



تحلیل کمانش و ارتعاشات آزاد پانل ساندویچی استوانه‌ای ضخیم با هسته انعطاف پذیر با استفاده از تئوری مرتبه بالا

علیرضا پورموید¹، کرامت ملک زاده فرد^{2*}، مرتضی شهری³

1- دانشجوی دکتری، مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران

2- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران

3- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران

* تهران، صندوق پستی 13445768، kmalekzadeh@mut.ac.ir

چکیده

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 21 آذر 1395

پذیرش: 27 بهمن 1395

ارائه در سایت: 21 اسفند 1395

کلید واژگان:

ارتعاشات آزاد

کمانش

پنل ساندویچی استوانه‌ای

تئوری مرتبه بالا بهبود یافته

حل تحلیلی

در این پژوهش، به بررسی تحلیل ارتعاشات آزاد و کمانش پنل ساندویچی استوانه‌ای ضخیم با هسته انعطاف‌پذیر با شرایط مرزی ساده با استفاده از تئوری مرتبه بالای بهبود یافته پرداخته شده است. بارگذاری تک محوره فشاری روی لبه‌های بالا و پایینی در دو سوی پنل به صورت همزمان و یکنواخت اعمال شده است. میدان جابجایی در این پژوهش برای رویه‌های ضخیم به صورت چند جمله‌ای درجه سه و برای هسته انعطاف‌پذیر با استفاده از مدل دوم فروستینگ نوشته شده است. در این مدل 27 درجه آزادی وجود دارد. در تئوری حاضر تنش نرمال عرضی در رویه‌ها و تنش‌های درون‌صفحه‌ای در هسته در نظر گرفته شده است. برای به دست آوردن پاسخ دقیق با توجه به این که رویه‌ها ضخیم در نظر گرفته شده‌اند از هیچ‌کدام از مولفه‌های تنش در رویه‌ها و هسته صرف‌نظر نگردیده است. معادلات حاکم و شرایط مرزی بر مبنای اصل همپلتون به دست آمدند. اثر پارامترهای مهمی همچون نسبت طول به شعاع میانی هسته، ضخامت هسته به ضخامت کل پنل، طول موج محیطی و اثر قرارگیری زوایای الیاف بر روی فرکانس طبیعی و رفتار کمانش پنل ساندویچی استوانه‌ای شکل تحت بار محوری بررسی شد. به منظور صحت‌گذاری، نتایج به دست آمده با نتایج مدل‌سازی پنل ساندویچ استوانه‌ای شکل در نرم‌افزار آباکوس مقایسه شده است. سادگی، جامعیت روش در تحلیل پنل‌های ساندویچی استوانه‌ای شکل با رویه‌های نازک و ضخیم، دقت بالای حل تحلیلی ارائه شده و در نظر گرفتن پارامترهای مهمی همچون $(1 + z_c/R_c)$ از مزیت‌های اصلی این مقاله نسبت به روش‌های دیگر می باشد.

Buckling and Vibration analysis of a thick cylindrical sandwich panel with flexible core using an improved higher-order theory

Ali Reza Pourmoayed, Keramat MalekzadehFard*, Morteza Shahravi

Department of Aerospace Engineering, Malek Ashtar University of Technology, Tehran, Iran

* P.O.B. 13445768, Tehran, Iran, kmalekzadeh@mut.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper

Received 11 December 2016

Accepted 15 February 2017

Available Online 11 March 2017

Keywords:

Free vibration

Buckling

Cylindrical sandwich panel

Improved higher-order theory

Analytical analysis

ABSTRACT

In this paper, the behavior of free vibrations and buckling of the thick cylindrical sandwich panel with a flexible core and simply supported boundary conditions using a new improved higher-order sandwich panel theory were investigated. An axial compressive load is applied on the edges of the top and bottom face sheets simultaneously. The formulation used the third-order polynomial description for the displacement fields of thick composite face sheets and for the displacement fields in the core layer based on the displacement field of Frostig's second model. In this model, there are twenty- seven degrees of freedom. The transverse normal stress in the face sheets and the in-plane stresses in the core were considered. To calculate exact solution, according to thick face sheets, all of the stress components were engaged. The governing equations and boundary conditions were derived via the Hamilton's principle. The effect of some important parameters such as those of thickness ratio of the core to panel, the length to radius ratio of the core, circumferential wave number and composite lay-up sequences on free vibration response and buckling of the panel were investigated. In order to validate the results, the obtained results were compared with those obtained using finite element ABAQUS software. The advantage of this paper is simplicity, integrity of method in the analysis of cylindrical sandwich panels with the thin and thick face sheets, exact solution and consideration of important terms such as $(1 + z_c/R_c)$ in equations.

1- مقدمه

یافته است. دلیل اصلی این موضوع ویژگی‌هایی برجسته پنل‌های ساندویچی

از قبیل نسبت مقاومت به وزن زیاد، مقاومت عالی در برابر خوردگی و خستگی، امکان استفاده از رویه‌های کامپوزیتی و هسته با خواص جهت‌دار و

استفاده از سازه‌های ساندویچی به طور روز افزون در صنایع مختلف هوافضا، حمل و نقل جاده‌ای، دریایی و سازه‌های ساختمانی در سه دهه اخیر گسترش

Please cite this article using:

A. R. Pourmoayed, K. MalekzadehFard, M. Shahravi, Buckling and Vibration analysis of a thick cylindrical sandwich panel with flexible core using an improved higher-order theory, Modares Mechanical Engineering, Vol. 17, No. 3, pp. 227-238, 2017 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

زمینه به تحقیقات محققانی همانند فروستینگ و تامسون [11]، ملک زاده و همکاران [12]، می‌توان اشاره نمود. رحمانی و همکارانش [13] ارتعاشات آزاد یک پوسته استوانه‌ای ساندویچی با هسته انعطاف‌پذیر را بر مبنای تئوری مرتبه بالای ورق‌ها بررسی کردند. آن‌ها میدان جابجایی در هسته را، با فرض یکنواختی تنش‌های برشی در جهت ضخامت و با استفاده از روابط الاستیسیته به‌دست آوردند و برای رویه‌ها از تئوری کلاسیک پوسته‌ها استفاده کردند. کاگاو [14] ارتعاشات غیرمحوری متقارن پوسته‌های استوانه‌ای ساندویچی را مورد بررسی قرار داد. در این مطالعه از تئوری برشی تک لایه معادل مرتبه اول استفاده گردیده و برای حل روش ناویر به کار گرفته شده است. هو [15] ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای متقارن با هسته لانه زنبوری را با استفاده از روش نوارهای محدود مورد بررسی قرار داد. در این تحقیق، همگرایی فرکانس‌های بالا بر مبنای تعداد نوارها مورد مطالعه قرار گرفته است. نتایج بیانگر تخمین یک فرکانس بیشتر از فرکانس‌های تخمینی از روش تحلیلی در این روش می‌باشد. سنکوویچ [16] خمش، ارتعاشات آزاد و کمانش ورق‌های ساندویچی را با استفاده از مدل جابجایی لایه‌گون ارائه نمود. در مدل پیشنهادی تغییرات مؤلفه‌های جابجایی در صفحه، خطی منقطع و جابجایی عرضی، ثابت در راستای ضخامت ورق فرض گردیده است. با میدان جابجایی فرض شده نسبت کرنش-جابجایی، معادلات ساختاری سه‌بعدی تک لایه و معادلات حرکت به کمک قانون همپلتون استخراج شده است. نظری و همکاران [17] به منظور دستیابی به بیشترین فرکانس طبیعی پوسته‌های استوانه‌ای تشکیل شده از چند لایه فلز و کامپوزیت را مورد بهینه‌سازی قرار دادند. آن‌ها برای تعیین پاسخ ارتعاشات آزاد، با استفاده از سری‌های فوریه مساله موردنظر را تبدیل به یک مساله مقادیر ویژه نمودند.

با توجه به تحقیقات انجام گرفته، تاکنون تحقیقی که مساله ارتعاشات آزاد و کمانش پنل ساندویچی استوانه‌ای با هسته انعطاف‌پذیر که دارای رویه‌هایی ضخیم و تمام مولفه‌های تنش در نظر گرفته شده باشد، پرداخته نشده است. در این تحقیق با در نظر گرفتن تئوری مرتبه بالا برای رویه‌ها و هسته، براساس مدل دوم فروستینگ رویه‌های بالا و پایین ضخیم، میدان جابجایی به‌صورت چند جمله‌ای درجه سه و تمام مولفه‌های تنش در نظر گرفته شده است. علاوه بر این، در روابط مربوط به منته‌های تنش هسته ترم $(1 + z_c/R_c)$ که ترم خیلی مهمی در تحلیل پنل ساندویچی استوانه‌ای شکل می‌باشد در نظر گرفته شده و انتگرالگیری نیز به‌صورت دقیق (پوست) انجام شده است.

2- استخراج معادلات

در این بخش، ابتدا مدل هندسی مورد مطالعه قرار می‌گیرد. سپس تئوری مورد استفاده ارائه می‌گردد. بعد از آن شرایط سازگاری جابجایی‌ها و تنش بیان می‌شود. و در انتهای این بخش معادلات حاکم بر تحلیل ارتعاش آزاد و کمانش محوری پنل ساندویچی بر مبنای تئوری پنل ساندویچی مرتبه بالا ارتقاء یافته استخراج می‌گردد.

2-1- مدل هندسی مورد مطالعه

مدل هندسی مورد مطالعه مطابق "شکل 1" در این مقاله عبارت است از یک پنل ساندویچی استوانه‌ای ضخیم که از دو رویه مواد مرکب لایه‌ای تشکیل شده است. ضخامت رویه‌های بالایی و پایینی و هسته به ترتیب برابر با مقادیر ثابت h_t ، h_b و h_c می‌باشد. شعاع‌هایی میانی رویه‌های بالا، پایین و هسته به ترتیب برابر R_t ، R_b و R_c می‌باشد. پنل دارای طول L و ضخامت کل h

