر به فرد مشخص نشده است؛ بنابراین از محدودیتی استفاده خواهد کرد که دامنه  $\omega_r$  را حداقل کند، و تابع هزینه  $J$  می‌تواند به صورت رابطه (40) انتخاب شود.

$$J = \frac{1}{2} m \omega_r^T \omega_r \quad (40)$$

در این رابطه یک ثابت مثبت است. با جای‌گذاری روابط (40,39) در رابطه همیلتون-ژاکوبی-بلمن [25]، همیلتونین  $H$  به صورت رابطه (41) به دست می‌آید.

$$H = \frac{1}{2} m \omega_r^T \omega_r + \lambda_1 (\dot{p}_1 + \omega_{r3}p_2 - \omega_{r2}p_3) + \lambda_2 (\dot{p}_2 - \omega_{r3}p_1 + \omega_{r1}p_3) + \lambda_3 (\dot{p}_3 + \omega_{r2}p_1 - \omega_{r1}p_2) \quad (41)$$

شرط لازم با  $\frac{\partial H}{\partial \omega_r} = 0$  به صورت رابطه (42) ارضا می‌شود.

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \omega_{r1}} &= m\omega_{r1} + \lambda_2 p_3 - \lambda_3 p_2 = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial \omega_{r2}} &= m\omega_{r2} - \lambda_1 p_3 + \lambda_3 p_1 = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial \omega_{r3}} &= m\omega_{r3} + \lambda_1 p_2 - \lambda_2 p_1 = 0 \end{aligned} \quad (42)$$

$\lambda_1$  و  $\lambda_2$  را می‌توان به صورت رابطه (43) با استفاده از دو رابطه اول (42) به دست آورد.

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{m\omega_{r2} + \lambda_3 p_1}{p_3} \\ \lambda_2 &= \frac{-m\omega_{r1} + \lambda_3 p_2}{p_3} \end{aligned} \quad (43)$$

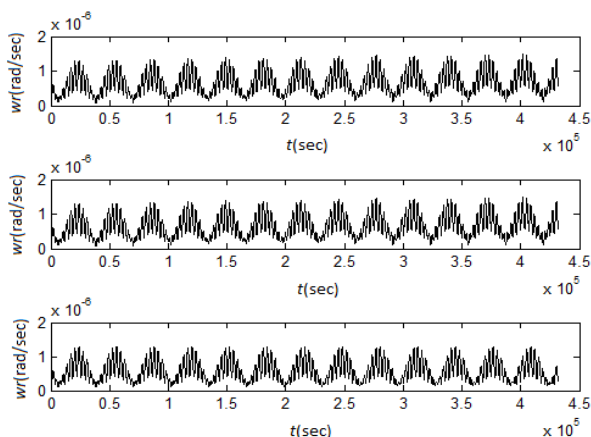
با جای‌گزینی  $\lambda_1$  و  $\lambda_2$  در رابطه سوم (42) به رابطه (44) می‌رسیم.

$$\omega_{r1}p_1 + \omega_{r2}p_2 + \omega_{r3}p_3 = 0 \quad (44)$$

از رابطه (44) به رابطه (45) می‌رسیم.

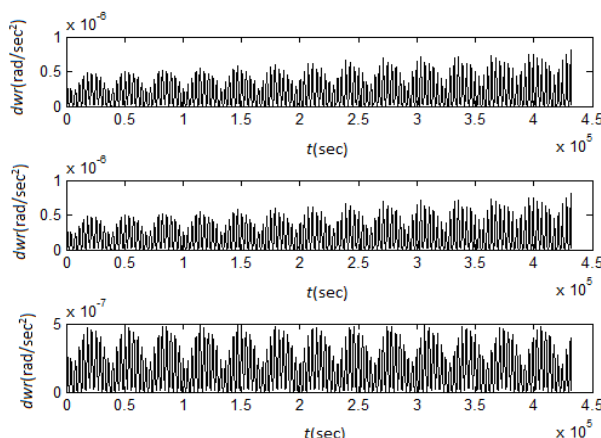
$$P \cdot \omega_r = 0 \quad (45)$$

سرعت زاویه‌ای نسبی  $\omega_r$  با ترکیب روابط (45,38) به صورت تابعی از



**Fig. 10** diagram of relative angular velocity of base and target satellite 1 in real state (Top), GROM with  $J_2$  Perturbation (Middle) and GROM without Perturbation (Bottom)

شکل 10 نمودار سرعت زاویه‌ای نسبی ماهواره پایه و هدف 1 در حالت واقعی (بالا)، مدل هندسی با در نظر گرفتن اغتشاش  $J_2$  (وسط) و مدل هندسی بدون اغتشاش (پایین)



**Fig. 11** diagram of relative angular acceleration of base and target satellite 1 in real state (Top), GROM with  $J_2$  Perturbation (Middle) and GROM without Perturbation (Bottom)

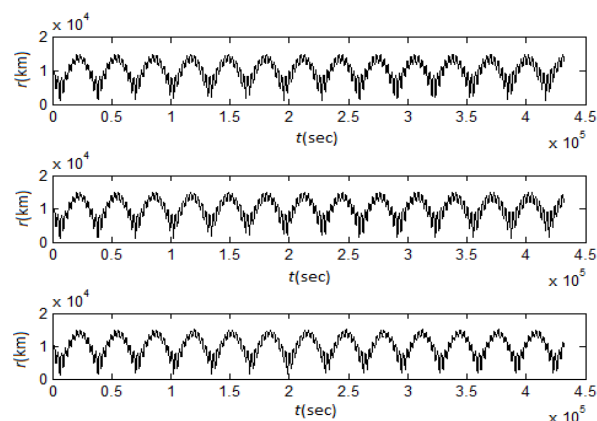
شکل 11 نمودار شتاب زاویه‌ای نسبی ماهواره پایه و هدف 1 در حالت واقعی (بالا)، مدل هندسی با در نظر گرفتن اغتشاش  $J_2$  (وسط) و مدل هندسی بدون اغتشاش (پایین)

