



دینامیک تحلیلی یک عملگر کشویی دوار با سفتی متغیر و تأیید با روش المان محدود

امین نوریان¹، علیرضا اکبرزاده^{2*}

1- فارغ التحصیل کارشناسی ارشد، قطب علمی رابانش نرم و پردازش هوشمند اطلاعات، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد

2- استاد، قطب علمی رابانش نرم و پردازش هوشمند اطلاعات، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد

* صندوق پستی 9177948974، ali_akbarzadeh@um.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 13 آبان 1395

پذیرش: 04 دی 1395

ارائه در سایت: 11 اسفند 1395

کلید واژگان:

عملگر کشویی

رویکرد پارامتر توده‌ای

روش لاگرانژ

بال اسکرو

سفتی متغیر

چکیده

عملگرهای کشویی دارای سیستم رانش برپایه‌ی بال اسکرو، یکی از پرکاربردترین و دقیق‌ترین محرک‌های مورد استفاده در صنعت رباتیک و نیز رکن اصلی ربات‌های موازی مانند استوارت-گوف هستند. به علت تحمل نیروهای محوری سنگین به وسیله‌ی این عملگرها، بروز تغییر شکل‌های الاستیک در اجزای اصلی آن‌ها اجتناب‌ناپذیر است. این امر باعث کشیدگی و فشردگی پیستون و بال اسکرو و در نتیجه، کاهش دقت موقعیت دینامیکی در این عملگرها می‌شود. وجود معادلات دینامیکی دقیق کمک بزرگی به کنترل این خطاها می‌کند. اکثر مدل‌های دینامیکی با رویکرد پارامتر توده‌ای که تاکنون برای توصیف این عملگرها به کار رفته‌اند، دارای یک درجه آزادی در حالت صلب و دو یا سه درجه آزادی در حالت انعطاف‌پذیر هستند و سفتی اجزا به صورت ثابت در نظر گرفته شده است. در این پژوهش با استفاده از روش لاگرانژ، معادلات دینامیک مستقیم یک عملگر کشویی دوار استخراج شده است که دارای سه درجه آزادی محوری و نیز سیستم رانش برپایه‌ی بال اسکرو است. علاوه بر سفتی محوری پیستون، بال اسکرو نیز به صورت انعطاف‌پذیر و با سفتی متغیر در نظر گرفته شده است. نکته قابل توجه در این پژوهش، نحوه‌ی مدل‌سازی سفتی متغیر در بال اسکرو است. در این مدل، با حرکت مهره روی بال اسکرو، طول فعال بال اسکرو و سفتی آن تغییر می‌کند که بسیار شبیه به واقعیت است. علاوه بر روش تحلیلی، این مدل به کمک روش المان محدود در نرم‌افزار آباکوس نیز شبیه‌سازی و مورد بررسی قرار گرفته است و نتایج روش تحلیلی و روش المان محدود با هم مقایسه شده‌اند.

Analytical dynamic of a rotating prismatic actuator with variable stiffness and validation with finite element method

Amin Noorian, Alireza Akbarzadeh*

Center of Excellence on Soft Computing and Intelligent Information Processing, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran

* P.O.B. 9177948974, Mashhad, Iran, ali_akbarzadeh@um.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper

Received 03 November 2016

Accepted 24 December 2016

Available Online 01 March 2017

Keywords:

Prismatic actuator

Lumped parameter approach

Lagrange method

Ball screw drive

Variable stiffness

ABSTRACT

Precise Prismatic actuators are one of the most important actuators used in robotic industry and the main base of parallel robots as 6RUS Stewart-Gough robot. Because of bearing large axial forces by these actuators, elastic deformations are inevitable in the main parts of them. This results in elongation and compression of the piston and ball screw, which degrades the dynamic linear positioning accuracy of these actuators. The existence of accurate dynamic equations can seriously help to control these errors. Most of the dynamic models which have been used for these actuators based on lumped parameter approach have one DOF for rigid and two or three DOF for flexible state and the stiffness of parts is considered as constant. In this study, the direct dynamic equations of a rotating prismatic actuator which has three DOF in axial direction and ball screw drive system are proposed using the Lagrange method. In addition to the flexibility of the moving piston, the ball screw is considered with variable stiffness. The important point of this study is the variability of ball screw stiffness. As the nut moves along the shaft, the active length and stiffness of the shaft change; which is very similar to the reality. In addition to the analytical method, the actuator is modeled in the finite element software ABAQUS, and the results of the analytical method and the finite element method are compared.

1- مقدمه

عملگرهای رباتیک به‌طور عمده در صنایع گوناگون برای انجام کارهای خسته‌کننده، یکنواخت و خطرناک مورد استفاده قرار می‌گیرند. برای افزایش تولید صنعتی، نیاز به ساخت عملگرهای رباتیک سبک و سریع وجود دارد. همچنین این عملگرها نسبت به یک عملگر سنگین و حجیم، از مزایایی همچون قدرت مانور بیشتر و هزینه، مصرف انرژی و اشغال فضای کمتر

برخوردارند. از طرفی این عملگرهای سبک به‌علت سفتی¹ کمتر، در حین حرکت دچار ارتعاشات بیشتری خواهند شد [1]. بنابراین بررسی دینامیک، ارتعاشات و کنترل این عملگرها اهمیت ویژه‌ای دارد. مزیت معادلات دینامیکی ربات با عملگرهای انعطاف‌پذیر این است که می‌توان ارتعاشات و انحراف از مسیر تعیین‌شده‌ی ربات را که ناشی از خاصیت انعطاف‌پذیری

¹ Stiffness

Please cite this article using:

A. Noorian, A. Akbarzadeh, Analytical dynamic of a rotating prismatic actuator with variable stiffness and validation with finite element method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 3, pp. 79-86, 2017 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

عملگرها است، محاسبه و پیش‌بینی نمود.

مجموعه‌های رباتیک با عملگرهای انعطاف‌پذیر، در واقع دستگاه‌های دینامیکی پیوسته‌ای هستند که به‌وسیله‌ی تعداد نامتناهی از درجات آزادی و معادلات دیفرانسیل معمولی یا جزئی کوپل‌شده‌ی غیرخطی توصیف می‌شوند. حل دقیق چنین دستگاه‌هایی عملاً امکان‌پذیر نیست. بنابراین این دستگاه‌ها با روش‌هایی مانند مودهای فرضی¹، المان محدود یا روش پارامتر توده‌ای²، گسسته‌سازی می‌شوند [1]. رویکرد پارامتر توده‌ای، سیستم را به صورت جرم و فنرهای مجزا مدل‌سازی می‌کند که ساده‌ترین و سریع‌ترین محاسبات را نسبت به روش‌های دیگر دارد و در این پژوهش مورد استفاده قرار گرفته است. اگر چه این روش، اساساً کلی است، ولی به طور خاص برای مکانیزم‌های موازی فضایی نظیر ربات استوارت-گوف³ استفاده می‌شود [2].