عملکرد مناسب در دمای بالا می‌باشد. در این بین یکی از پر کاربردترین سازه‌های ساندویچی، پنل‌هایی استوانه‌ای با رویه‌هایی نازک و ضخیم کامپوزیتی بوده که در بدنه بسیاری از سازه‌های صنعتی مانند هواپیماها، موشک‌ها، شاتل‌ها، زیردریایی‌ها و ... مورد استفاده قرار می‌گیرند. یک سازه ساندویچی اعم از تیر، ورق یا پوسته، متشکل از دو رویه و یک هسته نرم انعطاف پذیر می‌باشد. رویه‌ها را معمولاً از ورق‌های مستحکم فلزی و یا ورق-های چند لایه کامپوزیتی می‌سازند. هسته‌ها نیز غالباً از پلیمرهای سبک، فومها و یا سازه‌های لانه زنبوری ساخته می‌شوند. در سال‌های اخیر برای توصیف رفتار ارتعاشی و کمانشی سازه‌ها تئوری‌های مختلفی ارائه شده است. فهمیدن این رفتارها در سازه‌ها برای جلوگیری از پدیده تشدید و طراحی بهینه ضروری است. علاوه بر این، کشف مواد جدید برای رویه‌ها و هسته برای کاهش مودهای خرابی و به‌دست آوردن وزن بهینه برای سازه مهم می‌باشد. به‌طور کلی، تئوری‌های ورق و پوسته کامپوزیتی شامل تئوری‌های تک لایه معادل¹ (تئوری کلاسیک ورق‌های چند لایه و تئوری‌های تغییر شکل برشی چند لایه) و تئوری الاستیسیته سه بعدی (تئوری عمومی الاستیسیته سه بعدی و تئوری لایه‌گون) می‌باشد. تئوری‌های تک لایه معادل [1]، مجموعه لایه‌های کامپوزیتی را به‌صورت یک تک لایه معادل فرض نموده و روابط سینماتیکی جابجایی را برای آن در نظر می‌گیرند. این نوع تئوری‌ها مساله سه بعدی را به یک مساله دو بعدی تبدیل می‌نمایند. در مقابل تئوری‌های سه بعدی هستند که هر لایه را به‌صورت یک جسم سه‌بعدی جداگانه فرض می‌نمایند. مدل لایه‌گون به‌علت وابسته بودن تعداد توابع مجهول به تعداد لایه‌های لمینیت دارای دقت خوبی در محاسبه فرکانس‌های طبیعی می‌باشد. استفاده از تئوری‌های تک لایه معادل اغلب نتایج غیردقیقی در تحلیل پنل‌های ساندویچی با هسته انعطاف‌پذیر در جهت عمودی را می‌دهند [2]. ملک زاده و همکاران [3] نشان دادند استفاده از تئوری‌های مرتبه اول برشی² در تحلیل پنل‌های ساندویچی با هسته انعطاف‌پذیر، هنگامی که رویه‌ها نازک می‌باشند، نتایج نسبتاً خوبی را ارائه می‌دهد. فروستینگ تحلیل کمانش ورق ساندویچی را با استفاده از تئوری مرتبه اول برشی بررسی نمود [4]. برای اطلاعات بیشتر در زمینه تئوری‌های تک لایه معادل می‌توان به مراجع [5، 6] رجوع کرد. تئوری‌های دیگری نیز وجود دارند که توسط تعدادی از محققین مورد استفاده قرار گرفته است. بیگلری و جعفری [7] به منظور تحلیل استاتیکی و ارتعاشی پوسته ساندویچی دو انحنایی یک تئوری سه لایه ترکیبی³ ارائه نمودند. در این مدل از تئوری دائل در رویه‌ها استفاده شده و تغییرات تنش‌ها در هسته سازه به شکل خطی فرض شده است. نتایج حاصله با مراجع موجود مقایسه و نهایتاً مطالعه پارامتری انجام گرفته است. کررا با استفاده از تئوری زیگزاگ الگویی برای مدل‌سازی ورق‌ها و پوسته‌ها ارائه داد [8]. گارگ با استفاده از تئوری ساندروز به بررسی ارتعاشات آزاد پوسته ساندویچی دو انحنایی پرداخت [9]. زارعی و همکاران به بررسی ارتعاشات آزاد استوانه کامپوزیتی مشبک دوار با تکیه‌گاه‌های مختلف با استفاده از بسط سری فوریه پرداخته‌اند. آن‌ها معادلات مربوط به آنالیز ارتعاشی را بر مبنای تئوری ساندروز استخراج و با استفاده از بسط سری فوریه تبدیل استوکس فرکانس ارتعاشات پوسته استوانه‌ای را تعیین نمودند [10]. با توجه به نقایص تئوری‌های فوق، هنگامی که تمام مولفه‌های تنش بخواهند در نظر گرفته شود، محققین از تئوری‌های بهبود یافته مرتبه بالا⁴ استفاده می‌نمایند. در این

¹ Equivalent single layer

² First shear deformation theory (FSDT)

³ mixed theory

⁴ High-order Sandwich Panel Theory (HSAPT)

$$\begin{aligned} \varepsilon_{zz}^c &= \frac{\partial w_c}{\partial z}, \quad \gamma_{x\theta}^c = \frac{\partial v_c}{\partial x} + \frac{1}{\left(1 + \frac{z_c}{R_c}\right) R_c} \frac{\partial u_c}{\partial \theta}, \\ \gamma_{xz}^c &= \frac{\partial w_c}{\partial x} + \frac{\partial u_c}{\partial z}, \quad \gamma_{\theta z}^c = \frac{1}{\left(1 + \frac{z_c}{R_c}\right) R_c} \left(\frac{\partial w_c}{\partial \theta} - \frac{v_c}{R_c} \right) + \frac{\partial v_c}{\partial z} \end{aligned} \quad (4)$$

4-2- روابط تنش-کرنش رویه‌ها و هسته

روابط تنش-کرنش کاهش‌یافته برای لایه k م به صورت زیر تعریف می‌شود [21,20]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{x\theta} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{\theta z} \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{13} & \bar{Q}_{23} & \bar{Q}_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{x\theta} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{\theta z} \end{Bmatrix}^k \quad (5)$$

جایی که $\bar{Q}_{mn}$ ($m, n = 1, 2, 4$) ثوابت سفتی کاهش‌یافته درون صفحه‌ای و $\bar{Q}_{mn}$ ($m, n = 3, 5, 6$) ثوابت سفتی کاهش‌یافته عرضی لایه k م می‌باشد. روابط تنش-کرنش برای هسته ارتوتروپیک به صورت زیر تعریف می‌شود [22]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^c \\ \sigma_{\theta\theta}^c \\ \sigma_{zz}^c \\ \tau_{x\theta}^c \\ \tau_{xz}^c \\ \tau_{\theta z}^c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^c \\ \varepsilon_{\theta\theta}^c \\ \varepsilon_{zz}^c \\ \gamma_{x\theta}^c \\ \gamma_{xz}^c \\ \gamma_{\theta z}^c \end{Bmatrix} \quad (6)$$

جایی که Q_{mn} ($m, n = 1, 2, 4$) ثوابت سفتی درون صفحه‌ای و Q_{mn} ($m, n = 3, 5, 6$) ثوابت سفتی عرضی هسته می‌باشد.

5-2- شرایط سازگاری جابجایی‌ها و تنش‌ها

در این تحقیق رویه‌ها به صورت ایده‌آل به هسته چسبیده‌اند. به عبارت دیگر شرایط پیوستگی جابجایی‌ها در فصل مشترک‌ها برقرار است. بنابراین هر سه مولفه جابجایی رویه بالایی و هسته، در فصل مشترک این دو، با هم برابرند. این شرایط برای فصل مشترک رویه پائینی با هسته نیز برقرار است. به این ترتیب، شرایط پیوستگی جابجایی در فصل مشترک هر یک از رویه‌ها با هسته مطابق روابط زیر تعریف می‌گردد:

$$\begin{cases} u_t|_{z_t=-\frac{h_t}{2}} = u_c|_{z_c=\frac{h_c}{2}}, \\ u_b|_{z_b=\frac{h_b}{2}} = u_c|_{z_c=-\frac{h_c}{2}}, \\ w_t|_{z_t=-\frac{h_t}{2}} = w_c|_{z_c=\frac{h_c}{2}}, \\ w_b|_{z_b=\frac{h_b}{2}} = w_c|_{z_c=-\frac{h_c}{2}}, \end{cases} \quad \begin{cases} v_t|_{z_t=-\frac{h_t}{2}} = v_c|_{z_c=\frac{h_c}{2}}, \\ v_b|_{z_b=\frac{h_b}{2}} = v_c|_{z_c=-\frac{h_c}{2}}, \end{cases} \quad (7)$$

با استفاده از معادلات سازگاری (7)، روابط میان پارامترهای وابسته جابجایی در هسته میانی استخراج می‌شوند:

$$\begin{aligned} u_2^c &= \frac{8(u_0^b + u_0^t) + 4(h_b u_1^b - h_t u_1^t)}{4h_c^2} \\ &+ \left[\frac{2(h_b^2 u_2^b + h_t^2 u_2^t) + (h_b^3 u_3^b - h_t^3 u_3^t) - 16u_0^c}{4h_c^2} \right], \\ u_3^c &= \frac{8(u_0^t - u_0^b) - 4(h_t u_1^t + h_b u_1^b)}{2h_c^3} \\ &+ \left[\frac{2(h_t^2 u_2^t - h_b^2 u_2^b) - (h_t^3 u_3^t + h_b^3 u_3^b) - 8h_c u_1^c}{2h_c^3} \right], \end{aligned}$$

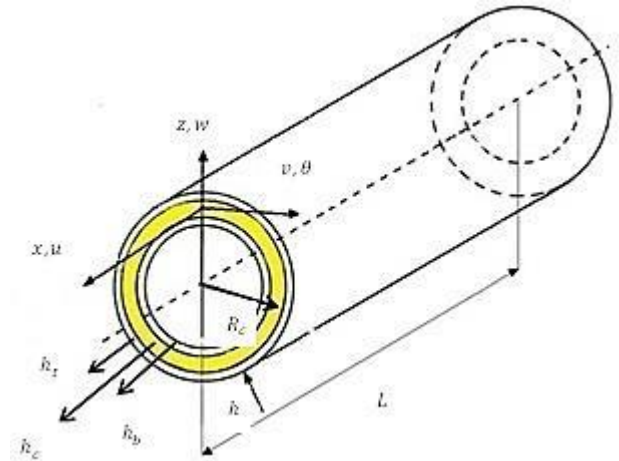


Fig. 1 Geometry and coordinates of the composite cylindrical sandwich panel

شکل 1 هندسه و مختصات پانل ساندویچی استوانه‌ای

می‌باشد.

2-2- میدان جابجایی رویه‌ها و هسته

با توجه به این که تئوری‌های متداول قادر به پیش‌بینی اثرات تغییر شکل‌های دقیق در راستای ضخامت رویه‌ها و هسته نمی‌باشند، ارائه یک مدل تحلیلی مرتبه بالا که قادر به لحاظ کردن اثرات انعطاف‌پذیری هسته باشد، ضروری است. به همین منظور در این مطالعه مدل مرتبه بالای پنل‌های ساندویچی مورد استفاده قرار می‌گیرد. جابجایی‌های u و v رویه‌ها در جهت محورهای x و θ به صورت روابط زیر می‌باشند.

$$\begin{aligned} u_i(x, \theta, z, t) &= u_0^i(x, \theta, t) + z_i u_1^i(x, \theta, t) \\ &+ z_i^2 u_2^i(x, \theta, t) + z_i^3 u_3^i(x, \theta, t), \\ v_i(x, \theta, z, t) &= v_0^i(x, \theta, t) + z_i v_1^i(x, \theta, t) \\ &+ z_i^2 v_2^i(x, \theta, t) + z_i^3 v_3^i(x, \theta, t), \\ w_i(x, \theta, z, t) &= w_0^i(x, \theta, t) + z_i w_1^i(x, \theta, t) \\ &+ z_i^2 w_2^i(x, \theta, t), \quad i = t, b \end{aligned} \quad (1)$$

و میدان جابجایی هسته به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$\begin{aligned} u_c(x, \theta, z, t) &= u_0^c(x, \theta, t) + z_c u_1^c(x, \theta, t) \\ &+ z_c^2 u_2^c(x, \theta, t) + z_c^3 u_3^c(x, \theta, t), \\ v_c(x, \theta, z, t) &= \left(1 + \frac{z_c}{R_c}\right) v_0^c(x, \theta, t) + z_c v_1^c(x, \theta, t) \\ &+ z_c^2 v_2^c(x, \theta, t) + z_c^3 v_3^c(x, \theta, t), \\ w_c(x, \theta, z, t) &= w_0^c(x, \theta, t) + z_c w_1^c(x, \theta, t) \\ &+ z_c^2 w_2^c(x, \theta, t) \end{aligned} \quad (2)$$

3-2- روابط کرنش-جابجایی رویه‌ها و هسته

روابط سینماتیک برای رویه‌ها با استفاده از تقریب فون-کارمن به صورت زیر می‌باشد [19,18]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^i &= \frac{\partial u_i}{\partial x}, \quad \varepsilon_{\theta\theta}^i = \frac{1}{R_i} \frac{\partial v_i}{\partial \theta} + \frac{w_i}{R_i}, \\ \varepsilon_{zz}^i &= \frac{\partial w_i}{\partial z}, \quad \varepsilon_{x\theta}^i = \frac{\partial v_i}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_i}{\partial \theta}, \\ \varepsilon_{xz}^i &= \frac{\partial w_i}{\partial x} + \frac{\partial u_i}{\partial z}, \quad \varepsilon_{\theta z}^i = \frac{1}{R} \frac{\partial w_i}{\partial \theta} - \frac{v_i}{R} + \frac{\partial v_i}{\partial z} \end{aligned} \quad (3)$$