میزان خطای موقعیت نسبی و سرعت نسبی ماهواره پایه و هدف 1 حاصل از معادلات (با در نظر گرفتن اغتشاش  $J_2$  و بدون اغتشاش) نسبت به شبیه‌سازی یا نرم‌افزار اس.تی.کی (با در نظر گرفتن همه اغتشاشات) به ترتیب در شکل های 12 و 13 نشان داده شده است.

شبیه‌سازی ماهواره پایه و هدف 2 با نرم‌افزار اس.تی.کی در شکل 14 نشان داده شده است.

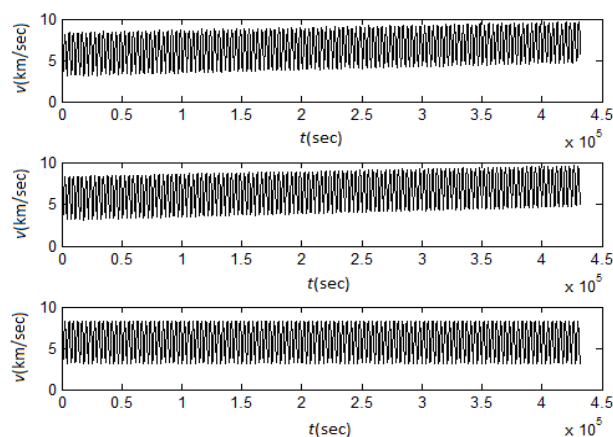
نتایج موقعیت، سرعت، شتاب، سرعت زاویه‌ای و شتاب زاویه‌ای نسبی حاصل از شبیه‌سازی با استفاده از نرم‌افزار اس.تی.کی ماهواره پایه و هدف 2 و نتایج حاصل از معادلات با استفاده از نرم‌افزار متلب به ترتیب در شکل‌های (15-19) مقایسه شده است.

میزان خطای موقعیت نسبی و سرعت نسبی ماهواره پایه و هدف 2 حاصل از روابط (با در نظر گرفتن اغتشاش  $J_2$  و بدون اغتشاش) نسبت به شبیه‌سازی یا نرم‌افزار اس.تی.کی (با در نظر گرفتن همه اغتشاشات) به ترتیب در شکل های 20 و 21 نشان داده شده است.



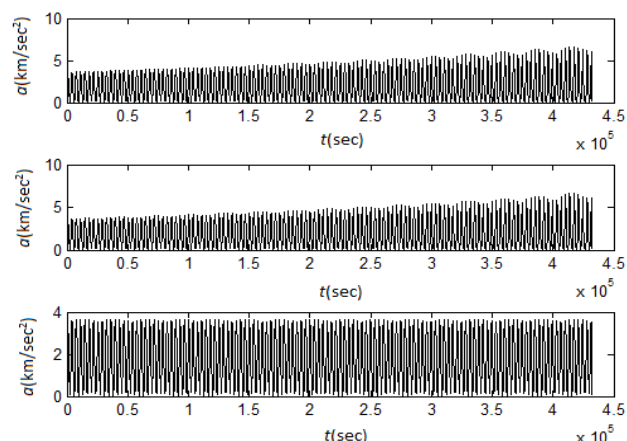
**Fig. 7** diagram of relative position of base and target satellite 1 in real state (Top), GROM with  $J_2$  Perturbation (Middle) and GROM without Perturbation (Bottom)

شکل 7 نمودار موقعیت نسبی ماهواره پایه و هدف 1 در حالت واقعی (بالا)، مدل هندسی با در نظر گرفتن اغتشاش  $J_2$  (وسط) و مدل هندسی بدون اغتشاش (پایین)



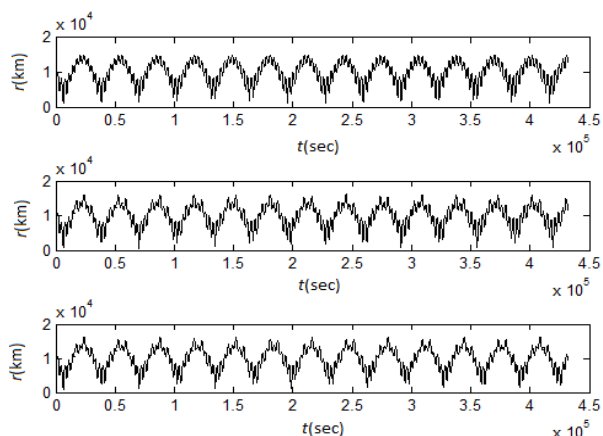
**Fig. 8** diagram of relative velocity of base and target satellite 1 in real state (Top), GROM with  $J_2$  Perturbation (Middle) and GROM without Perturbation (Bottom)

شکل 8 نمودار سرعت نسبی ماهواره پایه و هدف 1 در حالت واقعی (بالا)، مدل هندسی با در نظر گرفتن اغتشاش  $J_2$  (وسط) و مدل هندسی بدون اغتشاش (پایین)