در این راستا، پژوهش‌های متعددی انجام شده است که در ادامه به برخی از آن‌ها اشاره می‌شود. ژو و همکاران یک مدل توده‌ای را برای شبیه‌سازی تعقیب موقعیت نوک یک عملگر انعطاف‌پذیر تک لینکی در نظر گرفتند [3]. خلیل و گاتیر از یک مدل الاستیک توده‌ای برای توصیف مجموعه‌ی عملگرهای مکانیکی انعطاف‌پذیر استفاده کردند. آن‌ها مدل دینامیک معکوس این مجموعه‌ها را دوباره تعریف کردند و بهبود بخشیدند [4]. نیسینگ برای میرا کردن ارتعاشات در عملگر تک لینکی انعطاف‌پذیر، در مورد استفاده از یک اتصال فنر و میراگر، مطالعه کرد. او تلاش کرد تا مدلی با پاسخ بسیار سریع و بدون ارتعاش در انتهای عملگر به دست آورد [5]. مگاهد و همزه از شکل تغییر یافته‌ی رویکرد دینامیکی چندجسمی قسمت محدود⁴، برای مدل‌سازی و شبیه‌سازی عملگر انعطاف‌پذیر صفحه‌ای استفاده کردند که انتهای صلب آن به مفاصل دورانی اتصال دارد. فرمول‌بندی آن‌ها از یک ماتریس جرمی پایدار استفاده می‌کند تا تقریب‌های بهتری نسبت به روش سنتی توده‌ای چندتکه‌ای به دست آورد [6]. سلیگ یک روش پیشرفته‌ی مدل‌سازی توده‌ای برای مدل‌سازی دینامیکی عملگرهای دینامیکی ارائه داد (که روش دینگ-هولزر نامیده می‌شود). در این روش که بعضی از خطاهای روش توده‌ای هولزر را بهبود بخشید، برای مدل‌سازی دینامیکی بازوی صفحه‌ای، عملگرهای چندلینکی و بازوی دارای نرمی فضایی⁵ استفاده شد [7]. کیم یک سیستم المان توده‌ای معادل را برای استفاده در کنترل‌گر یک عملگر انعطاف‌پذیر، ارائه داد. روش مدل امپدانس⁶ برای تبدیل عملگر انعطاف‌پذیر به یک سیستم کوپل شده استفاده شد. تأثیر اتصال سری و موازی فنر و دمپرهای دارای ضریب ثابت، در این روش بررسی شد [8]. چن و همکاران، به بررسی تأثیر نرمی یک سیستم رانش مجهز به بال‌اسکرو⁷ با مدل‌سازی توده‌ای پرداختند. آن‌ها یافتند که در شتاب‌های بالا، خطای موقعیت زیادی در اثر نرمی مکانیکی بال‌اسکرو به‌وجود می‌آید. آن‌ها با استفاده از چند فنر در دو طرف مهره‌ی بال‌اسکرو، سفتی بال‌اسکرو را مدل‌سازی کردند. این سفتی هم به صورت پیچشی و هم به‌صورت محوری و در هر دو حالت، ثابت در نظر گرفته شد [9]. واراناسی و نایفه، مدلی به‌صورت پارامتر-توزیع شده از دینامیک بال‌اسکرو ارائه دادند که نرمی و میرایی پیچ، مهره و یاتاقان‌ها را شامل می‌شد. سپس آن‌ها با استفاده از روش گلرکین⁸، این مدل را به یک مدل پارامتر توده‌ای مرتبه پایین تنزل دادند و کار خود را

با انجام آزمایش روی یک جفت بال‌اسکرو، صحت‌سنجی کردند [10]. فری و همکاران، رفتار میله‌ی بال‌اسکرو و تأثیر برجسته‌ی آن در شرایط کاری و اتصال‌های متفاوت را بررسی کردند. آن‌ها با استفاده از یک تکنیک مدل‌سازی هیبریدی، ویژگی‌های عمده‌ی میله‌ی بال‌اسکرو را در یک مدل جرم توده‌ای ارائه دادند. طبق این روش، با تغییر فاصله‌ی مهره از یاتاقان تکیه‌گاهی انتهای بال‌اسکرو، میزان سفتی محوری تغییر می‌کند ولی سفتی پیچشی ثابت در نظر گرفته می‌شود [11]. ابراهیمی و هالی، مدلی توده‌ای از یک سیستم انتقال قدرت محوری دارای بال‌اسکرو ارائه دادند که سفتی محوری و پیچشی در آن لحاظ شده است. سفتی پیچشی، ثابت و ترکیبی از پیچش میله‌ی بال‌اسکرو و انعطاف‌پذیری تسمه‌ی منتقل‌کننده‌ی قدرت از موتور است. سفتی محوری نیز به‌صورت ثابت و ترکیبی از سفتی محوری بال‌اسکرو، سفتی مجموعه‌ی مهره و سفتی یاتاقان در نظر گرفته شده است [12]. فنگ و پان، با استفاده از یک مدل دینامیکی توده‌ای به بررسی اثرات پیش‌بار متغیر روی سیستم انتقال قدرت دارای بال‌اسکرو پرداختند. آن‌ها سفتی مهره‌ی بال‌اسکرو را به عنوان یک متغیر در مدل دینامیکی خود در نظر گرفتند. با این حال، سفتی محوری معادل بال‌اسکرو، ثابت در نظر گرفته شده است [13]. لیانگ و همکاران، یک مدل الکترومکانیکی تحلیلی برای مشخص کردن ویژگی‌های ضروری در یک مجموعه‌ی انتقال قدرت خطی دارای بال‌اسکرو ارائه دادند. در این مدل، انتقال مکانیکی به صورت یک مجموعه‌ی دو-جرمی مدل‌سازی شد. سفتی محوری و پیچشی بال‌اسکرو به صورت ثابت و با رویکرد توده‌ای در نظر گرفته شدند و با ترکیب این سفتی‌ها یک سفتی معادل برای مجموعه به‌دست آمد. صحت کار آن‌ها از طریق آزمایش تجربی نشان داده شد [14]. یو و فنگ، برای یک سیستم دوگانه‌ی بال‌اسکرو از یک مدل دینامیکی بر پایه‌ی روش جرم توده‌ای استفاده کردند. آن‌ها مشخصات پاسخ فرکانسی را با استفاده از معادلات لاگرانژ و روش فضای حالت محاسبه کردند. سفتی محوری و پیچشی بال‌اسکرو و یاتاقان‌های نگهدارنده‌ی و مهره‌ی دوار آن به صورت ثابت در نظر گرفته شدند [15].