و روابط سینماتیک برای هسته به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^c &= \frac{\partial u_c}{\partial x}, \quad \varepsilon_{\theta\theta}^c = \frac{1}{\left(1 + \frac{z_c}{R_c}\right) R_c} \left(\frac{\partial v_c}{\partial \theta} + \frac{w_c}{R_c} \right), \\ \varepsilon_{\theta\theta}^c &= \frac{1}{\left(1 + \frac{z_c}{R_c}\right) R_c} \left(\frac{\partial v_c}{\partial \theta} + \frac{w_c}{R_c} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{cases} N_{x\theta}^{*c} \\ M_{x\theta}^{*c} \\ P_{x\theta}^{*c} \\ H_{x\theta}^{*c} \end{cases} = \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} \sigma_{x\theta}^c \left(1 + \frac{z_c}{R_c}\right) \begin{cases} 1 \\ z_c \\ z_c^2 \\ z_c^3 \end{cases} dz_c, \quad \begin{cases} N_{\theta z}^{*c} \\ M_{\theta z}^{*c} \\ P_{\theta z}^{*c} \\ H_{\theta z}^{*c} \end{cases} = \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} \sigma_{\theta z}^c \begin{cases} 1 \\ z_c \\ z_c^2 \\ z_c^3 \end{cases} dz_c, \quad \begin{cases} Q_{xz}^{*c} \\ S_{xz}^{*c} \\ R_{xz}^{*c} \end{cases} = \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} \sigma_{xz}^c \left(1 + \frac{z_c}{R_c}\right) \begin{cases} 1 \\ z_c \\ z_c^2 \end{cases} dz_c, \quad \begin{cases} Q_{xz}^c \\ S_{xz}^c \\ R_{xz}^c \end{cases} = \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} \sigma_{xz}^c \begin{cases} 1 \\ z_c \\ z_c^2 \end{cases} dz_c, \quad \begin{cases} Q_{\theta z}^{*c} \\ S_{\theta z}^{*c} \\ R_{\theta z}^{*c} \end{cases} = \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} \sigma_{\theta z}^c \left(1 + \frac{z_c}{R_c}\right) \begin{cases} 1 \\ z_c \\ z_c^2 \end{cases} dz_c, \quad \begin{cases} Q_{\theta z}^c \\ S_{\theta z}^c \\ R_{\theta z}^c \end{cases} = \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} \sigma_{\theta z}^c \begin{cases} 1 \\ z_c \\ z_c^2 \end{cases} dz_c \quad (11)$$

7-2- اصل همیلتون

برای استخراج معادلات حاکم و شرایط مرزی در این مقاله از روش انرژی و اصل همیلتون استفاده می‌شود، براساس این اصل [23]:

$$\int_0^t \delta L dt \equiv \int_0^t [\delta K - \delta U + \delta W_{ext}] dt = 0 \quad (12)$$

جایی که δK تغییرات انرژی جنبشی، δU تغییرات انرژی کرنشی و δW_{ext} کار بارهای خارجی وارد بر پل می‌باشد. همچنین δ اپراتور تغییرات مرتبه اول است.

رابطه‌ی مربوط به تغییرات انرژی جنبشی برای رویه‌های بالایی و پایینی و هسته به‌صورت زیر می‌باشد [23]:

$$\delta K = - \sum_{i=t,b,c} \left[\iint_A \int_{-\frac{h_i}{2}}^{\frac{h_i}{2}} \rho_i (\ddot{u}^i \delta u^i + \ddot{v}^i \delta v^i + \ddot{w}^i \delta w^i) dz_i dA \right] \quad (13)$$

جایی که $\ddot{u}^i, \ddot{v}^i$ و $\ddot{w}^i$ مؤلفه‌های شتاب در جهت محورهای x, θ و z می‌باشند. رابطه‌ی مربوط به تغییرات انرژی کرنشی برای رویه‌های بالایی و پایینی و هسته به‌صورت زیر می‌باشد [23]:

$$\begin{aligned} \delta U &= \sum_{i=t,b,c} \left[\iint_A \int_{-\frac{h_i}{2}}^{\frac{h_i}{2}} (\sigma_{xx}^i \delta \varepsilon_{xx}^i + \sigma_{\theta\theta}^i \delta \varepsilon_{\theta\theta}^i + \sigma_{zz}^i \delta \varepsilon_{zz}^i + \tau_{x\theta}^i \delta \gamma_{x\theta}^i + \tau_{xz}^i \delta \gamma_{xz}^i + \sigma_{\theta z}^i \delta \varepsilon_{\theta z}^i) dz_i dA_i \right], \\ dV_i &= dA_i dz_i, \quad dV_c = \left(1 + \frac{z_c}{R_c}\right) dA_c dz_c, \\ dA_i &= R_i dx d\theta, \quad dA_c = R_c dx d\theta \end{aligned} \quad (14)$$

با استفاده از انتگرال جزء به جزء و تعدادی عملیات جبری و جایگذاری روابط مربوط به تغییرات انرژی جنبشی و تغییرات انرژی کرنشی (رویه‌های کامپوزیتی و هسته در رابطه‌ی اصل همیلتون با استفاده از اصل همیلتون و قضیه‌ی اساسی حساب تغییرات تعداد 27 معادله حرکت برای یک پل ساندویچی استوانه‌ای شکل ضخیم با هسته‌ی انعطاف‌پذیر و رویه‌های کامپوزیتی به‌دست می‌آید. به‌علت حجم بالای معادلات، تعداد سه تا از این معادلات به صورت نمونه در زیر آمده است.

$$\delta u_0^t: N_{xx,x}^t + \frac{1}{R_t} N_{x\theta,\theta}^t + \frac{2}{h_c^2} P_{xx,x}^c + \frac{4}{h_c^3} H_{xx,x}^c + \frac{2}{R_c h_c^2} P_{\theta x,\theta}^c$$

$$\begin{aligned} v_2^c &= \frac{8(v_0^t + v_0^b) + 4(h_b v_1^b - h_t v_1^t)}{4h_c^2} + \left[\frac{2(h_b^2 v_2^b + h_t^2 v_2^t) + (h_b^3 v_3^b - h_t^3 v_3^t) - 16v_0^c}{4h_c^2} \right], \\ v_3^c &= \frac{8(v_0^t - v_0^b) - 4(h_t v_1^t + h_b v_1^b)}{2h_c^3} + \left[\frac{2(h_t^2 v_2^t - h_b^2 v_2^b) - (h_t^3 v_3^t + h_b^3 v_3^b)}{2h_c^3} \right] - \left[\frac{8\frac{h_c}{R_c} v_0^c + 8h_c v_1^c}{2h_c^3} \right], \\ w_1^c &= \frac{8(w_0^t - w_0^b) - 4(h_t w_1^t + h_b w_1^b)}{8h_c} + \left[\frac{2(h_t^2 w_2^t - h_b^2 w_2^b)}{8h_c} \right], \\ w_2^c &= \frac{8(w_0^b + w_0^t) + 4(h_b w_1^b - h_t w_1^t)}{4h_c^2} + \left[\frac{2(h_b^2 w_2^b + h_t^2 w_2^t) - 16w_0^c}{4h_c^2} \right] \end{aligned} \quad (8)$$

با توجه به رابطه (8) به‌دست آمده 11 مجهول هسته به 5 مجهول $u_0^c, u_1^c, v_0^c, v_1^c, w_0^c$ تقلیل می‌یابد. بنابراین در تحلیل پوسته ساندویچی استوانه‌ای شکل یک انحنای فوق می‌بایست 27 مجهول به شرح ذیل را به‌دست آورد:

$$\{d\} = \left\{ u_0^b, v_0^b, w_0^b, u_0^t, v_0^t, w_0^t, u_1^b, v_1^b, w_1^b, u_1^t, v_1^t, w_1^t, u_2^b, v_2^b, w_2^b, u_2^t, v_2^t, w_2^t, u_3^b, v_3^b, w_3^b, u_3^t, v_3^t, w_3^t, u_0^c, u_1^c, v_0^c, v_1^c, w_0^c \right\}^T \quad (9)$$

6-2- نتیجه‌های تنش

منجه‌های تنش بر واحد طول برای رویه‌های بالایی و پایینی و هسته به‌صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\begin{aligned} \begin{cases} N_{xx}^i \\ M_{xx}^i \\ P_{xx}^i \\ H_{xx}^i \end{cases} &= \int_{-\frac{h_i}{2}}^{\frac{h_i}{2}} \sigma_{xx}^i \begin{cases} 1 \\ z_i \\ z_i^2 \\ z_i^3 \end{cases} dz_i, \quad \begin{cases} N_{\theta\theta}^i \\ M_{\theta\theta}^i \\ P_{\theta\theta}^i \\ H_{\theta\theta}^i \end{cases} = \int_{-\frac{h_i}{2}}^{\frac{h_i}{2}} \sigma_{\theta\theta}^i \begin{cases} 1 \\ z_i \\ z_i^2 \\ z_i^3 \end{cases} dz_i, \\ \begin{cases} N_{zz}^i \\ M_{zz}^i \end{cases} &= \int_{-\frac{h_i}{2}}^{\frac{h_i}{2}} \sigma_{zz}^i \begin{cases} 1 \\ z_i \end{cases} dz_i, \quad \begin{cases} N_{x\theta}^i \\ M_{x\theta}^i \\ P_{x\theta}^i \\ H_{x\theta}^i \end{cases} = \int_{-\frac{h_i}{2}}^{\frac{h_i}{2}} \sigma_{x\theta}^i \begin{cases} 1 \\ z_i \\ z_i^2 \\ z_i^3 \end{cases} dz_i, \\ \begin{cases} Q_{xz}^i \\ S_{xz}^i \\ R_{xz}^i \end{cases} &= \int_{-\frac{h_i}{2}}^{\frac{h_i}{2}} \sigma_{xz}^i \begin{cases} 1 \\ z_i \\ z_i^2 \end{cases} dz_i, \quad \begin{cases} Q_{\theta z}^i \\ S_{\theta z}^i \\ R_{\theta z}^i \\ V_{\theta z}^i \end{cases} = \int_{-\frac{h_i}{2}}^{\frac{h_i}{2}} \sigma_{\theta z}^i \begin{cases} 1 \\ z_i \\ z_i^2 \\ z_i^3 \end{cases} dz_i, \quad i = t, b \end{aligned} \quad (10)$$

9

$$\begin{aligned} \begin{cases} N_{xx}^c \\ M_{xx}^c \\ P_{xx}^c \\ H_{xx}^c \end{cases} &= \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} \sigma_{xx}^c \left(1 + \frac{z_c}{R_c}\right) \begin{cases} 1 \\ z_c \\ z_c^2 \\ z_c^3 \end{cases} dz_c, \quad \begin{cases} N_{\theta\theta}^c \\ M_{\theta\theta}^c \\ P_{\theta\theta}^c \\ H_{\theta\theta}^c \end{cases} = \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} \sigma_{\theta\theta}^c \begin{cases} 1 \\ z_c \\ z_c^2 \\ z_c^3 \end{cases} dz_c, \\ \begin{cases} N_{zz}^c \\ M_{zz}^c \end{cases} &= \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} \sigma_{zz}^c \left(1 + \frac{z_c}{R_c}\right) \begin{cases} 1 \\ z_c \end{cases} dz_c, \end{aligned}$$

سری فوریه دوگانه برای رویه‌ها و هسته بشکل زیر فرض می شود [24]:

$$\begin{bmatrix} u_i^j \\ u_0^c \\ u_1^c \\ v_i^j \\ v_0^c \\ v_1^c \\ w_i^j \\ w_0^c \end{bmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \begin{bmatrix} u_i^{j,mn} \cos(\alpha x) \cos(n\theta) \\ u_0^{c,mn} \cos(\alpha x) \cos(n\theta) \\ u_1^{c,mn} \cos(\alpha x) \cos(n\theta) \\ v_i^{j,mn} \sin(\alpha x) \sin(n\theta) \\ v_0^{c,mn} \sin(\alpha x) \sin(n\theta) \\ v_1^{c,mn} \sin(\alpha x) \sin(n\theta) \\ w_i^{j,mn} \sin(\alpha x) \cos(n\theta) \\ w_0^{c,mn} \sin(\alpha x) \cos(n\theta) \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} i = 0,1,2,3 \\ l = 0,1,2 \\ j = t,b \\ \alpha = \left(\frac{m\pi}{l}\right) \end{matrix} \quad (18)$$

که در آن m ، تعداد نیم موج‌ها در جهت x و n ، تعداد نیم موج‌ها در جهت θ و $w_i^{j,mn}$ ، $v_1^{c,mn}$ ، $v_0^{c,mn}$ ، $v_i^{j,mn}$ ، $u_1^{c,mn}$ ، $u_0^{c,mn}$ ، $u_i^{j,mn}$ ، $\alpha = m\pi/l$ ، و $w_0^{c,mn}$ ضرایب زمانی هستند که باید تعیین شوند.