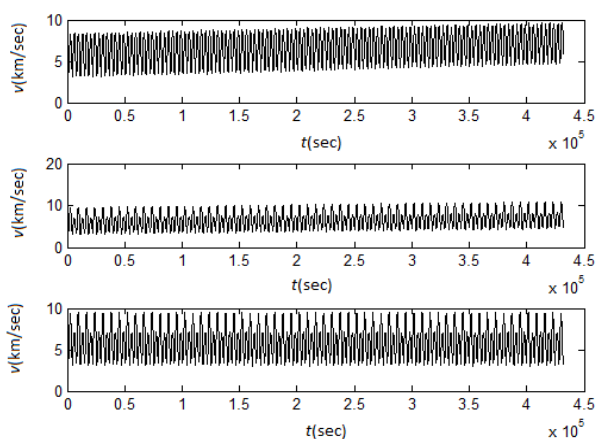
**Fig. 9** diagram of relative acceleration of base and target satellite 1 in real state (Top), GROM with  $J_2$  Perturbation (Middle) and GROM without Perturbation (Bottom)

شکل 9 نمودار شتاب نسبی ماهواره پایه و هدف 1 در حالت واقعی (بالا)، مدل هندسی با در نظر گرفتن اغتشاش  $J_2$  (وسط) و مدل هندسی بدون اغتشاش (پایین)



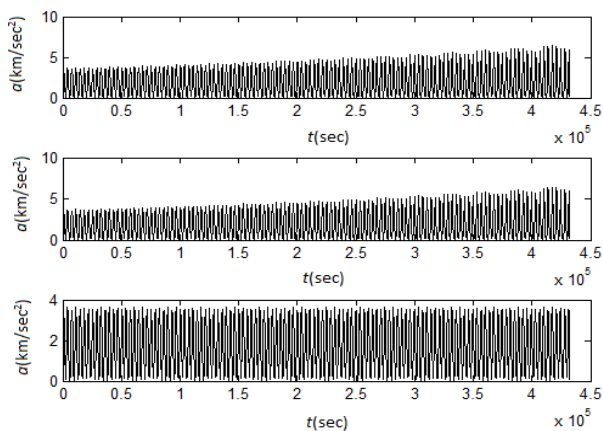
**Fig. 15** diagram of relative position of base and target satellite 2 in real state (Top), GROM with  $J_2$  Perturbation (Middle) and GROM without Perturbation (Bottom)

شکل 15 نمودار موقعیت نسبی ماهواره پایه و هدف 2 در حالت واقعی (بالا)، مدل هندسی با در نظر گرفتن اغتشاش  $J_2$  (وسط) و مدل هندسی بدون اغتشاش (پایین)



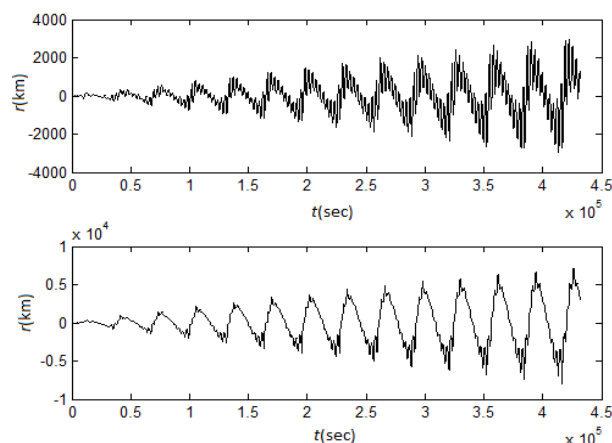
**Fig. 16** diagram of relative velocity of base and target satellite 2 in real state (Top), GROM with  $J_2$  Perturbation (Middle) and GROM without Perturbation (Bottom)

شکل 16 نمودار سرعت نسبی ماهواره پایه و هدف 2 در حالت واقعی (بالا)، مدل هندسی با در نظر گرفتن اغتشاش  $J_2$  (وسط) و مدل هندسی بدون اغتشاش (پایین)



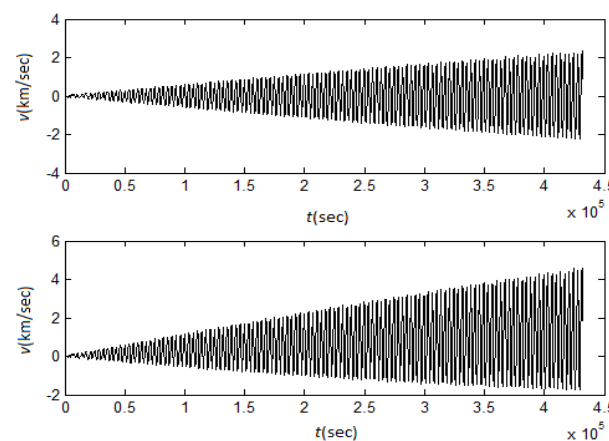
**Fig. 17** diagram of relative acceleration of base and target satellite 2 in real state (Top), GROM with  $J_2$  Perturbation (Middle) and GROM without Perturbation (Bottom)

شکل 17 نمودار شتاب نسبی ماهواره پایه و هدف 2 در حالت واقعی (بالا)، مدل هندسی با در نظر گرفتن اغتشاش  $J_2$  (وسط) و مدل هندسی بدون اغتشاش (پایین)



