مجله مهندسی مکانیک مدرس، خرداد 1396، دوره 17، شماره 3، ص‌ص 281-292

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

توسعه الگوریتم ضمنی برای گلرکین گسسته مرتبه بالا جهت حل جریان تراکم‌پذیر با استفاده از روش‌های نیوتن-کرایلف

وحید بدرخانی[1]، امیرنجات[2*]، مجتبی طحانی[3]

1- کارشناسی ارشد، مهندسی هوافضا، دانشگاه تهران، تهران
2- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه تهران، تهران
3- استادیار، مهندسی هوافضا، دانشگاه تهران، تهران
*تهران، صندوق پستی 1439955963، nejat@ut.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 25 دی 1395
پذیرش: 21 بهمن 1395
ارائه در سایت: 21 اسفند 1395

کلید واژگان:
گلرکین گسسته
جریان تراکم‌پذیر لزج و غیرلزج
الگوریتم نیوتن-کرایلف
پیش شرط‌سازی
هموارکننده چندشبکه‌ای

چکیده

در این مقاله، روش المان محدود-گلرکین گسسته برای جریان تراکم‌پذیر لزج و غیرلزج به‌صورت ضمنی با استفاده از الگوریتم نیوتن-کرایلف با هدف افزایش دقت محاسبات، سرعت و نرخ همگرایی مورد مطالعه قرار گرفته است. در این راستا برای جریان غیرلزج، اعمال لزجت مصنوعی در نواحی دارای گرادیان شدید باعث افزایش کیفیت نتایج حل بخصوص در مراتب بالا می‌شود. همچنین در جریان لزج نیز استفاده از روش گسسته‌سازی گلرکین گسسته متراکم برای جمله‌های بیضوی باعث بهبود نتایج شده است. برای افزایش سرعت محاسبات و نرخ همگرایی نیز حلگرهای خطی همراه با شروع مجدد و ماتریس‌های پیش‌شرط ژاکوبی بلوکی و فاکتورگیری تجزیه ناقص مثلثی برای حل ماتریس ژاکوبین حاصل از روش اختلاف محدود اعمال می‌شوند. شایان ذکر است، نحوه عملکرد ماتریس‌های پیش‌شرط برای سه جریان زیرصوت غیرلزج، گذرای صوت غیرلزج و زیرصوت آرام لزج بررسی شده است. همچنین برای تکمیل مباحث، هموارکننده چندشبکه‌ای با شرایط ویژه برای تمامی ماتریس‌های پیش‌شرط اعمال می‌شود. از طرفی در تمامی جریان‌های اشاره شده با افزایش مرتبه حل، نرخ همگرایی کاهش می‌یابد که برای برطرف کردن این مشکل از مراتب پایین‌تر به‌عنوان شرایط اولیه مراتب بالا و یک فاز میانی برای انتقال محاسبات از فضای مرتبه پایین به بالا استفاده شده است. همچنین استفاده از گام زمانی محلی برای بهبود نرخ همگرایی پیشنهاد می‌شود. به‌این ترتیب، روش عددی ارائه‌شده به‌عنوان یک الگوریتم کارآمد برای شبیه‌سازی جریان مرتبه بالا به‌خصوص جریان گذرای صوت غیرلزج و جریان لزج پیشنهاد می‌گردد.

Development of implicit Algorithm for High-order discontinuous Galerkin methods to solve compressible flows using Newton-Krylov methods

Vahid Badrkhani [1], Amir Nejat[2*], Mojtaba Tahani[1]

1- Faculty of New Sciences and Technologies, University of Tehran, Tehran, Iran
2- School of Mechanical Engineering, University of Tehran, Tehran, Iran
*P.O.B. 1439955963, Tehran, Iran, nejat@ut.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 14 January 2017
Accepted 09 February 2017
Available Online 11 March 2017

Keywords:
Discontinuous Galerkin
Compressible viscous and inviscid flow
Newton-Krylov Algorithm
Preconditioning
Multigrid smoother

ABSTRACT

In this paper, an implicit finite element-discontinuous Galerkin method for compressible viscous and inviscid flow is developed using Newton-Krylov algorithm with the objective of increasing the accuracy and convergence rate. For inviscid flows, an artificial viscosity is implemented in sharp gradient flow regions especially at high-order cases, increasing the accuracy of the solution. Moreover, for viscous flows, the accuracy is improved by using compact discontinuous Galerkin discretization method for elliptical terms. To reduce the computing CPU time and increase the convergence rate, an iterative Krylov type preconditioned linear solver is applied. For preconditioning, restarting, Block-Jacobi and block incomplete-LU factorization are employed for solving the linear system of the Jacobian matrix. The Jacobian matrix is constructed via finite difference perturbation technique. In this context, the performance of preconditioning matrix for three types of flow regimes of inviscid subsonic, inviscid transonic and viscous laminar subsonic are studied. In addition to complete the discussions, multigrid smoother with special conditions is applied for all preconditioning matrices. To improve the solver performance for higher order discretization, a lower order solution may be used as higher orders initial condition. Therefore, a middle phase is needed to transfer calculations from low to high order discretized domain and then the final Newton phase is continued. In addition, local time stepping is implemented to improve the rate of convergence. Consequently, the presented numerical method can be used as an efficient algorithm for high-order Discontinuous Galerkin flow simulation, especially for transonic inviscid and laminar viscous flows.

Please cite this article using:

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

V. Badrkhani, A. Nejat, M. Tahani, Development of implicit Algorithm for High-order discontinuous Galerkin methods to solve compressible flows using Newton-Krylov methods, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 3, pp. 281-292, 2017 (in Persian)

1- مقدمه

در حیطه دینامیک سیالات محاسباتی، بسیاری از روش‌های ارائه‌شده از مرتبه اول یا دوم می‌باشند. دلیل انتخاب این روش‌ها، سادگی برنامه‌نویسی و اعمال آن‌ها برای بسیاری از مسائل صنعتی است [1]. اما از دیدگاه تئوریک، استفاده از روش‌های مرتبه بالا بسیار کارآمدتر هستند [2]. زیرا همانطورکه می‌دانیم، خطای قطع، τ، با اندازه شبکه، h، به‌صورت $\tau \sim h^{\mathcal{P}}$ رابطه داشته که $\mathcal{P}$ مرتبه دقت روش عددی به‌کاررفته است. به‌این‌ترتیب، خطای قطع با افزایش دقت روش عددی به‌صورت نمایی کاهش می‌یابد.

اگرچه روش‌های تفاضل-محدود و حجم-محدود به‌راحتی به کد تبدیل می‌شوند، اما برای رسیدن به‌دقت مرتبه بالا در این روش‌ها می‌بایست از استنسیل گسسته‌سازی نسبتاً بزرگی استفاده نمود که این امر باعث اختلال در نتایج، خصوصا در نزدیکی نواحی با گرادیان‌های شدید مانند شوک و نقاط اکسترمم می‌شود. بنابراین استفاده از روش‌های عددی که خاصیت محلی بیشتری دارند برای این نواحی مناسب‌تر است.

برای رسیدن به روش عددی جامع‌تر که هم در هندسه‌های پیچیده قابلیت مناسب داشته و هم دارای خاصیت محلی در نواحی ناپیوستگی باشد، مارا به‌سمت استفاده از روش‌های المان-محدود سوق می‌دهد. در واقع روش‌های المان-محدود خانواده وسیع‌تری از روش‌های عددی مانند تفاضل-محدود و حجم-محدود می‌باشند، به‌طوری‌که می‌توان با انتخاب توابع وزنی مناسب، هردو روش مذکور را از روش المان-محدود به‌دست آورد.

نسل جدیدی از روش‌های المان-محدود با خاصیت گسستگی در حل به‌وجود آمدند که امکان انفصال تطبیقی را به‌خوبی فراهم می‌نمایند. همچنین به‌علت مجزا بودن میدان در مرزهای المان، شرط پایستاری به‌طور مستقیم اعمال خواهد شد که این مطلب این روش را تبدیل به یک روش پایستار و در عین حال محلی می‌سازد. از میان روش‌های المان-محدود، روش گلرکین تطابق بسیار مناسبی با مسائل مکانیک سیالات عددی داشته و به این سبب، نوع گلرکین روش‌های المان-محدود گسسته یا به عبارتی دیگر روش گلرکین گسسته[1] (DG) انتخاب شده‌است.

روش گلرکین گسسته بواسطه شرط پذیرش دو مقدار متفاوت در دو طرف وجه یک سلول، قابلیت بیشتری از روش گلرکین پیوسته در محاسبه ناپیوستگی‌ها دارد. از طرف دیگر در روش گلرکین گسسته به خاطر افزایش انجام عملیات محاسباتی به ازای هر سلول هزینه محاسباتی آن برای هر سلول بیشتر از روش‌های حجم کنترلی می‌باشد. همگرایی روش‌های گلرکین گسسته نیز از همگرایی روش‌های حجم کنترلی به‌خاطر وجود درایه‌هایی از مرتبه‌های متفاوت در ساختار ماتریس ژاکوبی نسبت به روش‌های حجم کنترلی ضمنی، بیشتر خواهد بود. به همین خاطر توسعه روش‌های تسریع همگرایی برای روش‌های گلرکین گسسته موضوع بحث این مقاله می باشد.

اولین نسخه روش گلرکین گسسته در زمینه مکانیک سیالات محاسباتی توسط کوکبرن و شو در طی مقالات مختلف [4,3] به ترتیب از یک مسئله هذلولوی یک‌بعدی تا جریان اویلر دوبعدی همراه با شوک در شبکه بی‌سازمان انجام شد. این افراد ایده استفاده از گسسته‌سازی زمانی رانگ-کوتای مرتبه بالا همراه با حفظ همواری میدان به‌وسیله یک روش محدودکننده شیب[2] (TVB) را در گسسته‌سازی گلرکین پیاده‌سازی نمودند. به‌علت حجم بالای متغیرهای میدان در این روش و برقراری ارتباط پیچیده‌تر بین گره‌های میدان، این افراد استفاده از روش‌های صریح را پیشنهاد کردند. از طرفی دیگر چاونت و سالزانو [5] نشان دادند که استفاده از روش گلرکین گسسته همراه با گسسته‌سازی مرتبه اول پیشرو به‌صورت نامشروط ناپایدار است. آنان ثابت کردند که هنگامی این روش با گسسته‌سازی اویلر پایدار است که نسبت $\Delta t/\Delta x$ از مرتبه $O(\sqrt{x})$ باشد. در واقع برای این منظور عدد کورانت[3] (CFL) می‌بایست بسیار پایین نگه داشته شود. از طرفی دیگر کوکبرن و شو [4] نشان دادند که پایداری روش مذکور دارای شرط عدد کورانت به‌صورت $\mathrm{CFL} \leq 1/(2\mathcal{P}+1)$ است. همانطور که ملاحظه می‌شود، همچنان پایداری ضعیفی نسبت به سایر روش‌های عددی مانند تفاضل و حجم-محدود وجود دارد. همچنین از کارهای اخیر در استفاده از این روش برای جریان‌های دوفازی تراکم‌ناپذیر در محیط‌های متخلخل و به‌همراه شرط مرزی ترکیبی (رابین) می‌توان به [6] اشاره کرد. در این تحقیق از روش پنالتی داخلی برای تخمین جملات بیضوی استفاده شده است.