4- تحلیل ارتعاشات

در تحلیل ارتعاشات آزاد ضرایب زمانی در روابط (18) به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned} \{u_i^j, u_0^c, u_1^c\} &= \{U_i^{j,mn}(t), U_0^{c,mn}(t), U_1^{c,mn}(t)\} e^{i\omega t}, \\ \{v_i^j, v_0^c, v_1^c\} &= \{V_i^{j,mn}(t), V_0^{c,mn}(t), V_1^{c,mn}(t)\} e^{i\omega t}, \\ \{w_i^j, w_0^c\} &= \{W_i^{j,mn}(t), W_0^{c,mn}(t)\} e^{i\omega t}, \\ (i = 0,1,2,3), (l = 0,1,2), (j = t,b), (\alpha = \frac{m\pi}{L}) \end{aligned} \quad (19)$$

ω فرکانس طبیعی (برحسب rad/sec) می‌باشد. پس از جایگذاری میدان جابه‌جایی از روابط (18) و (19) در معادلات حرکت یک دستگاه معادلات به شکل ماتریسی به‌صورت زیر تشکیل می‌شود:

$$([K] - \omega^2[M])\{d\} = \{0\}, \quad \{d\} = \begin{Bmatrix} u_0^b, v_0^b, w_0^b, u_0^t, v_0^t, w_0^t, u_1^b, v_1^b, w_1^b, u_1^t, v_1^t, w_1^t, u_0^c, u_1^c, v_0^c, v_1^c, w_0^c \end{Bmatrix}^T \quad (20)$$

d بردار ثوابت شکل مود، K ماتریس سفتی و M ماتریس جرمی پتل می‌باشند، کوچکترین مقدار ویژه معادله، فرکانس پایه (کوچکترین فرکانس طبیعی پتل) است. برای حل معادله مقادیر ویژه از نرم‌افزار متلب استفاده شده است.

5- تحلیل کماتش

برای تحلیل کماتش می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} N_{xx} &= -N_0, N_{yy} = -KN_0, \\ N_{xy} &= q_t = q_b = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

در این مقاله یک بار فشاری محوری به‌صورت همزمان روی لبه‌ی رویه‌های بالایی و پایینی اعمال می‌شود و هر رویه با توجه به سفتی‌های درون محوری خود بخشی از بار اعمالی را تحمل می‌کند. بنابراین هر یک از دو رویه‌ی بالایی و پایینی همزمان به بار بحرانی کماتش خود می‌رسند. سهم هر یک از دو رویه‌ی بالایی و پایینی از بار محوری اعمال شده با روابط زیر به‌دست می‌آید [25]:

$$\bar{N}_{xx}^j = \frac{\alpha_j}{\alpha_t + \alpha_b} N_{xx}, \quad \bar{N}_{yy}^j = \frac{\beta_j}{\beta_t + \beta_b} N_{yy} \quad (22)$$

در روابط فوق ضرایب α_j و β_j با روابط زیر به خواص رویه‌های بالایی و پایینی مربوط می‌شوند [25]:

$$\alpha_j = \frac{A_{22j}}{A_{11j}A_{22j} - A_{12j}^2}, \quad \beta_j = \frac{A_{11j}}{A_{11j}A_{22j} - A_{12j}^2} \quad (23)$$

برای به‌دست آوردن بار بحرانی کماتش کافی است در رابطه (20)، ماتریس

جرم را صفر قرار داده تا رابطه‌ی (20) به‌صورت زیر تبدیل شود [26,25]:

$$([K] - N_{cr}[K_g])\{d\} = \{0\} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{4}{R_c h_c^3} H_{\theta x, \theta}^c - \frac{4}{h_c^2} S_{xz}^c - \frac{12}{h_c^3} R_{xz}^c = I_0^c \ddot{u}_0^t + I_1^c \ddot{u}_1^t + I_2^c \ddot{u}_2^t + I_3^c \ddot{u}_3^t \\ &+ \left(\frac{2I_2^c}{h_c^2} + \frac{4I_3^c}{h_c^3} - \frac{8I_4^c}{h_c^4} - \frac{16I_5^c}{h_c^5} \right) \ddot{u}_0^c \\ &+ \left(\frac{2I_3^c}{h_c^2} + \frac{4I_4^c}{h_c^3} - \frac{8I_5^c}{h_c^4} - \frac{16I_6^c}{h_c^5} \right) \ddot{u}_1^c \\ &+ \left(\frac{4I_4^c}{h_c^4} + \frac{16I_5^c}{h_c^5} + \frac{16I_6^c}{h_c^6} \right) \ddot{u}_0^t + \left(\frac{2h_b I_4^c}{h_c^3} - \frac{8h_b I_6^c}{h_c^6} \right) \ddot{u}_1^b \\ &+ \left(-\frac{2h_t I_4^c}{h_c^4} - \frac{8h_t I_5^c}{h_c^5} - \frac{8h_t I_6^c}{h_c^6} \right) \ddot{u}_1^t + \left(\frac{h_b^2 I_4^c}{h_c^4} - \frac{4h_b^2 I_6^c}{h_c^6} \right) \ddot{u}_2^b \\ &+ \left(\frac{h_t^2 I_4^c}{h_c^4} + \frac{4h_t^2 I_5^c}{h_c^5} + \frac{4h_t^2 I_6^c}{h_c^6} \right) \ddot{u}_2^t + \left(\frac{h_b^3 I_4^c}{2h_c^4} - \frac{2h_b^3 I_6^c}{h_c^6} \right) \ddot{u}_3^b \\ &+ \left(-\frac{h_t^3 I_4^c}{2h_c^4} - \frac{2h_t^3 I_5^c}{h_c^5} - \frac{2h_t^3 I_6^c}{h_c^6} \right) \ddot{u}_3^t \end{aligned} \quad (15)$$

δv_1^b :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{R_b} M_{\theta\theta, \theta}^b + M_{x\theta, x}^b - Q_{\theta z}^b + \frac{1}{R_b} S_{\theta z}^b + \frac{h_b}{h_c^2} P_{x\theta, x}^{*c} - \frac{2h_b}{h_c^3} H_{x\theta, x}^{*c} \\ &+ \frac{h_b}{R_c h_c^2} P_{\theta\theta, \theta}^c - \frac{2h_b}{R_c h_c^3} H_{\theta\theta, \theta}^c + \frac{h_b}{R_c h_c^2} R_{\theta z}^{*c} - \frac{2h_b}{R_c h_c^3} H_{\theta z}^{*c} \\ &- \frac{2h_b}{h_c^2} S_{\theta z}^c + \frac{6h_b}{h_c^3} R_{\theta z}^c = I_1^b \ddot{v}_0^b + I_2^b \ddot{v}_1^b + I_3^b \ddot{v}_2^b + I_4^b \ddot{v}_3^b \\ &+ \left(\frac{h_b I_2^c}{h_c^2} - \frac{2h_b I_3^c}{h_c^3} - \frac{4h_b I_4^c}{h_c^4} + \frac{8h_b I_5^c}{h_c^5} \right. \\ &\quad \left. + \frac{h_b}{R_c h_c^2} \left(I_3^c - \frac{2I_4^c}{h_c} - \frac{4I_5^c}{h_c^2} + \frac{8I_6^c}{h_c^3} \right) \right) \ddot{v}_0^c \\ &+ \left(\frac{h_b I_3^c}{h_c^2} - \frac{2h_b I_4^c}{h_c^3} - \frac{4h_b I_5^c}{h_c^4} + \frac{8h_b I_6^c}{h_c^5} \right) \ddot{v}_1^c \\ &+ \left(\frac{2h_b I_4^c}{h_c^4} - \frac{8h_b I_5^c}{h_c^5} + \frac{8h_b I_6^c}{h_c^6} \right) \ddot{v}_0^b + \left(\frac{2h_b I_4^c}{h_c^4} - \frac{8h_b I_6^c}{h_c^6} \right) \ddot{v}_1^b \\ &+ \left(\frac{h_b^2 I_4^c}{h_c^4} - \frac{4h_b^2 I_5^c}{h_c^5} + \frac{4h_b^2 I_6^c}{h_c^6} \right) \ddot{v}_1^b + \left(-\frac{h_b h_t I_4^c}{h_c^4} + \frac{4h_b h_t I_6^c}{h_c^6} \right) \ddot{v}_1^t \\ &+ \left(\frac{h_b^3 I_4^c}{2h_c^4} - \frac{2h_b^3 I_5^c}{h_c^5} + \frac{2h_b^3 I_6^c}{h_c^6} \right) \ddot{v}_2^b + \left(\frac{h_b h_t^2 I_4^c}{2h_c^4} - \frac{2h_b h_t^2 I_6^c}{h_c^6} \right) \ddot{v}_2^t \\ &+ \left(\frac{h_b^4 I_4^c}{4h_c^4} - \frac{h_b^4 I_5^c}{h_c^5} + \frac{h_b^4 I_6^c}{h_c^6} \right) \ddot{v}_3^b + \left(-\frac{h_b h_t^3 I_4^c}{4h_c^4} + \frac{h_b h_t^3 I_6^c}{h_c^6} \right) \ddot{v}_3^t \end{aligned} \quad (16)$$

δw_0^c :

$$\begin{aligned} &Q_{xz, x}^{*c} - \frac{4}{h_c^2} R_{xz, x}^{*c} + \frac{1}{R_c} Q_{\theta z, \theta}^{*c} - \frac{4}{R_c h_c^2} R_{\theta z, \theta}^{*c} - \frac{1}{R_c} N_{\theta\theta}^c \\ &+ \frac{4}{R_c h_c^2} P_{\theta\theta}^c + \frac{8}{h_c^2} M_{zz}^c = \left(I_0^c - \frac{8I_2^c}{h_c^2} + \frac{16I_4^c}{h_c^4} \right) \ddot{w}_0^c \\ &+ \left(\frac{-I_1^c}{h_c} + \frac{2I_2^c}{h_c^2} + \frac{4I_3^c}{h_c^3} - \frac{8I_4^c}{h_c^4} \right) \ddot{w}_0^b + \left(\frac{I_1^c}{h_c} + \frac{2I_2^c}{h_c^2} - \frac{4I_3^c}{h_c^3} - \frac{8I_4^c}{h_c^4} \right) \ddot{w}_0^t \\ &+ \left(\frac{-h_b I_1^c}{2h_c} + \frac{h_b I_2^c}{h_c^2} + \frac{2h_b I_3^c}{h_c^3} - \frac{4h_b I_4^c}{h_c^4} \right) \ddot{w}_1^b \\ &+ \left(\frac{-h_t I_1^c}{2h_c} - \frac{h_t I_2^c}{h_c^2} + \frac{2h_t I_3^c}{h_c^3} + \frac{4h_t I_4^c}{h_c^4} \right) \ddot{w}_1^t \\ &+ \left(\frac{-h_b^2 I_1^c}{4h_c} + \frac{h_b^2 I_2^c}{2h_c^2} + \frac{h_b^2 I_3^c}{h_c^3} - \frac{2h_b^2 I_4^c}{h_c^4} \right) \ddot{w}_2^b \\ &+ \left(\frac{h_t^2 I_1^c}{4h_c} + \frac{h_t^2 I_2^c}{2h_c^2} - \frac{h_t^2 I_3^c}{h_c^3} - \frac{2h_t^2 I_4^c}{h_c^4} \right) \ddot{w}_2^t \end{aligned} \quad (17)$$