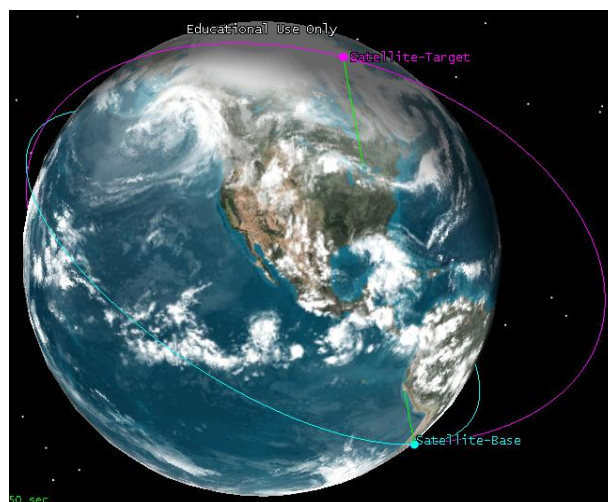
**Fig. 12** diagram of relative position's error of base and target satellite 1, Error with Perturbation (Top) and Error without Perturbation (Bottom)

شکل 12 نمودار خطای موقعیت نسبی ماهواره پایه و هدف 1، خطا با اغتشاش (بالا) و خطا بدون اغتشاش (پایین)



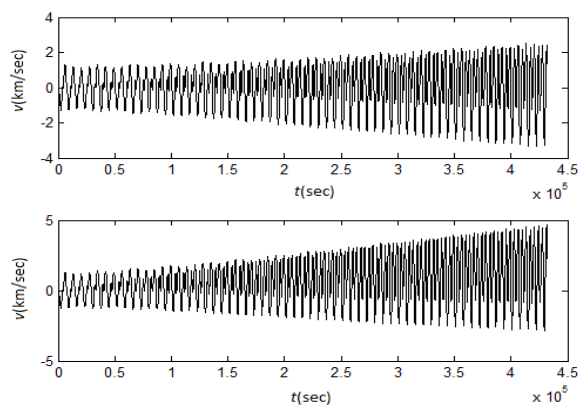
**Fig. 13** diagram of relative velocity's error of base and target satellite 1, Error with Perturbation (Top) and Error without Perturbation (Bottom)

شکل 13 نمودار خطای سرعت نسبی ماهواره پایه و هدف 1، خطا با اغتشاش (بالا) و خطا بدون اغتشاش (پایین)



**Fig. 14** simulation of base and target satellite 2 in STK

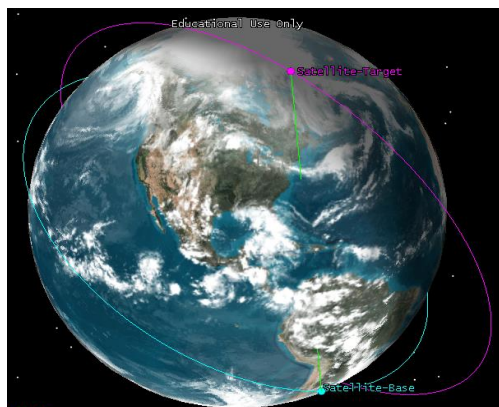
شکل 14 شبیه‌سازی ماهواره پایه و هدف 2 در STK



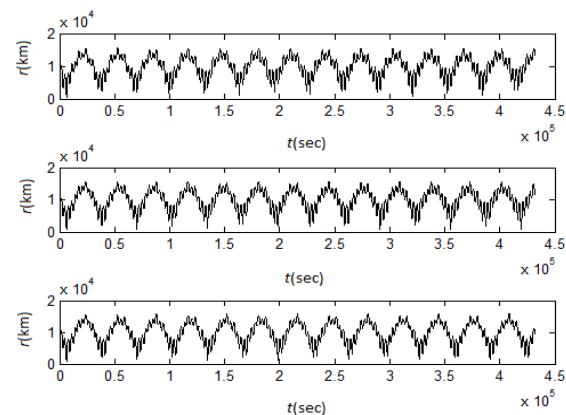
**Fig. 21** diagram of relative velocity's error of base and target satellite 2, Error with Perturbation (Top) and Error without Perturbation (Bottom)  
 شکل 21 نمودار خطای سرعت نسبی ماهواره پایه و هدف 2، خطا با اغتشاش (بالا) و خطا بدون اغتشاش (پایین)

شبیه سازی ماهواره پایه و هدف 3 با نرم افزار اس.تی.کی در شکل 22 نشان داده شده است.

نتایج موقعیت، سرعت، شتاب، سرعت زاویه ای و شتاب زاویه ای نسبی حاصل از شبیه سازی با استفاده از نرم افزار اس.تی.کی ماهواره پایه و هدف 3 و نتایج حاصل از معادلات با استفاده از نرم افزار متلب به ترتیب در شکل های 23-27 مقایسه شده است.

