



استفاده از تئوری تنش-کوپل جدید در حل دقیق جریان محوری میان دو لوله و جریان بر دیواره متخلخل

فاطمه کریمی¹، افشین احمدی ندوشن^{2*}، علی رضا شاطری³

1- دانشجوی دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد

2- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد

3- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد

* شهرکرد، صندوق پستی 115، ahmadi@eng.ska.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 02 آذر 1395

پذیرش: 28 دی 1395

ارائه در سایت: 04 اسفند 1395

کلید واژگان:

تئوری تنش-کوپل

مقیاس طول

تانسور تنش نیرویی

سرعت

نرخ جریان

چکیده

تاکنون مطالعات فراوانی جهت بررسی نیروها و کوپل‌های وارد بر سطح المان‌های جامد و سیال انجام گرفته است که در حیطه مکانیک سیالات منجر به شکل‌گیری معادلات نویراستوکس شده است. با این حال بیشتر محققان به این نتیجه رسیده‌اند که این معادلات به دلیل در نظر نگرفتن تأثیرات تنش‌های کوپلی کامل نبوده و نیاز به اصلاح دارد. در این مقاله با استفاده از تئوری تنش-کوپل جدید معرفی شده، به حل تحلیلی معادلات میدان جریان میان دو لوله هم‌محور و جریان بر دیواره متخلخل پرداخته می‌شود. با محاسبه دو مؤلفه تانسور تنش نیرویی برای جریان میان دو لوله هم‌محور نشان داده شده است که این تانسور بر خلاف تئوری کلاسیک متقارن نیست، همچنین با بیان دو رابطه دقیق برای محاسبه پروفیل سرعت جریان در این دو هندسه و مقایسه آن با حل کلاسیک (با فرض نبود تأثیرات تنش کوپلی) ملاحظه می‌شود که مقیاس طول یک پارامتر تأثیرگذار بر جریان‌های مقیاس کوچک است و با افزایش مقیاس طول مسأله، پروفیل سرعت سیال و نرخ جریان از حل کلاسیک فاصله می‌گیرند. به عبارت دیگر با کاهش ابعاد هندسی مسأله وابستگی جریان سیال به طول به‌عنوان یک پارامتر اساسی (که پیشتر در روابط مشاهده نمی‌شد) افزایش می‌یابد. این نتایج برای بررسی جریان سیال در مقیاس‌های کوچک مانند بایوسیالات، سیستم‌های روغن‌کاری و میکروالکترومکانیکی کاربرد دارد.

Exact solutions of flow between two concentric pipes and flow over porous wall by a new couple-stress theory

Fatemeh Karami¹, Afshin Ahmadi Nadooshan^{1*}, Alireza Shateri¹

1- Department of Mechanical Engineering, Shahrood University, Shahrood, Iran.

* P.O.B 115. Shahrood, Iran, ahmadi@eng.ska.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 22 November 2016
Accepted 17 January 2017
Available Online 22 February 2017

Keywords:
Couple-stress theory
Length scale
Velocity
Flow rate

ABSTRACT

Considerable research has been done to study force-tractions and couple-tractions acting on the surface of solid and fluid elements. Navier-Stokes equations have been developed based on these researches in the domain of fluid mechanics. However, a number of researchers have emphasized that the Navier-Stokes equations are not sufficient and they should be modified because of couple-stress effects. In this paper, after presenting couple-stress theory, two flow geometry between two concentric pipes and flow over porous wall is considered and their behavior is compared with classical case. It has been shown that the force-stress tensor is not symmetric by calculating two components of the force-stress tensor for flow between two concentric pipes. In addition, it can be considered that length scale is an effective parameter on small scale flow by calculating flow velocity profile for these two geometries and by comparing them with classical solution. However, the effects of length scale on the velocity profile and the flow rate decrease with increasing geometrical scales of the problem. These results can be used to study fluid flows with small-scale characteristics such as bio fluids, lubrication and micro electromechanical systems.

1- مقدمه

نوزدهم آغاز شد. کوشی در مطالعاتش تنها از نیروهای مرکزگرا استفاده و در نتیجه از تنش‌های کوپلی و کوپل‌های حجمی در مدل خود صرف نظر کرد. پس از او ویگوت [2] در مطالعاتش نشان داد که در یک مدل اتمی کامل نیروهای غیرمرکزگرا علاوه بر نیروهای مرکزگرا ضروری است. برای نخستین بار مفاهیم تنش‌های کوپلی در تئوری‌های مکانیک پیوسته بیان شد. گرچه

تاکنون تلاش‌های فراوانی برای بررسی نیروها و کوپل‌های وارد بر سطح المان‌های جامد و سیال انجام گرفته است که در ابتدا منجر به معرفی ضریب الاستیسیته به‌عنوان یک پارامتر اساسی در مدل‌های الاستیک مواد همگن شد. این تلاش‌ها با تحقیقات کوشی [1] بر مدل‌های اتمی در اواسط قرن

Please cite this article using:

F. Karami, A. Ahmadi Nadooshan, A. Shateri, Exact solutions of flow between two concentric pipes and flow over porous wall by a new couple-stress theory, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 2, pp. 369-376, 2017 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

کوپلی به تمامی مسائل نامعین تئوری تنش-کوپل مکانیک سیالات استوکس پاسخ دادند. در تئوری آن‌ها از بردار سرعت و بردار چرخش به‌عنوان متغیرهای اصلی مسائل استفاده شده است. این تئوری نیازمند پارامتری اضافی به‌عنوان ویسکوزیته دوم است که به صورت مقیاسی از طول در معادلات ظاهر می‌شود. اگرچه در برخی مسائل مانند آنالیز جریان آرام سیالات ویسکوز در مقیاس‌های بزرگ، نرخ انحنای تغییر شکل نسبت به نرخ کرنش تغییر شکل قابل صرف نظر کردن بوده و اغلب مسائل نیازمند مقیاس طول مادی نیستند. با این تفاسیر در شرایطی که بعد هندسی مشخصه مسئله به مقیاس‌های میکرو و نانو کاهش می‌یابد لازم است بررسی میدان جریان با استفاده از تئوری وابسته به مقیاس طول و شامل تنش‌های کوپلی و نیرویی نامتقارن صورت گیرد.

تئوری حاج‌اسفندیاری و همکاران [14] ساده‌تر از تئوری‌های تنش-کوپل و تئوری‌های میکروقطبی ارائه شده است؛ بنابراین بسیاری از کاربردهای مهم مانند بررسی سیالات بیولوژیکی و روغن‌کاری که توسط تئوری تنش کوپل استوکس بیان شده‌اند دوباره قابل بررسی و نیازمند تعریف یک پارامتر مادی تازه است. حاج‌اسفندیاری و همکارانش با استفاده از تئوری خود به بررسی چندین مدل جریان سیال با شرایط مرزی متفاوت از جمله جریان پواری درون لوله‌ها پرداختند. آن‌ها در مطالعه‌ای که به تازگی انجام داده‌اند رفتار جریان را به‌عنوان تابعی از مقیاس طول درون یک حفره درب محور بررسی کردند [15].

در این مقاله ابتدا به بیان خلاصه‌ای از تئوری حاج‌اسفندیاری و همکارانش و در ادامه به حل جریان میان دو لوله هم‌محور و جریان بر دیواره متخلخل پرداخته می‌شود و تنش برشی و دبی حجمی سیال در این شرایط و تأثیرات مقیاس طول با محاسبه پروفیل سرعت مورد بحث قرار می‌گیرد.

