



آنالیز خمش نانو تیر و نانو صفحه بر اساس تئوری الاستیسیته غیرمحلی اصلاح شده کامل

زهره سادات موسوی¹، علیرضا شهیدی^{2*}، بیژن برومند³

1- دانشجوی دکترا، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان

2- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان

3- استاد، مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان

* اصفهان، صندوق پستی 8415683111 +shahidi@cc.iut.ac.ir

چکیده

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 05 دی 1395

پذیرش: 27 بهمن 1395

ارائه در سایت: 14 فروردین 1396

کلید واژگان:

اثر مقیاس کوچک

اصل تغییراتی

خمش

نانو صفحه

نانو تیر

در این مقاله روشی جدید موسوم به تئوری الاستیسیته غیرمحلی اصلاح شده کامل جهت تحلیل رفتار نانو ساختارها ارائه شده است. همچنین بمنظور نشان دادن کارایی تئوری ارائه شده مسائل خمش نانو تیر و نانو صفحه مستطیلی مورد بررسی قرار گرفته است. بدین منظور بر اساس معادلات ساختاری غیرمحلی اصلاح شده و با استفاده از اصل تغییراتی، معادلات حاکم و شرایط مرزی نانو تیر و نانو صفحه مستطیلی تحت بار عرضی روی تکیه گاه ساده بدست آمده و نتایج تحلیل عددی معادلات بدست آمده ارائه گردیده است. همچنین نشان داده شده است که باز آرای سری ظاهر شده در روابط خیز بیشینه نانو تیر و نانو صفحه منجر به حذف خطای قطع کردن سری معادلات ساختاری اصلاح شده خواهد شد. علاوه بر این جهت اعتبار سنجی تئوری ارائه شده نتایج عددی بدست آمده با نتایج شبیه سازی دینامیک مولکولی مقایسه شده است که تطابق بسیار خوبی را نشان می دهد. همچنین در این مقاله نشان داده شده است که تئوری الاستیسیته غیرمحلی در برخی مسائل از جمله خمش نانو تیر و نانو صفحه روی تکیه گاه ساده تحت بار عرضی متمرکز و گسترده یکنواخت قادر به در نظر گرفتن اثر مقیاس کوچک نمی باشد. تئوری الاستیسیته غیرمحلی اصلاح شده کامل ضمن رفع نقیصه فوق الذکر، معیار مناسبی برای بررسی دقت و تعیین حوزه کارایی تئوری الاستیسیته غیرمحلی اولیه ارائه می دهد.

Bending Analysis of Nano Beam and Rectangular Nano Plate based on Full Modified Nonlocal (FMNL) Theory

Zahrasadat Mousavi¹, Seyed Alireza Shahidi^{1*}, Bijan Boroomand²

1- Department of Mechanical Engineering, Isfahan University of Technology, Isfahan, Iran

2- Department of Civil Engineering, Isfahan University of Technology, Isfahan, Iran

* P.O.B. 8415683111, Isfahan, Iran, shahidi@cc.iut.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 25 December 2016
Accepted 15 February 2017
Available Online 03 April 2017

Keywords:
Small scale effect
Variational Principle
Bending
Nano plate
Nano beam

ABSTRACT

In this article, a novel method, namely full modified nonlocal (FMNL) theory, is used for analysis of nano structures under different case loading. Also bending analysis of rectangular nano plates and nano beams is investigated in order to demonstrate the effectiveness of the presented theory. For this purpose, a complete representation of governing equation and boundary conditions are derived based on the infinite series of modified nonlocal constitutive equations by applying the variational principle. It is shown that by rearranging and then computing the sum of the infinite series which appears in the maximum bending deflection, the truncation errors will be eliminated. In addition, the results of the presented method are compared with MD simulations to confirm the validity of FMNL theory. One of the advantages of the FMNL theory is that the defect of nonlocal (NL) theory in vanishing the small scale effect for some problems can be resolved. Furthermore, the FMNL theory will be a criterion for accuracy of the primary modified nonlocal (PMNL) theory that considers only two terms of the series of the modified nonlocal constitutive equation in predicting maximum bending deflections.