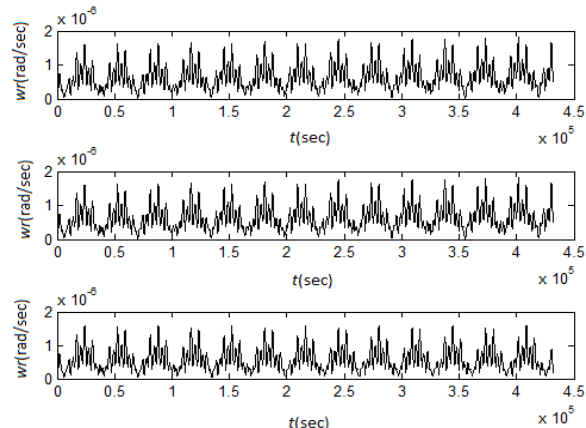


**Fig. 22** simulation of base and target satellite 3 in STK  
 شکل 22 شبیه سازی ماهواره پایه و هدف 3 در STK



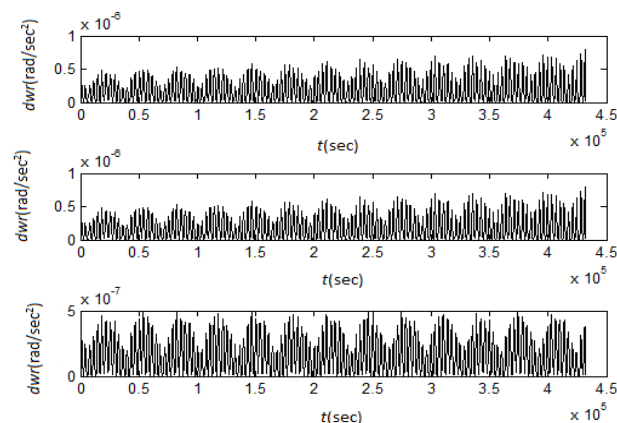
**Fig. 23** diagram of relative position of base and target satellite 3 in real state (Top), GROM with  $J_2$  Perturbation (Middle) and GROM without Perturbation (Bottom)

شکل 23 نمودار موقعیت نسبی ماهواره پایه و هدف 3 در حالت واقعی (بالا)، مدل هندسی با در نظر گرفتن اغتشاش  $J_2$  (وسط) و مدل هندسی بدون اغتشاش (پایین)



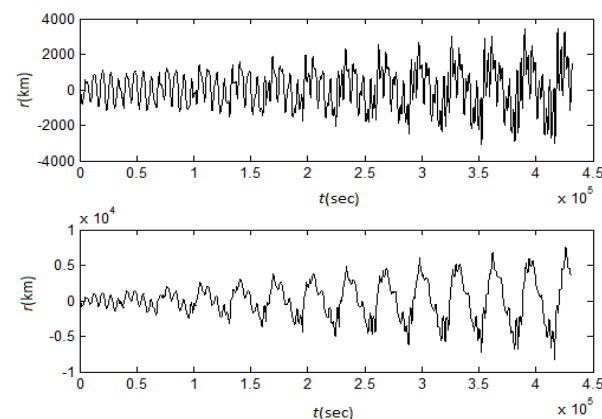
**Fig. 18** diagram of relative angular velocity of base and target satellite 2 in real state (Top), GROM with  $J_2$  Perturbation (Middle) and GROM without Perturbation (Bottom)

شکل 18 نمودار سرعت زاویه ای نسبی ماهواره پایه و هدف 2 در حالت واقعی (بالا)، مدل هندسی با در نظر گرفتن اغتشاش  $J_2$  (وسط) و مدل هندسی بدون اغتشاش (پایین)



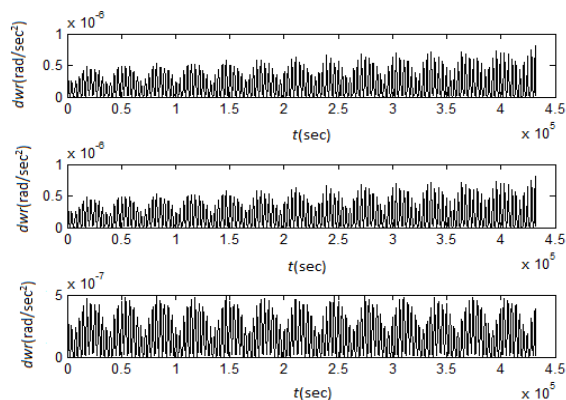
**Fig. 19** diagram of relative angular acceleration of base and target satellite 2 in real state (Top), GROM with  $J_2$  Perturbation (Middle) and GROM without Perturbation (Bottom)

شکل 19 نمودار شتاب زاویه ای نسبی ماهواره پایه و هدف 2 در حالت واقعی (بالا)، مدل هندسی با در نظر گرفتن اغتشاش  $J_2$  (وسط) و مدل هندسی بدون اغتشاش (پایین)



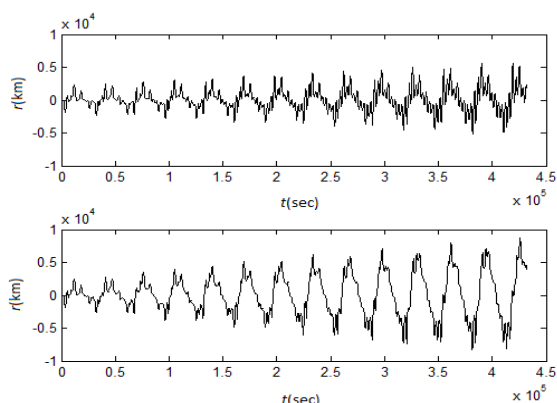
**Fig. 20** diagram of relative position's error of base and target satellite 2, Error with Perturbation (Top) and Error without Perturbation (Bottom)

شکل 20 نمودار خطای موقعیت نسبی ماهواره پایه و هدف 2، خطا با اغتشاش (بالا) و خطا بدون اغتشاش (پایین)