با بررسی پژوهش‌های پیشین، مشخص می‌شود که عموماً در محاسبه‌ی دینامیک چنین عملگرهایی فقط یک یا دو درجه آزادی در راستای محوری در نظر گرفته شده است که ناشی از وجود تنها یک عنصر منعطف مستقل در محاسبات است. در حالی که در این پژوهش به علت وجود دو عنصر منعطف

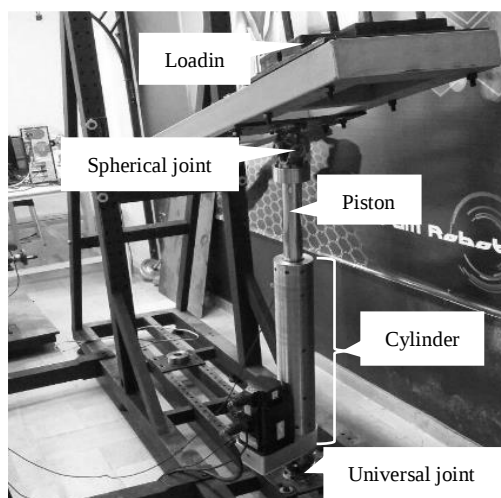


Fig.1 FUM actuator manufactured in robotic lab of Ferdowsi university of Mashhad

شکل 1 عملگر فام ساخته شده در آزمایشگاه رباتیک دانشگاه فردوسی مشهد

¹ Assumed modes method

² Lumped parameter method

³ Stewart-Gough

⁴ Finite segment multi-body dynamics approach

⁵ Spatial compliance

⁶ Impedance model method

⁷ Ball screw

⁸ Galerkin procedure

راستای افق را مشخص می‌کند. محور x همواره در راستای طولی عملگر و محور y عمود بر آن قرار دارد و عملگر حرکت صفحه‌ای دارد.

2-2- محاسبه انرژی جنبشی و پتانسیل عملگر

دینامیک دستگاه‌های چندجسمی با روش نیوتن یا روش لاگرانژ قابل محاسبه است. به علت ساده‌تر بودن روش لاگرانژ، از این روش برای محاسبه معادلات دینامیکی این عملگر استفاده شد. در روش لاگرانژ نیاز به معادلات انرژی جنبشی و پتانسیل است. ابتدا سرعت جرم‌های نقطه‌ای دو سر پیستون باید محاسبه شوند. این دو جرم دارای سرعت خطی و سرعت دورانی هستند. جرم مربوط به مکان x_1 با نام m_A و جرم مربوط به مکان x_2 با نام m_B نام‌گذاری شده است که معادلات (1) و (2) به ترتیب بیان‌گر سرعت m_A و m_B هستند. سپس انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل طبق معادلات (3) الی (4) محاسبه می‌شوند.

$$v_A = \dot{x}_1 \vec{i} + x_1 \dot{\theta} \vec{j} \quad (1)$$

$$v_B = \dot{x}_2 \vec{i} + x_2 \dot{\theta} \vec{j} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} U_{\text{total}} &= \frac{1}{2} I_o \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2 \\ &= \frac{1}{2} I_o \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_A (\dot{x}_1^2 + x_1^2 \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} m_B (\dot{x}_2^2 + x_2^2 \dot{\theta}^2) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} V_{\text{total}} &= \frac{1}{2} k_p (l_{p_z} - (x_2 - x_1))^2 + m_c g d \sin \theta \\ &\quad + m_A g x_1 \sin \theta + m_B g x_2 \sin \theta \end{aligned} \quad (4)$$

2-3- معادلات دینامیکی روش لاگرانژ

حال با استفاده از روابط کلی روش لاگرانژ (5) و (6)، معادلات دیفرانسیل سیستم به دست می‌آیند. مقادیر F_{mot} ، x_2 و θ به عنوان خروجی مسئله و مقادیر x_1 ، F_{ext} و T_{ext} ورودی مسئله به شمار می‌آیند. مقادیر Q_i نیروهای تعمیم یافته‌ی وارد شده به سیستم هستند که طبق روابط کار مجازی (7) الی (10) به دست می‌آیند.

$$L = U - V \quad (5)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad (6)$$

$$\delta W = F_{\text{mot}} \delta x_1 + F_{\text{ext}} \delta x_2 + T_{\text{ext}} \delta \theta \quad (7)$$

$$Q_{x_1} = \frac{\partial W}{\partial x_1} = F_{\text{mot}} \quad (8)$$

$$Q_{x_2} = \frac{\partial W}{\partial x_2} = F_{\text{ext}} \quad (9)$$

$$Q_{\theta} = \frac{\partial W}{\partial \theta} = T_{\text{ext}} \quad (10)$$

در نهایت با حل عددی دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی (11) نرم افزار متلب²، تغییرات خروجی‌ها بر حسب زمان به دست می‌آید. F و H به ترتیب ماتریس جرمی، ماتریس سفتی و ماتریس نیروها هستند که در رابطه (12) الی (14) به دست می‌آیند.

$$M \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + H(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{\theta}, x_1, x_2, \theta) = [F] \quad (11)$$

$$M = \begin{bmatrix} m_A & 0 & 0 \\ 0 & m_B & 0 \\ 0 & 0 & I_o + m_A x_1^2 + m_B x_2^2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$H = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{bmatrix} \quad (13\text{-الف})$$

مستقل، سه درجه آزادی محوری برای توصیف رفتار دینامیکی این عملگر در نظر گرفته می‌شود.

در پژوهش‌های پیشین، سفتی سیستم انتقال قدرت در عملگرهای کشویی به ویژه سیستم‌های دارای مکانیزم بال‌اسکرو کمتر مورد توجه قرار گرفته و یا به صورت ثابت لحاظ شده است؛ که دلیل آن متغیر بودن سفتی این نوع سیستم انتقال قدرت در حین حرکت عملگر و پیچیده بودن اعمال این سفتی در معادلات دینامیکی است. در حالی که این عدم صلبیت می‌تواند تأثیر قابل توجهی در دقت و عملکرد این عملگرها داشته باشد. در "شکل 1" یک نمونه از این عملگرهای کشویی نشان داده شده است که در حال آزمایش شدن میزان سفتی در حین حرکت، قرار دارد.

در این پژوهش، برای یک عملگر کشویی، دو سفتی محوری مجزا در نظر گرفته شده است. یک سفتی محوری ثابت در پیستون و دیگری به صورت پیچشی و متغیر در سیستم انتقال قدرت (بال‌اسکرو) تعریف شده است و معادلات دینامیکی این سیستم به دست آمده‌اند. برای بهتر مشخص شدن تأثیر انعطاف‌پذیری بال‌اسکرو در پاسخ عملگر، در ابتدا معادلات دینامیکی یک عملگر، بدون در نظر گرفتن سفتی بال‌اسکرو، محاسبه و تغییرات مقادیر درجات آزادی آن، برای نیروهای ورودی معین، استخراج شدند.