2- معرفی تئوری تنش-کوپل سازگار جدید [14]

در این بخش کلیاتی از تئوری حاج‌اسفندیاری و همکاران بیان می‌شود. برای مطالعه جزئیات بیشتر می‌توان به مقاله ایشان مراجعه کرد.

معادلات اساسی مکانیک سیالات شامل معادلات پیوستگی، تعادل ممنتوم خطی و زاویه ای، به فرم دیفرانسیلی به صورت رابطه (1-3) است.

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho V_{i,i} = 0 \quad (1)$$

$$T_{ji,j} + \rho b_i = \rho \frac{DV_i}{Dt} \quad (2)$$

$$M_{ji,j} + \varepsilon_{ijk} T_{jk} + \rho c_i = 0 \quad (3)$$

در روابط بالا ρ چگالی سیال، $V_{i,i}$ دیورژانس بردار سرعت، D/Dt مشتق مادی، b_i و c_i به ترتیب نیروها و کوپل‌های حجمی، T_{ij} و M_{ij} تانسورهای تنش نیرویی و کوپلی وارد بر المان سیال است. براساس شکل 1 تانسورهای تنش‌های کوپلی و نیرویی به‌طور کلی دارای هجده جزء است که حاج‌اسفندیاری و همکاران با معرفی تانسورهای جدید و روابط آن تعداد را به دوازده جزء کاهش دادند.

حاج‌اسفندیاری و همکاران در مقاله بیان داشتند که کوپل‌های حجمی وارد بر یک المان سیال در یک تئوری تنش-کوپل مکانیکی پیوسته مستقل از نیروهای حجمی وارد بر آن المان نیست، وجود یکی از این دو عبارت در معادلات کافی است و می‌توان یکی از این دو عبارت را از معادلات حذف کرد. بنابراین رابطه (4) را با حذف کوپل حجمی از رابطه (3) به صورت زیر خواهیم داشت.

در آن زمان روابط ریاضی کاملی برای آن ارائه نشد. گسترش یک مدل ریاضی برای آنالیز مواد براساس مفاهیم تنش-کوپل در دهه اول قرن بیستم توسط برادران کاسرات [3] آغاز شد. برادران کاسرات چندین تئوری برای المان‌های جامد مانند تیرها و پوسته‌های یک و دو بعدی ارائه و سپس این تئوری‌ها را برای یک جسم کاملاً سه بعدی گسترش دادند. براساس تئوری آن‌ها تانسورهای تنش کوپلی و نیرویی در مجموع هجده جزء داشته و این در حالی است که تنها شش معادله تعادلی وجود دارد، و در واقع مشکل اساسی در گسترش تئوری تنش-کوپل مناسب، تعداد زیاد اجزای تنش‌های کوپلی و نیرویی است.

البته مطالعاتی بر ممنتوم زاویه‌ای و تنش‌های کوپلی در نیمه قرن بیستم در زمینه مکانیک سیالات در راستای بررسی پدیده آشفته‌گی انجام گرفت و در نهایت تعداد بسیاری از محققان دریافتند که معادلات نویراستوکس معادلات بهینه‌ای از زمینه بررسی مدل‌های آشفته‌گی نیست و به نظر می‌رسد یکی از دلایل آن نبود حضور پارامتری به‌عنوان مقیاس طول در این معادلات است [4-7]. نیکلاوسکی [9,8] در مطالعاتش نشان داد که تانسور تنش رینولدز متقارن نیست و روش‌های میانگین‌گیری از معادلات نویراستوکس که برای یافتن تنش‌های رینولدز در مدل‌های آشفته‌گی استفاده می‌شود با هم برابر نیستند. از این‌رو معادلات نویراستوکس نیازمند اصلاح بوده و لازم است تأثیر تنش‌های کوپلی در معادلات سیال وارد شود. بیشتر آزمایش‌های اخیر بیانگر تفاوت رفتار مکانیکی مواد در مقیاس‌های کوچک با مقیاس‌های بزرگ است؛ بنابراین پیشرفت بیشتر در میکرومکانیک، نانومکانیک و نانو تکنولوژی نیازمند معرفی تئوری‌های جدید در مکانیک پیوسته است که در آن‌ها تأثیرات مقیاس طول برای مواد مختلف اعم از سیال و جامد در نظر گرفته شده است [10].

مطالعات دیگری بر تئوری تنش-کوپل پیوسته در مکانیک جامدات انجام گرفته است که استوکس [11] از آن در زمینه مکانیک سیالات استفاده کرد. براساس تئوری استوکس ساده‌ترین ساختار تئوری کلاسیک با در نظر گرفتن تأثیرات تنش‌های کوپلی بیان شد و مدت‌ها از این تئوری در جهت مطالعه جریان خون، روغن‌کاری، کریستال‌های مایع، میکروسیالات و کوپلینگ‌های چندفازی استفاده شده است. این تئوری چند مشکل اساسی در فرمول‌بندی دارد که از آن جمله می‌توان به عدم تعیین بخش کروی تانسور تنش کوپلی و ظهور کوپل حجمی در روابط تشکیل دهنده تانسور تنش نیرویی اشاره کرد. علاوه بر این تعداد زیاد اجزای تانسورهای تنش کوپلی و نیرویی نسبت به معادلات تعادل از دیگر مشکلات معادلات بیان شده است. به تازگی حاج‌اسفندیاری و دارگوش [10] تعداد اجزای تانسور تنش کوپلی را با در نظر گرفتن تانسور تنش کوپلی پادمتقارن و وابستگی کوپل‌های حجمی با نیروهای حجمی در جامدات از دو به سه عدد رساندند و در نهایت یک تئوری تنش-کوپل کاملاً سازگار را معرفی کردند، سپس آن‌ها در مقاله‌ای دیگر [12] به بررسی و اعتبارسنجی تئوری تنش کوپل و ارتباط آن با مکانیک کلاسیک پرداختند. نف و همکارانش [13] پادمتقارن بودن تانسور تنش کوپل را در مطالعه‌ای بر تئوری جدید حاج‌اسفندیاری مورد بحث و بررسی قرار دادند و پارامترهای مطرح شده در این تئوری را تصدیق کردند. حاج‌اسفندیاری و همکارانش [14] این تئوری را در حوزه مکانیک سیالات گسترش دادند و با معرفی تانسورهای انحنای میانگین و نرخ انحنای میانگین به‌عنوان تانسورهای جدید تغییرشکل، مشکلات موجود در تئوری‌های مطرح شده در زمینه تنش-کوپل سیالات را برطرف کردند. آن‌ها با اثبات پادمتقارن بودن تانسور تنش

این رابطه تنها در شرایطی برقرار خواهد بود که M_{ji} یک تانسور پادمتقارن به شکل رابطه (16) باشد.

$$[M_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & M_{12} & M_{13} \\ -M_{12} & 0 & M_{23} \\ -M_{13} & -M_{23} & 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

و مطابق آن بردار تنش کوپلی M_i به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$M_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} M_{kj}, \quad M_{ij} = \varepsilon_{ijk} M_k \quad (17)$$

در شکل 2 جزء نرمال بردار کوپل وارد بر سطح صفر و این بردار تنها دارای مؤلفه مماس بر سطح است. رابطه (18) را با جای‌گذاری این بردار در رابطه (4) به صورت زیر خواهیم داشت.

$$\varepsilon_{ijk} (M_{k,j} + T_{jk}) = 0 \quad (18)$$

در نتیجه $M_{k,j} + T_{jk}$ متقارن است و رابطه (19) به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$T_{[ji]} = -M_{[i,j]} = -\frac{1}{2} (M_{ij} - M_{ji}) \quad (19)$$

در رابطه (19)، $T_{[ji]}$ بخش پادمتقارن تانسور تنش نیرویی است و براساس این رابطه بخش پادمتقارن تانسور تنش نیرویی غیرصفر، و در نتیجه تانسور تنش نیرویی در تئوری جدید تنش کوپل متقارن نیست. و مطابق آن بردار محوری S_i به صورت روابط (21,20) تعریف می‌شود.

$$S_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} T_{[kj]} = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} M_{[j,k]} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} M_{k,j} \quad (20)$$

$$S = \frac{1}{2} \nabla \times M \quad (21)$$

با توجه به تمامی مفاهیم و روابطی که بیان شد معادلات اساسی مکانیک سیالات به صورت ذئابط (22-24) قابل بیان است.