1- مقدمه

روش های مبتنی بر مکانیک کوانتومی و روش های مبتنی بر مکانیک محیط پیوسته تقسیم می شوند. به دلیل دشواری تحقیقات آزمایشگاهی در مقیاس نانو و بالا بودن هزینه محاسباتی روش های مبتنی بر مکانیک کوانتومی، روش های مبتنی بر مکانیک محیط پیوسته بیشتر مورد توجه قرار گرفته است. اما از آنجا که روش های مبتنی بر مکانیک محیط پیوسته قادر به در نظر گرفتن اثر مقیاس کوچک نمی باشد و نتایج حاصل از آن توسط نتایج کارهای آزمایشگاهی به تأیید نمی رسند [6]، در این زمینه محققین به ارائه روش های اصلاح شده مبتنی بر مکانیک محیط پیوسته پرداخته اند.

امروزه نانو ساختارهای کربنی بخاطر خواص مکانیکی، الکتریکی و شیمیایی ممتازشان تأثیر چشمگیری بر توسعه فناوری نانو در زمینه های مختلف داشته است [1-5]. از آنجایی که لازمه تجاری سازی نانو ساختارهای کربنی تحلیل رفتار آنها است، مطالعه بر روی رفتار نانو ساختارهای کربنی توجه بسیاری از محققین را به سوی خود جلب کرده است. روش های تحلیل رفتار نانو ساختارهای کربنی را می توان به دو دسته کلی آزمایشگاهی و تحلیلی تقسیم بندی کرد. روش های تحلیلی نیز به نوبه خود، به دو دسته کلی

Please cite this article using:

Z. Mousavi, S. A. Shahidi, B. Boroomand, Bending Analysis of Nano Beam and Rectangular Nano Plate based on Full Modified Nonlocal (FMNL) Theory, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 3, pp. 376-384, 2017 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

در بعضی حالات قادر به در نظر گرفتن اثر مقیاس کوچک نمی‌باشد و نتایج آن کاملاً بر نتایج تئوری الاستیسیته کلاسیک منطبق بوده که به این نقص در مقالات دیگر نیز اشاره شده است [17-19]. از آنجاییکه در معادلات ساختاری غیرمحملی تنش بصورت تابع صریحی از کرنش قابل بیان نیست، بمنظور تحلیل رفتار مکانیکی نانو مواد بر اساس تئوری الاستیسیته غیرمحملی مجبور به اعمال عملگر غیرمحملی بر معادله دیفرانسیلی تعادل هستیم. حال آنکه در حالت کلی پاسخ هر معادله دلخواه لزوماً بر پاسخ معادله‌ای که از اعمال یک عملگر دلخواه بر معادله اصلی بدست آمده منطبق نخواهد بود.

لذا محققان با در نظر گرفتن تقریبی از معادلات ساختاری غیرمحملی اصلاح شده بجای معادلات ساختاری غیرمحملی به رفع این نقیصه پرداخته‌اند. معادلات ساختاری غیرمحملی اصلاح شده در واقع جواب خصوصی معادلات ساختاری غیرمحملی است که رابطه تنش را بر حسب کرنش و مشتقات مرتبه بالاتر آن بیان می‌دارد. در ادامه مروری بر تحقیقات انجام شده بر اساس این روش که ما در این مقاله آن را تئوری الاستیسیته غیرمحملی اصلاح شده اولیه^۳ می‌نامیم، خواهیم داشت.

پدیسن و همکارانش، به بررسی خمش تیر یک سر گیردار تحت بارگذاریهای مختلف بر اساس تئوری تیر اولیئر-برنولی پرداختند [17]. آنها با بدست آوردن رابطه‌ای میان نسبت خیز بیشینه بر اساس تئوری الاستیسیته غیرمحملی اصلاح شده اولیه به خیز بیشینه بر اساس تئوری الاستیسیته کلاسیک و پارامتر غیرمحملی بی بعد، به بحث در مورد اثر پارامتر غیرمحملی در خیز ناشی از خمش نانو تیر پرداختند. کومار و همکارانش، کمناش نانو لوله کربنی تحت شرایط مرزی مختلف را با در نظر گرفتن نانو لوله کربنی بعنوان تیر اولیئر-برنولی و با استفاده از روش انرژی بر اساس تئوری الاستیسیته غیرمحملی و تئوری الاستیسیته غیرمحملی اصلاح شده اولیه مورد بررسی قرار دادند [20]. آنها برای بررسی صحت نتایج خود، نتایج خود را با نتایج بدست آمده بر اساس روش دینامیک مولکولی مقایسه کردند که مطابقت خوبی نیز میان آنها مشاهده شد. نتایج آنها نشان داد که برای مقادیر بسیار کوچک پارامتر غیرمحملی، نتایج تئوری الاستیسیته غیرمحملی و تئوری الاستیسیته غیرمحملی اصلاح شده اولیه بر هم منطبق می‌باشد ولی با افزایش پارامتر غیرمحملی نتایج این دو تئوری از هم فاصله می‌گیرد. ینگ و لیم با استفاده از روش انرژی به بررسی اثر دما بر کمناش غیر خطی نانو تیر تحت شرایط مرزی مختلف بر اساس تئوری تیر تیموشنکو و تیر اولیئر-برنولی پرداختند [21]. آنها با بررسی مثال‌های متعدد تاثیر پارامتر غیرمحملی را بر بار بحرانی کمناش مورد بررسی قرار دادند. مطالعات آنها نشان داد که با افزایش پارامتر غیرمحملی، بار بحرانی کمناش افزایش می‌یابد. حسینی آرا و دیگران اثر دما بر کمناش دینامیکی نانو لوله کربنی تک جداره روی بستر الاستیک وینکلر-پاسترناک تحت بار ضربه و با شرط تکیه گاه ساده را بر اساس تئوری پوستره و با استفاده از اصل تغییرات مورد مطالعه قرار داده و تاثیر پارامتر غیرمحملی را بر بار بحرانی بررسی کردند [22].