2- عملگر با پیستون انعطاف‌پذیر و بال‌اسکروی صلب

2-1- مدل‌سازی عملگر

این قسمت از پژوهش، برای روشن کردن موضوع در قالبی ساده‌تر و نیز برای مشخص شدن تأثیر عدم در نظر گرفتن انعطاف‌پذیری بال‌اسکرو در ارتعاشات عملگر کشویی دوار انجام شد. معادلات مربوط به دستگاه‌های غیر صلب جرم توده‌ای بسیار ساده‌تر و محاسبات آن‌ها بسیار سریع‌تر از دستگاه‌های غیر صلب پیوسته¹ است و در این مدل‌سازی نیز، جرم و سفتی پیستون به صورت توده‌ای فرض شده است. به این صورت که جرم پیستون به دو قسمت مساوی تقسیم شده و هر قسمت در یک سر پیستون قرار گرفته است. خاصیت انعطاف‌پذیری پیستون به وسیله‌ی یک فنر ساده خطی بین این دو جرم ایجاد می‌شود. همان‌طور که در "شکل 2" مشخص است، این مدل از عملگر، دارای سه درجه آزادی است که عبارت‌اند از: x_1 که محل انتهای پیستون در نقطه‌ی A ، x_2 محل نوک پیستون در نقطه‌ی B و θ زاویه‌ی دوران عملگر نسبت به

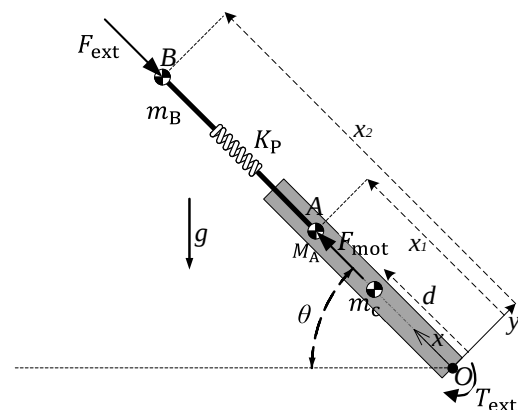


Fig. 2 Schematic model of prismatic actuator with axial flexible piston and exerted forces on it

شکل 2 طرح شماتیک عملگر کشویی با پیستون انعطاف‌پذیر محوری و نیروهای وارد بر آن

² Matlab

¹ Contiguous

$$\vec{v}_B = \dot{x}_2 \vec{i} + x_2 \dot{\theta} \vec{j} \quad (15)$$

جرم نقطه A همراه با سیستم انتقال قدرت (بال اسکرو) دوران می کند و همزمان با هر دوران، به اندازه ی گام بال اسکرو P ، در راستای محور عملگر حرکت انتقالی دارد. همچنین این جرم به همراه کل عملگر نسبت به افق دوران می کند. سرعت این جرم نقطه ای مطابق رابطه (16) بدست می آید. توجه شود که در این مدل هم (مانند مدل بدون بال اسکرو) متغیر x_1 وجود دارد و طبق معادلات (17) و (18) به متغیر φ_n وابسته است. متغیر η برای سهولت بیشتر در نوشتن معادلات تعریف شده است.

$$\vec{v}_A = (\eta \dot{\varphi}_n) \vec{i} + (\eta \varphi_n) \dot{\theta} \vec{j} \quad (16\text{-الف})$$

$$\eta = \frac{P}{2\pi} \quad (16\text{-ب})$$

$$\frac{P \dot{\varphi}_n}{2\pi} = \dot{x}_1 \quad (17)$$

$$\frac{P \varphi_n}{2\pi} = x_1 \quad (18)$$

انرژی جنبشی U_{total} و انرژی پتانسیل V_{total} سیستم طبق معادلات (19) و (20) محاسبه می شوند.

$$U_{total} = \frac{1}{2} I_c \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2 + \frac{1}{4} I_b \dot{\varphi}_{mot}^2 + \frac{1}{4} I_b \dot{\varphi}_n^2 \\ = \frac{1}{4} I_b (\dot{\varphi}_{mot}^2 + \dot{\varphi}_n^2) + \frac{1}{2} I_c \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_A (\dot{x}_2^2 + x_2^2 \dot{\theta}^2) \\ + \frac{1}{2} m_B ((\eta \dot{\varphi}_n)^2 + (\eta \varphi_n)^2 \dot{\theta}^2) \quad (19)$$

$$V_{total} = \frac{1}{2} K_p (l_{pz} - (x_2 - \eta \varphi_n))^2 + \frac{1}{2} K_{bt} (\varphi_n - \varphi_{mot})^2 \\ + m_B \eta \varphi_n g \sin \theta + m_A x_2 g \sin \theta + m_c d g \sin \theta \quad (20)$$

یک بال اسکرو در واقع تیری بلند و باریک با مقطع دایره ای است و چنین تیری صلبیت^۲ پیچشی بسیار کمتری نسبت به صلبیت محوری دارد [11]. بنابراین، در این پژوهش، بال اسکرو در راستای محوری صلب در نظر گرفته شده است. معادله (21) بیان کننده ی سفتی پیچشی متغیر بال اسکرو است. با تغییر φ_n برحسب زمان مقدار K_b نیز تغییر می کند. ضریب سفتی برشی ماده بال اسکرو، J_b ممان اینرسی قطبی سطح مقطع بال اسکرو و l_b طول متغیر بال اسکرو است.

$$K_b = \frac{G_b J_b}{l_b} = \frac{2\pi G_b J_b}{P \varphi_n} \quad (21)$$

3-3- محاسبه معادلات لاگرانژ

حال با استفاده از رابطه کلی روش لاگرانژ، معادلات دیفرانسیل سیستم به دست می آیند. θ ، φ_n ، T_{mot} و x_2 به عنوان خروجی مسئله و F_{ext} ، φ_{mot} و T_{ext} ورودی مسئله به شمار می آیند. با استفاده از رابطه کار مجازی (22) و سپس مشتق گیری از رابطه کار نسبت به هر یک از متغیرهای تعمیم یافته ی سیستم، نیروهای تعمیم یافته به دست می آیند.

$$\delta W = T_{mot} \delta \varphi_{mot} + F_{ext} \delta x_2 + T_{ext} \delta \theta \quad (22)$$

در نهایت با حل عددی دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی (23) به کمک حلگر ode45 نرم افزار متلب برای بازه زمانی موردنظر، مقادیر تغییرات خروجی ها با تغییر زمان به دست می آیند. M ماتریس جرمی، H ماتریس سفتی و F ماتریس نیروها است که به ترتیب در روابط (24) الی (26) آورده شده اند. I_b و I_c به ترتیب ممان اینرسی جرمی بال اسکرو و سیلندر هستند.