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho v_{i,i} = 0 \quad (22)$$

$$T_{ji,j} + \rho b_i = \rho \frac{Dv_i}{Dt} \quad (23)$$

$$T_{[ji]} = -M_{[i,j]} \quad (24)$$

برای سیال ویسکوز خطی تانسور تنش نیروویی و بردار تنش کوپلی به شکل روابط (25,26) بیان می‌شوند.

$$T_{ji} = -P(\rho, T) \delta_{ij} + \tau_{ji}(D_{mn}, K_m, \rho, T) \quad (25)$$

$$M_i = M_i(D_{mn}, K_m, \rho, T) \quad (26)$$

$P(\rho, T)$ فشار ترمودینامیکی تابعی از دما و چگالی و τ_{ji} تانسور تنش نیروویی وابسته به D_{mn}, K_m و ویسکوزیته سیال است و برای سیال ویسکوز نیوتنی رابطه (27) را داریم.

$$T_{(ji)} = -P(\rho, T) \delta_{ji} + \lambda(\rho, T) D_{kk} \delta_{ji} + 2\mu(\rho, T) D_{ji} \quad (27)$$

$$M_i = -8\eta(\rho, T) K_i \quad (28)$$

در صورتی که در روابط بالا ضرایب μ و λ ثابت باشد، روابط (29-36) را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$T_{(ji)} = -P \delta_{ji} + \lambda D_{kk} \delta_{ji} + 2\mu D_{ji} \quad (29)$$

$$M_i = -8\eta K_i \quad (30)$$

$$M_{i,j} = 2\mu (\nabla^2 V_{i,j} - V_{k,ki,j}) \quad (31)$$

$$M_{[i,j]} = \eta \nabla^2 (V_{i,j} - V_{j,i}) \quad (32)$$

$$T_{[ij]} = -M_{[i,j]} = 2\eta \nabla^2 \Omega_{ij} \quad (33)$$

$$S = -4\eta \nabla \times K \quad (34)$$

$$T_{ij} = T_{(ji)} + T_{[ji]} \quad (35)$$

$$M_{ji} = 4\eta (\omega_{i,j} - \omega_{j,i}) = -8\eta K_{ji} \quad (36)$$

در معادلات بالا، $\eta = \mu l^2$ ضریب ویسکوزیته دوم و l طول مشخصه

$$M_{ji,j} + \varepsilon_{ijk} T_{jk} = 0 \quad (4)$$

تانسور گرادیان سرعت به صورت مجموع دو تانسور متقارن نرخ کرنش D_{ij} و تانسور پادمتقارن سرعت زاویه‌ای Ω_{ij} به صورت روابط (5-7) معرفی می‌شود.

$$V_{i,j} = D_{ij} + \Omega_{ij} \quad (5)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{2} (V_{i,j} + V_{j,i}) \quad (6)$$

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} (V_{i,j} - V_{j,i}) \quad (7)$$

تانسور گرادیان سرعت زاویه‌ای به صورت مجموع دو تانسور متقارن X_{ij} و تانسور پادمتقارن K_{ij} به صورت روابط (8-10) بیان می‌شود.

$$\omega_{ij} = X_{ij} + K_{ij} \quad (8)$$

$$X_{ij} = \frac{1}{2} (\omega_{i,j} + \omega_{j,i}) \quad (9)$$

$$K_{ij} = \frac{1}{2} (\omega_{i,j} - \omega_{j,i}) \quad (10)$$

تانسور پادمتقارن K_{ij} تانسور نرخ انحنای نامیده می‌شود و به صورت رابطه (11) است.

$$[K_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & K_{12} & K_{13} \\ -K_{12} & 0 & K_{23} \\ -K_{13} & -K_{23} & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

با توجه به روابط (10-5)، بردار سرعت زاویه‌ای ω_i و بردار نرخ انحنای K_i به صورت روابط (12-14) تعریف می‌شود.

$$\omega_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} v_{k,j} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \Omega_{kj} \quad (12)$$

$$K_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \omega_{k,j} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} K_{kj} \quad (13)$$

$$K = \frac{1}{2} \nabla \times \omega = \frac{1}{4} \nabla \times (\nabla \times V) = \frac{1}{4} \nabla (\nabla \cdot V) - \frac{1}{4} \nabla^2 V \quad (14)$$

در این تئوری جزء نرمال بردار سرعت زاویه‌ای وابسته به تعریف شرایط مرزی مسئله بوده و در نتیجه یک مختصات تعمیم یافته نیست؛ بنابراین نیروی تعمیم یافته متناظر با آن یا همان جزء نرمال بردار کوپل وارد بر سطح نیز صفر و به صورت رابطه (15) خواهد بود.

$$m^{(nn)} = m_k^{(n)} n_k = M_{ji} n_j n_j = 0 \quad (15)$$

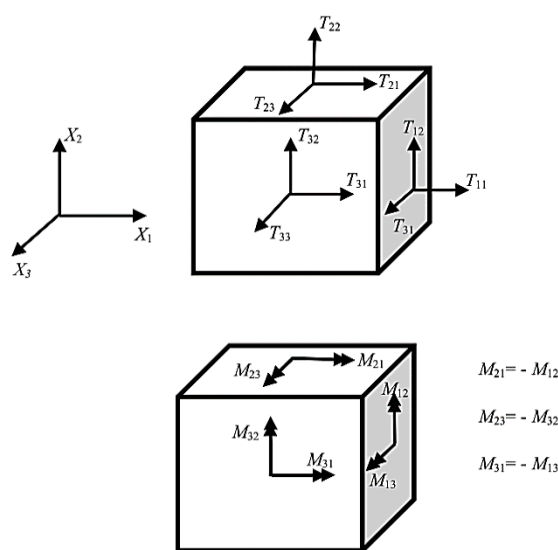


Fig 1. Components of force- and couple-stress tensors in the present consistent theory