3- حل معادلات

میدان‌های جابه‌جایی پتل مرکب ساندویچی برای شرایط مرزی ساده برمی‌نای

جدول 3 خواص هندسی رویه های به کار رفته در پنل ساندویچی مرکب

Table 3 Geometry of face sheets in the cylindrical sandwich panel

نازک	$h_c/h = 0.8$, $R_c = 0.3^m$, $L = 3R_c$ $h_t = h_b = 3^{mm}$, [0/90/0/core / 0/90/0]
ضخیم	$h_c/h = 0.8$, $R_c = 0.3^m$, $L = 3R_c$ $h_t = h_b = 12^{mm}$, [0/90/0/core / 0/90/0]

جدول 4 نتایج چهار فرکانس اول برای رویه های نازک با توجه به جدول 1 و خواص هندسی مطابق با جدول 3 را نشان می‌دهد.

نتایج جداول 2 و 4 نشان می‌دهد، هنگامی که رویه‌ها در پنل ساندویچی نازک در نظر گرفته می‌شوند، نتایج تئوری حاضر دارای تطابق نزدیکی با نتایج به‌دست آمده از تئوری مرتبه اول برشی بوده و همچنین نتایج تئوری حاضر به مدل آباکوس نزدیک تر می‌باشد. اما هنگامی که رویه‌ها مقداری ضخیم تر می‌شوند، نتایج به‌دست آمده از تئوری حاضر با مدل تئوری مرتبه اول برشی از هم دیگر فاصله می‌گیرند. برای صحت‌سنجی این موضوع خواص مواد ارائه شده در جدول 1 و خواص هندسی که در جدول 3 برای رویه‌های ضخیم آمده است، در نظر گرفته می‌شوند. نتایج چهار فرکانس اول برای رویه‌های ضخیم، مطابق با جدول 5 می‌باشد.

2-6- تحلیل کمانش پنل ساندویچی استوانه‌ای

در این بخش، نتایج به‌دست آمده از فرمولاسیون حاضر با نتایج به‌دست آمده از نرم‌افزار المان محدود آباکوس صحت‌گذاری شده است. خواص هندسی و جنس پنل ساندویچی همانند جدول 1 و رویه‌ها به‌صورت جدول 3 در نظر گرفته شده‌اند. در این مثال پارامتر بی‌بعد شده برای کمانش محوری، $\bar{N}_{cr} = 100 \cdot N_{cr} R_c^2 / (E_{1t} h^3)$ و برای بار کمانش فشار خارجی و داخلی $\bar{P}_{cr} = 100 \cdot P_{cr} R_c^3 / (E_{1t} h^3)$ در نظر گرفته شده است. R_c شعاع خارجی پنل ساندویچی می‌باشد. در مدل‌سازی المان محدود پنل ساندویچی استوانه‌ای شکل در نرم‌افزار آباکوس، از المان C3D8R که یک المان آجری 8

جدول 4 چهار فرکانس اول طبیعی مربوط به پنل ساندویچی مرکب با رویه‌های نازک

Table 4 The first four natural frequencies relevant to the cylindrical sandwich panel (thin)

شماره مود (m,n)	روش حاضر	آباکوس	درصد خطا	FSDT	درصد خطا
(1,2)	307.61	295.93	3.8	312.84	5.4
(1,3)	370	358.83	3.02	375.39	4.41
(1,1)	454.75	439.28	3.4	461.35	4.78
(1,4)	533.28	529.15	0.77	545.04	2.91

جدول 5 چهار فرکانس اول طبیعی مربوط به پنل ساندویچی مرکب با رویه‌های ضخیم

Table 5 The first four natural frequencies relevant to the cylindrical sandwich panel (thick)

شماره مود (m,n)	روش حاضر	آباکوس	درصد خطا	FSDT	درصد خطا
(1,2)	375.06	364.68	2.77	417.17	12.58
(1,1)	465.02	452.82	2.62	515.26	12.11
(1,3)	496.95	485.56	2.3	548.48	11.47
(2,3)	680.6	667.17	1.97	752.84	11.38

d بردار ثوابت شکل مود، K همان ماتریس سفتی و k_g ماتریس هندسی-سفتی¹ پنل می‌باشد که در بخش پیوست تعدادی از درایه‌های ماتریس سفتی-هندسی آورده شده است.

6- اعتبارسنجی تئوری حاضر

به‌دلیل نبود مقاله در این زمینه، نتایج به‌دست آمده از فرمولاسیون حاضر را با نتایج به‌دست آمده از نرم‌افزار المان محدود آباکوس و تئوری مرتبه اول برشی صحت‌گذاری شده است.

1-6- تحلیل ارتعاش آزاد پنل ساندویچی مرکب استوانه‌ای

در این بخش، براساس شیوه تحلیلی ارائه شده با استفاده از مشخصات هندسی و جنس پنل استوانه‌ای با رویه‌های کامپوزیت از جنس الیاف شیشه در زمینه پلی‌استر، و هسته از جنس فوم پی وی سی با نام هرکس¹ C70.130 که در جدول 1 آورده شده، ابتدا مطابق جدول 2 چهار فرکانس طبیعی اول بی‌بعد پنل ساندویچی استوانه‌ای شکل را با در نظر گرفتن فرکانس زاویه‌ای بی‌بعد شده $\bar{\omega} = \omega L^2 (\rho / E_2)^{1/2} / h$ ، نسبت ضخامت هسته به ضخامت کل پنل $h_c/h = 0.8$ ، نسبت شعاع میانی هسته به ضخامت کل $R_c/h = 10$ و نسبت طول استوانه به شعاع هسته $L/R_c = 2$ محاسبه می‌شود. در مدل‌سازی المان محدود پنل ساندویچی استوانه‌ای شکل در نرم‌افزار آباکوس، از تکنیک تماسی تای² در سطح مشترک رویه‌ها با هسته و از المان پوسته‌ی 8 گره‌ای خطی S8R برای رویه‌ها استفاده شد که این نوع المان معادل است با تئوری مرتبه بالا در نظر گرفته شده برای رویه‌ها و برای هسته از المان سه‌بعدی (آجری) 8 گره‌ای خطی استفاده شد. همچنین برای تحلیل ارتعاشات آزاد از حل‌گر لانزوس⁴ استفاده شده است.

سپس برای دقت و درستی تئوری حاضر به‌خصوص هنگامی که ضخامت رویه‌ها زیاد می‌شود براساس خواص مواد ارائه شده در جدول 1 و خواص هندسی که در جدول 3 برای رویه‌های نازک و ضخیم آمده است به اعتبارسنجی و دقت روش با مقایسه با مدل مرتبه اول برشی و مدل آباکوس پرداخته می‌شود.

جدول 1 خواص مواد به کار رفته در پنل ساندویچی مرکب

Table 1 Material properties of a composite sandwich panel [27]

هسته	$E_1 = E_2 = E_3 = 0.1036 \text{ GPa}$, $G_{12} = G_{13} = G_{23} = 0.05 \text{ GPa}$, $\nu = 0.32$, $\rho = 130 \text{ kg/m}^3$
رویه‌ها	$E_1 = 24.51 \text{ GPa}$, $E_2 = E_3 = 7.77 \text{ GPa}$, $G_{12} = G_{13} = 3.34 \text{ GPa}$, $G_{23} = 1.34 \text{ GPa}$, $\nu_{12} = \nu_{13} = 0.078$, $\nu_{23} = 0.49$, $\rho = 1800 \text{ kg/m}^3$

جدول 2 مقایسه فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد پنل ساندویچی استوانه‌ای شکل

Table 2 Comparison of the dimensionless natural frequencies for the cylindrical sandwich panel

شماره مود (m,n)	روش حاضر	آباکوس	درصد خطا	FSDT	درصد خطا
(1,2)	16.39	15.80	3.6	16.66	5.16
(1,3)	16.44	15.95	2.98	16.75	4.77
(1,4)	21.00	20.42	2.76	21.52	5.11
(1,5)	27.11	26.75	1.33	27.79	3.74

¹ Geometric- stiffness matrix

² Herex

³ Tie

⁴ Lanczos

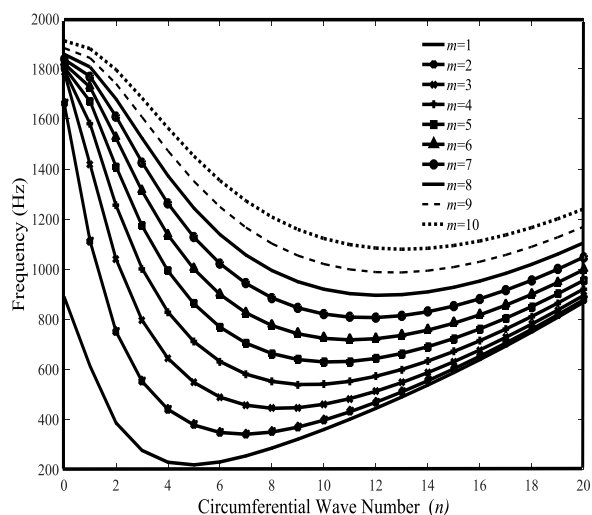


Fig. 2 The natural frequencies versus circumferential wave number

شکل 2 فرکانس‌های طبیعی برحسب شماره طول موج محیطی

در شکل مود اول اتفاق می‌افتد و مقادیر فرکانس طبیعی در همان ابتدا با افزایش عدد موج، افزایش می‌یابد.

2-7- بررسی اثر نسبت طول به شعاع میانی هسته (L/R_c) بر فرکانس طبیعی و بار بحرانی کمانش

در این بخش به بررسی تأثیر نسبت طول به شعاع میانی هسته بر فرکانس طبیعی و بار بحرانی کمانش برای چهار شکل مود اول سیستم پرداخته می‌شود. همان‌طور که در "شکل 3" مشاهده می‌شود با افزایش نسبت طول به شعاع میانی هسته، به دلیل کاهش سفتی پنل ساندویچی، مقدار چهار فرکانس طبیعی اول پنل برحسب هرترز کاهش می‌یابد. به دلیل این‌که رابطه‌ی بی‌بعد فرکانس $\omega L^2 (\rho/E_2)^{1/2} / h$ رابطه‌ی مستقیم و مجذور با طول پنل (L) دارد. با افزایش طول پنل، افزایش مقدار پارامتر بی‌بعد بر کاهش مقدار فرکانس طبیعی غالب شده در نتیجه در مجموع باعث افزایش مقدار فرکانس طبیعی بی‌بعد پنل می‌شود. تأثیر نسبت طول پنل به شعاع میانی هسته بر بارکمانش محوری برحسب N/m در "شکل 4"، بارکمانش فشار خارجی برحسب پاسکال در "شکل 5" برای چهار شکل مود اول کمانش نشان داده شده است. همان‌طور که در "شکل 4" مشاهده می‌شود با افزایش نسبت طول به شعاع میانی هسته، به دلیل افزایش طول پنل ساندویچی و همچنین به علت اعمال بار کمانش محوری در راستای طولی پنل باعث افزایش مقدار بار کمانش محوری برای چهار شکل مود اول کمانش می‌شود. ولی مقدار بار بحرانی کمانش فشار خارجی مطابق "شکل 5" با افزایش طول پنل به علت کاهش سفتی پنل کاهش می‌یابد. همچنین روند کاهش مقدار بار کمانش برای نسبت‌های (L/R_c) بالاتر کمتر می‌شود.