$$M \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_{mot} \\ \ddot{\varphi}_n \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + H(\varphi_{mot}, \varphi_n, \dot{x}_2, \dot{\theta}, \varphi_{mot}, \varphi_n, x_2, \theta) = [F] \quad (23)$$

$$H_1 = m_A x_1 \dot{\theta}^2 - K(L - (x_2 - x_1)) - m_A g \sin \theta \quad (13\text{-ب})$$

$$H_2 = m_B x_2 \dot{\theta}^2 + K(L - (x_2 - x_1)) - m_B g \sin \theta \quad (13\text{-پ})$$

$$H_3 = 2m_A \dot{\theta} \dot{x}_1 x_1 + 2m_B \dot{\theta} \dot{x}_2 x_2 \\ + (m_c d + m_A x_1 + m_B x_2 g \cos \theta) \quad (13\text{-ت})$$

$$F = \begin{bmatrix} F_{mot} \\ F_{ext} \\ T_{ext} \end{bmatrix} \quad (14)$$

3- عملگر با پیستون و بال اسکروی انعطاف پذیر

3-1- مدل سازی عملگر

در این مدل، علاوه بر انعطاف پذیر بودن پیستون، بال اسکروی این عملگر نیز دارای خاصیت انعطاف پذیری است. بال اسکرو نوعی سیستم انتقال قدرت است که حرکت دورانی ایجاد شده در موتور را به کمک چرخش یک پیچ بلند درون یک مهره ی متصل به بارگذاری، به حرکت انتقالی خطی تبدیل می کند. انعطاف پذیری در نظر گرفته شده در بال اسکرو از نوع سفتی پیچشی است. نکته قابل توجه در سفتی پیچشی بال اسکرو، متغیر بودن مقدار سفتی براساس مکان مهره روی بال اسکرو است. در واقع هرچه طول بخشی از بال اسکرو که زیر بار قرار دارد بیشتر باشد، میزان سفتی فنر کمتر خواهد شد. همین مسئله باعث پیچیدگی استخراج معادلات دینامیکی می شود. "شکل 3" طرح شماتیک این مدل را نشان می دهد. محور x همواره در راستای طولی عملگر و محور y عمود بر آن قرار دارد و عملگر حرکت صفحه ای دارد. این مدل دارای چهار درجه آزادی است که عبارتند از:

1- جابجایی خطی نوک پیستون (x_2)

2- دوران انتهای بال اسکرو در نقطه A حول محور x (حرکت مهره در

راستای محور x) (φ_n)

3- دوران شفت موتور حول محور x (φ_{mot})

4- زاویه دوران عملگر نسبت به راستای افق (θ)

3-2- محاسبه انرژی جنبشی و پتانسیل عملگر با پیستون و

بال اسکروی انعطاف پذیر

مشابه بخش 2، برای به دست آوردن مقادیر انرژی جنبشی، باید معادلات سرعت حرکت اجزای سیستم به دست آید. جرم واقع در نقطه ی B در راستای محور عملگر حرکت خطی و به همراه کل سیستم حرکت دورانی دارد. سرعت این جرم نقطه ای مطابق رابطه (15) به دست می آید.

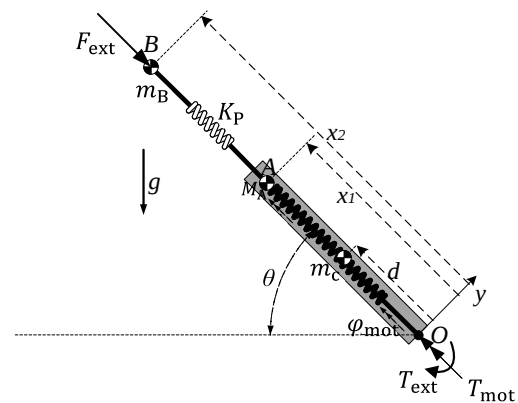


Fig.3 Schematic model of prismatic actuator with both flexible piston and ballscrew and exerted forces on it

شکل 3 طرح شماتیک عملگر کشویی با پیستون و بال اسکروی انعطاف پذیر و نیروهای وارد بر آن

¹ Ballscrew pitch

² Compliance

"شکل 1" نشان داده شده است.

$$x_1(t) = 1 + 0.02t^2, \quad 0 < t < 5 \quad (27\text{-الف})$$

$$x_1(t) = \frac{3}{2} + 0.2(t - 5) - 0.02t^2, \quad 5 < t < 10 \quad (27\text{-ب})$$

$$F_{\text{ext}} = 100(m_A + m_B)g \sin 350t \quad (28)$$

$$T_{\text{ext}} = 100 \text{ Nm} \quad (29)$$

متغیر x_2 که خروجی اصلی مسئله و نشان‌دهنده‌ی محل مجری نهایی عملگر است، از هر دو روش تحلیلی و روش عددی (در نرم‌افزار آباکوس) برحسب زمان به دست آمد و اختلاف این دو روش برای این متغیر در "شکل 5" نشان داده شده است. روش تحلیلی و عددی دارای شرایط مرزی، نیرویی و هندسی یکسانی هستند.

4-2- عملگر دارای پیستون و بال اسکروی انعطاف‌پذیر

مقادیر پارامترهای مدل عملگر دارای پیستون و بال اسکروی انعطاف‌پذیر در جدول 3 و همچنین مقادیر اولیه متغیرها در جدول 4 آورده شده است. نیروی خارجی F_{ext} و گشتاور خارجی T_{ext} به ترتیب به همان صورت رابطه (28) و (29) اعمال شدند. رابطه‌ی (30) معادله‌ی بین دوران محوری بال اسکرو و جابجایی محوری مهره را بیان می‌کند. با قرار دادن رابطه‌ی (27) در رابطه‌ی (30)، حرکت چرخشی ورودی از سوی موتور به دست می‌آید. نیروی وزن و اثرات اینرسی دورانی لحاظ شده‌اند. در این قسمت نیز همانند قسمت 4-1 سعی شده است تا مقادیر پارامترهای ثابت به مقادیر فیزیکی در یک عملگر واقعی نزدیک باشد. برای این منظور از مشخصات عملگر ساخته شده در آزمایشگاه رباتیک دانشگاه فردوسی مشهد استفاده شد که تصویر آن در "شکل 1" نشان داده شده است.

$$\varphi_{\text{mot}} = \frac{x_1}{P} \quad (30)$$

نتایج دو روش تحلیلی و عددی (در نرم‌افزار آباکوس) برای متغیر x_2

جدول 1 مقادیر پارامترهای ثابت عملگر دارای پیستون انعطاف‌پذیر

Table 1 Values of constant parameters of actuator with flexible piston			
مقدار	نام پارامتر	مقدار	نام پارامتر
1m	d	50kg	m_a, m_b
10kg	m_c	9.81m/s ²	g
4550N/mm	K_p	6 kgm ²	I_c