شکل 1 اجزای تانسورهای تنش کوپلی و نیرویی در تئوری جدید مطرح شده

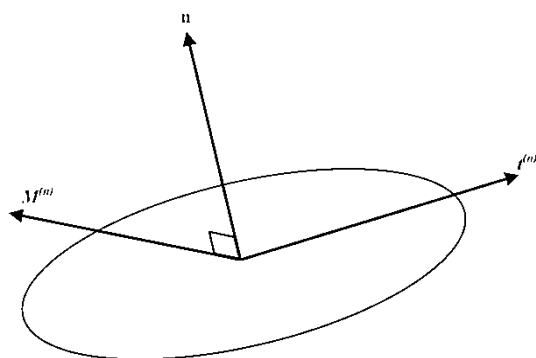
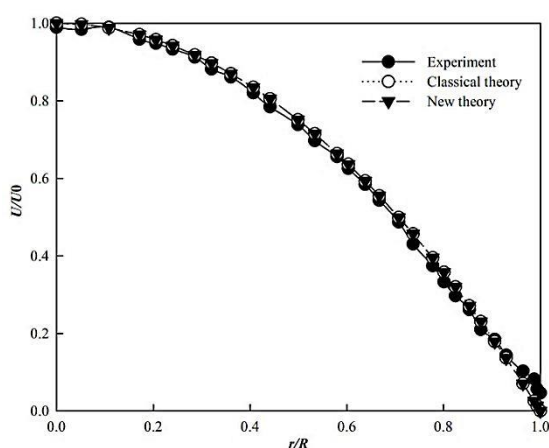


Fig 2. Force traction and the consistent bending moment traction

شکل 2 کشش نیرویی و کشش گشتاور خمشی سازگار

Fig 3. Nondimensional velocity profiles versus r/R

شکل 3 پروفیل‌های سرعت بدون بعد بر حسب r/R

$$\nabla^4 u - \frac{1}{l^2} \nabla^2 u = -\frac{1}{\mu l^2} \frac{dP}{dz}, \quad P = P(Z) \quad (48)$$

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (49)$$

از آنجایی که گرادیان فشار dP/dz مقدار ثابتی است، حل رابطه (46) به شکل رابطه (50) خواهد بود.

$$u = A_0 + A_1 \ln r + \frac{1}{4\mu} \frac{dP}{dz} r^2 + B_0 I_0 \left(\frac{r}{l} \right) + B_1 K_0 \left(\frac{r}{l} \right) \quad (50)$$

در رابطه بالا I_n و K_n توابع بسل تعمیم‌یافته از مرتبه n است و در مختصات استوانه‌ای (r, θ, z) رابطه (51) را خواهیم داشت.

$$2\omega = \nabla \times V = -\frac{\partial v_z}{\partial r} e_\theta \quad (51)$$

در نتیجه مؤلفه غیرصفر سرعت زاویه‌ای به صورت رابطه (52) است.

$$\omega_\theta = -\frac{A_1}{2r} - \frac{1}{4\mu} \frac{dP}{dz} - \frac{1}{2l} B_0 I_1 \left(\frac{r}{l} \right) + \frac{1}{2l} B_1 K_1 \left(\frac{r}{l} \right) \quad (52)$$

همچنین رابطه (53) به صورت زیر است.

$$2K = \nabla \times \omega = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \omega_\theta) e_z \quad (53)$$

از این طریق مؤلفه غیرصفر بردار انحنا می‌توان به صورت رابطه (54) محاسبه می‌شود.

$$K_z = -\frac{1}{4\mu} \frac{dP}{dz} - \frac{1}{4l^2} B_0 I_0 \left(\frac{r}{l} \right) - \frac{1}{4l^2} B_1 K_0 \left(\frac{r}{l} \right) \quad (54)$$

بنابراین رابطه (55) را به صورت زیر داریم.

مادی است که از ماده‌ای به ماده‌ای دیگر، یا از مقیاسی به مقیاسی دیگر تغییر می‌کند. چنانچه مقدار این پارامتر در روابط به‌دست‌آمده صفر باشد، نتایج حاصل با نتایج معادلات نویر-استوکس برابر خواهد بود. این پارامتر از طریق آزمایش در ابعاد و شرایط کاری مختلف و یا از طریق روش‌های دقیق‌تری مانند شبیه‌سازی دینامیک ملکولی قابل محاسبه است. از آنجا که پارامترهای دینامیک ملکولی بسیاری چون پتانسیل اندرکنش‌های مختلف، شرایط اولیه، زمان صرف‌شده و غیره بر این مسأله تأثیرگذار است، نتایج برای مقادیر مختلف l بیان شده است.

در صورتی که سیال ویسکوز و تراکم‌ناپذیر باشد روابط (37-42) را خواهیم داشت.

$$\nabla \cdot V = D_{kk} = 0 \quad (37)$$

$$K_i = -\frac{1}{4} \nabla^2 V_i \quad (38)$$

$$T_{(ji)} = -P \delta_{ji} + 2\mu D_{ji} \quad (39)$$

$$M_i = -2\mu l^2 \nabla^2 V_i \quad (40)$$

$$T_{[ij]} = 2\mu l^2 \nabla^2 \Omega_{ij} \quad (41)$$

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla P + \mu \nabla^2 V - \mu l^2 \nabla^2 \nabla^2 V + \rho b \quad (42)$$

3- حل‌های نمونه

در این بخش نتایج حل جریان آرام برای سیال تراکم‌ناپذیر درون لوله مستقیم، توسط تئوری جدید با نتایج تجربی ماینز و وب [16] مقایسه می‌شود. این تئوری برای حل جریان میان دو لوله هم‌محور و جریان بر دیواره متخلخل به‌کار برده می‌شود.

سرعت جریان درون لوله‌ای به شعاع R با استفاده از تئوری جدید به صورت روابط (43,44) خواهد بود.

$$\frac{u}{u_0} = 1 - \frac{r^2}{R^2} - 4 \frac{l^2}{R^2} \left(1 - \frac{I_0 \left(\frac{r}{l} \right)}{I_0 \left(\frac{R}{l} \right)} \right) \quad (43)$$

$$u_0 = -\frac{1}{4\mu} \frac{dP}{dz} R^2 \quad (44)$$

حل دقیق مسئله و شرایط مرزی آن در مقاله حاج‌اسفندیاری و همکاران [14] بیان شده است. پروفیل سرعت بدون بعد حاصل از نتایج تجربی برای جریان آب داخل لوله‌ای با قطر 705 میکرومتر و $Re=1600$ و نتایج حاصل از تئوری‌های کلاسیک ($l/R=0$) و جدید ($l/R=0.001$)، در شکل 3 نشان داده شده است. انطباق خوبی میان نتایج تئوری و تجربی وجود دارد.

1-3- جریان میان دو لوله هم‌محور

جریان میان دو لوله هم‌محور با شعاع‌های داخلی و خارجی به ترتیب، R_1 و R_2 مطابق شکل 4 در حالت دائم و تراکم‌ناپذیر قرار دارد و گرادیان فشار dP/dz در جهت محوری برقرار است. برای سادگی بیشتر حل در مختصات استوانه‌ای (r, θ, z) انجام می‌شود و محور z ها منطبق بر محور مرکزی لوله‌هاست.

مؤلفه‌های سرعت و شرایط مرزی حاکم بر مسئله به ترتیب به صورت روابط (45-47) خواهد بود.

$$V_r = 0, \quad V_\theta = 0, \quad V_z = u(r) \quad (45)$$

$$u = 0, \quad M_{r\theta} = 0 \quad \text{at } r = R_1 \quad (46)$$

$$u = 0, \quad M_{r\theta} = 0 \quad \text{at } r = R_2 \quad (47)$$

معادله حرکت به شکل روابط (48,49) است.

شکل‌های 5 و 6 با شکل 4 می‌توان دریافت که شکل پروفیل‌های سرعت در مقادیر مختلف A با افزایش مقدار B (افزایش نسبت شعاع خارجی به شعاع داخلی) به حل کلاسیک نزدیک‌تر می‌شود.