یکی دیگر از کارهای برجسته در حل معادلات جریان سیال تراکم‌پذیر توسط باسی و ریبی برای جریان غیرلزج [7] و جریان لزج [8] ارائه گردید. در این کارها ایده استفاده ار توابع پایه لاگرانژی به همراه گسسته‌سازی زمانی رانگ-کوتا به‌کار برده‌شد. همچنین برای شبیه‌سازی جمله لزجت یک متغیر جدید تعریف شده و معادله مرتبه دوم به دو معادله مرتبه اول تبدیل شدند که به‌صورت هم‌زمان حل می‌گردند. برای محاسبه شار لزجت روی مرزهای المان از یک میانگین‌گیری ساده استفاده شده‌است. بعدها کوکبرن و همکارانش [9] در مقاله خود نشان دادند که میانگین‌گیری ساده دارای همگرایی پایینی بوده و آنان روش مناسب‌تری را تحت عنوان روش گلرکین گسسته‌محلی[4] (LDG) ارائه کردند. آنان با معرفی پارامترهای حفظ پایداری، سرعت همگرایی روش را افزایش دادند. پرسون و پریر [10] اصلاحی را بر روش گسسته‌سازی محلی ارائه دادند که از همسایه‌های درجه اول استفاده می‌کرد و به این ترتیب همگرایی را بهتر می‌سازد. این روش نیز به روش گلرکین گسسته متراکم[5] (CDG) معروف گردید.

با بررسی تاریخچه این روش می‌توان دریافت که به‌علت حجم بالای متغیرها، محققان بیشتر به‌سمت استفاده از روش‌های گسسته‌سازی صریح روی آورده‌اند. اما مطالعات انجام‌شده در همان ابتدا آشکار نمود که به دلیل لزجت مصنوعی بسیار پایین این روش خصوصا در گسسته‌سازی مرتبه بالا، محدوده پایداری با گسسته‌سازی صریح بسیار اندک بوده و برای نیل به یک روش کارآمد احتیاج به استفاده از الگوریتم‌های ضمنی است. اولین افرادی که از گسسته‌سازی ضمنی همراه با الگوریتم‌های سریع حل دستگاه استفاده نمودند، باسی و ریبی [11] بودند. از جمله دیگر روش‌های ضمنی گلرکین گسسته می‌توان به الگوریتم نیمه‌ضمنی دلجسی و فیستاور [12] و همچنین الگوریتم رانگ-کوتای ضمنی تا مرتبه چهار برای جریان سیال تراکم‌پذیر توسط باسی و همکارانش [13] اشاره نمود. پرسون و پریر [14] یک الگوریتم ضمنی دو مرحله‌ای را به‌عنوان پیش‌شرط برای کمینه‌سازی کلی باقیمانده[6] (GMRES) برای حل دستگاه خطی در هر گام زمانی ارائه کردند. آنان اشاره نمودند که ساختار ماتریس به‌دست‌آمده از این نوع گسسته‌سازی یک ساختار بلوکی بوده که براساس آن می‌توان الگوریتم‌های حل مناسبی ارائه نمود. یکی از کارهای برجسته اخیر در زمینه بررسی همگرایی روش گلرکین گسسته در مسائل حالت پایدار توسط دیوسادی و دارموفال [15] ارائه شد. آنان از الگوریتم حل ضمنی نیوتن-کرایلف با شروع-مجدد همراه با پیش‌شرط‌های

[1] Discontinuous Galerkin
[2] Total Variational Bounded
[3] Courant Friedrichs Lewy
[4] Local Discontinuous Galerkin
[5] Compact Discontinuous Galerkin
[6] Generalized minimal residual method

گوناگون استفاده نمودند. برای رسیدن به یک آرایش سه‌قطری در شبکه بی‌سازمان از مسیرهایی با بیشترین ارتباط[1] در جریان استفاده کردند.

نمونه دیگری از کارهای اخیر در زمینه همگرایی به کمک الگوریتم نیوتن-کرایلف در روش‌های حجم-محدود مرتبه بالا می‌توان به کار نجات و الیورگویچ [17,16] و گلرکین گسسته [19,18] اشاره نمود. نجات و الیورگویچ پس از بررسی روش‌های مختلف پیش‌شرط برای الگوریتم GMRES دریافتند که استفاده از تفاضل-محدود مرتبه اول ماتریس ژاکوبین همراه با مراتب بالای جایگذاری[2] در روش تجزیه ناقص[3] (ILU) نتیجه مناسبی برای همگرایی تا مرتبه چهار به دنبال دارد. همچنین استفاده از تعداد زیرفضای ثابت در الگوریتم GMRES برای رسیدن به محدوده خطای دلخواه در هر تکرار کافی به‌نظر نمی‌رسد و در واقع استفاده از رهیافت چند مرحله‌ای مناسب است.

برای افزایش سرعت همگرایی و کارآمد کردن حلگر در نواحی جریان همراه ناپیوستگی، از جمله‌های لزجت مصنوعی استفاده شده است. این جمله‌های لزجت مصنوعی سبب ایجاد درایه‌هایی با اندازه‌های با مرتبه‌ای متفاوت از دیگر درایه‌های ماتریس که مربوط به جمله‌های غیر لزج جریان هستند، می‌شود. در نتیجه ماتریس ژاکوبین بد وضعی بیشتر پیدا می‌کند و پیش‌شرط‌سازی آن از اهمیت بسزایی برخورد است. نوآوری مقاله حاضر در اعمال جملات لزجت مصنوعی در گسسته‌سازی ضمنی معادلات جریان تراکم‌پذیر و نحوه پیش‌شرط‌سازی ماتریس ژاکوبین حاصل این گسسته‌سازی برای جریان‌های لزج و حاوی شوک می باشد.

حلگر مورد نظر در محیط گرافیکی لینوکس[4] با زبان برنامه‌نویسی C++ همراه کتابخانه دیجیتالی PETSc[5] (برای حلگرهای خطی) ایجاد شده است. همچنین شبکه‌بندی‌های بی‌سازمان ایجاد شده توسط نرم‌افزارهای تولید شبکه گمبیت، به‌عنوان ورودی حلگر تولید می‌شود و تمامی نتایج در سیستمی با مشخصات اینتل i7 CPU-1.73GHz و حافظه 4.00 GB تهیه شده است.

2- روش عددی

معادلات حاکم برای جریان ناویر-استوکس تراکم‌پذیر، وابسته به زمان، حالت دوبعدی و به‌صورت اندیسی طبق رابطه‌های (1) و (2) بیان می‌شود:

$$\partial_t u_k + \partial_i \mathrm{F}_{ki}(u) - \partial_i \mathrm{F}^{\mathrm{v}}_{ki}(u, \nabla u) = 0, k \in [1, n_s] \tag{1}$$

$$u = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_i \\ \rho E \end{pmatrix}, F_j = \begin{pmatrix} \rho v_j \\ \rho v_i v_j + p\delta_{ij} \\ v_j(\rho E + p) \end{pmatrix}, F_j^v = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_{ij} \\ v_i \sigma_{ij} + q_j \end{pmatrix} \tag{2}$$

که در آن u_k، $F^{\mathrm{v}}_{ki}(u, \nabla u)$ و $F_{ki}(u)$ به‌ترتیب نمایانگر k-ام ترکیب بردار پایستار u، شار عبوری لزج F^{v} و غیرلزج F برای معادلات پیوستگی، مومنتوم و انرژی طبق رابطه (2) هستند. ρ چگالی سیال، v_i بردار سرعت در راستای i و E مقدار انرژی کل سیال در واحد جرم می‌باشند. اندازه بردارهای پایستار n_s، در حالت دو بعدی و سه بعدی به‌ترتیب 4 و 5 است (البته معادلات توربلانس را شامل نمی‌شود).

برای گسسته‌سازی معادلات ناویراستوکس به‌شیوه گلرکین گسسته، از المان‌های مثلثی T_h در فضای محاسباتی Ω روی المان k و تخمین جواب از طریق یک تابع چند جمله‌ای v_h^p با درجه p استفاده می‌شود. در این راستا u_h تخمین جواب در این فضا و $\left(v_h^p\right)^{n_s} \in \boldsymbol{v}_h$ یک تابع آزمون[6] می‌باشد.

[1] Line of maximum coupling
[2] Fill-in
[3] Incomplete Lower Upper
[4] Linux
[5] Portable, Extensible Toolkit for Scientific Computation
[6] Test function

حال با اعمال تابع آزمون در رابطه (1)، انتگرال‌گیری روی تمام المان‌ها و استفاده از انتگرال‌گیری جز به جز (حالت ضعیف[7] المان محدود) رابطه (3) به‌دست می‌آید:

$$\sum_{k \in T_h} \int_k^0 v_k \, \partial_t u_k dx + \mathcal{R}_h(u_h, v_h) = 0 \tag{3}$$

که در رابطه بالا جمله $\mathcal{R}_h(u_h, v_h)$ به‌صورت رابطه (4) و (5) تعریف می‌شود:

$$\mathcal{R}_h(u_h, v_h) = \sum_{k \in T_h} [\mathbb{E}_k(u_h, v_h) + \mathbb{V}_k(u_h, v_h)] \tag{4}$$

$$\mathbb{E}_k(u_h, v_h) = -\int_k^0 \partial_i v_k F_{ki} dx + \int_{\partial k}^0 v_k^+ \hat{F}_{ki}(u_h^+, u_h^-) \hat{n}_i \, ds \tag{5}$$

در رابطه (4) جمله $\mathbb{V}_k(u_h, v_h)$ بیانگر جمله لزجت می‌باشند که در این تحقیق از روش CDG برای این جمله و روش رو[8] برای تخمین شار عبوری غیرلزج رابطه (5)، $\hat{F}_{ki}(u_h^+, u_h^-)$، استفاده شده است. همچنین علائم $(0)^+$ و $(0)^-$ مقادیر داخل و بیرون در مرز المان مورد نظر و $\hat{n}$ مقدار بردار نرمال عمود برسطح به‌سمت بیرون المان را بیان می‌کنند.

حال می‌توان همانند گسسته‌سازی معادلات برای تخمین بردار جواب $\mathrm{u}_h(x,t)$، نیز از یک ترکیب خطی تابع چند جمله‌ای $v_{h_i}(x)$، تحت عنوان تابع پایه در فضای v_h^p استفاده کرد. با انتخاب تابع پایه و آزمون یکسان روش گلرکین گسسته شکل می‌گیرد.

در این راستا بردار جواب از طریق رابطه (6) به‌دست می‌آید:

$$u_h(x,t) = \sum_i U_{h_i}(t) v_{h_i}(x) \tag{6}$$

در رابطه بالا، U_h قسمتی از بردار جواب (تنها تابعی از زمان) می‌باشد. همچنین توابع لاگرانژ به‌عنوان تابع چند جمله‌ای انتخاب شده است. برای توضیحات تکمیلی در مورد نحوه گسسته‌سازی گلرکین گسسته می‌توان به مرجع [18] اشاره کرد.

با جایگذاری رابطه (6) در روابط بیان شده، رابطه (7) به‌دست می‌آید:

$$\mathcal{M}_h \frac{dU_h}{dt} + R_h\big(U_h(t)\big) = 0 \tag{7}$$

در رابطه بالا R_h باقیمانده غیرخطی معادلات گسسته‌سازی شده است که به‌صورت $R_h(U_h)_i = \mathcal{R}_h\big(u_h, v_{h_i}\big)$ تعریف می‌شود. همچنین ماتریس $\mathcal{M}_h$، ماتریس جرمی بوده و طبق رابطه (8) قابل محاسبه است:

$$\mathcal{M}_{h_{ij}} = \int_k^0 v_{h_i} v_{h_j} \, dx \tag{8}$$

با گسسته‌سازی زمانی رابطه (7) و انجام یک سری عملیات ریاضی، رابطه (9) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$U_h^{m+1} = U_h^m - \left(\frac{1}{\Delta t}\mathcal{M}_h + \frac{\partial R_h}{\partial U_h}\right)^{-1} R_h(U_h^m) \tag{9}$$

حال با افزایش گام زمانی و گذشت زمان، رابطه بالا به حالت پایدار[9] معادلات ناویر استوکس تبدیل می‌شود.

$$(U_h^{m+1} - U_h^m)\left(\frac{\partial R_h}{\partial U_h}\right) = R_h(U_h^m) \tag{10}$$

در واقع با گذشت زمان یا به‌عبارت دیگر $\Delta t = \infty$ رابطه (10) به‌دست می‌آید. برای حل این رابطه از روش‌های کرایلف استفاده می‌شود که در ادامه به‌طور مفصل بیان خواهد شد.