جدول 2 مقادیر اولیه‌ی متغیرهای عملگر دارای پیستون انعطاف‌پذیر

Table 2 Initial values of variables of actuator with flexible piston			
مقدار اولیه	متغیر	مقدار اولیه	متغیر
0	$\dot{x}_1$	1m	x_1
0	$\dot{x}_2$	2m	x_2
0	$\dot{\theta}$	0	θ

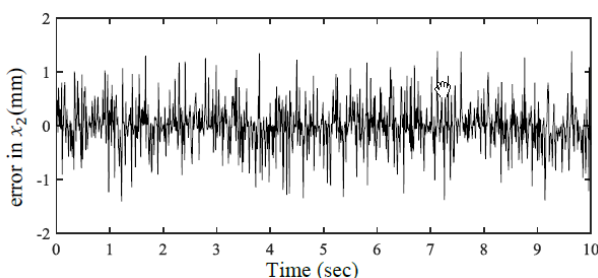


Fig.5 The subtraction of analytical and numerical result for axial displacement x_2 at the actuator with elastic piston

شکل 5 تفاضل نتایج عددی و تحلیلی در جابجایی محوری x_2 برای عملگر دارای پیستون انعطاف‌پذیر

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}I_b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}I_b + m_B\eta^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_c + m_Ax_2^2 + m_B\eta^2\varphi_n^2 \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$H = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ H_4 \end{bmatrix} \quad (25\text{-الف})$$

$$H_1 = -k_b(\varphi_n - \varphi_{\text{mot}}) \quad (25\text{-ب})$$

$$H_2 = -m_B\eta^2\varphi_n\dot{\theta}^2 + k_p(l_{p_z} - (x_2 - \eta\varphi_n))\eta + \frac{1}{2}J_bG_b(\varphi_n - \varphi_{\text{mot}})^2 - \frac{JG}{\eta\varphi_n}(\varphi_n - \varphi_{\text{mot}}) - m_B\eta g \sin \theta \quad (25\text{-پ})$$

$$H_3 = -m_Ax_2\dot{\theta}^2 - K_p(l_{p_z} - (x_2 - \eta\varphi_n)) + m_Ag \sin \theta \quad (25\text{-ت})$$

$$H_4 = (2m_Ax_2\dot{x}_2 + 2m_B\eta^2\varphi_n\dot{\varphi}_n)\dot{\theta} + (m_B\varphi_n\eta + m_Ax_2 + m_cd)g \cos \theta \quad (25\text{-ث})$$

$$F = \begin{bmatrix} T_{\text{mot}} \\ 0 \\ F_{\text{ext}} \\ T_{\text{ext}} \end{bmatrix} \quad (26)$$

4- مقایسه نتایج بررسی مدل دینامیکی عملگر بین روش تحلیلی و روش المان محدود

هر دو عملگر با روش پارامترهای توده‌ای در نرم‌افزار المان محدود آباکوس¹ شبیه‌سازی شدند و سپس برای پارامترهای هندسی و ورودی نیروهای مشخص، نتایج روش تحلیلی و روش المان محدود با هم مقایسه شدند.

4-1- عملگر دارای پیستون انعطاف‌پذیر

مقادیر ورودی x_1 به صورت یک مسیر پارابولیک² با شتاب ثابت و بازه‌ی زمانی 10 ثانیه تعریف شد که در "شکل 4" نشان داده شده است و معادله‌ی (27) بیانگر آن است. برای شرایطی که ورودی‌های F_{ext} و T_{ext} به صورت روابط (28) و (29) و مقدار زمان حل 10 ثانیه باشد، معادلات دینامیک تحلیلی مورد محاسبه قرار گرفتند و نیز شبیه‌سازی در نرم‌افزار المان محدود آباکوس انجام شد. مقادیر پارامترهای هندسی مدل عملگر دارای پیستون انعطاف‌پذیر محوری، در جدول 1 و مقادیر اولیه متغیرها در جدول 2 آورده شده است. سعی شده است تا مقادیر پارامترهای ثابت به مقادیر فیزیکی در یک عملگر واقعی نزدیک باشد، برای این منظور از مشخصات عملگر ساخته شده در آزمایشگاه رباتیک دانشگاه فردوسی مشهد استفاده شد که تصویر آن در

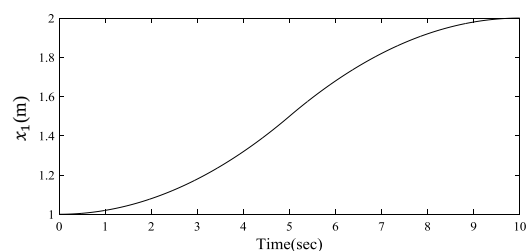


Fig.4 The variations of input x_1 versus time

شکل 4 تغییرات ورودی x_1 برحسب زمان

¹ Abaqus

² Parabolic trajectory

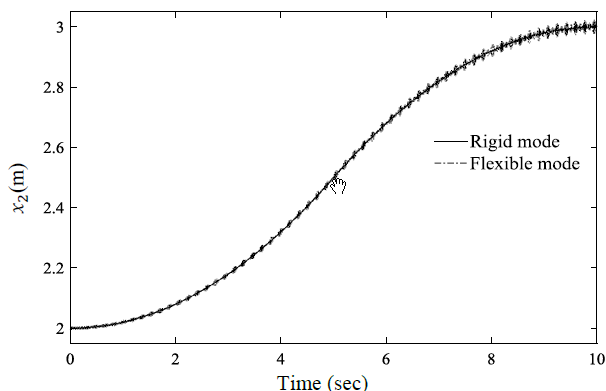


Fig. 8 The comparison of analytical results for axial displacement x_2 between rigid and flexible modes of actuator (with elastic piston and ballscrew)

شکل 8 مقایسه‌ی نتایج تحلیلی برای جابجایی محوری x_2 بین حالت عملکرد صلب و عملکرد انعطاف پذیر (با در نظر گرفتن انعطاف پذیری در پیستون و بال اسکرو)

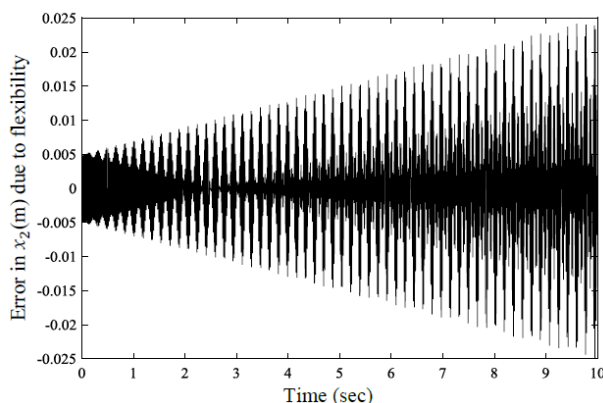


Fig. 9 The subtraction of analytical results in rigid and flexible (with elastic piston and ballscrew) modes of actuator in axial displacement x_2 شکل 9 اختلاف جابجایی محوری x_2 بین حالت عملکرد صلب و عملکرد انعطاف پذیر (با در نظر گرفتن انعطاف پذیری در پیستون و بال اسکرو) در روش تحلیلی