3-7- اثر نسبت ضخامت هسته به ضخامت کل پنل (h_c/h) بر فرکانس طبیعی و بار بحرانی کمانش

در این بخش به بررسی اثر نسبت ضخامت هسته به ضخامت کل پنل بر فرکانس طبیعی و بار بحرانی کمانش برای چهار شکل مود اول سیستم پرداخته می‌شود. همان‌طور که از "شکل 6" مشاهده می‌شود با افزایش ضخامت هسته به دلیل افزایش سفتی پنل مقدار فرکانس طبیعی برحسب هرترز افزایش می‌یابد.

گره‌ای برای هسته و از المان S8R برای رویه‌های کامپوزیتی و برای تحلیل کمانش از حل گر ساب اسپیس استفاده شده است. مقادیر بار کمانش بی‌بعد محوری، فشار خارجی و داخلی پنل ساندویچی، به دست آمده از مودول دوم فراستینگ حاضر با نتایج حاصل از مدل المان محدود آباکوس به ترتیب در جدول 6 و جدول 7 برای چهار شکل مود اول کمانش با هم مقایسه شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود نتایج بدست آمده از روش مدل حاضر به نتایج نرم‌افزار آباکوس برای شکل مودهای مختلف بسیار نزدیک و از دقت بسیار خوبی برخوردار است.

همان‌طور که در جداول 6 و 7 نشان داده شده است، کمترین مقدار بار بحرانی کمانش محوری برای پنل حاضر در شکل مود $(m=4, n=8)$ و کمترین بار کمانش فشار بیرونی و خارجی در شکل مود $(m=1, n=8)$ می‌باشد

7- نتایج و بحث

در این بخش نتایج حاصل از مطالعه پارامتری ارتعاشات آزاد و کمانش پنل ساندویچی استوانه‌ای مورد بررسی قرار گرفته است.

7-1- بررسی مقادیر فرکانس های طبیعی بر روی شماره طول موج محیطی (n)

در پنل‌های که شکل سازه به صورت استوانه‌ای شکل می‌باشد کمترین مقدار فرکانس طبیعی عموماً و اکثراً در شکل مودهای بالاتر اتفاق می‌افتد یعنی با افزایش عدد طول موج محیطی (n) مقدار فرکانس طبیعی در ابتدا کاهش می‌یابد و از یک مقدار مشخص به بعد با افزایش عدد موج مقدار فرکانس طبیعی افزایش می‌یابد که این روند تغییر رفتار را می‌توان در "شکل 2" مشاهده کرد. البته لازم به ذکر است که مقادیر فرکانس طبیعی با افزایش عدد موج طولی (m) ، افزایش یافته است. در صورتی که در سازه‌هایی که شکل سازه به صورت صفحه باشد عموماً و اکثراً کمترین مقدار فرکانس طبیعی

جدول 6 مقادیر بار کمانش محوری بی بعد پنل ساندویچی استوانه‌ای شکل

Table 6 Non-dimensional buckling load of the cylindrical sandwich panel under axial compression load

$\bar{N}_{cr} = 100 \cdot N_{cr} R_c^2 / (E_{1t} h^3)$	$R_e = R_t + h_t / 2$	شکل مود	روش	آباکوس
			حاضر	
2.806	3.388	$(m=4, n=8)$	2.707	
2.972	3.391	$(m=4, n=9)$	2.874	
3.544	3.997	$(m=5, n=9)$	3.452	
3.556	4.013	$(m=3, n=8)$	3.474	

جدول 7 مقادیر بار کمانش فشار خارجی و داخلی بی بعد پنل ساندویچی استوانه‌ای

Table 7 buckling load of the cylindrical sandwich panel under internal and external pressure

$\bar{P}_{cr}(\text{internal})$	$\bar{P}_{cr}(\text{external})$	شکل مود	روش	آباکوس
			حاضر	
0.4542	0.4114	$(m=1, n=8)$	0.4725	0.4843
0.4595	0.4128	$(m=1, n=7)$	0.4792	0.4877
0.4800	0.4236	$(m=1, n=9)$	0.4798	0.5061
0.4825	0.4422	$(m=1, n=10)$	0.4921	0.5159

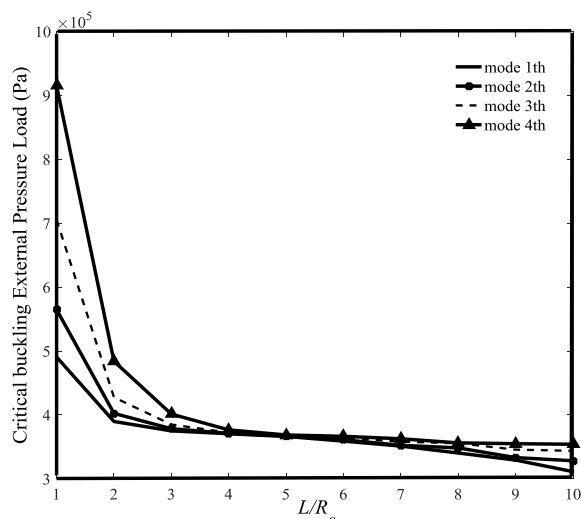


Fig. 5 Effect of (L/R_c) on critical buckling load for external pressure case

شکل 5 تأثیر نسبت طول به شعاع میانی هسته بر بار بحرانی کماتش فشار

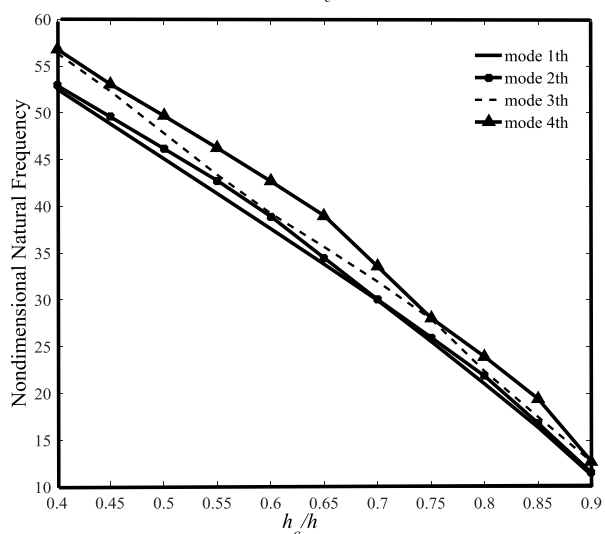
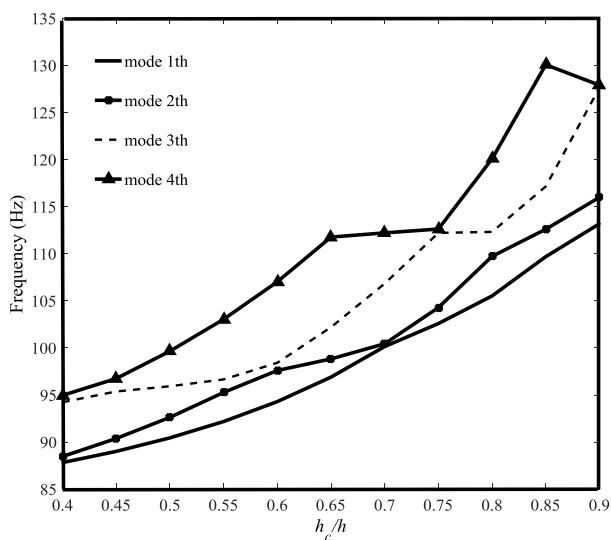


Fig. 6 Effect of (h_c/h) on natural frequency and non-dimensional frequency of cylindrical sandwich panel

شکل 6 تأثیر نسبت ضخامت هسته به ضخامت کل پانل (h_c/h) بر فرکانس طبیعی بر حسب (هرتز) و بی بعد

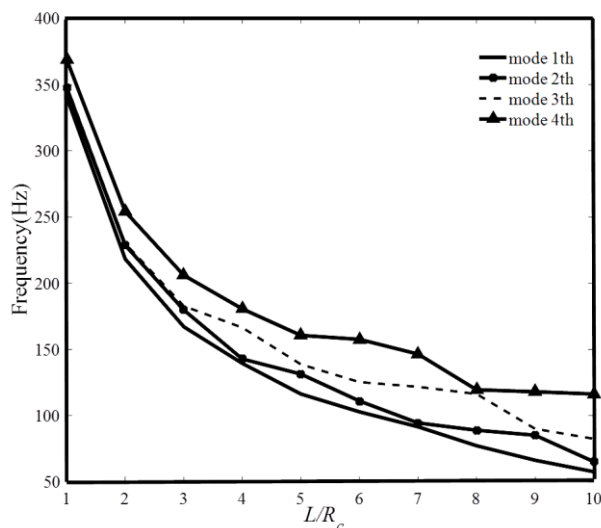


Fig. 3 Effect of (L/R_c) on natural frequency and non-dimensional frequency of cylindrical sandwich panel

شکل 3 تأثیر نسبت (L/R_c) بر فرکانس طبیعی بر حسب (هرتز) و بی بعد

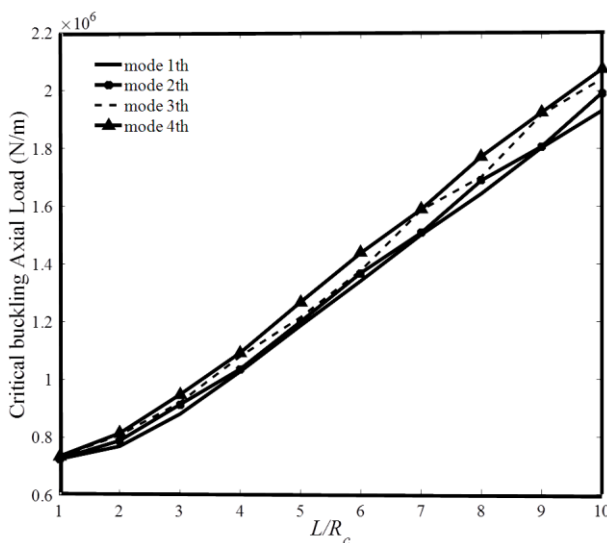


Fig. 4 Effect of (L/R_c) on critical buckling axial load

شکل 4 تأثیر نسبت طول به شعاع میانی هسته بر بار بحرانی کماتش محوری

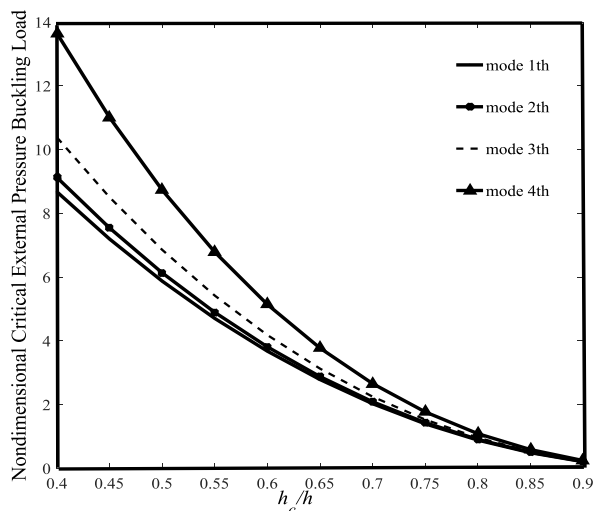


Fig. 8 The effect of core to sandwich panel thickness ratio on critical buckling load and non-dimensional for external pressure case