جمله $\partial R_h / \partial U_h$ بیانگر ماتریس ژاکوبی می‌باشد و از مهمترین ویژگی‌های آن بدوضع و تنک بودن است. در این تحقیق از ساختار فشرده

[7] Weak form
[8] Roe
[9] Steady-state

ردیف پراکنده[1] برای ذخیره درایه‌های ماتریس ژاکوبین [20] و از روش معکوس کاتهیل-مک‌کی[2] برای کاهش پهنای باند ساختار ماتریس استفاده شده است. این عمل در ساختار کد محاسباتی به‌صورت بازآرایی[3] اندیس درایه‌های ماتریس، نه بر روی مقادیر آن، انجام می‌شود.

محاسبه ماتریس ژاکوبی یکی از مهمترین قسمت‌های روش‌های ضمنی بخصوص الگوریتم نیوتن-کرایلف است. در این مقاله از روش اختلاف محدود طبق رابطه (11) برای محاسبه آن استفاده شده است:

$$\frac{\partial R_j}{\partial U_i} \approx \frac{R_j(U_i+\varepsilon)-R_j(U_i)}{\varepsilon} \tag{11}$$

همچنین رابطه (11) طبق الگوریتم زیر به ازای تمامی المان‌های میدان به‌صورت زیر اجرا می‌شود:

for j=1 to K
  for i=neighbors of element j
$U_{i_{\mathrm{per}}} = U_i + \varepsilon$
  if $\mathrm{U}_i \in \mathrm{BC}$
$U_{i_{\mathrm{per}}}{}^{\mathrm{BC}} = \mathrm{BC}\left(U_{i_{\mathrm{per}}}\right)$
$U_i{}^{\mathrm{BC}} = \mathrm{BC}\left(U_i{}^{\mathrm{BC}}\right)$
$\mathrm{RHS}_{\mathrm{per}}{}^{\mathrm{BC}} = R_j\left(U_{i_{\mathrm{per}}}{}^{\mathrm{BC}}\right)$
$\mathrm{RHS}^{\mathrm{BC}} = R_j\left(U_i{}^{\mathrm{BC}}\right)$
$\frac{\partial R_j}{\partial U_i} \approx \frac{\mathrm{RHS}_{\mathrm{per}}{}^{\mathrm{BC}} - \mathrm{RHS}^{\mathrm{BC}}}{\left(U_{i_{\mathrm{per}}} - U_i\right)}$
  Else
$\mathrm{RHS} = R_j(U_i)$
$\mathrm{RHS}_{\mathrm{per}} = R_j\left(U_{i_{\mathrm{per}}}\right)$
$\frac{\partial R_j}{\partial U_i} \approx \frac{\mathrm{RHS}_{\mathrm{per}} - \mathrm{RHS}}{\left(U_{i_{\mathrm{per}}} - U_i\right)}$
  end if
  end for
end for

در الگوریتم بالا K تعداد تمامی المان‌های میدان می‌باشد. مقدار $\varepsilon = 10^{-8}$ یا هم مرتبه جذر خطای ماشین برای این پارامتر در نظر گرفته شود. همچنین تابع BC مقادیر مولفه‌های میدان را در المان‌های مرزی محاسبه می‌کند.

3- حلگرهای فوق‌خطی دستگاه معادلات

در واقع شالوده اصلی الگوریتم‌های نیوتن-کرایلف برپایه الگوریتم حل بهینه دستگاه‌های خطی شده معادلات (رابطه (10)) در تکرارهای غیرخطی می‌باشد. روش‌های کرایلف از لحاظ محاسباتی هزینه‌بر بوده و طبیعی است که پیچیدگی و بد وضعی ماتریس خطی شده سبب افزایش تعداد تکرارهای غیر خطی روش نیوتن کرایلف می گردد که نهایتا زمان محاسبات را افزایش قابل توجه خواهد داد [20,17,14].

3-1- الگوریتم GMRES: روشی مناسب برای حل جریان سیال

روش GMRES به‌دنبال یافتن جوابی از فضای اصلی $\mathbb{R}^{n\times n}$ در ناحیه‌ای محدود شده و مناسب $V \subset \mathbb{R}^{m\times n}$ تحت عنوان زیرفضای کرایلف می‌باشد به‌طوری‌که $m \ll n$ می‌باشد. پایه‌های تشکیل‌دهنده زیرفضا برهم عمود می‌باشند و با حل یک مسئله کمینه‌سازی یک جواب مناسب برای دستگاه معادلات به‌دست می‌آید. این روش در واقع یک روش تصویرسازی برفضای جواب می‌باشد. به‌عبارت دیگر با داشتن حدس اولیه (نسبتا مناسب) x_0، یک فضای جواب تقریبی به‌صورت $x_0 + \mathcal{K}$ برای جواب نهایی و به‌تبع آن یک فضا بردار باقیمانده rبه‌صورت $\mathcal{L} = \mathrm{A}\mathcal{K}$ تشکیل داده شده و سعی می‌شود تا تمامی مولفه‌های بردار باقیمانده در این فضا صفر گردد. برای این منظور می‌بایست بردار باقیمانده بر فضای ساخته‌شده آن عمود گردد، به‌عبارتی دیگر $r \perp \mathcal{L}$. در این حالت جواب از ترکیب خطی پایه‌های زیرفضای کرایلف به‌دست می‌آید، $x = x_0 + V_m y_m$ که y_m از حل مسئله کمینه‌سازی حاصل می‌شود (شکل 1).

روش GMRES از این لحاظ بسیار ارزشمند است که هیچ فرضی درباره ساختار ماتریس و همچنین وضعیت مقادیر ویژه آن نشده‌است. بنابراین این روش به‌خوبی برای جریان سیال تراکم‌پذیر که اساسا ماتریس‌های ژاکوبین آن‌ها بسیار بد وضع و پراکنده هستند مناسب می‌باشد. اما در ماتریس‌های بد وضع، تعداد محاسبه پایه‌های کرایلف به‌تدریج افزایش می‌یابد. در مواردی که حدس اولیه مناسب در اختیار نباشد، انجام عملیات متعامدسازی کامل مقرون به‌صرفه نیست. یک راه برای به صرفه کردن توسط ساد و شولتز [21] موسوم به الگوریتم شروع-مجدد GMRES(m) است. الگوریتم مذکور با انجام ناقص متعامدسازی در m مرحله، میزان نرم خطا را محاسبه می‌نماید. اگر مقدار مطلوب حاصل نشده باشد، برای جلوگیری از افزایش فوق خطی محاسبات، پایه اولیه جدید برابر $v_1 = r_m/\|r_m\|$ انتخاب شده و فرآیند متعامدسازی مجددا تکرار می‌گردد.

3-1-1- همگرایی الگوریتم GMRES

مزایای الگوریتم GMRES این است که شرط معین-مثبت بودن برای ماتریس ژاکوبی ضروری نیست. ولی با توجه به مفهوم عدد شرط ماتریس, هرچه این عدد بزرگتر باشد میزان تغییرات جواب نسبت به تغییرات بردار سمت راست دستگاه حساس‌تر است. در اعدادشرط نسبتا بزرگ، تغییر کوچکی در بردار سمت راست که می‌تواند عمدتا ناشی از خطای گردکردن باشد، می‌تواند اثر زیادی روی جواب نهایی گذاشته و مسیر همگرایی را تغییر دهد و یا حتی مختل نماید. در این حالت اندازه پایه جدید متعامد شده، صفر می‌شود و الگوریتم دیگر قادر به یافتن جواب دقیق‌تر در فضای کرایلف نیست. در این راستا برای کاهش عدد شرط ماتریس از ماتریس‌های پیش-شرط استفاده می‌شود.

3-2- ماتریس پیش‌شرط

ماتریس ژاکوبین برخاسته از خطی‌سازی معادلات گسسته‌سازی شده جریان توسط روش گلرکین گسسته، اغلب دارای اعداد شرط بالا بوده و نیاز به پیش‌شرط‌سازی دارند. عمل پیش‌شرط‌سازی می‌بایست در هر مرحله از تشکیل هریک از زیر فضاهای کرایلف انجام گردد.

در تشکیل ماتریس پیش‌شرط، به دو مورد باید توجه کرد: مورد اول انتخاب ماتریس پیش‌شرط نزدیک به ماتریس اصلی با حذف پیچیدگی‌های موجود در درایه‌های مربوط به گسسته‌سازی مرتبه بالا می‌باشد. این موضوع می‌تواند با تشکیل ماتریس‌های مرتبه پایین به‌خوبی انجام شود ولی متاسفانه این موضوع به‌علت بهم‌خوردن تعادل ابعادی در روش گلرکین گسسته امکان‌پذیر نمی‌باشد. مورد دوم انتخاب ماتریس پیش‌شرط معادل همان ماتریس ژاکوبین و حل تقریبی دستگاه معادلات پیش‌شرط مانند روش‌های تجزیه مثلثی تقریبی (ILU) می‌باشد. قابل ذکر است این موضوع تطابق خوبی با روش گلرکین گسسته دارد [15,14]. همچنین بازآرایی مناسب

[1] Compressed sparse row
[2] Reverse Cuthill-Mckee
[3] Reordering

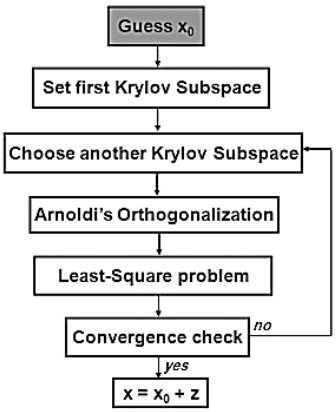

Fig. 1 GMRES Algorithm

شکل 1 مراحل الگوریتم GMRES

ماتریس پیش‌شرط می‌تواند مقدار پهنای باند داده‌ها را کاهش داده که منجر به کاهش تولید درایه‌های اضافی خواهد شد. بنابراین حل دقیق‌تری از حل تقریبی پیش‌شرط‌سازی به‌دست می‌آید و این امر به افزایش همگرایی، کمک شایانی خواهد کرد.

3-2-1- فاکتورگیری مثلثی ناقص (ILU)

در ابتدا فاکتورگیری کامل بلوک مثلثی را به‌صورت A = LU درنظر می‌گیریم که در آن L ماتریس پایین-مثلثی و U ماتریس بالا-مثلثی است. با انجام عمل تجزیه و به‌دست آوردن ماتریس‌ها، با عملیات کاهش پیشرو[1] و جایگزینی پسرو می‌توان دستگاه معادلات پیش‌شرط را حل نمود.