خروجی x_2 بین دو حالت عملکرد صلب و غیرصلب مقایسه شده است. در حالت غیرصلب هم پیستون و هم بال اسکرو به صورت انعطاف پذیر هستند. به منظور تعیین اثر میزان سفتی اعضای انعطاف پذیر بر پاسخ نهایی عملکرد، به ازای مقادیر مختلف مدول برشی برای بال اسکرو، مقدار بیشترین خطای ایجاد شده در خروجی x_2 استخراج شد که در "شکل 10" نشان داده شده است. سایر ویژگی‌های فیزیکی عملکرد از جمله سفتی پیستون ثابت در نظر گرفته شدند.

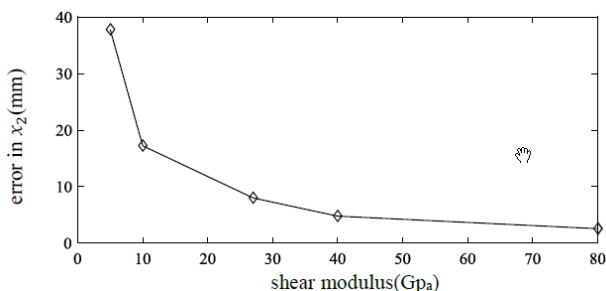


Fig. 10 The maximum error in output x_2 for different values of shear modulus of ballscrew

شکل 10 بیشترین خطای ایجاد شده در خروجی x_2 به ازای مقادیر مختلف مدول برشی بال اسکرو

جدول 3 مقادیر پارامترهای ثابت عملکرد دارای پیستون و بال اسکروی انعطاف پذیر
Table 3 Values of constant parameters of actuator with flexible piston and ballscrew

مقدار	نام پارامتر	مقدار	نام پارامتر
1m	d	50kg	m_A, m_B
10kg	m_c	9.81m/s^2	g
4550N/mm	K_p	6 kgm^2	I_c
27GPa	G_b	0.005m/rev	P
2.06kgm^2	I_b	$981\text{e-}12\text{m}^4$	J_p

جدول 4 مقادیر اولیه‌ی متغیرهای عملکرد دارای پیستون و بال اسکروی انعطاف پذیر
Table 4 Initial values of variables of actuator with flexible piston and ballscrew

مقدار اولیه	متغیر	مقدار اولیه	متغیر
0	$\dot{\phi}_n$	200rev	ϕ_n
0	$\dot{\phi}_{mot}$	200rev	ϕ_{mot}
0	θ	0	θ
0	$\dot{x}_2$	2m	x_2

برحسب زمان به دست آمد و اختلاف این دو روش برای این متغیر در "شکل 6" نشان داده شده است. روش تحلیلی و عددی، دارای شرایط مرزی، نیرویی و هندسی یکسانی هستند.

برای بهتر مشخص شدن اثر وجود سیستم انتقال قدرت با سفتی متغیر، در "شکل 7" مقایسه‌ی نتایج تحلیلی مربوط به تفاوت متغیر x_2 بین مدل اول و دوم، نشان داده شده است. با توجه به این که سفتی محوری پیستون، شرایط اولیه و نیروهای ورودی در هر دو مدل یکسان هستند، تنها عامل متمایز، وجود سفتی متغیر بال اسکرو است. همچنین در "شکل 8" مقایسه‌ی بین مقادیر خروجی x_2 بین عملکرد کاملاً صلب و عملکرد دارای پیستون و بال اسکروی منعطف نشان داده شده است. همچنین در "شکل 9" اختلاف

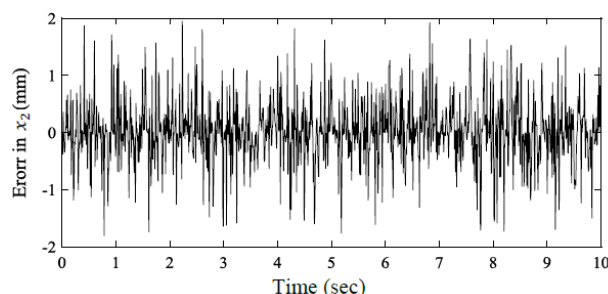


Fig. 6 The subtraction of analytical and numerical result for axial displacement x_2 at the actuator with elastic piston and ballscrew

شکل 6 تفاضل نتایج عددی و تحلیلی جابجایی محوری x_2 در عملکرد دارای پیستون و بال اسکروی منعطف

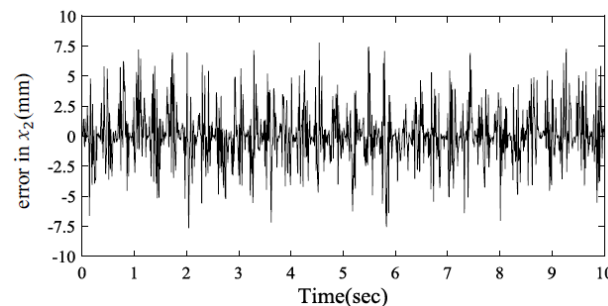


Fig. 7 The subtraction of analytical result between both models of actuator (with and without elastic ballscrew) for axial displacement x_2 شکل 7 تفاضل نتایج تحلیلی دو عملکرد (با در نظر گرفتن انعطاف پذیری در بال اسکرو و بدون در نظر گرفتن انعطاف پذیری بال اسکرو) برای جابجایی محوری x_2

5- جمع بندی نتایج

در پژوهش‌های پیشین، برای چنین عملگرهایی فقط یک یا دو درجه آزادی در راستای محوری و معمولاً سفتی محوری اجزای عملگر ثابت در نظر گرفته شده است؛ در حالی که در این پژوهش سه درجه آزادی محوری برای توصیف رفتار دینامیکی این عملگر در نظر گرفته شده است. همچنین سفتی پیچشی بال اسکرو به صورت وابسته به طول فعال بال اسکرو در نظر گرفته شد که به حالت واقعی بسیار نزدیک‌تر است.

نتایج روش تحلیلی و عددی (المان محدود) برای جابجایی محوری در عملگر اول و عملگر دوم، به ترتیب دارای حداکثر اختلاف 1.5mm و 2mm هستند. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که معادلات تحلیلی نوشته شده برای این دو عملگر صحیح هستند و به درستی رفتار عملگرها را توصیف می‌کنند.