تنش برشی دارای دو بخش متقارن و پادمقارن است. بخش متقارن با رابطه (62) برابر است.

$$T_{(rz)} = \mu \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{dP}{dz} \times \left[\frac{-1}{4} R_1^2 \left(\frac{\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 - 1}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \right) + \frac{r}{2} - l \left(1 - \frac{K_0\left(\frac{R_2}{l}\right) I_0\left(\frac{R_2}{l}\right) - K_0\left(\frac{R_2}{l}\right) I_0\left(\frac{R_1}{l}\right)}{I_0\left(\frac{R_2}{l}\right) K_0\left(\frac{R_1}{l}\right) - I_0\left(\frac{R_1}{l}\right) K_0\left(\frac{R_2}{l}\right)} \right) \frac{I_1\left(\frac{r}{l}\right)}{I_0\left(\frac{R_2}{l}\right)} + \left(\frac{I_0\left(\frac{R_2}{l}\right) - I_0\left(\frac{R_1}{l}\right)}{I_0\left(\frac{R_2}{l}\right) K_0\left(\frac{R_1}{l}\right) - I_0\left(\frac{R_1}{l}\right) K_0\left(\frac{R_2}{l}\right)} \right) K_1\left(\frac{r}{l}\right) \right] \quad (62)$$

رابطه (63) با استفاده از تئوری مطرح‌شده و رابطه (21) به صورت زیر است.

$$S = \frac{1}{2} \nabla \times M = \frac{\mu}{l} \left[-B_0 I_1\left(\frac{r}{l}\right) + B_1 K_1\left(\frac{r}{l}\right) \right] e_\theta = S_\theta e_\theta \quad (63)$$

رابطه (64) را با توجه به روابط (61, 20, 19) خواهیم داشت.

$$T_{[rz]} = S_\theta = \frac{dP}{dz} l \times \left[\left(1 - \frac{K_0\left(\frac{R_2}{l}\right) I_0\left(\frac{R_2}{l}\right) - K_0\left(\frac{R_2}{l}\right) I_0\left(\frac{R_1}{l}\right)}{I_0\left(\frac{R_2}{l}\right) K_0\left(\frac{R_1}{l}\right) - I_0\left(\frac{R_1}{l}\right) K_0\left(\frac{R_2}{l}\right)} \right) \frac{I_1\left(\frac{r}{l}\right)}{I_0\left(\frac{R_2}{l}\right)} + \left(\frac{I_0\left(\frac{R_2}{l}\right) - I_0\left(\frac{R_1}{l}\right)}{I_0\left(\frac{R_2}{l}\right) K_0\left(\frac{R_1}{l}\right) - I_0\left(\frac{R_1}{l}\right) K_0\left(\frac{R_2}{l}\right)} \right) K_1\left(\frac{r}{l}\right) \right] \quad (64)$$

و در نتیجه تنش برشی کلی برابر با رابطه (65) است.

$$T_{rz} = T_{[rz]} + T_{(rz)} = \frac{dP}{dz} \left(\frac{-R_1^2}{4r} \left(\frac{\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 - 1}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \right) + \frac{r}{2} \right) \quad (65)$$

تنش برشی T_{rz} مشابه نمونه کلاسیک است و T_{2r} نیز مشابه آن‌چه در بالا گفته شد به صورت رابطه (66) محاسبه می‌شود.

$$T_{2r} = \frac{dP}{dz} \times \left[\frac{-R_1^2}{4r} \left(\frac{\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 - 1}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \right) + \frac{r}{2} - 2l \left(1 - \frac{K_0\left(\frac{R_2}{l}\right) I_0\left(\frac{R_2}{l}\right) - K_0\left(\frac{R_2}{l}\right) I_0\left(\frac{R_1}{l}\right)}{I_0\left(\frac{R_2}{l}\right) K_0\left(\frac{R_1}{l}\right) - I_0\left(\frac{R_1}{l}\right) K_0\left(\frac{R_2}{l}\right)} \right) \frac{I_1\left(\frac{r}{l}\right)}{I_0\left(\frac{R_2}{l}\right)} + 2l \left(\frac{I_0\left(\frac{R_2}{l}\right) - I_0\left(\frac{R_1}{l}\right)}{I_0\left(\frac{R_2}{l}\right) K_0\left(\frac{R_1}{l}\right) - I_0\left(\frac{R_1}{l}\right) K_0\left(\frac{R_2}{l}\right)} \right) K_1\left(\frac{r}{l}\right) \right] \quad (66)$$

همان‌طور که مشخص است تانسور تنش نیرویی متقارن نیست و نرخ جریان عبوری نیز از رابطه (67) محاسبه می‌شود.

$$Q = \int_{R_1}^{R_2} 2\pi r u(r) dr \quad (67)$$

با محاسبه انتگرال بالا رابطه (68) را داریم.

$$\frac{Q}{Q_0} = 1 + \frac{-2A^2(B^2 - 1)}{F} + \frac{\frac{4A^3}{I_0\left(\frac{B}{A}\right)} \left(1 - \frac{K_0\left(\frac{B}{A}\right) I_0\left(\frac{B}{A}\right) - K_0\left(\frac{B}{A}\right) I_0\left(\frac{1}{A}\right)}{I_0\left(\frac{B}{A}\right) K_0\left(\frac{1}{A}\right) - I_0\left(\frac{1}{A}\right) K_0\left(\frac{B}{A}\right)} \right) \left(B I_1\left(\frac{B}{A}\right) - I_1\left(\frac{1}{A}\right) \right)}{F}$$

$$M_z = -M_{r\theta} = -8\mu l^2 K_z = 2\mu l^2 \left[\frac{1}{\mu} \frac{dP}{dz} + \frac{1}{l^2} B_0 I_0\left(\frac{r}{l}\right) + \frac{1}{l^2} B_1 K_0\left(\frac{r}{l}\right) \right] \quad (55)$$

ضرایب A_0, A_1, B_0 و B_1 در روابط (56-59) با توجه به شرایط مرزی بیان‌شده توسط روابط (45-47) محاسبه می‌شوند.

$$A_0 = \frac{-1}{4\mu} \frac{dP}{dz} R_1^2 \left[\frac{\left(1 - \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2\right)}{\ln \frac{R_2}{R_1}} + 1 - 4 \left(\frac{l}{R_1}\right)^2 \right] \quad (56)$$

$$A_1 = \frac{-1}{4\mu} \frac{dP}{dz} R_1^2 \left[\frac{\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 - 1}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \right] \quad (57)$$

$$B_0 = \frac{-1}{\mu} \frac{dP}{dz} R_1^2 \left(\frac{l}{R_1}\right)^2 \times \left[1 - \frac{K_0\left(\frac{R_2}{l}\right) I_0\left(\frac{R_2}{l}\right) - K_0\left(\frac{R_2}{l}\right) I_0\left(\frac{R_1}{l}\right)}{I_0\left(\frac{R_2}{l}\right) K_0\left(\frac{R_1}{l}\right) - I_0\left(\frac{R_1}{l}\right) K_0\left(\frac{R_2}{l}\right)} \right] \frac{1}{I_0\left(\frac{R_2}{l}\right)} \quad (58)$$

$$B_1 = \frac{-1}{\mu} \frac{dP}{dz} R_1^2 \left(\frac{l}{R_1}\right)^2 \times \left[\frac{I_0\left(\frac{R_2}{l}\right) - I_0\left(\frac{R_1}{l}\right)}{I_0\left(\frac{R_2}{l}\right) K_0\left(\frac{R_1}{l}\right) - I_0\left(\frac{R_1}{l}\right) K_0\left(\frac{R_2}{l}\right)} \right] \quad (59)$$