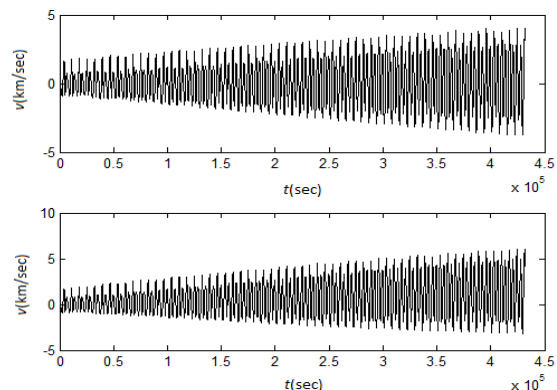


**Fig. 27** diagram of relative angular acceleration of base and target satellite 3 in real state (Top), GROM with  $J_2$  Perturbation (Middle) and GROM without Perturbation (Bottom)  
 شکل 27 نمودار شتاب زاویه‌ای نسبی ماهواره پایه و هدف 3 در حالت واقعی (بالا)، مدل هندسی با در نظر گرفتن اغتشاش  $J_2$  (وسط) و مدل هندسی بدون اغتشاش (پایین)

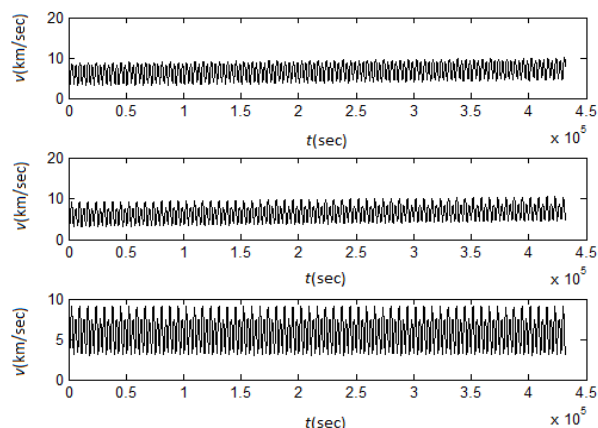
میزان خطای موقعیت نسبی و سرعت نسبی ماهواره پایه و هدف 3 حاصل از روابط (با در نظر گرفتن اغتشاش  $J_2$  و بدون اغتشاش) نسبت به شبیه سازی یا نرم افزار اس.تی.کی (با در نظر گرفتن همه اغتشاشات) به ترتیب در شکل های 28 و 29 نشان داده شده است.



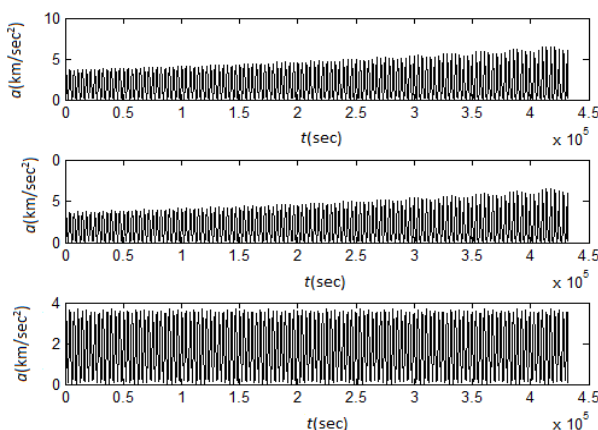
**Fig. 28** diagram of relative position's error of base and target satellite 3, Error with Perturbation (Top) and Error without Perturbation (Bottom)  
 شکل 28 نمودار خطای موقعیت نسبی ماهواره پایه و هدف 3، خطا با اغتشاش (بالا) و خطا بدون اغتشاش (پایین)



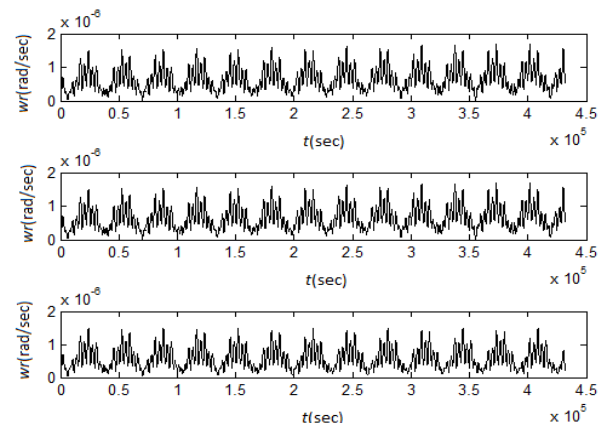
**Fig. 29** diagram of relative velocity's error of base and target satellite 3, Error with Perturbation (Top) and Error without Perturbation (Bottom)  
 شکل 29 نمودار خطای سرعت نسبی ماهواره پایه و هدف 3، خطا با اغتشاش (بالا) و خطا بدون اغتشاش (پایین)



**Fig. 24** diagram of relative velocity of base and target satellite 3 in real state (Top), GROM with  $J_2$  Perturbation (Middle) and GROM without Perturbation (Bottom)  
 شکل 24 نمودار سرعت نسبی ماهواره پایه و هدف 3 در حالت واقعی (بالا)، مدل هندسی با در نظر گرفتن اغتشاش  $J_2$  (وسط) و مدل هندسی بدون اغتشاش (پایین)



**Fig. 25** diagram of relative acceleration of base and target satellite 3 in real state (Top), GROM with  $J_2$  Perturbation (Middle) and GROM without Perturbation (Bottom)  
 شکل 25 نمودار شتاب نسبی ماهواره پایه و هدف 3 در حالت واقعی (بالا)، مدل هندسی با در نظر گرفتن اغتشاش  $J_2$  (وسط) و مدل هندسی بدون اغتشاش (پایین)