با بررسی "شکل 7" مشخص می‌شود که در نظر گرفتن سفتی متغیر سیستم انتقال قدرت (بال اسکرو)، تغییر قابل توجهی در دقت جابجایی مجری نهایی عملگر خواهد داشت و صرف نظر کردن از این سفتی می‌تواند خطای زیادی به اندازه‌ی 8mm در پیش‌بینی مسیر حرکت مجری نهایی این عملگرها به وجود آورد.

مقایسه‌ی نتایج تحلیلی برای جابجایی محوری x_2 بین حالت عملگر صلب و عملگر انعطاف‌پذیر نشان می‌دهد که در بازه‌ی زمانی در نظر گرفته شده، خطایی بین 5mm الی 25mm ایجاد شده است که با گذشت زمان روند افزایشی داشته است.

بررسی تاثیر میزان سفتی ماده‌ی بال اسکرو بر روی پاسخ نهایی عملگر نشان می‌دهد که به ازای مقادیر مدول برشی کمتر از 40GPa مقدار خطا با کاهش مدول برشی به شدت افزایش می‌یابد، اما برای مقادیر بیشتر از 40GPa مقدار خطا تغییرات کمتری در ازای تغییرات مدول برشی دارد.

در این پژوهش، مدل دینامیکی عملگر با سفتی متغیر (برحسب طول مؤثر بال اسکرو) به دست آمد. حرکت دینامیکی به همراه تغییر سفتی در بال اسکرو، باعث پیچیدگی محاسبه‌ی مشتق‌های جزئی حین به دست آوردن معادلات معرف رفتار این سیستم می‌شد. از این معادلات بدست آمده می‌توان در معادلات دینامیک ربات‌ها به خصوص ربات‌های موازی استفاده کرد و مدل دینامیکی تحلیلی ربات با عملگرهای الاستیک را به دست آورد. این مدل دینامیکی قادر خواهد بود خطا و ارتعاشات ایجاد شده در تمام طول مسیر طی شده توسط مجری نهایی ربات را پیش‌بینی کرده و به طراحان، امکان اصلاح ربات از نظر میزان صلبیت را خواهد داد و همچنین کمک بزرگی به طراحی کنترلرهای مبتنی بر مدل دینامیکی برای چنین عملگرهایی خواهد کرد.

6- فهرست علائم

d	محل مرکز جرم سیلندر
F	نیروی محوری
g	شتاب گرانش
G	ضریب سفتی برشی
H	ماتریس سفتی مجموعه
I	ممان اینرسی جرمی
J	ممان اینرسی قطبی سطح مقطع بال اسکرو
K	ضریب سفتی فنر
l	طول
L	لاگرانژین

m جرم

M ماتریس جرمی مجموعه

P گام بال اسکرو

Q_i نیروی تعمیم یافته

q_i درجات آزادی تعمیم یافته مجموعه

T گشتاور خارجی

t زمان

U انرژی جنبشی کل مجموعه

v سرعت

V انرژی پتانسیل کل مجموعه

W کار

x_1 محل سر پیستون داخل سیلندر

x_2 محل نوک پیستون (مجری نهایی عملگر)

علائم یونانی

θ زاویه عملگر با راستای افق

φ زاویه دوان محوری

η متغیر کمکی

زیر نویس‌ها

b بال اسکرو

c سیلندر

ext خارجی

موتور

n مهره‌ی بال اسکرو

p پیستون

$total$ کلی

z لحظه‌ی صفر (اولیه)

7- مراجع

- [1] S. K. Dwivedy, P. Eberhard, Dynamic analysis of flexible manipulators, a literature review, *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 41, No. 7, pp. 749–777, 2006.
- [2] D. Zhang, *Spatial Parallel Robotic Machines with Prismatic Actuators, Parallel Robotic Machine Tools*, Boston, MA: Springer US, 2010, pp. 69–92.
- [3] G. Zhu, S. S. Ge, T. H. Lee, Simulation studies of tip tracking control of a single-link flexible robot based on a lumped model, *Robotica*, Vol. 17, No. 1, pp. 71–78, 1999.
- [4] W. Khalil, M. Gautier, Modeling of mechanical systems with lumped elasticity, *IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, pp. 3964–3969, 2000.
- [5] D. Nissing, A vibration damped flexible robot: identification and parameter optimization, in *Proceedings of the 2000 American Control Conference. ACC (IEEE Cat. No.00CH36334)*, Vol. 3, No. June, pp. 1715–1719, 2000.
- [6] S. M. Megahed, K. T. Hamza, Modeling and simulation of planar flexible link manipulators with rigid tip connections to revolute joints, *Robotica*, Vol. 22, No. 3, pp. 285–300, 2004.
- [7] J. M. Selig, Lumped parameter dynamic modeling for the flexible manipulator, in *Fifth World Congress on Intelligent Control and Automation (IEEE Cat. No.04EX788)*, Vol. 1, No. 50275002, pp. 280–284, 2004.
- [8] S. M. Kim, Lumped element modeling of a flexible manipulator system, *IEEE/ASME Transaction Mechatronics*, Vol. 20, No. 2, pp. 967–974, 2015.
- [9] J.-S. Chen, Y.-K. Huang, C.-C. Cheng, Mechanical model and contouring analysis of high-speed ball-screw drive systems with compliance effect, *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, Vol. 24, No. 3–4, pp. 241–250, 2004.
- [10] K. K. Varanasi, S. A. Nayfeh, The dynamics of lead-screw drives: Low-order modeling and experiments, *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 126, No. 2, pp. 388–396, 2004.
- [11] S. Frey, A. Dadalau, A. Verl, Expedient modeling of ball screw feed drives, *Production Engineering*, Vol. 6, No. 2, pp. 205–211, 2012.
- [12] M. Ebrahimi, R. Whalley, Analysis, modeling and simulation of stiffness in

- [14] T. Liang, D. Lu, X. Yang, J. Zhang, X. Ma, W. Zhao, Feed fluctuation of ball screw feed systems and its effects on part surface quality, *International Journal of Machine Tools and Manufacture.*, Vol. 101, pp. 1–9, 2016.
- [15] H. Yu, X. Feng, Dynamic modeling and spectrum analysis of macro–macro dual driven system, *Journal of Computational Nonlinear Dynamics*, Vol. 11, No. 4, pp. 1-5, 2016.
- machine tool drives, *Computers and Industrial Engineering*, Vol. 38, No. 1, pp. 93–105, 2000.
- [13] G.-H. Feng, Y.-L. Pan, Investigation of ball screw preload variation based on dynamic modeling of a preload adjustable feed-drive system and spectrum analysis of ball-nuts sensed vibration signals, *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, Vol. 52, No. 1, pp. 85–96, 2012.