در تحقیقاتی که در بالا بدان اشاره شد [17, 20-22]، دو ترم اول از سری معادلات ساختاری غیرمحملی اصلاح شده بعنوان تقریبی از آن جهت تحلیل رفتار نانو ساختارها در نظر گرفته شده است بی آنکه در مورد همگرایی سری فوق الذکر بحثی به میان آمده باشد. حال آنکه توجه به همگرایی سری نقش مهمی در تعیین حوزه اعتبار و کارایی روش فوق الذکر (در نظر گرفتن دو ترم از سری معادلات ساختاری غیرمحملی اصلاح شده بعنوان تقریبی از آن) دارد.

در سال‌های اخیر، چندین تئوری از جمله تئوری الاستیسیته غیرمحملی^۱ [7]، تئوری گرادیان کرنش [8]، تئوری کوپل تنش [9] و تئوری اصلاح شده کوپل تنش [10] بمنظور اصلاح تئوری‌های کلاسیک پیشنهاد شده است که قادر به بررسی اثر مقیاس کوچک هستند. از میان این روش‌ها، روش مبتنی بر تئوری الاستیسیته غیرمحملی بدلیل سادگی و کاربرد گسترده در پیش بینی رفتار مکانیکی نانو مواد و تطابق نتایج آن با نتایج حاصل از روش دینامیک مولکولی با استقبال گسترده تری مواجه شده است.

اساس تئوری الاستیسیته غیرمحملی که برای اولین بار توسط ارینگن و ادلن پایه گذاری شد بر پایه معادلات ساختاری غیرمحملی استوار است [11]. بر اساس معادلات ساختاری غیرمحملی، تنش در هر نقطه تابعی از کرنش در تمام نقاط جسم است. تابحال تحقیقات بسیاری جهت بررسی خمش، کمناش و ارتعاشات نانو ساختارهای کربنی بر اساس تئوری الاستیسیته غیرمحملی انجام شده است که در ادامه مروری کلی بر برخی از آنها خواهیم داشت.