یک راه برای کاهش محاسبات و حافظه، استفاده از فاکتورگیری مثلثی ناقص ILU است. ساده‌ترین راه این است که هرگاه در طول انجام عمل تجزیه، درایه غیرصفری تولید گردد و در الگوی اصلی ماتریس A وجود ندارد، صرف‌نظر از اندازه آن در فرآیند فاکتورگیری حذف می‌گردد. این روش پایه‌ای‌ترین حد تجزیه ناقص مثلثی است که با نماد ILU(0) مشخص می‌شود. نسخه بلوکی حالت فوق را می‌توان به‌صورت الگوریتم زیر نشان داد:

$\tilde{U} \leftarrow A, \tilde{L} \leftarrow I$
for $j=1$ to n-1
  for neighbors $i<j$ of element j
$\tilde{L}_{ij} = \tilde{U}_{ij}\tilde{U}_{ij}^{-1}$
$\tilde{U}_{ii} \Leftarrow \tilde{U}_{ii} - \tilde{L}_{ik}\tilde{U}_{ki}$
  for neighbors $k<1$ of element j and i
$\tilde{U}_{ik} \Leftarrow \tilde{U}_{ik} - \tilde{L}_{ij}\tilde{U}_{jk}$
  end for
  end for
end for

روش ILU(0) در بسیاری از موارد جواب خوبی برای دستگاه پیش‌شرط‌سازی تولید می‌کند. اما در شرایطی مخصوصا در گسسته‌سازی‌های مرتبه بالا و یا در تکرارهای انتهایی الگوریتم نیوتن-کرایلف که نیاز به دقیق‌تر بودن حل پیش‌شرط است، الگوی پیچیده‌تری نیاز می‌باشد. در این راستا روش‌های مختلفی تاکنون ارائه شده‌است. یک روش بر پایه الگوی نگهداری مقادیر اضافی بر اساس سطح اهمیت آن‌ها است که به اختصار LOF[2] نامیده می‌شود. در این روش ابتدای عمل فاکتورگیری، برای هر درایه غیر صفر مقدار LOF=1 و برای هر درایه صفر مقدار LOF = ∞ در نظر گرفته می‌شود. در طی عمل فاکتورگیری اندازه سطح LOF با کاهش اندازه آن به سمت صفر، افزایش می‌یابد. در این راستا یک الگوریتم ILU(k) تعیین می‌کند که هر گاه سطح اهمیت یک درایه از مقدار k بیشتر شود، آن را از درایه‌های ماتریس تجزیه شده حذف نماید. برای این خانواده از تجزیه ناقص، الگوهای ILU(2) و ILU(3) بیشتر مورد توجه قرار گرفته‌است. قابل ذکر است ILU(∞) همان تجزیه کامل LU را به‌دست خواهد داد.

3-2-2- روش ژاکوبی بلوکی

این روش با انتخاب تنها درایه‌های بلوک قطر اصلی و حذف تمامی درایه‌های غیر-قطری، یک دستگاه ساده را برای حل پیش‌شرط ارائه می‌دهد. اما از طرف دیگر با حذف درایه‌های غیر-قطری، در واقع اتصال بین نقاط در ساختار گسسته‌سازی حل از میان برداشته شده و سیستم معادلات از هم گسسته می‌شود. رابطه (12) نحوه به‌دست‌آوردن ماتریس ژاکوبی را نشان می‌دهد:

$$\tilde{A}_{ij}^{\mathrm{J}} = \begin{cases} \mathrm{A}_{ij}, & if\ i = j \\ 0, & if\ i \neq j \end{cases} \tag{12}$$

اما این روش در برخی موارد دارای بازدهی مناسبی است، اما در مسائل کلی‌تر با شرایط سخت‌تر، همگرایی بسیار ضعیفی را از خود نشان می‌دهد. این روش در مرحله اول حل (مرحله راه‌اندازی) مناسب است.

4- روش نیوتن-کرایلف

هدف تمامی توسعه‌دهنده‌های حلگرهای عددی، کاهش هزینه محاسبات و افزایش دقت حل می‌باشد. با اعمال یک روش گسسته‌سازی از مرتبه بالاتر می‌توان به هدف دوم دست یافت. با این حال به‌طور عملی این قضیه زمانی امکان‌پذیر است که اگر و تنها اگر هزینه محاسباتی قابل مقایسه با هزینه استفاده از مرتبه دوم باشد.

4-1- روش‌های نیوتن: همگرایی محلی

مسئله اصلی را می‌توان به زبان ریاضی و خلاصه به‌صورت زیر بیان نمود:

$$\text{given } F: \mathbb{R}^n: \to \mathbb{R}^n, \text{find } x_* \in \mathbb{R}^n \text{ such that } F(x_*) = 0 \tag{13}$$

با این فرض که تابع F به‌صورت پیاپی مشتق‌پذیر باشد. هدف یک روش نیوتنی پیدا کردن ریشه رابطه (13) است. این مطلب با تعریف تقریب تابع[3] حول جواب x_c به‌شکل زیر دنبال می‌گردد:

$$F(x_c + p) = F(x_c) + \int_{x_c}^{x_c+p} J(z)\, dz \tag{14}$$

برای به‌دست آوردن تقریب نزدیک به جواب، انتگرال رابطه (14) با خطی‌سازی به‌صورت $J(x_c) \cdot p$ تقریب زده می‌شود که p میزان اغتشاش نسبت به حل اصلی x_c است:

$$M_c(x_c + p) = F(x_c) + J(x_c) \cdot p \tag{15}$$

که M_c مدلی از مسئله اصلی می‌باشد. در یک تکرار نیوتنی، به دنبال جواب s^N هستیم به‌گونه‌ای که $M_c(x_c + s^N) = 0$ گردد. برای این منظور، می‌بایست معادله زیر برای گام زمانی N حل شود:

$$\begin{aligned} J(x_c)s^N &= -F(x_c) \\ x_+ &= x_c + s^N \end{aligned} \tag{16}$$

که x_+ جواب به‌روز شده برای گام بعدی نسبت به گام فعلی است. از آنجا که انتظار نمی‌رود x_+ برابر با جواب نهایی x_* باشد، اما تقریب خوبی از آن به‌شمار می‌رود، الگوریتم فوق می‌بایست تا رسیدن به‌جواب نهایی تکرار گردد.

4-2- استراتژی حل

در روش ضمنی‌سازی نیوتن-کرایلف مسئله به دو مرحله راه‌اندازی (مسئله

[1] Forward reduction
[2] Level of fill
3. Affine approximation

غیرخطی) و مرحله نیوتنی (مسئله خطی) تقسیم می‌شود. هر مرحله شرایط و ویژگی‌های منحصربه‌فردی دارد که در زیر به آن‌ها اشاره می‌شود.

4-2-1- مرحله راه‌اندازی

با تنظیم مناسب و ارائه یک حدس اولیه مناسب، می‌توان از روش‌های نیوتنی یک همگرایی فوق خطی را دریافت نمود. این هدف مستلزم ارائه یک مرحله اولیه مناسب است. در این مرحله در واقع یک راه‌اندازی اولیه برای تکرارهای نیوتنی انجام می‌شود. همچنین به علت تقریب‌هایی که در این مرحله اعمال می‌شود، دیگر انتظار یک همگرایی سریع و فوق‌خطی را نخواهیم داشت.

تنظیم CFL در یک الگوریتم ضمنی در واقع هدایت یک حل غیرخطی از دیدگاه کلی است. این مرحله می‌تواند به‌صورت تدریجی با تنظیم گام زمانی مصنوعی و عدد کورانت [22] و یا به‌صورت پله‌ای [17,16] اعمال شود. از جمله سایر الگوریتم‌های تنظیم CFL می‌توان به روش‌های تاریخچه‌ای [23] اشاره کرد که کاربرد خوبی خصوصا در هنگام استفاده از محدودگرها دارا می‌باشند.

استفاده از نرم تغییرات بردار باقیمانده (R) یا هر مشخصه مطلوب از میدان برای کنترل گام‌های به‌روزسازی بسیار مفید می‌باشد. در این راستا روش‌های تنظیم عدد شرط پایداری کورانت یا همان CFL توسعه یافته‌اند. از میان این روش‌ها، روش توسعه-کاهنده[1] برای تنظیم مقدار CFL بسیار پرکاربرد و به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\mathrm{CFL}^{n+1} = \mathrm{aCFL}^{n}\left(\frac{\|\mathrm{R}^{k-1}\|}{\|\mathrm{R}^{k}\|}\right)^{\mathrm{b}} \tag{17}$$

در این رابطه (17) ضریب‌های a و b به‌صورت تجربی تنظیم می‌گردند. عموما برای رسیدن به یک حل حالت پایا، دقت گسسته‌سازی زمانی اهمیت پایینی دارد. بنابراین می‌توان علاوه بر تنظیم پارامتر کلی CFL، به‌صورت محلی و برای هریک از نقاط میدان حل، گام زمانی را به‌صورت مصنوعی تغییر داد تا در نهایت با سرعت بیشتری به حل نهایی دست یافت. این امر بدیهی است زیرا که اساسا مقیاس زمانی هر نقطه از میدان برای انتخاب یک استراتژی خاص از حل اولیه تا حل نهایی یکسان نمی‌باشد و این اجازه را به ما می‌دهد که در جایی که تغییرات شدید نیست، گام زمانی را تا بالاترین حد امکان در نظر بگیریم. بنابراین در یک الگوریتم گام زمانی مصنوعی می‌توان یک گام زمانی محلی زیر تعریف نمود:

$$\Delta\, t_i^{n+1} = \mathrm{CFL}^{n+1}\frac{\Delta\, x_i}{L(\|\lambda_i\|)} \tag{18}$$

که در آن Δx_i اندازه المان iام میدان، تابع L تعریفی از نرم سرعت محلی مشخصه‌های جریان سیال تراکم‌پذیر λ است.

گام بعدی تعیین تلورانس الگوریتم GMRES یا به‌عبارت دیگر دقت حل دستگاه معادلات می‌باشد. از آن‌جایی که در این مرحله از یک خطی‌سازی تقریبی استفاده شده‌است، حل دقیق دستگاه معادلات در تسریع همگرایی تاثیری نداشته و صرفا هزینه محاسبات را افزایش می‌دهد. از این‌رو دستگاه معادلات در هر تکرار به‌طور تقریبی حل می‌شود. منطقی به‌نظر می‌رسد که دستگاه معادلات به اندازه کسری از باقی‌مانده غیرخطی حل گردد ($telorance = C \times \mathrm{Res}(U), C \ll 1$). استفاده از این رویکرد از صرف هزینه اضافی جلوگیری می‌کند.

4-2-2-مرحله نیوتن

در مرحله قبل بیشتر رفتارهای گذرای یک مسئله غیرخطی دینامیک سیالات محاسباتی از حل میدان جریان حذف شد و خصوصیات عمده پایا در دامنه حل ظاهر گردیده‌است. بنابراین نتیجه خطی‌سازی باقی‌مانده‌های غیرخطی برای یافتن جواب پایا معقول به‌نظر می‌رسد و فرض کردن مقدار بزرگ و یا بینهایت گام زمانی، راه‌حل را به‌سمت همگرایی درجه دوم سوق می‌دهد. دستگاه معادلات در این مرحله به‌طور کامل حل می‌شود و دقت جواب تاثیر به‌سزایی در نرخ همگرایی خواهد داشت.

5- نتایج

در این فصل به ارائه نتایج حاصل از روش عددی در سه جریان زیرصوت غیر لزج، گذرای صوت غیر لزج و زیرصوت آرام لزج پرداخته خواهد شد. همچنین باید توجه داشت در روش‌های گلرکین گسسته با افزایش تعداد شبکه، زمان محاسبه به‌صورت فوق‌خطی افزایش می‌یابد. در این راستا برای شبیه‌سازی یک مسئله کاربردی و سه بعدی (مانند بال هواپیما و ...) بایستی از تعداد شبکه کمتر و مرتبه بالا استفاده شود.

5-1- جریان زیرصوت غیرلزج

اولین جریان مورد بررسی، جریان زیر صوت غیرلزج یا به‌عبارت دیگر معادله اویلر می‌باشد. در این راستا ابتدا برای تعیین میزان دقت حل، از مسئله‌ای با حل دقیق استفاده می‌شود.