در نهایت پروفیل سرعت بدون بعد به صورت رابطه (60) قابل بیان است.

$$U(R) = \frac{u}{u_0} = \frac{B^2 - 1}{\ln B} \ln R + 1 - 4A^2 - R^2 + 4A^2 \left(1 - \frac{K_0\left(\frac{B}{A}\right) I_0\left(\frac{B}{A}\right) - K_0\left(\frac{B}{A}\right) I_0\left(\frac{1}{A}\right)}{I_0\left(\frac{B}{A}\right) K_0\left(\frac{1}{A}\right) - I_0\left(\frac{1}{A}\right) K_0\left(\frac{B}{A}\right)} \right) \times \frac{I_0\left(\frac{R}{A}\right)}{I_0\left(\frac{B}{A}\right)} + 4A^2 \times \left(\frac{I_0\left(\frac{B}{A}\right) - I_0\left(\frac{1}{A}\right)}{I_0\left(\frac{B}{A}\right) K_0\left(\frac{1}{A}\right) - I_0\left(\frac{1}{A}\right) K_0\left(\frac{B}{A}\right)} \right) K_0\left(\frac{R}{A}\right) \quad (60)$$

به‌گونه‌ای که رابطه (61) به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$u_0 = \frac{-1}{\mu} \frac{dP}{dz} R_1^2, \quad B = \frac{R_2}{R_1}, \quad A = \frac{l}{R_1}, \quad R = \frac{r}{R_1} \quad (61)$$

شکل 5 تغییرات پروفیل سرعت بی‌بعدشده در مقادیر مختلف A را برای B=2 نشان می‌دهد. مقدار A بین صفر تا یک متغیر و متناسب با نوع سیال در هر مسئله خاص قابل محاسبه است. منحنی A=0 مربوط به حل کلاسیک بدون در نظر گرفتن تأثیرات تنش کوپلی است. شکل پروفیل سرعت با افزایش مقدار A (افزایش تأثیر مقیاس طول) از حل کلاسیک فاصله می‌گیرد. به عبارت دیگر وابستگی جریان سیال به طول به‌عنوان یک پارامتر اساسی (پیشتر در روابط مشاهده نمی‌شد) با کاهش ابعاد هندسی مسأله افزایش می‌یابد. همین روند را در شکل‌های 6 و 7 نیز دیده می‌شود. این شکل‌ها تغییرات پروفیل سرعت برحسب A را به ترتیب برای مقادیر B=3 و B=4 نشان می‌دهند. از مقایسه

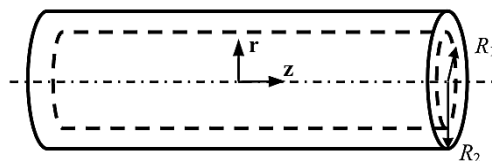


Fig 4. Geometry of flow between two concentric pipes

شکل 4 هندسه جریان میان دو لوله هم‌محور

$$Q_0 = \frac{-\pi dP}{2\mu dz} R_1^4 \left[\frac{1}{2} \left(\left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2 - 1 \right) - \frac{1}{4} \left(\left(\frac{R_2}{R_1} \right)^4 - 1 \right) + \frac{\left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2 - 1}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2 \ln \frac{R_2}{R_1} - \frac{1}{4} \left(\left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2 - 1 \right) \right) \right] \quad (69)$$

شکل 8 تغییرات نرخ جریان بی‌بعد نسبت به R را برای مقادیر مختلف B نشان می‌دهد. منحنی A=0 مربوط به حل کلاسیک است. در این شکل نیز مقدار دبی با افزایش مقدار A (افزایش تأثیر مقیاس طول) از حل کلاسیک فاصله می‌گیرد و این اختلاف برای مقادیر کوچک B بیشتر است و با افزایش مقدار B کاهش می‌یابد.

2-3- حل جریان دائم بر دیواره متخلخل

این بار تئوری جدید مطرح‌شده برای حل جریان بر دیواره متخلخل شکل 9 به کار برده می‌شود.

جریان دائم، سیال تراکم‌ناپذیر و شرایط مرزی روابط (70-72) برقرار است.

$$u(0) = 0 \quad (70)$$

$$u(\infty) = U_0 \quad (71)$$

$$V(x, 0) = -V \quad (72)$$

با نوشتن معادله پیوستگی و اعمال شرایط مرزی رابطه (73) را داریم.

$$V(x, y) = -V_w \quad (73)$$

معادله ممتموم در جهت محور xها به صورت رابطه (74) خواهد بود.

$$v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + V_w \frac{\partial u}{\partial y} - v l^2 \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0 \quad (74)$$

در این صورت با حل این معادله و جای‌گذاری شرایط مرزی از روابط (70-72) پروفیل سرعت به صورت رابطه (75) به‌دست می‌آید.

$$\frac{u(Y)}{U_0} = 1 - \exp \left(- \frac{\left(12^{\frac{1}{3}} + \left(\sqrt{81(\eta \text{Re})^2 - 12} + 9\eta \text{Re} \right)^{\frac{2}{3}} \right) Y}{12^{\frac{2}{3}} \left(\sqrt{81(\eta \text{Re})^2 - 12} + 9\eta \text{Re} \right)^{\frac{1}{3}} \eta} \right) \times \cos \frac{12^{\frac{1}{3}} \sqrt{3} - \sqrt{3} \left(\sqrt{81(\eta \text{Re})^2 - 12} + 9\eta \text{Re} \right)^{\frac{2}{3}} Y}{\left[\sqrt{81(\eta \text{Re})^2 - 12} + 9\eta \text{Re} \right]^{\frac{1}{3}} \eta} \quad (75)$$

در رابطه بالا $\eta = l/L$ ، $\text{Re} = V_w L / \nu$ ، $Y = y/L$ و ν ویسکوزیته سینماتیکی سیال و L طول صفحه است و این رابطه تنها در شرایط $\eta \text{Re} > 0.385$ برقرار است.

شکل‌های 10-13 به ترتیب تغییرات پروفیل سرعت برحسب η را برای رینولدزهای 4000، 40000 و 400000 نشان می‌دهند. پروفیل سرعت در هر چهار شکل با افزایش η (افزایش تأثیر مقیاس طول) از حل کلاسیک فاصله می‌گیرد. از مقایسه شکل 10 با شکل‌های 12 و 13 می‌توان دریافت که شکل پروفیل سرعت برای مقادیر مختلف η با افزایش Re یا در واقع افزایش طول هندسی صفحه به حل کلاسیک نزدیک‌تر می‌شود، و تأثیر مقیاس طول در مسئله در Re‌های پایین‌تر مشهودتر است.

$$+ \frac{-4A^3 \left[\frac{I_0\left(\frac{B}{A}\right) - I_0\left(\frac{1}{A}\right)}{I_0\left(\frac{B}{A}\right)K_0\left(\frac{1}{A}\right) - I_0\left(\frac{1}{A}\right)K_0\left(\frac{B}{A}\right)} \right] \left(BK_1\left(\frac{B}{A}\right) - K_1\left(\frac{1}{A}\right) \right)}{F} \quad (68)$$

$$F = \frac{1}{2}(B^2 - 1) - \frac{1}{4}(B^4 - 1) + \frac{B^2 - 1}{\ln B} \left(\frac{1}{2} B^2 \ln B - \frac{1}{4} (B^2 - 1) \right)$$

مقادیر A و B از روابط (59) قابل محاسبه و Q_0 نرخ جریان عبوری در نمونه کلاسیک، بودن در نظر گرفتن تأثیرات تنش کوپلی به صورت رابطه (69) است.