فرچ‌پور و همکارانش کمناش میکرو/نانو صفحه ارتوتروپیک مستطیلی را که تحت بار خطی درون صفحه قرار دارد برای شرایط مرزی مختلف به روش سنجش وزنی مشتقات مورد مطالعه قرار دادند [12]. آنها برای نشان دادن صحت روش عددی سنجش وزنی مشتقات، نتایج خود را با نتایج حاصل از استفاده روش سری توانی در حل معادلات حاکم مقایسه کردند. نتایج نشان داد که روش ارائه شده از دقت خوبی برخوردار است. تحقیق آنها اهمیت در نظر گرفتن مقیاس کوچک را در بررسی رفتار کمناشی میکرو/نانو صفحه ارتوتروپیک مستطیلی تحت بار خطی درون صفحه نشان داد. کرماجانی و همکارانش حل تحلیلی دقیق کمناش نانو صفحات مستطیلی دارای شرط مرزی لوی^۲ را بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم ردی و به کمک اصل تغییرات هامیلتون ارائه کرده و بمنظور تأیید صحت حل، روش ارائه شده را با روش‌های عددی دیگر مقایسه کردند که تطابق بسیار خوبی را نیز نشان داد [13]. امام بر مبنای معادلات ساختاری ارینگن، مدلی جامع برای کمناش و فراکمناش نانو تیر ارائه کرد که برای بررسی کمناش و فراکمناش نانو تیر بر اساس تئوری اولیئر-برنولی و تیموشنکو و همچنین تئوری‌های تغییر شکل برشی مرتبه بالاتر مناسب می‌باشد [14]. او برای بررسی اعتبار مدل، بار بحرانی کمناش نانو تیر دو سر گیردار و دو سر مفصل را بر اساس تئوری‌های اولیئر-برنولی، تیموشنکو و ردی با بار بحرانی کمناش مدل ارائه شده مقایسه کرد. وی همچنین تاثیر پارامتر غیرمحملی را بر بار بحرانی کمناش نانو تیر با ضریب رعنایی متفاوت و با شرایط تکیه‌گاهی متفاوت (دو سر گیردار و دو سر مفصل) مورد بررسی قرار داد؛ بر طبق بررسی‌های وی بار بحرانی کمناش نانو تیر با افزایش پارامتر غیرمحملی بشدت کاهش می‌یابد که این موضوع اهمیت استفاده از تئوری الاستیسیته غیر موضعی را در مورد بررسی فراکمناش نانو تیرها نشان می‌دهد. گلمکانی و رضاطلب [15] و همچنین جبار زاده و همکارانش [16] در دو تحقیق جداگانه بترتیب خمش غیرخطی نانو صفحات مستطیلی ارتوتروپیک و خمش غیرخطی نانو صفحات مدور ایزوتروپیک را بر اساس تئوری مرتبه اول برشی و کرنش‌های غیرخطی ون کارمن و با استفاده از روش دیفرانسیلی مربعات مورد بررسی قرار دادند. به منظور تأیید دقت حل، نتایج در حالت‌های ساده‌تر با نتایج تحقیقات دیگر مقایسه شده که مطابقت خوبی میان آنها مشاهده گردید. آنها همچنین تأثیر پارامتر غیرمحملی را بر خیز بیشینه مورد بررسی قرار دادند.

با این حال تئوری الاستیسیته غیرمحملی ارینگن دارای این نقص است که

¹ Nonlocal(NL)

² Levy

³ Primary modified nonlocal (PMNL)

همچنین u_0 و v_0 جابجایی هر نقطه از صفحه میانی به ترتیب در امتداد محور x و y می باشد.

مولفه های تانسور انحنای صفحه میانی هنگامی که نانو صفحه بعلت بار گذاری تغییر شکل می دهد، عبارتند از:

$$\kappa = \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ 2\kappa_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{,xx} \\ w_{,yy} \\ 2w_{,xy} \end{bmatrix} \quad (2)$$

همچنین مولفه های تانسور کرنش را می توان بوسیله رابطه زیر نشان داد.

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 2\varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \varepsilon^0 - Z\kappa, \quad \varepsilon^0 = \begin{bmatrix} u_{0,x} \\ v_{0,y} \\ u_{0,y} + v_{0,x} \end{bmatrix} \quad (3)$$

بر مبنای قانون هوک، روابط میان تانسورهای تنش کلاسیک و کرنش نانو صفحه ای با مدول یانگ E_p و ضریب پواسون ν_p بصورت زیر قابل بیان است.

$$\sigma^I = \begin{bmatrix} \sigma_x^I \\ \sigma_y^I \\ \sigma_{xy}^I \end{bmatrix} = C \varepsilon, \quad C = \frac{E_p}{1 - \nu_p^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu_p & 0 \\ \nu_p & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu_p)/2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

مولفه های تانسور ممان منتهجه غیرمحملی بصورت زیر تعریف می شوند.

$$M^{nl} = \begin{bmatrix} M_x^{nl} \\ M_y^{nl} \\ M_{xy}^{nl} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_x^{nl} \\ \sigma_y^{nl} \\ \sigma_{xy}^{nl} \end{bmatrix} z dz \quad (5)$$

در تئوری الاستیسیته کلاسیک، تنش در هر نقطه فقط به کرنش در همان نقطه بستگی دارد؛ در حالیکه در تئوری الاستیسیته غیرمحملی که برای اولین بار توسط ارینگن ارائه شد، تنش در هر نقطه از جسم تابعی از کرنش تمام نقاط جسم می باشد. بر اساس تئوری الاستیسیته غیرمحملی روابط ساختاری غیرمحملی مطابق رابطه زیر قابل بیان است.