5-1-1- جریان آیزنتروپیک چرخشی[2]

نمونه مورد بررسی برای اعتبارسنجی جریان در شرایط زیرصوت غیرلزج استفاده از جریان آیزنتروپیک چرخشی با حل دقیق رابطه زیر می‌باشد:

$$u = 1 - \beta e^{(1-r^2)}\frac{y-y_0}{2\pi} \tag{19}$$

$$v = \beta e^{(1-r^2)}\frac{x-x_0}{2\pi} \tag{20}$$

$$\rho = \left(1-\left(\frac{\gamma-1}{16\gamma\pi^2}\right)\beta^2 e^{2(1-r^2)}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \tag{21}$$

$$p = \rho^{\gamma} \tag{22}$$

که هرکدام از ضریب‌ها به‌صورت $\beta = 5$, $y_0 = 0$, $x_0 = 5$ و γ=1.4 همچنین $r = \sqrt{(x-t-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ تعیین می‌شوند. از حل دقیق به‌عنوان شرایط اولیه و برای تخمین شرایط مرزی از مقادیر آن در این نواحی استفاده می‌شود. برای تخمین مرتبه حل و نرخ همگرایی از سه شبکه‌بندی با اندازه المان‌های h، $h/2$ و $h/4$ استفاده شده است و شکل 2 شبکه‌بندی با اندازه المان h و کانتور چگالی با مرتبه N=8 در لحظه 1.7 ثانیه پس از حل را نشان می‌دهد که ورتکس حاصل با گذشت زمان از نقطه (5,0) در حال حرکت به طرف دیواره سمت راست می‌باشد.

همچنین شکل 3 نرخ همگرایی جریان را در مرتبه‌های مختلف حل نشان می‌دهد که برای این‌منظور باقیمانده L^2 برای مقادیر چگالی و معادله اول مومنتوم محاسبه می‌شود و همانطور که مشخص است مرتبه حل به‌صورت $\mathrm{O}(h^{N+1/2})$ به‌دست می‌آید که برای این نوع جریان مقدار بهینه محسوب می‌شود.

5-1-2- جریان حول ایرفویل NACA0012، زیرصوت غیرلزج

در این قسمت، جریان زیرصوت غیرلزج، شامل ایرفویل NACA0012 طبق

[1] Switched Evolution Relaxation

[2] Rotational

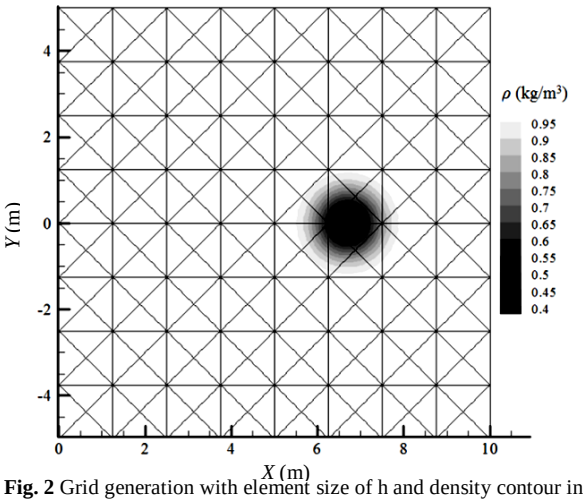

Fig. 2 Grid generation with element size of h and density contour in rotational isentropic flow

شکل 2 شبکه‌بندی با اندازه المان h و کانتور چگالی در جریان آیزنتروپیک چرخشی

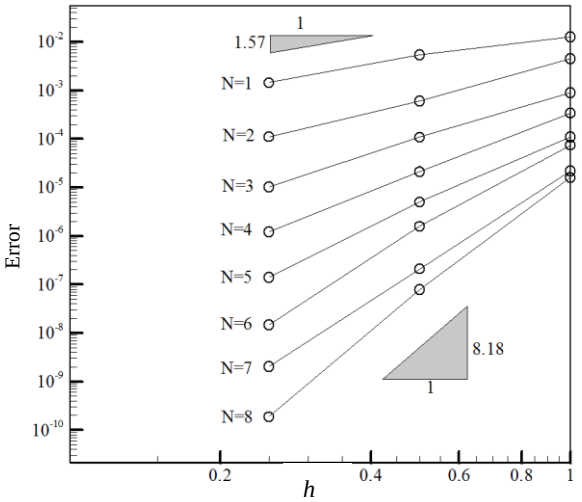

Fig. 3 The rate of convergence in the different levels of density for rotational isentropic flow

شکل 3 نرخ همگرایی در مراتب مختلف چگالی برای جریان آیزنتروپیک چرخشی

رابطه (23) مورد بررسی قرار می‌گیرد. همچنین مشخصات این جریان شامل 0.63 سرعت صوت در شرایط آزاد و زاویه حمله 2 درجه و شرایط مرزی دوردست به اندازه 25 برابر وتر ایرفویل می باشد.

$$y = \pm 0.6\left(0.2969\sqrt{x} - 0.1260x - 0.3516x^2 + 0.2843x^3 - 0.1036x^4\right) \quad (23)$$

برای تخمین دقت حل، از ضرایب آیرودینامیکی پسا و برآ استفاده شده است. تمامی ضرایب و پارامترها در سه شبکه‌بندی بی‌سازمان شامل شبکه درشت (404 المان)، متوسط (1865 المان) و ریز (3432 المان) محاسبه می‌شوند. طبق شکل 4 شبکه‌بندی حول ایرفویل در نواحی دارای انحنای شدید (ابتدا و انتهای ایرفویل) دارای تمرکز باشد و برای تخمین مرز خمیده از حل دقیق مرزها استفاده شده است.

همانطور که قبلا اشاره شد برای تعیین دقت حل از ضریب آیرودینامیکی پسا در سه شبکه‌بندی مختلف به ازای مراتب مختلف محاسبه می‌شود. البته باید به این نکته توجه کرد که برای محاسبه میزان خطا این پارامتر از مقدار گزارش شده در مرجع [24] استفاده شده است، که در این مرجع مقادیر ضریب پسا 0.0004 و برآ 0.3289 بیان شده است. همچنین در این گزارش

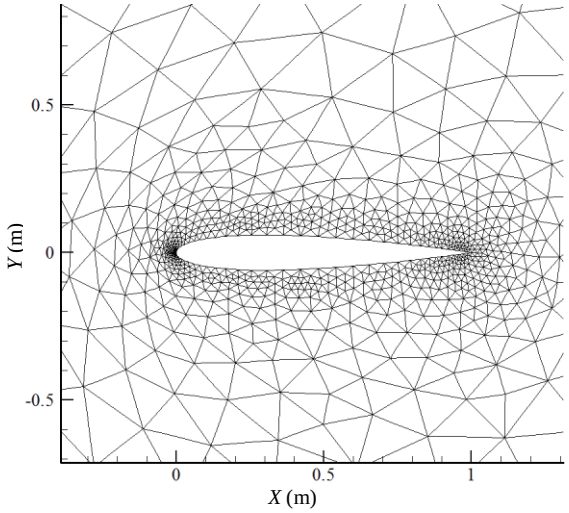

Fig. 4 Medium unstructured grid with 1865 elements

شکل 4 شبکه‌بندی بی‌سازمان متوسط با 1865 المان

از روش حجم محدود با تعداد 10694 سلول و از مرتبه دو استفاده شده است. شرایط مرزی در نظر گرفته شده برای مرز دورست، 128 برابر وتر ایرفویل می‌باشد. شایان ذکر است مقادیر این دو ضریب آیرودینامیک به این شرط مرزی حساس می‌باشد و این درصد خطا ایجاد شده، ناشی از فاصله در نظر گرفته برای شرط مرزی دوردست می‌باشد. همچنین جدول 1 مقادیر این ضرایب را در مراتب مختلف چند جمله‌ای نشان می‌دهد.

همچنین برای سنجش نمودار ماخ روی ایرفویل با تعداد المان 1865 و در سه مرتبه مختلف طبق شکل 5 ارائه شده است. در این شکل نمودار حاصله با نمودار گزارش شده توسط لیانگ و همکاران [25] مقایسه می‌شود. همانطور که در این نمودار مشخص است با افزایش مرتبه حل نمودار ماخ روی ایرفویل دقیق‌تر شده و به نمودار مرجع نزدیک‌تر می‌شود.

یکی از پارامترهای مهم در روش‌های ضمنی توجه به تعداد تکرارهای انجام شده برای دست‌یابی به حل نهایی است. در روش‌های نیوتن کرایلف هردو تکرار، شامل حل دستگاه (تکرار خطی) و حل کلی جریان (تکرار غیرخطی) حائز اهمیت است. شکل 6 نحوه همگرایی حل در شبکه‌بندی با تعداد 1865 المان را در مراتب N=1-3 با ماتریس‌پیش‌شرط ILU(0) نشان می‌دهد. همانطور که در این شکل مشخص است با انتخاب مناسب ماتریس پیش‌شرط و گام زمانی در مرحله خطی نرخ همگرایی از مرتبه دو می‌باشد. بنابراین از بزرگترین مزیت روش‌های کرایلف –همگرایی فوق خطی، مرتبه دو- به‌طور کامل استفاده شده است. البته در این قسمت از مراتب پایین‌تر به

جدول 1 مقادیر ضریب برآ و پسا در شبکه‌بندی و درجه چندجمله‌ای مختلف

Table 1 Lift and Drag in different grid and degree of the polynomial

	نمونه حل	ضریب برآ	ضریب پسا
درشت	مرتبه دو	0.2978	0.0023539
	مرتبه سه	0.3304	0.0081896
	مرتبه چهار	0.3326	0.0084564
متوسط	مرتبه دو	0.3217	0.0017013
	مرتبه سه	0.3250	0.0005817
	مرتبه چهار	0.3255	0.0002951
ریز	مرتبه دو	0.3212	0.0008331
	مرتبه سه	0.3255	0.0003191
	مرتبه چهار	0.3253	0.0002853

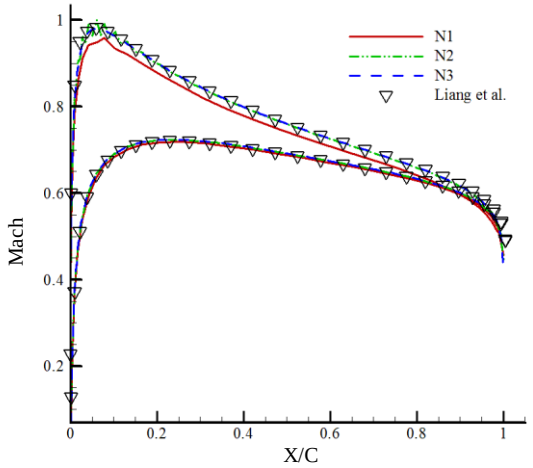

Fig. 5 Mach number of inviscid subsonic flow around airfoil

شکل 5 نمودار عدد ماخ حول ایرفویل برای جریان زیرصوت غیرلزج

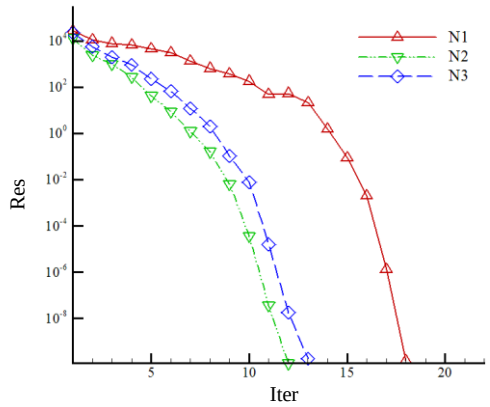

Fig. 6 Convergence rate for inviscid subsonic flow

شکل 6 نرخ همگرایی جریان زیرصوت غیرلزج

عنوان شرایط اولیه مراحل بالاتر استفاده می‌شود. همانطور که از این شکل مشخص است با افزایش مرتبه حل میزان تکرارهای خطی در مرحله خطی افزایش چندانی پیدا نمی‌کند ولی تعداد تکرارهای غیرخطی در صورتی که از مرتبه‌های پایین‌تر برای شرایط اولیه استفاده نشود افزایش پیدا خواهد کرد.