شکل 8 تأثیر نسبت ضخامت هسته به ضخامت کل پانل (h_c/h) بر بار بحرانی کمانش فشار خارجی برحسب پاسکال) و بی بعد

4-7- اثر زاویه‌ی الیاف رویه‌های کامپوزیتی بر فرکانس طبیعی و بار بحرانی کمانش

در این بخش به بررسی زاویه‌ی الیاف رویه‌های کامپوزیتی بر فرکانس طبیعی و بار بحرانی کمانش پانل پرداخته می‌شود. ترتیب لایه چینی به صورت $[\theta/-\theta/\theta/-\theta/\text{core}/\theta/-\theta/\theta/-\theta]$ می‌باشد. تأثیر زاویه‌ی الیاف بر فرکانس طبیعی برحسب هرتز در "شکل 9" برای چهار شکل مود اول آورده شده است. همان‌طور که مطابق "شکل 9" مشاهده می‌شود فرکانس طبیعی پانل با افزایش زاویه‌ی الیاف، به دلیل افزایش سفتی پانل در ابتدا افزایش می‌یابد و بعد از یک مقدار معین از زاویه الیاف، با بیشتر شدن زاویه‌ی الیاف به دلیل کاهش سفتی پانل مقدار فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد، البته این مقدار مشخصی از زاویه‌ی الیاف که در آن رفتار نمودار تغییر می‌کند برای شکل مودهای مختلف با هم متفاوت می‌باشد. بررسی زاویه‌ی الیاف رویه‌های کامپوزیتی بر بارکمانش محوری برحسب N/m در "شکل 10"، بارکمانش فشار خارجی برحسب پاسکال در "شکل 11"، برای چهار شکل مود اول کمانش نشان داده شده است. همان‌طور که مطابق "شکل 10" مشاهده می‌شود بار بحرانی کمانش محوری پانل با افزایش زاویه‌ی الیاف، به دلیل افزایش سفتی پانل در ابتدا افزایش می‌یابد و بعد از زاویه الیاف 60 درجه، با بیشتر شدن زاویه‌ی الیاف به دلیل کاهش سفتی پانل مقدار بار بحرانی کمانش محوری کاهش می‌یابد. تغییرات رفتار مقدار بار بحرانی کمانش فشار خارجی همان‌طور که در "شکل 11" مشاهده می‌شود متفاوت از تغییرات رفتار بار بحرانی کمانش محوری می‌باشد. می‌توان گفت مقدار بار بحرانی کمانش فشار خارجی به جزء شکل مود چهارم برای شکل مودهای دیگر تقریباً با افزایش زاویه الیاف افزایش می‌یابد.

8- نتیجه‌گیری

در این مقاله، به بررسی ارتعاشات آزاد و کمانش پانل ساندویچی استوانه‌ای شکل ضخیم با در نظر گرفتن تمام مولفه‌های تنش برمی‌نای تئوری ارتقاء یافته مرتبه بالا پرداخته شده است. با استفاده از شرایط سازگاری بین رویه‌ها و هسته، تعداد کل مجهولات میدان‌های جابجایی از 33 به 27 عدد کاهش یافته است. سپس با استفاده از اصل همیتون معادلات حاکم و شرایط مرزی

اما به دلیل این که رابطه‌ی بی‌بعد فرکانس $\omega L^2(\rho/E_2)^{1/2}/h$ رابطه‌ی معکوس با ضخامت کل پانل دارد، با افزایش ضخامت هسته، ضخامت کل پانل افزایش می‌یابد. در نتیجه کاهش مقدار پارامتر بی‌بعد بر افزایش مقدار فرکانس طبیعی غالب شده، پس در مجموع باعث کاهش مقدار فرکانس طبیعی بی‌بعد پانل می‌شود. همان‌طور که از "شکل 7" مشاهده می‌شود با افزایش ضخامت هسته به دلیل افزایش سفتی پانل مقدار بار کمانش محوری برحسب N/m افزایش می‌یابد. به دلیل این که رابطه‌ی بی‌بعد بار بحرانی کمانش $\bar{N}_{cr} = 100 \cdot N_{cr} R_e^2 / (E_{1t} h^3)$ رابطه‌ی معکوس با ضخامت کل پانل دارد با افزایش ضخامت هسته، ضخامت کل پانل افزایش می‌یابد در نتیجه کاهش مقدار پارامتر بی‌بعد بر افزایش مقدار بار بحرانی کمانش محوری غالب شده، پس در مجموع باعث کاهش مقدار بار بحرانی کمانش محوری بی‌بعد پانل می‌شود.

همچنین مقدار بار بحرانی کمانش فشار خارجی برحسب پاسکال مطابق "شکل 8" همانند بار بحرانی کمانش با افزایش ضخامت هسته افزایش می‌یابد. ولی مقدار بار بحرانی کمانش فشار خارجی بی‌بعد همانند بار بحرانی کمانش بی‌بعد با افزایش ضخامت هسته کاهش می‌یابد.

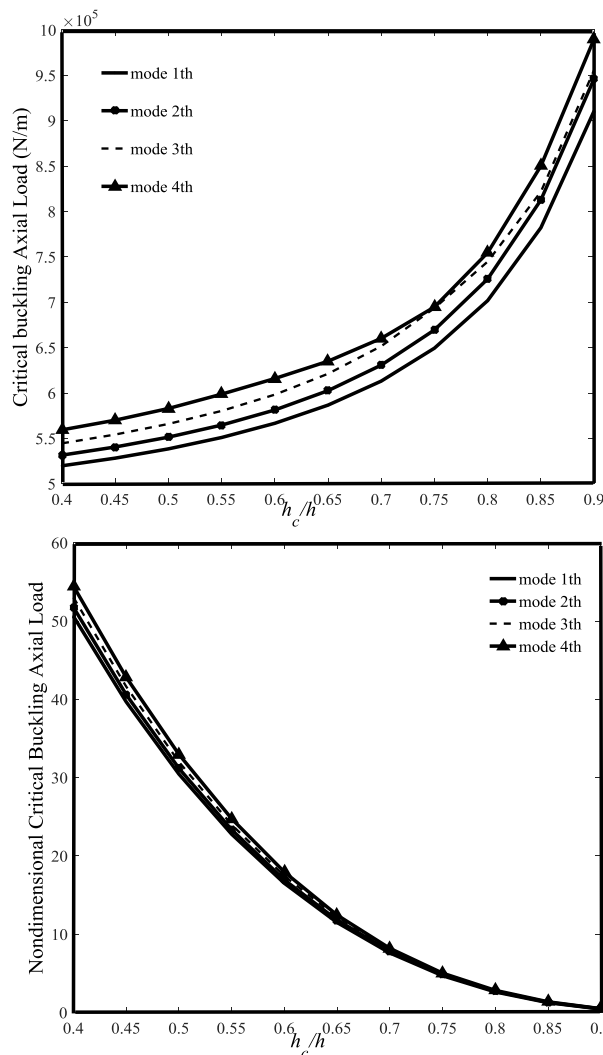


Fig. 7 The effect of (h_c/h) on critical buckling load and non-dimensional for axial loading case

شکل 7 تأثیر نسبت ضخامت هسته به ضخامت کل پانل (h_c/h) بر بار بحرانی کمانش محوری برحسب (N/m) و بی‌بعد

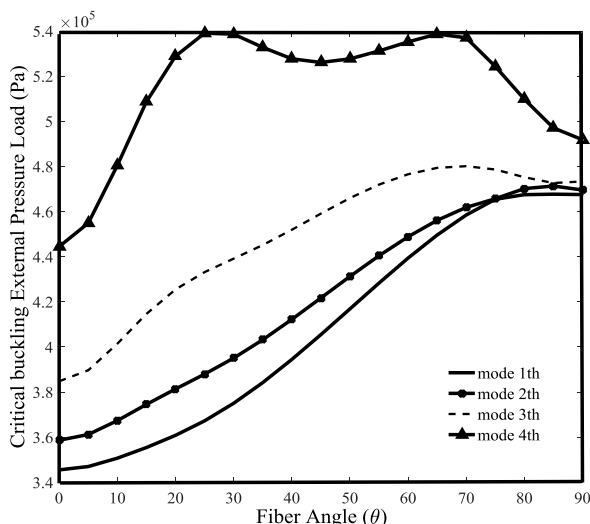


Fig. 11 The effect of fiber angles of composite face sheets on critical buckling load for external pressure case

شکل 11 تأثیر زاویه‌ی الیاف رویه‌های کامپوزیتی بر بار بحرانی کماتش فشار خارجی

استخراج گردیده است. نهایتاً پس از بررسی و جمع‌بندی نتایج عددی حاصل از تحلیل ارتعاشات و کماتش پانل ساندویچی استوانه‌ای شکل، می‌توان موارد زیر را نتیجه‌گیری نمود:

- فرکانس طبیعی پانل با افزایش شماره طول موج محیطی (n) ابتدا کاهش و بعد از یک مقدار مشخص n ، با افزایش آن مقدار فرکانس طبیعی افزایش می‌یابد.
- با افزایش نسبت طول به شعاع میانی هسته، به دلیل کاهش سفتی پانل ساندویچی، مقدار چهار فرکانس طبیعی اول پانل برحسب هرتز کاهش می‌یابد. اما با افزایش طول پانل، مقدار فرکانس طبیعی بی‌بعد پانل افزایش می‌یابد.
- با افزایش نسبت طول به شعاع میانی هسته، به دلیل افزایش طول پانل ساندویچی و همچنین به علت اعمال بار کماتش محوری در راستای طولی پانل باعث افزایش مقدار بار کماتش محوری می‌شود. ولی مقدار بار بحرانی کماتش فشار خارجی با افزایش طول پانل به علت کاهش سفتی پانل کاهش می‌یابد.
- با افزایش ضخامت هسته به دلیل افزایش سفتی پانل مقدار فرکانس طبیعی برحسب هرتز افزایش می‌یابد. اما مقدار فرکانس طبیعی بی‌بعد پانل کاهش می‌یابد.
- با افزایش ضخامت هسته به دلیل افزایش سفتی پانل مقدار بار کماتش محوری، فشار خارجی افزایش می‌یابد. به دلیل این‌که رابطه‌ی بی‌بعد بار بحرانی کماتش رابطه‌ی معکوس با ضخامت کل پانل دارد. با افزایش ضخامت هسته، ضخامت کل پانل افزایش می‌یابد در نتیجه در مجموع باعث کاهش مقدار بار بحرانی کماتش بی‌بعد پانل می‌شود. فشار خارجی با افزایش ضخامت هسته به‌طور پیوسته کاهش یافته است.
- فرکانس طبیعی پانل با افزایش زاویه‌ی الیاف، به دلیل افزایش سفتی پانل در ابتدا افزایش و بعد از یک مقدار معین از زاویه الیاف، با بیشتر شدن زاویه‌ی الیاف به دلیل کاهش سفتی پانل مقدار فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد.