$$(1 - \mathcal{N})\sigma^{nl} = \sigma^I, \quad \sigma^{nl} = \begin{bmatrix} \sigma_x^{nl} \\ \sigma_y^{nl} \\ \sigma_{xy}^{nl} \end{bmatrix} \quad (6)$$

که σ^{nl} تانسور تنش غیرمحملی و $\mathcal{N}$ عملگر غیرمحملی است که بصورت زیر تعریف می شود.

$$\mathcal{N} = \mu^2 L_e^2 \nabla^2 \quad (7)$$

پارامتر غیرمحملی بی بعد μ توسط رابطه زیر تعریف می شود.

$$\mu = \frac{e_0 L_i}{L_e} \quad (8)$$

که در آن L_i طول مشخصه داخلی (فاصله بین اتم های کربن)، L_e طول مشخصه خارجی و e_0 از خواص ذاتی ماده است که از کارهای آزمایشگاهی و یا مدلسازی دینامیک شبکه اتمی حاصل می شود [7]، اما هنوز مقدار مشخصی برای آن ارائه نشده است [23].

در تئوری الاستیسیته غیرمحملی اصلاح شده کامل، از معادلات ساختاری غیرمحملی اصلاح شده بجای معادلات ساختاری غیرمحملی (معادله (6)) استفاده می شود. معادلات ساختاری غیرمحملی اصلاح شده بصورت زیر قابل بیان است

$$\sigma^{nl} = \mathcal{N}^* \sigma^I \quad (9)$$

که عملگر غیرمحملی اصلاح شده $\mathcal{N}^*$ بصورت زیر تعریف می شود.

$$\mathcal{N}^* = \sum_{i=0}^{\infty} \mu^{2i} L_e^{2i} \nabla^{2i} \quad (10)$$

براحتی می توان نشان داد که معادلات ساختاری غیرمحملی اصلاح شده (رابطه (9)) یک جواب خصوصی معادلات ساختاری غیرمحملی (رابطه (6)) هستند.

در تحقیق حاضر تئوری نوینی برای اولین بار جهت تحلیل رفتار نانو ساختارها که تئوری الاستیسیته غیرمحملی اصلاح شده کامل¹ نامیده شده ارائه خواهد شد. همچنین مسائل خمشی نانو تیر و نانو صفحه بر اساس تئوری ارائه شده مورد بررسی قرار گرفته و اعتبار تئوری ارائه شده با شبیه سازی دینامیک مولکولی سنجیده شده است. در این تحقیق بر مبنای تئوری جدید ارائه شده و با استفاده از اصل انرژی، معادلات حاکم و شرایط مرزی مسایل خمشی نانو تیر و نانو صفحه روی تکیه گاه ساده استخراج شده است. حل عددی معادلات با استفاده از روش ناویر بیان گردیده است. سپس با تجدید آرایش سری های ظاهر شده در محاسبه خیز بیشینه نانو صفحه و نانو تیر، روابط مربوط به آنها بازنویسی می شود. این امر سبب حذف خطای عددی مربوط به در نظر گرفتن تعداد مشخصی از جملات سری معادلات ساختاری اصلاح شده می شود.

در این مقاله نشان داده می شود که بر اساس تئوری الاستیسیته غیرمحملی قادر به بررسی برخی مسائل از جمله خمشی نانو تیر و نانو صفحه روی تکیه گاه ساده تحت بار عرضی متمرکز و گسترده یکنواخت نخواهیم بود. تئوری الاستیسیته غیرمحملی اصلاح شده کامل ضمن رفع نقیصه فوق الذکر می تواند معیار مناسبی را جهت تعیین حوزه کارایی و دقت تئوری الاستیسیته غیرمحملی اولیه که تنها دو ترم اول سری معادلات ساختاری غیرمحملی اصلاح شده را در نظر می گیرد ارائه می دهد.

2- روابط حاکم بر خمشی نانو صفحه و نانو تیر بر اساس تئوری الاستیسیته غیرمحملی اصلاح شده کامل

2-1- نانو صفحه

نانو صفحه مستطیلی نازک، همگن و ایزوتروپیک به طول a ، عرض b و ضخامت h که تحت بار عرضی گسترده $p(x, y)$ قرار دارد را مطابق شکل 1 در نظر بگیرید. مبدا دستگاه مختصات (x, y, z) در گوشه سمت چپ صفحه میانی واقع شده است و محورها x ، y و z به ترتیب در راستای طول، عرض و ضخامت نانو صفحه قرار دارند.