**Fig. 26** diagram of relative angular velocity of base and target satellite 3 in real state (Top), GROM with  $J_2$  Perturbation (Middle) and GROM without Perturbation (Bottom)  
 شکل 26 نمودار سرعت زاویه‌ای نسبی ماهواره پایه و هدف 3 در حالت واقعی (بالا)، مدل هندسی با در نظر گرفتن اغتشاش  $J_2$  (وسط) و مدل هندسی بدون اغتشاش (پایین)

همان طور که مشاهده می شود تطابق بسیاری میان شبیه سازی های صورت پذیرفته در نرم افزار اس.تی.کی وجود دارد. با در نظر گرفتن همه اغتشاشات (HPOP) نشان داده شده با برچسب واقعی<sup>1</sup> و مدل ارائه شده با اغتشاش $J_2$  و اختلاف فاز بسیار اندک مشاهده می شود، به دلیل در نظر گرفته نشدن سایر اغتشاشات در مدل ارائه شده است. از هندسه کروی بدون در نظر گرفتن اغتشاش در مرجع [2] استفاده شده است. همان طور که در شکل های 7، 11، 15، 19، 23، 27 دیده می شود تفاوت فاحشی با مدل واقعی دارد که نشان دهنده عدم دقت مدل ارائه شده در مرجع [2] است. میزان این تفاوت در شکل های 12، 13، 20، 21، 28، 29 دیده می شود. همان طور که مشاهده می شود میزان این تفاوت برای مدل ارائه شده در مرجع [2] حدود 2 برابر مقدار تفاوت مدل ارائه شده با در نظر گرفتن اغتشاش $J_2$  است، و میزان تفاوت موجود با افزایش خروج از مرکز رابطه مستقیم دارد، زیرا با افزایش خروج از مرکز فاصله و زاویه بین ماهواره ها افزایش می یابد.

### 5- نتیجه گیری

در این مطالعه یک راه حل برای حرکت نسبی ماهواره به وسیله روش هندسی مستقیم با استفاده از مختصات کروی در حضور اغتشاش $J_2$  ارائه شد. از این روش برای اندازه گیری فاصله بین هر دو ماهواره در منظومه ماهواره ای استفاده می شود. در مطالعات پیشین زمین را برای استخراج روابط حرکت نسبی کره کامل و مدار ماهواره هدف را دایروی در نظر می گرفتند، همچنین اثرات ترم های غیر خطی و اغتشاشات گرانشی را محاسبه نمی کردند و اگر اثرات ترم های غیر خطی و اغتشاشات گرانشی را محاسبه می کردند حل معادلات بسیار پیچیده می شد. استخراج این روش هندسی برخلاف سایر مدل های ارائه شده در مراجع دارای پیچیدگی کمتری بوده و روابط حاصله یک شکل کامل از حرکت نسبی ارائه می دهند، همین طور دارای دقت بیشتری نسبت به سایر روش های به کار رفته برای حرکت نسبی ماهواره است. دقت مدل پیشنهادی برای اثبات صحت راه حل هندسی پیشنهادی با نتایج حاصل از شبیه سازی با نرم افزار اس.تی.کی برای سه ماهواره هدف با خروج از مرکزهای متفاوت مقایسه شد. این ارزیابی نشان می دهد که راه حل پیشنهادی یک راه حل دقیق و مؤثر برای بررسی حرکت نسبی ماهواره است.

### 6- فهرست علائم

|                     |                                            |
|---------------------|--------------------------------------------|
| $a$                 | نیم محور اصلی                              |
| $\hat{a}$           | بردار شتاب نسبی                            |
| $e$                 | خروج از مرکز                               |
| $\{e_1, e_2, e_3\}$ | بردارهای واحد فریم چرخش ماهواره پایه       |
| $F_R$               | فریم چرخش ماهواره پایه                     |
| $i$                 | زاویه میل                                  |
| $i_R$               | زاویه میل نسبی                             |
| $i_R'$              | مشتق زاویه میل نسبی                        |
| $I_p$               | تصویر نقطه تقاطع دو صفحه مداری روی سطح کره |
| $J$                 | تابع هزینه                                 |
| $P$                 | قطب های مداری ماهواره                      |
| $\hat{p}$           | بردار جهتی واحد نسبی                       |
| $\dot{\hat{p}}$     | مشتق بردار جهتی واحد نسبی                  |
| $r$                 | فاصله شعاعی ماهواره                        |

<sup>1</sup> real

|                 |                         |
|-----------------|-------------------------|
| $r_B$           | شعاع مداری ماهواره پایه |
| $r_T$           | شعاع مداری ماهواره هدف  |
| $\hat{r}$       | بردار موقعیت نسبی       |
| $\dot{\hat{r}}$ | مشتق بردار موقعیت نسبی  |
| $u$             | آرگومان عرض جغرافیایی   |
| $\hat{v}$       | بردار سرعت نسبی         |

### علائم یونانی

|                  |                                             |
|------------------|---------------------------------------------|
| $\alpha$         | زاویه سمتی نسبی                             |
| $\dot{\alpha}$   | مشتق زاویه سمتی نسبی                        |
| $\alpha'$        | زاویه سمتی تصویر مدار کپلری                 |
| $\delta$         | زاویه فراز نسبی                             |
| $\dot{\delta}$   | مشتق زاویه فراز نسبی                        |
| $\delta'$        | زاویه فراز تصویر مدار کپلری                 |
| $\Delta\Omega$   | گره صعودی نسبی                              |
| $\nu$            | آنومالی                                     |
| $\theta$         | فاصله $I_p$ از موقعیت زاویه ای ماهواره      |
| $\dot{\theta}$   | مشتق فاصله $I_p$ از موقعیت زاویه ای ماهواره |
| $\varphi$        | فاصله گره صعودی از $I_p$                    |
| $\dot{\varphi}$  | مشتق فاصله گره صعودی از $I_p$               |
| $\Omega$         | گره صعودی                                   |
| $\omega$         | زاویه پریجی                                 |
| $\omega_r$       | سرعت زاویه ای نسبی                          |
| $\dot{\omega}_r$ | مشتق سرعت زاویه ای نسبی                     |
| $\dot{\varphi}$  | مشتق فاصله گره صعودی از $I_p$               |