زمان حل نیز مهمترین پارامتر سنجش الگوریتم‌های ضمنی می‌باشد. (شکل 7) زمان اجرا برای جریان زیرصوت اویلر با استفاده از ماتریس پیش‌شرط ILU(0) در مرتبه‌های مختلف را نشان می‌دهد. باتوجه به این نمودار می‌توان دریافت که با افزایش مرتبه با وجود استفاده از مرتبه پایین به‌عنوان شرایط اولیه و افزایش نه‌چندان تعداد تکرارهای خطی و غیرخطی ولی زمان اجرا افزایش می‌یابد. از دلایل این موضوع می‌توان به ساخت ماتریس پیش‌شرط و حل دستگاه خطی اشاره کرد. زیرا همانطور که قبلا اشاره شده بود اغلب ماتریس‌های پیش‌شرط استفاده شده با افزایش مرتبه حل زمان اجرای آن‌ها غیرخطی افزایش پیدا می‌کند.

بنابراین پرداختن به زمان حل در تمامی شبیه‌سازی‌ها الزامی است.

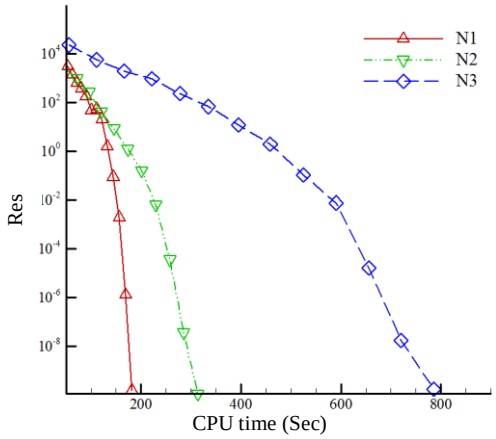

Fig. 7 Run time for viscous subsonic flow with 1865 elements

شکل 7 زمان اجرا جریان زیرصوت لزج در تعداد المان 1865

به‌طور مثال ممکن است یک ماتریس‌پیش‌شرط موجب کاهش تعداد تکرارهای حلگر خطی شود ولی در حالت کلی باعث افزایش زمان اجرا گردد. همچنین در بعضی از جریانات زمان اجرا اهمیت چندانی پیدا نکرده و دستگاه حل به‌حدی بدوضع می‌شود که ناگزیر هستیم از ماتریس‌های پیش‌شرط قوی حتی با زمان اجرا طولانی استفاده کنیم. جدول 2 عملکرد هرکدام از ماتریس‌های پیش‌شرط برای شبکه‌بندی متوسط را نشان می‌دهد. زمان اجرا در این جدول برحسب دقیقه می‌باشد و تعداد تکرارها (Iter) و تعداد تکرارهای خطی (GMRES) نیز مشخص شده است. همانطور که در جدول مشخص است هنگام استفاده از ماتریس چندشبکه‌ای به‌عنوان هموارکننده ماتریس‌های پیش‌شرط تعداد تکرارهای حل و تکرارهای خطی به‌طور چشمگیری کاهش می‌یابد، استفاده از ILU(2) نسبت به ILU(0) بین 48 تا 65 و نسبت به ماتریس پیش‌شرط Block تا 97 درصد تعداد تکرارهای خطی را کاهش داده است. ولی در نقطه مقابل زمان اجرا افزایش می‌یابد. البته با توجه به اینکه در این نوع جریان ماتریس ژاکوبی چندان بدوضع نیست منطقی به‌نظر می‌رسد از ماتریس‌های پیش‌شرط بدون هموار کننده استفاده شود.

5-2- جریان گذرای صوت غیرلزج

جریان گذرای صوت، همواره به‌خاطر داشتن ماهیت دو نوع جریان از نمونه‌های سنجش بسیاری از حلگرها بوده است. به‌خصوص در روش‌های ضمنی همانند روش نیوتن-کرایلف، اعمال محدودگر باعث افزایش عدد شرط ماتریس ژاکوبی شده و نرخ همگرایی به‌شدت کاهش می‌یابد. در تحقیق حاضر برای حل این مشکل از لزجت مصنوعی برای محدود کردن نواحی با گرادیان شدید و ماتریس‌های پیش‌شرط مناسب استفاده شده است.

برای شبیه‌سازی این جریان از ایرفویل NACA0012 با مشخصات M=0.8 و زاویه حمله 1.25 درجه استفاده می‌شود. در این مشخصات جریان یک شوک قوی در روی ایرفویل و یک شوک ضعیف در زیر آن تشکیل

جدول 2 تاثیر ماتریس‌های پیش‌شرط مختلف برای جریان زیرصوت غیرلزج

Table 2 Effect of different precondition matrixes for inviscid subsonic flow

مرتبه	Block			ILU(0)			ILU(2)			MG-Block			MG-ILU(0)			MG-ILU(2)		
	تکرار	GMRES	زمان	تکرار	GMRES	زمان	تکرار	GMRES	زمان	تکرار	GMRES	زمان	تکرار	GMRES	زمان	تکرار	GMRES	زمان
N=1	18	18134	47.0	18	1390	3.0	18	480	2.9	21	921	53.2	19	33	4.1	18	18	3.8
N=2	12	13124	41.4	12	708	5.2	12	370	5.8	12	737	61.4	12	22	7.1	12	12	7.1
N=3	13	16442	62.3	13	723	13.1	13	377	16.7	13	910	79.3	13	25	18.4	13	13	27.8

می‌شود. شکل 8 نتایج حاصله در شبکه‌بندی درشت با تعداد 1298 المان و بدون تمرکز شبکه در محل شوک را نشان می‌دهد.

همچنین در شکل 9 کانتور عدد بی‌بعد ماخ به‌ازای N=3 می‌باشد که با وجود شبکه‌بندی درشت، شوک در سطح بالایی و زیرین ایرفویل با تیزی مناسبی تشکیل شده است.

یکی از عمده مشکلات روش‌های المان-محدود هنگام استفاده از محدودگرها در جریان‌های گذرای صوت، عدم افزایش دقت حل با وجود افزایش مرتبه حل می‌باشد. به‌عبارت دیگر ضخامت شوک به اندازه المان‌های درگیر وابسته است و افزایش مرتبه حل تاثیری در دقت حل نخواهد گذاشت. در شکل 10، با افزایش مرتبه حل میزان خطای نمودار عدد ماخ حول سطح ایرفویل، به‌خصوص در محل شوک کاهش می‌یابد، زیرا میزان لزجت اعمالی در محل شوک با مرتبه حل رابطه معکوس داشته و با افزایش مرتبه حل، کاهش می‌یابد. در این جریان از نتایج AGARD [26] با 129×39 المان و تمرکز شبکه در محل شوک برای اعتبارسنجی استفاده شده است.

همچنین برای سنجش دقت حل دو ضریب آیرودینامیکی برآ و پسا بیان می‌شود. جدول 3 دو ضریب آیرودینامیکی را با سایر حل‌های موجود مقایسه می‌کند که درصد خطا در این نوع شبکه‌بندی منطقی به‌نظر می‌رسد.

شکل 11 و 12 نحوه همگرایی حل به ازای مراتب N=1-3 را نشان می‌دهد که همانند جریان قبلی از حل مراتب پایین به‌عنوان شرایط اولیه

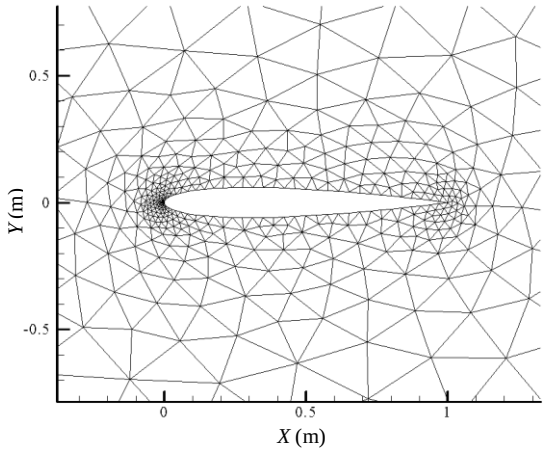

Fig. 8 Grid of transonic flow with 1298 elements

شکل 8 شبکه بندی جریان گذرای صوت با 1298 المان

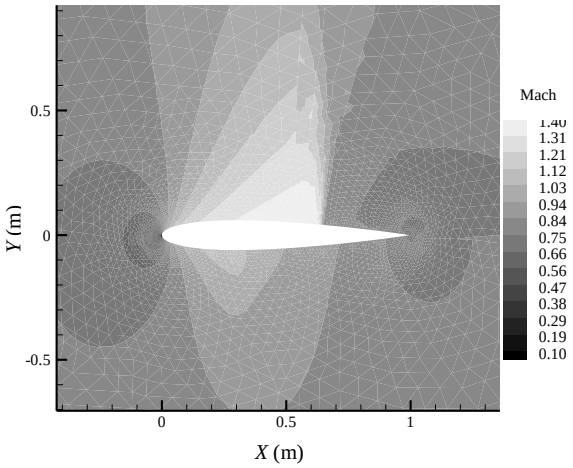

Fig. 9 Mach contour for transonic flow

شکل 9 کانتور عدد ماخ برای جریان گذرای صوت

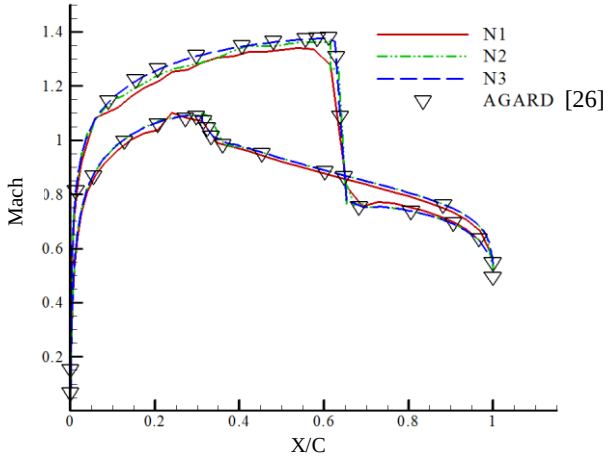

Fig. 10 Mach number of flow around an airfoil

شکل 10 نمودار عدد ماخ حول ایرفویل به ازای مرتبه‌های مختلف

جدول 3 ضرایب آیرودینامیکی برای جریان گذرای صوت غیرلزج

Table 3 Aerodynamic coefficients for inviscid transonic flow

نمونه حل	ضریب برآ	درصد خطا	ضریب پسا	درصد خطا
مرتبه دو	0.3375	2.85	0.0243	9.95
مرتبه سه	0.3406	1.96	0.0233	5.43
مرتبه چهار	0.3442	0.92	0.0227	2.71
AGARD [26]	0.3474	0.00	0.0221	0.00

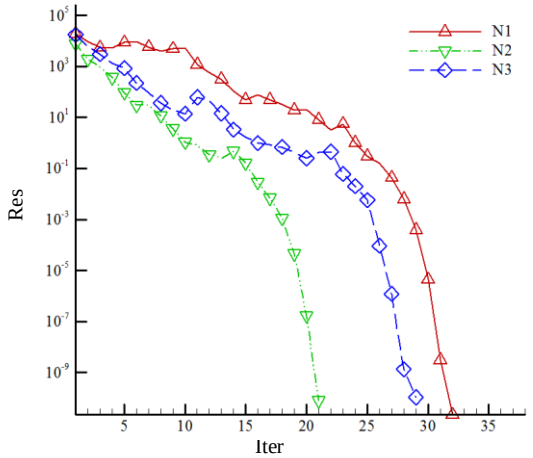

Fig. 11 Convergence rate for inviscid transonic flow

شکل 11 نرخ همگرایی جریان گذرای صوت غیرلزج

مراتب بالاتر استفاده می‌شود. ماتریس پیش‌شرط ILU(0) با تعداد شروع مجدد حلگر خطی 120 و ماکزیمم تعداد تکرار 6000 لحاظ شده است.