میدان جابجایی بر اساس تئوری کلاسیک صفحات به صورت زیر تعریف می شوند.

$$U = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0(x, y) - z w_{,x} \\ v_0(x, y) - z w_{,y} \\ w(x, y) \end{bmatrix} \quad (1)$$

که در آن u ، v و w جابجایی هر نقطه از نانو صفحه در امتداد محور x ، y و z

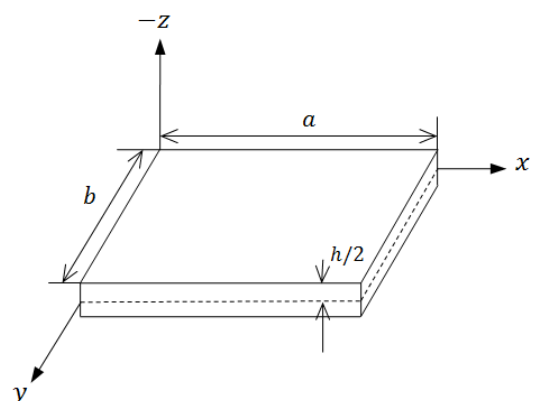


Fig. 1 The schematic of a rectangular nano plate

شکل 1 شماتیک نانو صفحه مستطیلی

¹ Full modified nonlocal (FMNL)

تحت بار عرضی گسترده $p(x, y)$ قرار دارد، بر اساس تئوری الاستیسیته غیرمحلّی اصلاح شده اولیه عبارتست از:

$$D(\nabla^4 w + \mu^2 a^2 \nabla^6 w) = p \quad (22)$$

همچنین شرایط مرزی شامل تعیین مقدار یکی از متغیرهای ذکر شده در رابطه (23) برای هر یک از مرزها می باشد.

$$x = 0, a: \begin{cases} w \parallel w_{,xxx} + \mu^2 a^2 \nabla^2(w_{,xxx}) \\ w_{,x} \parallel w_{,xx} + \mu^2 a^2 \nabla^2(w_{,xx}) \end{cases} \\ y = 0, b: \begin{cases} w \parallel w_{,yyy} + \mu^2 a^2 \nabla^2(w_{,yyy}) \\ w_{,y} \parallel w_{,yy} + \mu^2 a^2 \nabla^2(w_{,yy}) \end{cases} \quad (23)$$

2-2- نانو تیر

نانو تیر نازک، همگن و ایزوتروپیک به طول a ، سطح مقطع مستطیلی $b \times h$ که تحت بار عرضی گسترده $p(x)$ قرار دارد را مطابق شکل 2 در نظر بگیرید. h و b به ترتیب عرض و ضخامت نانو تیر می باشند. مبدا دستگاه مختصات (x, y, z) در گوشه سمت چپ تار میانی واقع شده است و محورهای x ، y و z به ترتیب در راستای طول، عرض و ضخامت نانو تیر قرار دارند.

میدان جابجایی بر اساس تئوری تیر اویلر-برنولی به صورت زیر تعریف می شوند.

$$u = u_0(x) - z w_{,x} \\ w = w(x) \quad (24)$$

که در آن u و w جابجایی هر نقطه از نانو صفحه در امتداد محور x و z و همچنین u_0 جابجایی هر نقطه از تار میانی در امتداد محور x می باشد. کرنش نانو تیر را می توان بوسیله رابطه زیر نشان داد.

$$\varepsilon_x = u_{0,x} - z w_{,xx} \quad (25)$$

بر مبنای قانون هوک، روابط میان تنش کلاسیک و کرنش نانو تیری با مدول یانگ E_b بصورت زیر قابل بیان است.

$$\sigma_x^1 = E_b \varepsilon_x \quad (26)$$

ممان منتهجه غیرمحلّی بصورت زیر تعریف می شود.

$$M_x^{nl} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x^{nl} z dz \quad (27)$$

روابط ساختاری غیرمحلّی برای نانو تیر مطابق زیر قابل بازنویسی می باشد.

$$(1 - \mathcal{N})\sigma_x^{nl} = \sigma_x^1 \quad (28)$$

که عملگر غیرمحلّی $\mathcal{N}$ بصورت زیر تعریف می شود.

$$\mathcal{N} = \mu^2 L^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (29)$$

همچنین معادلات ساختاری غیرمحلّی اصلاح شده بصورت زیر قابل بیان است.

$$\sigma_x^{nl} = \mathcal{N}^* \sigma_x^1 \quad (30)$$

که عملگر غیرمحلّی اصلاح شده $\mathcal{N}^*$ بصورت زیر تعریف می شود.