### 7- مراجع

- [1] M. Fakoor, M. Bakhtiari, M. Soleymani, Optimal design of guidance algorithm for the reconfiguration phase of the satellite constellation, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 2, pp. 30-40, 2015. (in Persian)
- [2] S. S. Lee, *Dynamics and control of satellite relative motion: designs and applications*, PhD Thesis, Department of Aerospace Engineering, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginia, 20 March 2009.
- [3] W. H. Clohessy, R. S. Wiltshire, Terminal guidance system for satellite rendezvous, *the Astronautical Sciences*, Vol. 27, No. 9, pp. 653-678, 1960.
- [4] D. F. Lawden, *Optimal trajectories for space navigation*, pp. 20-24, London, Butterworths, 1963.
- [5] P. Hempel, J. Tschauner, Rendezvous zu einemin elliptischer bahn umlaufenden Ziel, *Acta Astronautica*, Vol. 11, No. 2, pp. 104-109, 1965. (In german)
- [6] T. E. Carter, New form for the optimal rendezvous equations near a Keplerian orbit, *Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 13, No. 1, pp. 183-186, 1990.
- [7] J. L. Garrison, T. G. Gardner, P. Axelrad, Relative motion in highly elliptical orbits, *Spaceflight Mechanics*, Vol. 89, No. 1359-1376, pp. 95-194, 1995.
- [8] J. Kechichian, The analysis of the relative motion in general elliptic orbit with respect to a dragging and precessing coordinate frame, *Proceedings of the 1997 Astrodynamics Specialist Conference*, Sun Valley, Idaho, pp. 97-773, 1997.
- [9] R. J. Sedwick, D. W. Miller, E. M. Kong, Mitigation of differential perturbations in clusters of formation flying satellites, *Space Flight Mechanics Meeting, American Astronautical Society*, pp. 99-124, 1999.
- [10] R. G. Melton, Time-Explicit representation of relative motion between elliptical orbits, *Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 23, No. 4, pp. 604-610, 2000.

- [18]X. Wu, F. Guo, W. Yang, J. Xu, T. Song, Relative orbit stabilization control for the agile satellite under stochastic disturbance, *Hindawi Publishing Corporation Abstract and Applied Analysis*, Vol. Article ID 789583, 23 March 2014.
- [19]H. Lutze, C. D. Karlgaard, Second-Order relative motion equations, *Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 26, No. 1, pp. 41-49, 2003.
- [20]S. S. Vaddi, S. R. Vadali, K. T. Alfriend, Formation flying: accommodating nonlinearity and eccentricity perturbations, *Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 26, No. 2, pp. 214-223, 2003.
- [21]R. P. Russell, G. Lantoine, Optimal control of relative motion in arbitrary fields: application at deimos, *the Astronautical Sciences*, Vol. 59, No. 1 & 2, pp. 197-219, 2012.
- [22]D. W. Gim, K. T. Alfriend, satellite relative motion using differential equinoctial elements, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, Vol. 92, No. 4, pp. 295-336, 2005.
- [23]M. Xin, L. Jun-feng, G. Yun-feng, Useful relative motion description method for perturbations analysis in satellite formation flying, *Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 26, No. 11, p. 11, 2005.
- [24]J. M. Sidi, *Spacecraft dynamics and control*, pp. 8-24, Newyork: Cambridge University Press, 1997.
- [25]D. E. Kirk, *Optimal control theory: an introduction*, pp. 184-200, Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1970.
- [11]R. J. Sedwick, S. A. Schweighart, High-fidelity linearized J2 model for satellite formation flight, *Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 25, No. 6, pp. 1073-1080, 2002.
- [12]K. T. Alfriend, H. Yan, Evaluation and comparison of relative motion theories, *Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 28, No. 2, pp. 254-261, 2005.
- [13]S. R. Vadali, An analytical solution for relative motion of satellites, *Proceedings of the Fifth International Conference on Dynamics and Control of Structures and Systems in Space*, Cranfield, U. K, pp. 1-8, 2002.
- [14]K. T. Alfriend, H. Yan, S. R. Vadali, Nonlinear considerations in satellite formation flying, *Proceedings of the 2002 Astrodynamics Specialist Conference*, Monterey, California, pp. 02-4741, 2002.
- [15]P. Gurfil, K. V. Kholshchevnikov, Manifolds and metrics in the relative spacecraft motion problem, *Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 29, No. 4, pp. 1004-1010, 2006.
- [16]F. Jiang, J. Li, H. Baoyin, Y. Gao, Study on relative orbit geometry of spacecraft formations in elliptical reference orbits, *Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 31, No. 1, pp. 123-134, 2008.
- [17]M. Navabi, M. Barati, H. B. Khamseh, A comparative study of dynamics models for satellite formation flying—cartesian ordinary differential equations description, *Recent Advances in Space Technologies, 2011 5th International Conference on IEEE*, pp. 829-833, 2011.