در واقع گام زمانی قبل از تشکیل و مشخص شدن محل شوک محدود نگه داشته شده (CFL=200) سپس از طریق رابطه (17) افزایش پیدا می‌کند. با خطی شدن جریان و تشخیص محل شوک محدودگر ثابت نگه داشته شده و مانع از تاثیرپذیری آن از شرایط جریان می‌شود. البته در این حالت باید به این نکته توجه کرد درصورتی‌که محدودگر زودتر ثابت نگه‌داشته شود باعث واگرایی جریان یا دقت پایین حل خواهد شد. در این نمونه مورد بررسی، زمانی که جریان در آستانه ورود به مرحله خطی می‌باشد یا به‌عبارت دیگر میزان باقیمانده غیرخطی از مرتبه O(1) شود، محدودگر ثابت نگه داشته می‌شود.

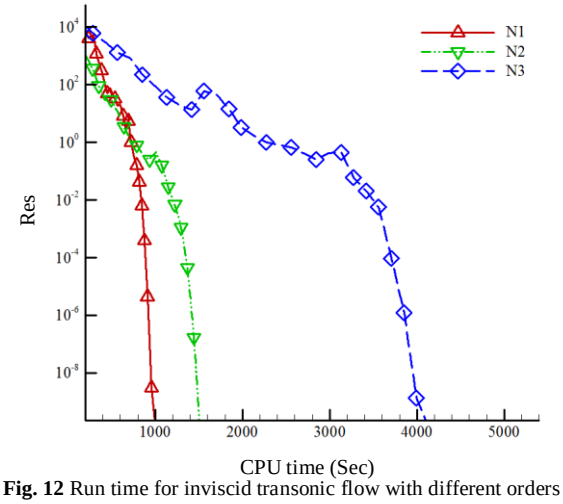

Fig. 12 Run time for inviscid transonic flow with different orders

شکل 12 زمان اجرا جریان گذرای صوت غیرلزج با مراتب مختلف

در جدول 4 تاثیر استفاده از سه ماتریس پیش‌شرط مختلف در کنار هموار کننده چندشبکه‌ای گزارش شده است. طبق جدول4، استفاده از ILU(2) نسبت به ILU(0) بین 67 تا 79 درصد در تعداد تکرارهای خطی و 22 درصد زمان اجرا در مرتبه N=3 و ماتریس پیش‌شرط MG-ILU(2) نسبت به MG-ILU(0) بین 59 تا 64 درصد تعداد تکرارهای خطی و بین 16 تا 20 درصد زمان اجرا را کاهش داده است. همچنین با توجه به شکل 11 و 12 در مرحله خطی نرخ همگرایی فوق خطی می‌باشد و تعداد تکرارها در مرحله خطی با تعداد تکرارها برای جریان زیرصوت کاملا یکسان و همانند می‌باشد که حاکی از عدم تاثیرگذاری محدودگر در نرخ همگرایی می‌باشد.

5-3- جریان زیرصوت آرام لزج

معادله ناویراستوکس به‌علت داشتن جمله‌های بیضوی و ساختار بدوضع ماتریس ژاکوبی یکی از زمینه‌های چالش انگیز در روش‌های گلرکین گسسته ضمنی محسوب می‌شود. همچنین روش گلرکین گسسته در این نوع جریان به شبکه‌بندی و مشخصات جریان بسیار وابسته است.

نمونه مورد بررسی شبکه‌بندی شکل 13 با تعداد 2086 المان حول ایرفویل NACA0012، با مشخصات جریان M=0.5 و Re=5000 و زاویه حمله صفر درجه می‌باشد که از شرط مرزی دوردست برای ورودی جریان و عدم لغزش- آدیاباتیک برروی دیواره استفاده شده است.

همچنین شکل 14 کانتور عدد ماخ در مراتب مختلف چندجمله‌ای برای روش CDG را نشان می‌دهد. در این شکل نیز با افزایش مرتبه چند جمله‌ای تغییرات کانتور ماخ مشخص است. در شکل 15 نیز گردابه‌های تشکیل شده در انتهای ایرفویل به ازای مرتبه N=3 نمایان است. تشکیل این دو گردابه بسیار اهمیت دارد زیرا ممکن است در مرحله خطی در صورت تخمین اشتباه جمله‌های بیضوی هیچکدام از این گردابه‌ها تشکیل نشوند.

جدول 5 تمامی پارامترهای سنجش برای این جریان در سه مرتبه حل

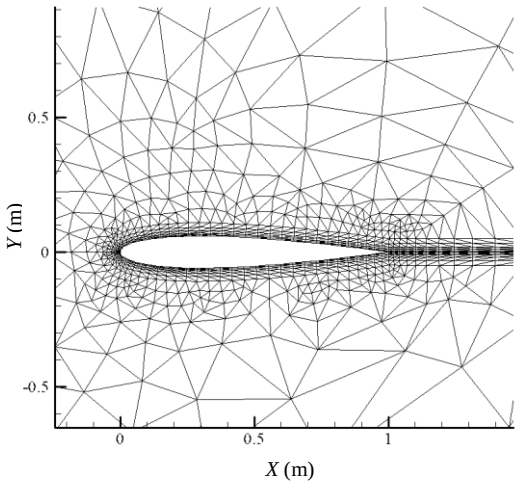

Fig. 13 Applied grid for viscous laminar subsonic flow

شکل 13 شبکه بندی استفاده شده برای جریان زیرصوت، آرام لزج

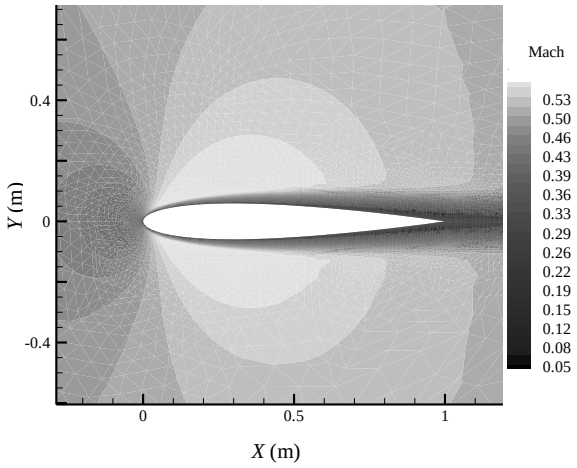

Fig. 14 Mach contour of viscous laminar subsonic flow in order of N=3

شکل 14 کانتور عدد ماخ برای جریان زیرصوت آرام لزج در مرتبه N=3

را نشان می‌دهد. با توجه به این جدول، با افزایش مرتبه حل مقادیر ضریب پسا و نقطه جدایش دقیق‌تر شده و به حل‌های معیار نزدیک‌تر می‌شود. البته در این حالت به‌علت نبود یک مرجع مطمئن برای مقایسه از سه منبع با روش‌های مختلف استفاده شده است. بنابراین به‌علت تعدد منابع، بیان مرتبه‌حل جریان منطقی به‌نظر نمی‌رسد.

شکل 16 نرخ همگرایی این جریان با ماتریس پیش‌شرط ILU(0) و در مراتب چندجمله‌ای N=1-3 را نشان می‌دهد. در این حالت نیز همانند روند گذشته، از مراتب کمتر به‌عنوان شرایط اولیه مراتب بالا استفاده شده است. از آنجایی که در این جریان دو دسته معادله برای تخمین جمله بیضوی استفاده می‌شود با افزایش مرتبه حل حجم محاسبات به‌یکباره افزایش می‌یابد (شکل 17). همچنین به‌علت بدوضع بودن ماتریس ژاکوبی تعداد تکرارهای حلگر

جدول 4 تاثیر ماتریس‌های پیش‌شرط مختلف برای جریان گذرای صوت غیرلزج

Table 4 Effect of different precondition matrixes for inviscid transonic flow

مرتبه	Block			ILU(0)			ILU(2)			MG-Block			MG-ILU(0)			MG-ILU(2)		
	تکرار	GMRES	زمان	تکرار	GMRES	زمان	تکرار	GMRES	زمان	تکرار	GMRES	زمان	تکرار	GMRES	زمان	تکرار	GMRES	زمان
N=1	-	-	-	33	1119	17.0	33	320	19.2	33	4003	89.2	33	81	19.8	33	33	25.1
N=2	-	-	-	21	910	25.2	21	297	24.9	25	5450	112.2	21	58	31.6	21	21	26.5
N=3	-	-	-	29	875	68.9	29	181	53.7	31	6770	230.1	29	79	72.1	29	29	57.2

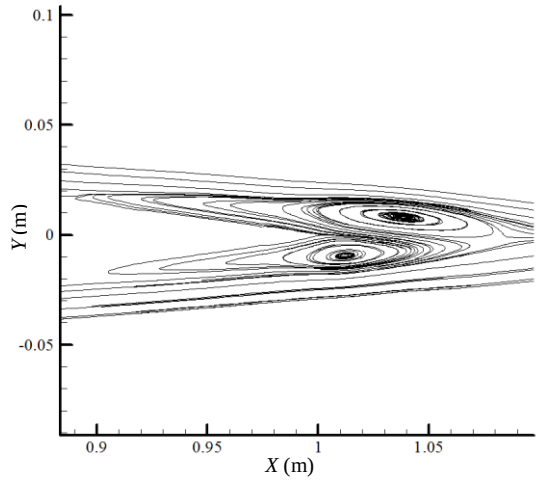

Fig. 15 The formed vortex at the trailing edge of airfoil in laminar subsonic flow

شکل 15 گردابه تشکیل شده برای جریان زیر صوت آرام در انتهای ایرفویل

جدول 5 مقایسه ضرایب آیرودینامیکی برای جریان زیرصوت آرام لزج

Table 5 Comparison of aerodynamic coefficients for viscous laminar subsonic flow

نمونه حل	ضریب پسای فشاری	ضریب پسای لزجت	نقطه جدایش
مرتبه دو	0.0210	0.0322	0.803
مرتبه سه	0.0228	0.0329	0.805
مرتبه چهار	0.0225	0.0334	0.820
ARC2D [27]	0.0221	0.0321	0.824
Mavriplis [28]	0.0229	0.0332	0.814
Radespiel [29]	0.0224	0.0330	0.814

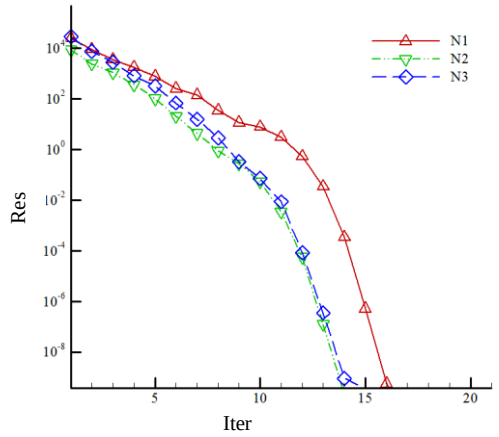

Fig. 16 Convergence rate of Laminar subsonic flow for different polynomial orders

شکل 16 نرخ همگرایی جریان زیرصوت آرام در مراتب مختلف چندجمله ای

برای دست‌یابی به جواب مطلوب افزایش چشمگیری دارد.