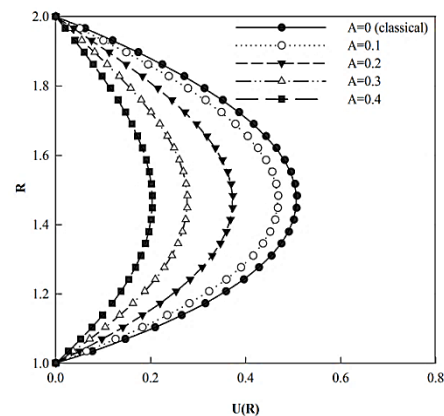


Fig. 5 Variations of the velocity profile with A for B=2

شکل 5 تغییرات پروفیل سرعت برحسب A برای B=2

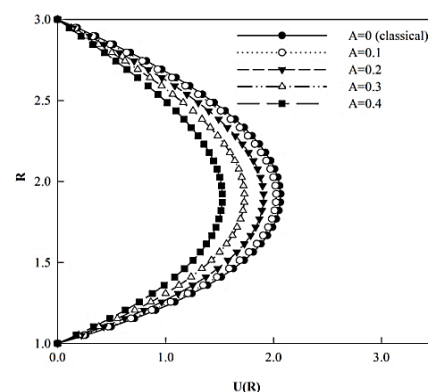


Fig. 6 Variations of the velocity profile with A for B=3

شکل 6 تغییرات پروفیل سرعت برحسب A برای B=3

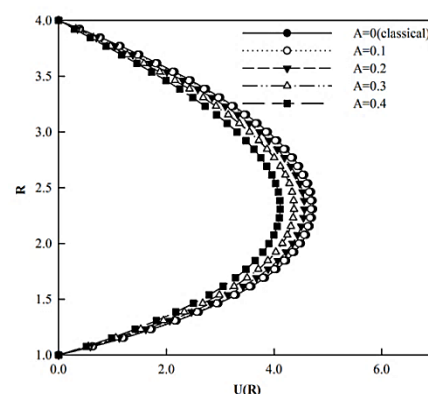


Fig. 7 Variations of the velocity profile with A for B=4

شکل 7 تغییرات پروفیل سرعت برحسب A برای B=4

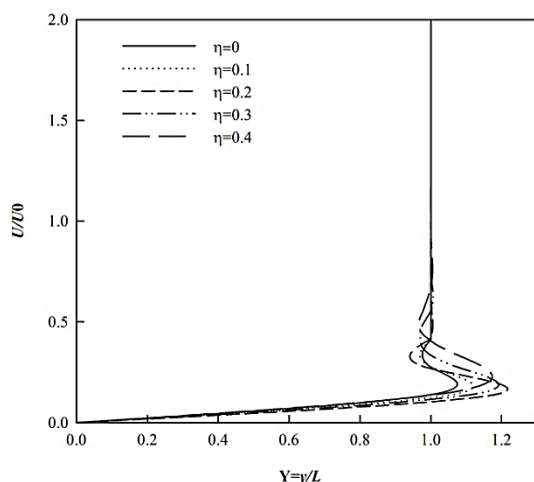


Fig.11 Variations of the axial velocity on porous wall with η for $Re=400$

شکل 11 تغییرات سرعت محوری جریان بر دیواره متخلخل بر حسب η برای $Re=400$

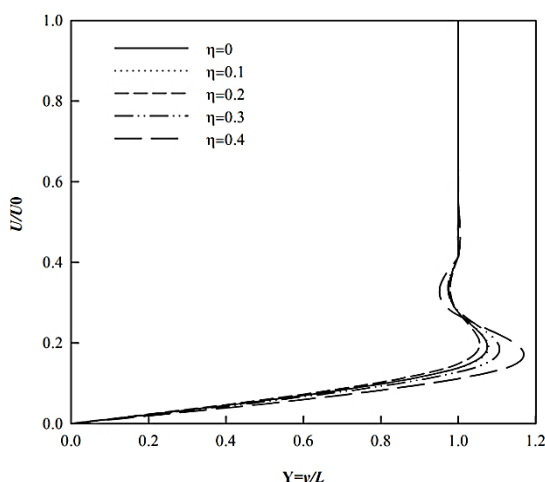


Fig.12 Variations of the axial velocity on porous wall with η for $Re=4000$

شکل 12 تغییرات سرعت محوری جریان بر دیواره متخلخل بر حسب η برای $Re=4000$

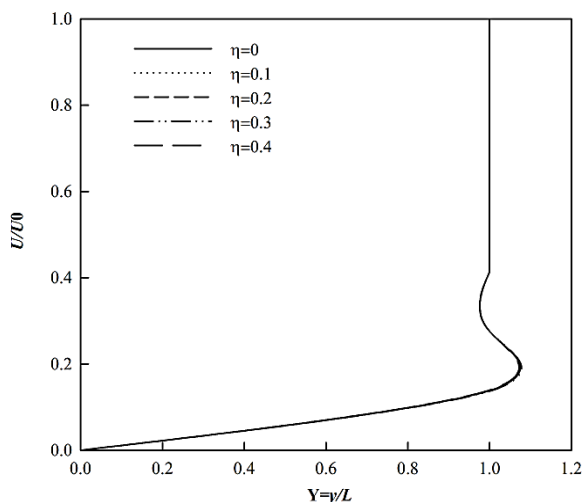


Fig. 13 Variations of the axial velocity on porous wall with η for $Re=40000$

شکل 13 تغییرات سرعت محوری جریان بر دیواره متخلخل بر حسب η برای $Re=40000$

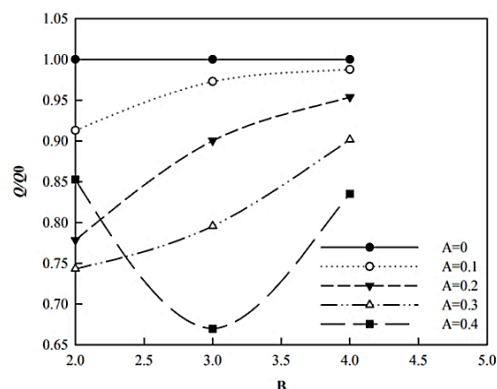


Fig.8 Variations of the non-dimensional flow rate with A

شکل 8 تغییرات نرخ جریان بی بعد با A

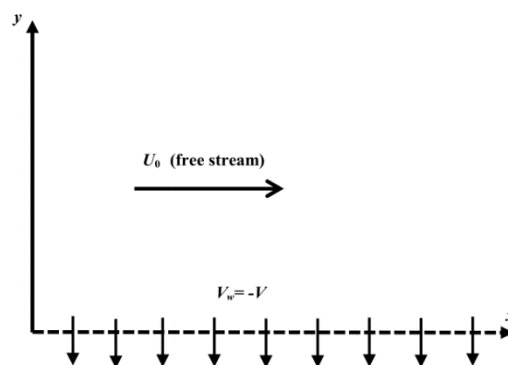


Fig.9 Geometry and boundary conditions of flow on porous wall

شکل 9 هندسه و شرایط مرزی جریان بر دیواره متخلخل

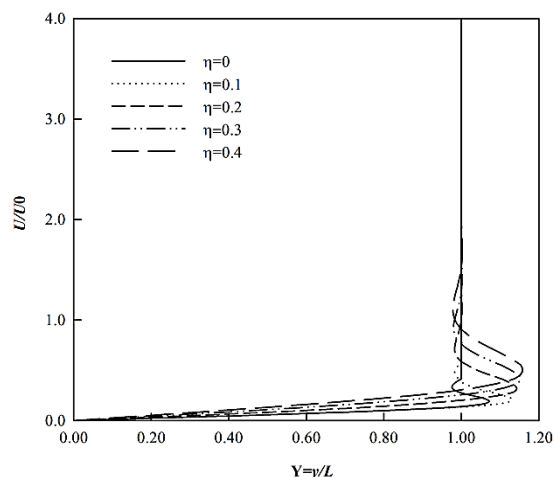


Fig.10 Variations of the axial velocity on porous wall with η for $Re=40$

شکل 10 تغییرات سرعت محوری جریان بر دیواره متخلخل بر حسب η برای $Re=40$

4- نتایج

همانطور که در حل جریان میان دو لوله هم محور نشان داده شد، تانسور تنش نیرویی در تئوری سازگار جدید متقارن نیست، همچنین با مشاهده پروفیل سرعت جریان میان دو لوله هم محور دیده می شود که پروفیل سرعت با افزایش تأثیر مقیاس طول از حل کلاسیک فاصله می گیرد. با مقایسه پروفیل های سرعت بی بعد شکل های 5-7 کاملاً مشخص است که شکل

پروفیل سرعت با افزایش پارامتر هندسی مسئله (نسبت قطر خارجی به قطر داخلی) به حل کلاسیک نزدیکتر می‌شود و برعکس. این موضوع را در نمودار شکل 8 نیز می‌توان مشاهده کرد. مقدار شدت جریان عبوری میان لوله‌ها با تغییر سرعت در مقیاس‌های طولی متفاوت تغییر می‌کند. شدت جریان به حل کلاسیک برای ابعاد هندسی بزرگ‌تر نزدیک‌تر است و برای ابعاد کوچک‌تر این منحنی از حل کلاسیک فاصله بیشتری می‌گیرد.

این روند را می‌توان با مشاهده شکل‌های تغییرات سرعت محوری در جریان بر دیواره متخلخل مشاهده کرد. در این شکل‌ها نیز با افزایش مقیاس طول شکل پروفیل سرعت از حالت کلاسیک فاصله می‌گیرد و همچنین با افزایش عدد رینولدز معرفی شده که تابع طول صفحه یا همان ابعاد هندسی مسئله است حل به حل کلاسیک نزدیکتر می‌شود.

در نهایت می‌توان نتیجه گرفت که مقیاس طول عاملی تأثیرگذار بر پارامترهای جریان از جمله سرعت به شمار می‌آید که به خصوص در جریان‌هایی با ابعاد هندسی کوچک‌تر چون جریان‌های مقیاس نانو، میکرو و مسائل بیومکانیک باید به‌عنوان یک پارامتر مهم در معادلات جریان وارد شود و نمی‌توان به سادگی از آن چشم‌پوشی کرد.

5- فهرست علائم

b_i	نیروی حجمی (Nm^{-3})
c_i	کوپل حجمی (Nm^{-2})
K_i	بردار نرخ انحنا ($\text{s}^{-1}\text{m}^{-1}$)
l	طول مشخصه مادی (m)
M_{ij}	تانسور تنش کوپلی (Nm^{-2})
P	فشار (Pa)