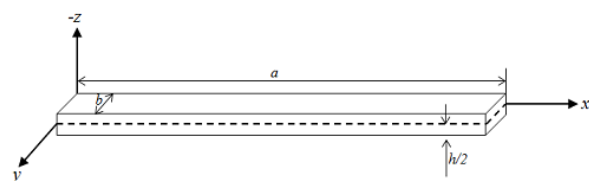


Fig. 2 The schematic of a nano beam

شکل 2 شماتیک نانو تیر

با استفاده از معادلات ساختاری غیرمحلّی، مولفه های تانسور ممان منتهجه غیرمحلّی بصورت زیر قابل بیان است.

$$M^{nl} = \mathcal{N}^*(-D_p \kappa) \quad (11)$$

که تانسور D_p ، تانسور سختی خمشی نانو صفحه و اسکالر D سختی خمشی نانو صفحه می باشند و بصورت زیر تعریف می شوند.

$$D_p = D \begin{bmatrix} 1 & \nu_p & 0 \\ \nu_p & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu_p)/2 \end{bmatrix}, \\ D = \frac{E_p h^3}{12(1 - \nu_p^2)} \quad (12)$$

انرژی پتانسیل کل نانو صفحه بصورت زیر قابل بیان است.

$$\Pi = U - W \quad (13)$$

که U انرژی کرنشی و W کار انجام شده توسط بار عرضی گسترده $p(x, y)$ است.

کار انجام شده توسط بار عرضی گسترده $p(x, y)$ عبارتست از:

$$W = \iint p(x, y) w dA \quad (14)$$

انرژی کرنشی را می توان بصورت زیر نوشت:

$$U = \iiint (\sigma_x^{nl} \varepsilon_x + \sigma_y^{nl} \varepsilon_y + 2\sigma_{xy}^{nl} \varepsilon_{xy}) dV \quad (15)$$

با جایگذاری روابط (2)، (3) و (11) در رابطه (15) خواهیم داشت:

$$U = - \iint (M_x^{nl} \kappa_x + M_y^{nl} \kappa_y + 2M_{xy}^{nl} \kappa_{xy}) dA \quad (16)$$

حال با استفاده از اصل کار مجازی به استخراج معادلات حاکم و شرایط مرزی نانو صفحه که تحت بار عرضی گسترده $p(x, y)$ قرار دارد، می پردازیم. برای این منظور باید داشته باشیم:

$$\delta \Pi = 0 \quad (17)$$

با محاسبه تغییرات مرتبه اول انرژی پتانسیل نانو صفحه با استفاده از روابط (14) و (16) و سپس صفر قرار دادن آن، معادله دیفرانسیلی حاکم بر نانوصفحه بصورت زیر بدست می آید.

$$\mathcal{N}^*(D \nabla^4 w) = p \quad (18)$$

شرایط مرزی شامل تعیین مقدار یکی از متغیرهای ذکر شده در رابطه (19) برای هر یک از مرزها می باشد.

$$x = 0, a: \begin{cases} w \parallel \mathcal{N}^*(w_{,xxx}) \\ w_{,x} \parallel \mathcal{N}^*(w_{,xx}) \end{cases} \\ y = 0, b: \begin{cases} w \parallel \mathcal{N}^*(w_{,yyy}) \\ w_{,y} \parallel \mathcal{N}^*(w_{,yy}) \end{cases} \quad (19)$$

شرایط مرزی همچنین شامل تعیین مقدار یکی از متغیرهای ذکر شده در رابطه (20) برای هر یک از مرزها می باشد.

$$x = 0, a: \begin{cases} w \parallel (1 - \nu^2) Q_x^{nl} + \nu M_{y,x}^{nl} - M_{x,x}^{nl} \\ w_{,x} \parallel M_x^{nl} - \nu M_y^{nl} \end{cases} \\ y = 0, b: \begin{cases} w \parallel (1 - \nu^2) Q_y^{nl} + \nu M_{x,y}^{nl} - M_{y,y}^{nl} \\ w_{,y} \parallel M_y^{nl} - \nu M_x^{nl} \end{cases} \quad (20)$$