نرخ همگرایی روش گلرکین گسسته برای معادله ناویر استوکس با

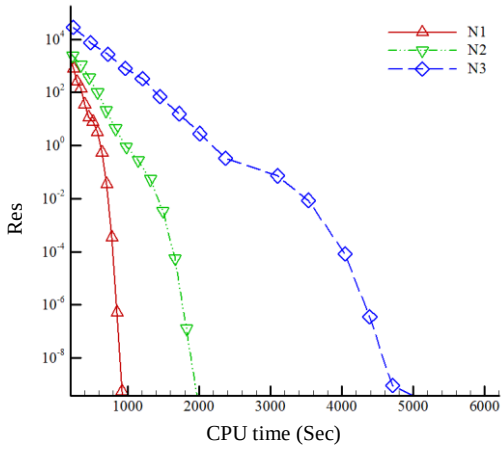

Fig. 17 Run time of viscous subsonic flow for different orders

شکل 17 زمان اجرا جریان زیرصوت لزج در مراتب مختلف

استفاده از حلگرهای خطی در سال‌های اخیر مورد توجه قرار گرفته است. در واقع در این سری از جریان‌ها به‌علت ماهیت فیزیکی جریان، داخل و بیرون لایه مرزی، درایه‌های ماتریس ژاکوبی از مرتبه‌های مختلف می‌باشند. در نتیجه حل دستگاه در مرحله خطی دارای نرخ همگرایی کمتری بوده و حتی در بعضی مواقع، با کمترین خطایی مانع از همگرایی حل می‌شود (جدول 6).

هموار کننده چند شبکه‌ای یکی از مناسب‌ترین ماتریس‌های پیش‌شرط برای معادله ناویراستوکس می‌باشد ولی در مواردی که به‌طور صحیح مقادیر ورودی آن تعیین نشود تاثیر عکسی خواهد گذاشت. در این تحقیق برای این پیش‌شرط، از نوع V چرخه‌ای [15] و تکرارهای 115، 90 و 40 برای تکرارهای داخلی در نظر گرفته شده است. میزان 10^{-10} برای همگرایی باقیمانده غیرخطی و سه مرتبه کمتر از این باقیمانده برای باقیمانده خطی برای هر تکرار در نظر گرفته شده است.

برای دست‌یابی به نرخ همگرایی سریع در این نوع جریان باید از ماتریس‌های پیش‌شرط مناسبی استفاده شود که ارتباط بین المان‌ها در داخل لایه مرزی و ناحیه غیرلزج را در برگیرد. به‌عبارت دیگر در روش بلوک ژاکوبی ارتباط بین تمامی المان‌ها را در نظر نمی‌گیرد در نتیجه حلگر خطی در این حالت متوقف می‌شود. طبق جدول 6، استفاده از ILU(2) نسبت به ILU(0) تا 93 درصد در تعداد تکرارهای خطی و ماتریس پیش‌شرط MG-ILU(0) نسبت به MG-ILU(2) بین 71 تا 79 درصد تعداد تکرارهای خطی و تا 25 درصد زمان اجرا را کاهش داده است. نکته جالب، عدم همگرایی روش توسط ILU(0) در مرتبه N=3 می‌باشد که برخلاف آن توسط ماتریس پیش‌شرط ILU(2) حلگر در این مرتبه همگرایی بسیار مناسبی دارد.

6- نتیجه‌گیری

در بسیاری از روش‌های المان محدود مرتبه بالا با افزایش مرتبه گسسته‌سازی در جریان گذرای صوت، دقت حل در محل گسستگی افزایش چندانی پیدا نمی‌کند و نرخ همگرایی کاهش می‌یابد. در این مقاله برای

جدول 6 تاثیر ماتریس‌های پیش‌شرط مختلف برای جریان زیرصوت لزج

Table 6 Effect of different precondition matrixes for viscous subsonic flow

مرتبه	Block			ILU(0)			ILU(2)			MG-Block			MG-ILU(0)			MG-ILU(2)		
	تکرار	GMRES	زمان	تکرار	GMRES	زمان	تکرار	GMRES	زمان	تکرار	GMRES	زمان	تکرار	GMRES	زمان	تکرار	GMRES	زمان
N=1	-	-	-	17	7886	16.3	16	663	13.3	20	3126	142.1	20	56	19.1	16	16	14.7
N=2	-	-	-	14	6847	33.1	14	477	29.9	18	3072	176.9	18	56	40.4	14	14	30.9
N=3	-	-	-	-	-	-	15	548	67.6	22	4578	367.5	20	82	92.7	15	17	69.1

افزایش دقت حل در محل شوک و افزایش نرخ همگرایی از لزجت مصنوعی استفاده گردیده است. این موضوع باعث افزایش دقت حل (با وجود ثابت بودن تعداد شبکه) و افزایش نرخ همگرایی (همگرایی فوق خطی در مرحله خطی) شد. همچنین در این تحقیق برای کاهش تعداد تکرارهای غیرخطی از روش افزایش گام زمانی محلی براساس شرایط فیزیکی میدان استفاده شد.

استفاده از ماتریس‌های پیش‌شرط برای روش گلرکین گسسته به‌علت هم‌مرتبه نبودن درایه‌های ماتریس ژاکوبین ناشی از گسسته‌سازی معادلات، بسیار حائز اهمیت بوده و عملا تاثیر اساسی بر سرعت همگرایی داشته است. در این راستا استفاده از ماتریس‌های پیش‌شرط ILU(2) و MG-ILU(2) نرخ همگرایی در جریان زیر صوت غیرلزج 65 درصد، گذرای صوت 79 و زیرصوت آرام را تا 93 درصد کاهش داده است. به‌نظر می‌رسد استفاده از ماتریس پیش‌شرط فاکتورگیری مرتبه بالا می‌تواند مشکل همگرایی ماتریس‌هایی با عدد شرط بالا را برطرف کند.

7- مراجع

[1] J. Anderson, *Fundamentals of aerodynamics*, Vol. 2. McGraw-Hill NewYork, pp. 81–147, 2001.

[2] J. Ekaterinaris, A. High-order accurate, low numerical diffusion methods aerodynamics, *Progress in Aerospace Sciences*, Vol. 41, No. 3, pp. 192–300, 2005.

[3] C B. Cockburn, CH. W. Shu, TVB Runge–Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws. II. general framework, *Mathematics of Computation*, Vol. 52, No. 186, pp. 411–435, 1989.

[4] B. Cockburn, CH. W. Shu, The Runge–Kutta discontinuous Galerkin method for conservation laws V: multidimensional systems, *Journal of Computational Physics*, Vol. 141, No. 2, pp. 199–224, 1998.

[5] G. Chavent, G. Salzano, A finite-element method for the 1-D water floodingproblem with gravity, *Journal of Computational Physics*, Vol. 45, No. 3, pp. 307 – 344, 1982.

[6] M. Jamei, H. Ghafouri, A discontinuous Galerkin method for two-phase flow in porous media using modified MLP slop limiter, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 12, pp. 185-195, 2015. (in Persianفارسی)

[7] F. Bassi, S. Rebay, High-order accurate discontinuous finite element solution of the 2D Euler equations. *Journal of Computational Physics*, Vol. 138, No. 2, pp. 251–285, 1997.

[8] F. Bassi, S. Rebay, A high-order accurate discontinuous finite element method for the numerical solution of the compressible Navier–Stokes equations, *Journal of Computational Physics*, Vol. 131, No. 2, pp. 267–279, 1997.

[9] B. Cockburn, G.Kanschat, I. Perugia, D. Schötzau, Super convergence of the local discontinuous galerkin method for elliptic problemson cartesian grids, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol. 39, No. 1, pp. 264–285, 2000.

[10] J. Peraire, P. O. Persson, The compact discontinuous galerkin (cdg) methodfor elliptic problems. *SIAM Journal on Scientific Computing*, Vol. 30, No. 4, pp. 1806–1824,2008.

[11] F. Bassi, S. Rebay, Numerical evaluation of two discontinuous galerkin methodsfor the compressible navier–stokes equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 40, No. 1-2, pp. 197–207, 2002.

[12] V. Dolejsi, M. Holik, J. Hozman, Efficient solution strategy for the semi implicit discontinuous galerkin discretization of the navier–stokes equations. *Journal of Computational Physics*, Vol. 230, No. 11, pp. 4176–4200, 2011.

[13] F. Bassi,A. Crivellini, D. Di Pietro, S. Rebay, Animplicit high-order discontinuous galerkin method for steady and unsteady incompressible flows, *Computers & Fluids*, Vol. 36, No. 10, pp. 1529–1546, 2007

[14] P. O. Persson, J. Peraire, Newton-gmres preconditioning for discontinuous galerkin discretizations of the navier-stokes equations, *SIAM Journal on Scientific Computing*, Vol. 30, No. 6, pp. 2709–2733, 2000.

[15] T, Diosady, D. Darmofal, Preconditioning methods for discontinuousgalerkin solutions of the navier–stokes equations, *Journal of Computational Physics*, Vol. 228, No. 11, pp. 3917–3935, 2009.

[16] A. Nejat, C. Ollivier-Gooch, A high-order accurate unstructured finitevolume newton–krylov algorithm for inviscid compressible flows, *Journal of Computational Physics*, Vol. 227, No. 4, pp. 2582–2609, 2008.

[17] A. Nejat, C. Ollivier-Gooch, Effect of discretization order on preconditioningand convergence of a high-order unstructured newton-gmres solver for theeuler equations, *Journal of Computational Physics*, Vol. 227, No. 4, pp. 2366–2386, 2008.

[18] V. Esfahanian, A. Nejat, B. Baghapour, High-order cubic spline boundary representation for discontinuous Galerkin simulation of compressible inviscid flows, *20th AIAA CFD Conference*, AIAA Paper 2011-3838, 2011.

[19] B. Baghapour, V. Esfahanian, A. Nejat, A framework for curved boundary representation in 2D discontinuous galerkin euler solver, *Journal of Applied Fluid Mechanic*s, Vol. 7, No. 4, pp. 693–702, 2014.

[20] Y. Saad, Iterative methods for sparse linear systems, *Siam*, pp. 102–183, 2003.

[21] Y. Saad, M. Schultz, Gmres: A generalized minimal residual algorithmfor solving non-symmetric linear systems. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, Vol. 7, No. 3, pp. 856–869, 1986.

[22] CH. Michalak, C. Ollivier-Gooch, Globalized matrix-explicit newton-gmres for the high-order accurate solution of the euler equations, *Computers & Fluids*, Vol. 39, No. 7, pp. 1156–1167, 2010.

[23] V. Venkatakrishnan, Convergence to steady state solutions of the euler equations on unstructured grids with limiters, *Journal of Computational Physics*, Vol. 118, No. 1, pp. 120–130, 1995.

[24] D. L. De Zeeuw, A *Quadtree-Based Adaptively –Refined Cartesian-Grid Algorithm for Solution ofthe Euler Equations*, PhD thesis, Aerospace Engineering and Scientific Computing in the University of Michigan, 1993.

[25] C. Liang, A. Jameson, Z. Wang, Spectral difference method for compressible flow on unstructured grids with mixed elements, *Journal of Computational Physics*, Vol. 228, No. 8, pp. 2847-2858, 2009.

[26] Test Case for Invixcid Flow Fields, Technical Report AR-211, Advisory Group for Aerospace Research and Development (*AGARD*), NATO., 1985.

[27] C. Ollivier-Gooch, *Solution of the Navier-Stokes Equations on Locally-Refined Cartesian Meshes Using State-Vector Splitting*, PhD thesis, Stanford University, 1993.

[28] D. J. Mavriplis, A. Jameson, L. Martinelli, Multigrid solution of the Navier-Stokes equations ontriangular meshes, ICASE Report No. 89-11, *NASA Langley Research Center*, 1989.

[29]R. Radespiel, A cell-vertex multigrid method for the Navier-Stokes equations, *NASA TM-101557*,1989.