Q	دبی حجمی (kgm^{-3})
Re	عدد رینولدز
T_{ij}	تانسور تنش نیرویی (Nm^{-3})
t	زمان (s)
u	سرعت محوری (ms^{-1})
V	سرعت عمودی (ms^{-1})
X_{ij}	تانسور متقارن گرادیان سرعت زاویه‌ای ($\text{s}^{-1}\text{m}^{-1}$)

علائم یونانی

ϵ_{ijk}	تانسور جایگشت
μ	ویسکوزیته دینامیکی ($\text{kgm}^{-1}\text{s}^{-1}$)
ν	ویسکوزیته سینماتیکی (m^2s^{-1})
ρ	چگالی (kgm^{-3})
Ω_{ij}	تانسور پادمقارن سرعت زاویه‌ای (s^{-1})
ω_i	بردار سرعت زاویه‌ای (s^{-1})

6- مراجع

- [1] A.L. Cauchy, Sur l'équilibre et le mouvement intérieur des corps considérés comme des masses continues, *Exercice de math*, Vol. 4, pp. 293–319, 1828.
- [2] W. Voigt, Allgemeine Formeln für die Bestimmung der Elasticitätsconstanten von Krystallen durch die Beobachtung der Biegung und Drillung von Prismen, *Annalen der Physik*, Vol. 252, No. 6, pp. 273–321, 1882.
- [3] E. Cosserat, F. Cosserat, *Théorie des corps déformables (Theory of deformable bodies)*, pp. 226, Paris: American Mathematical Society, 1909.
- [4] G. D. Mattioli, Ricerche sulla meccanica dei moti fluidi turbolenti, *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, Vol. 4, pp. 67–91, 1933.
- [5] C. Ferrari, The transport of vorticity through fluids in turbulent motion, *National Advisory Committee for Aeronautics*, Vol. 799, Nos. 11–12, pp. 1037–1056, 1936.
- [6] G. D. Mattioli, *Teoria dinamica dei regimi fluidi turbolenti*, pp. 323–389, Padua: Milani, 1937.
- [7] J. L. Lumley, Invariants in turbulent flow, *Physics of Fluids*, Vol. 9, pp. 2111–2113, 1966.
- [8] V. N. Nikolaevskiy, Asymmetric fluid mechanics and averaged description of turbulent flow, *Soviet Physics Doklady*, Vol. 14, pp. 120–122, 1969.
- [9] V. N. Nikolaevskiy, *Angular Momentum in Geophysical Turbulence*, pp. 5–35, Dordrecht: Kluwer, 2003.
- [10] A. R. Hadesfandari, G. F. Dargush, A. Hadesfandari, Consistent skew-symmetric couple stress theory for size-dependent creeping flow, *Non-Newtonian Fluid Mechanics*, Vol. 196, pp. 83–94, 2013. (Multi-Language)
- [11] V. K. Stokes, Couple stresses in fluids, *Physics of Fluids*, Vol. 9, pp. 1709–1715, 1966.
- [12] A. R. Hadesfandari, G. F. Dargush, *Foundations of consistent couple stress theory*, Accessed on 29 Jul 2015; <https://arxiv.org/abs/1509.06299>.
- [13] P. Neff, I. Münch, I.D. Ghiba, A. Madeo, On some fundamental misunderstandings in the indeterminate couple stress model. A comment on recent papers of A.R. Hadesfandari and G.F. Dargush, *Solids and Structures*, Vol. 81, pp. 233–243, 2016.
- [14] A. R. Hadesfandari, A. Hadesfandari, G. F. Dargush, Skew-symmetric couple-stress fluid mechanics, *Acta Mechanica*, Vol. 226, No. 3, pp. 871–895, 2014.
- [15] A. Hadesfandari, G. F. Dargush, A. R. Hadesfandari, Size-dependent fluid dynamics with application to lid-driven cavity flow, *Non-Newtonian Fluid Mechanics*, Vol. 223, pp. 98–115, 2015.
- [16] D. Maynes, A. R. Webb, Velocity profile characterization in sub-millimeter diameter tubes using molecular tagging velocimetry, *Experiments in Fluids*, Vol. 32, No. 1, pp. 3–15, 2002.