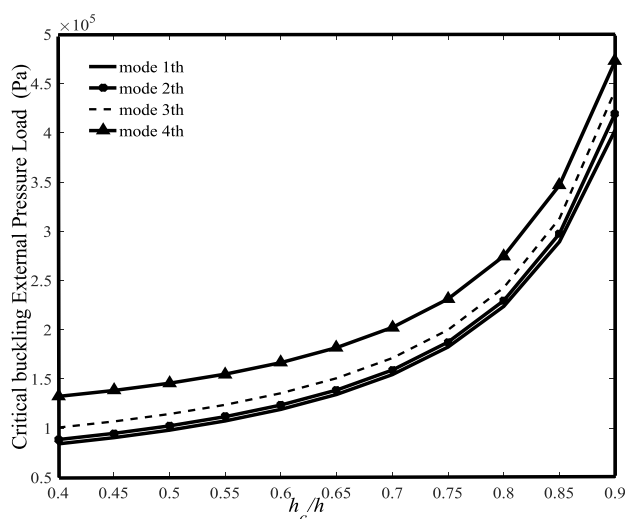


Fig. 9 The effect of fiber angles of composite face sheets on natural frequency

شکل 9 تأثیر زاویه‌ی الیاف رویه‌های کامپوزیتی بر فرکانس طبیعی

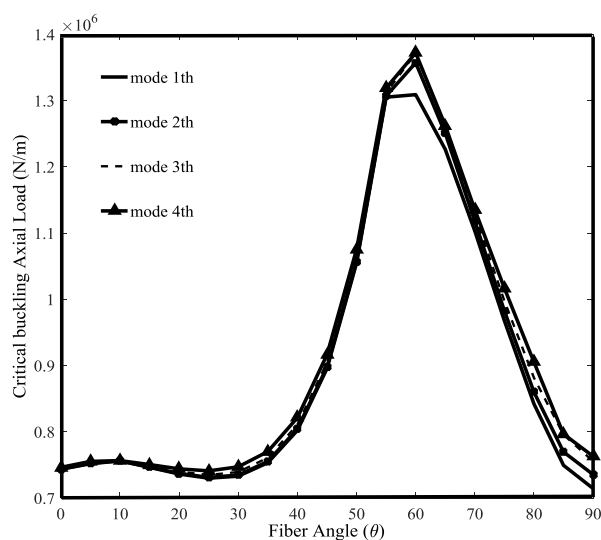


Fig. 10 The effect of fiber angles of composite face sheets on critical buckling load for axial loading case

شکل 10 تأثیر زاویه‌ی الیاف رویه‌های کامپوزیتی بر بار بحرانی کماتش محوری

$$\begin{aligned}
 Kg(1,1) &= -n_x^t \alpha_m^2 - \frac{P_{cr}^t}{R_t} n^2, \\
 Kg(5,5) &= -n_x^t \alpha_m^2 - \frac{P_{cr}^t}{R_t} n^2 - \frac{2 * P_{cr}^t}{R_t} n, \\
 Kg(20,20) &= -n_x^b \alpha_m^2 - \frac{2 * P_{cr}^b}{R_b} n - \frac{P_{cr}^b}{R_b} n^2, \\
 P_{cr}^t &= \frac{N_{\theta\theta}^t}{R_t}, \quad P_{cr}^b = \frac{N_{\theta\theta}^b}{R_b}
 \end{aligned} \quad (26)$$

11- مراجع

- [1] J. R. Vinson, *The Behavior of Sandwich Structures of Isotropic and Composite Materials*, New York: Technomic, pp. 81-105, 1999.
- [2] Y. Frostig, O.T. Thomsen, Non-linear thermal response of sandwich panels with a flexible core and temperature dependent mechanical properties, *Composites Part B: Engineering*, Vol. 39, No. 1, pp. 165-84, 2008.
- [3] K. MalekzadehFard, M. Gholami, F. Reshadi, M. Livani, Free vibration and buckling analyses of cylindrical sandwich panel with magneto rheological fluid layer, *Journal of Sandwich Structures and Materials*, Vol. 20, No. 6, pp. 1-27, 2015.
- [4] Y. Frostig, Buckling of sandwich panels with a flexible core-high-order theory, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 35, No. 3, pp. 183-204, 1998.
- [5] A.K. Noor, W.S. Burton, Refinement of higher-order laminated plate theories, *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 42, No. 1, pp. 1-13, 1989.
- [6] T. Kant, K. Swaminathan, Analytical solution for free vibrations for laminated composite and sandwich plates based on a higher-order refined theory, *Composite Structures*, Vol. 53, No. 1, pp. 73-85, 2001.
- [7] H. Biglari, A.A. Jafari, Static and free vibration analyses of doubly curved composite sandwich panels with soft core based on a new three-layered mixed theory, *Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 224, No. 11, pp. 2332-2349, 2010.
- [8] E. Carrera, On the use of Murakami's Zig-Zag function in the modeling of layered plates and shells, *Computers and Structures*, Vol. 82, No. 7, pp. 541-554, 2004.
- [9] A. K. Garg, R. K. Khare, T. Kant, Higher-order closed-form solutions for free vibration of laminated composite and sandwich shells, *Journal of Sandwich Structures and Materials*, Vol. 8, No. 3, pp. 205-235, 2006.
- [10] M. Zarei, G. H. Rahimi, Free vibration analysis of rotating grid stiffened composite cylindrical shells, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 9, pp. 175-185, 2016. (in Persian)
- [11] Y. Frostig, O. T. Thomsen, High-order free vibration of sandwich panels with a flexible core, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 41, No. 5, pp. 1697-1724, 2004.
- [12] k. Malekzadeh Fard, M. Livani, A. veisi, M. Gholami, Improved high-order bending analysis of double curved sandwich panels subjected to multiple loading conditions, *Latin American Journal of Solids and Structures*, Vol. 11, No. 12, pp. 2284-2307, 2014.
- [13] O. Rahmani, S. M. R. Khalili, K. Malekzadeh, Free vibration response of composite sandwich cylindrical shell with flexible core, *Composite Structures*, Vol. 92, No. 5, pp. 1269-1281, 2010.
- [14] Y. Kagawa, Non-Axially Symmetric vibrations of sandwich cylindrical shells, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 7, No.1, pp. 39-48, 1968.
- [15] X. Hu, Free vibration analysis of symmetrical cylindrical honeycomb panels by using the finite strip method, *Journal of Vibration and Control*, Vol. 3, No. 1, pp. 19-32, 1997.
- [16] M. Četković, Dj. Vuksanović, Bending and free vibrations and buckling of laminated composite and sandwich plates using a layerwise displacement model, *Composite Structures*, Vol. 88, No. 2, pp. 219-227, 2009.
- [17] A. Nazari, K. Malekzade Fard, M. Majidian, Vibration analysis of FML cylindrical shell optimized according to maximum natural frequency under various boundary conditions, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 7, pp.143-152, 2016. (in Persian)
- [18] C.W. Bert, Structural theory of laminated anisotropic elastic shells, *Journal of Composite Materials*, Vol. 1, No. 4, pp. 414-23, 1967.

بار بحرانی کمانش محوری پنل نیز با افزایش زاویه‌ی الیاف، به دلیل افزایش سفتی پنل در ابتدا افزایش و بعد از زاویه الیاف 60 درجه، با بیشتر شدن زاویه‌ی الیاف به دلیل کاهش سفتی پنل مقدار بار بحرانی کمانش محوری کاهش می‌یابد. مقدار بار بحرانی کمانش فشار خارجی تقریباً با افزایش زاویه‌ی الیاف، افزایش می‌یابد.

9- فهرست علائم

تعداد نیم موج‌ها در جهت x	m
تعداد نیم موج‌ها در جهت θ	n
ثوابت سفتی کاهش‌یافته درون صفحه‌ای و عرضی	$\bar{Q}_{mn}$
لایه k ام	Q_{mn}
ثوابت سفتی درون صفحه‌ای و عرضی هسته	u_0^i, v_0^i, w_0^i
جابجایی‌های صفحه میانی در جهت طولی، محیطی و عرضی	
شعاع‌هایی میانی رویه‌های بالا، پایین و هسته پنل (m)	R_t, R_b, R_c
ضخامت کل پنل ساندویچی استوانه‌ای (m)	h
ضخامت رویه بالایی، پایینی و هسته پنل (m)	h_t, h_b, h_c
طول پنل ساندویچی استوانه‌ای (m)	L
مختصات مکانی در جهت (طول، محیطی و شعاعی)	(x, θ, z)
مدول برشی (GPa)	G_{12}, G_{13}, G_{23}
مدول ینگ در جهت‌های اصلی تک لایه (GPa)	E_1, E_2, E_3
ماتریس هندسی - سفتی پنل	k_g
ممان اینرسی	I^i
مؤلفه‌های شتاب در رویه‌های بالا، پایین و هسته پنل	$\ddot{u}^i, \ddot{v}^i, \ddot{w}^i$
علائم یونانی	
تنش‌های عمودی و برشی در رویه‌ها و هسته	$\sigma_{xx}^i, \sigma_{\theta\theta}^i, \sigma_{zz}^i, \sigma$
چگالی (kgm^{-3})	ρ_i
ضرایب پواسون	$\nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}$
فرکانس طبیعی (Hz)	ω
فرکانس زاویه‌ای بی‌بعد شده	$\bar{\omega}$
گرش‌های نرمال در رویه‌ها و هسته	$\varepsilon_{xx}^i, \varepsilon_{\theta\theta}^i, \varepsilon_{zz}^i$
گرش‌های برشی در رویه‌ها و هسته	$\varepsilon_{x\theta}^i, \varepsilon_{xz}^i, \varepsilon_{\theta z}^i$
بالانویس‌ها	
نشان دهنده رویه بالا، پایین و هسته	$i=t, b, c$

10- پیوست‌ها

تعدادی از انتگرال‌های دقیق مورد استفاده در محاسبه منتجه‌های تنش هسته

$$\begin{aligned}
 \bar{H}_1 &= \int_{h_k}^{h_{k+1}} \frac{1}{1+z/R} dz = R \left[\ln \left(\frac{R+h_{k+1}}{R+h_k} \right) \right], \\
 \bar{H}_3 &= \int_{h_k}^{h_{k+1}} \frac{z^2}{1+z/R} dz = R \left[\frac{1}{2} (h_{k+1}^2 - h_k^2) - R \left(\frac{h_{k+1}}{-h_k} \right) + R^2 \ln \left(\frac{R+h_{k+1}}{R+h_k} \right) \right]
 \end{aligned} \quad (25)$$

تعدادی از درایه‌های ماتریس سفتی - هندسی برای تحلیل کمانش عبارتند از:

- theory and analysis*, Second Edition, pp. 1-164, Boca Raton: CRC Press, 2003.
- [24] A. Davar, *Analysis of FML and FGM cylindrical shells subjected to low-velocity impact*, PhD Thesis, Department of Mechanical Engineering, Khaje Nasir Toosi University, Tehran, 2010. (in Persian فارسی)
- [25] Y. Frostig, Buckling of sandwich panels with a flexible core—high-order theory, *International Journal of Solides and Structures*, Vol. 35, No. 3, pp. 183-204, 1998.
- [26] M. E. Fares, A. M. Zenkour, Buckling and free vibration of non-homogeneous composite cross-ply laminated plates with various plate theories, *Composite Structures*, Vol. 44, No. 4, pp. 279-287, 1999.
- [27] M. Meunier, R. A. Shenoi, Free vibration analysis of composite sandwich plates, *Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 213, No. 7, pp. 715–27, 1999.
- [19] O. Soykasap, Z. Mecitoglu, O. Borat, Dynamic response of composite cylindrical shells to shock loading, *Mathematical Computational Applications*, Vol. 1, No. 1, pp. 85-96. 1996.
- [20] CT. Loy, KY. Lam, Vibration of thick cylindrical shells on the basis of three dimensional theory of elasticity, *Journal of sound and Vibration*, Vol. 226, No. 4, pp. 719–37, 1999.
- [21] M. Afshin, M. Sadighi, M. Shakeri, Free-edge effects in a cylindrical sandwich panel with a flexible core and laminated composite face sheets, *Mechanics of Composite Materials*, Vol. 46, No. 5, pp. 539-554, 2010.
- [22] S. M. R. Khalili, A. Davar, K. MalekzadehFard, Free vibration analysis of homogeneous isotropic circular cylindrical shells based on a new three-dimensional refined higher-order theory, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 56, No. 1, pp. 1–25, 2012.
- [23] J. N. Reddy, *Mechanics of laminated composite plates and shells:*