که Q_x^{nl} و Q_y^{nl} مولفه های تانسور نیروی برشی منتهجه غیرمحلّی به ترتیب در راستای x و y هستند و بصورت زیر تعریف می شوند.

$$Q_x^{nl} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xz}^{nl} dz = \mathcal{N}^*(-D(\kappa_{x,x} + \kappa_{y,x})) \\ Q_y^{nl} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{yz}^{nl} dz = \mathcal{N}^*(-D(\kappa_{x,y} + \kappa_{y,y})) \quad (21)$$

همچنین معادله دیفرانسیلی حاکم برای نانو صفحه روی تکیه گاه ساده که

$$[(E_b I w_{,xx}) + \mu^2 a^2 (E_b I w_{,xxxx})]_{,xx} = p \quad (44)$$

شرایط مرزی همچنین شامل تعیین مقدار یکی از متغیرهای ذکر شده در رابطه (44) برای هر یک از مرزها می باشد.

$$x = 0, a: \begin{cases} w \parallel w_{,xxx} + \mu^2 a^2 w_{,xxxx} \\ w_{,x} \parallel w_{,xx} + \mu^2 a^2 w_{,xxx} \end{cases} \quad (45)$$

معادلات دیفرانسیلی حاکم که در بالا استخراج شد منطبق بر معادلات بدست آمده توسط پدیسن و همکارانش [17] می باشد.

3- حل عددی خمش نانو صفحه و تیر تحت بار عرضی با تکیه گاه ساده

در این بخش با استفاده از روش ناویر به حل عددی معادلات دیفرانسیلی تعادل حاکم بر خمش نانو صفحه و نانو تیر تحت بار عرضی با تکیه گاه ساده پرداخته می شود.

3-1- نانو صفحه

با استفاده از معادله (19) شرایط مرزی نانو صفحه روی تکیه گاه ساده بصورت زیر قابل بیان است.

$$\begin{cases} w|_{x=0,a} = 0 \\ M_x^{nl}|_{x=0,a} = -D N^*(w_{,xx} + v w_{,yy})|_{x=0,a} = 0 \\ w|_{y=0,b} = 0 \\ M_y^{nl}|_{y=0,b} = -D N^*(w_{,yy} + v w_{,xx})|_{y=0,b} = 0 \end{cases} \quad (46)$$

چنانچه میدان جابجایی به فرم زیر در نظر گرفته شود، شرایط مرزی را ارضا می کند.

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (47)$$

همچنین بار جانبی گسترده $p(x, y)$ را نیز می توان بصورت زیر بسط داد.

$$p(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (48)$$

که ضرایب بسط فوریه برای حالات مختلف بارگذاری در جدول 1 داده شده می باشند.

با جایگذاری روابط (47) و (48) در رابطه (18) و حل معادله حاصل، ضرایب بسط سری فوریه مربوط به خیز نانو صفحه بصورت زیر بدست می آید.

$$C_{mn} = \frac{p_{mn} a^4}{D \pi^4 A^4} \left(\frac{1}{S_0}\right), \quad S_0 = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i (\mu^2 \pi^2 A^2)^i \quad (49)$$

$$A^2 = m^2 + r^2 n^2, \quad r = \frac{a}{b}$$

جدول 1 ضرایب بسط فوریه مربوط به بار اعمال شده به نانو صفحه برای حالات مختلف بارگذاری

Table 1 Fourier coefficients of applied force on nano plate for various case of loading

p_{mn}	$p(x, y)$	بارگذاری
$\frac{16p_0}{\pi^2 mn}$	$m, n = 1, 3, \dots$	نوع اول
$\frac{4p_0}{ab} \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$	$m, n = 1, 3, \dots$	نوع دوم
p_0	$m = n = 1$	نوع سوم

$$N^* = \sum_{i=0}^{\infty} \mu^{2i} L_e^{2i} \frac{\partial^{2i}}{\partial x^{2i}} \quad (31)$$

براحتی می توان نشان داد که معادلات ساختاری غیرمحلّی اصلاح شده (رابطه (30)) یک جواب خصوصی معادلات ساختاری غیرمحلّی (رابطه (28)) هستند. با استفاده از معادلات ساختاری غیرمحلّی، ممان منتجه غیرمحلّی بصورت زیر قابل بیان است.

$$M_x^{nl} = N^*(-E_b I w_{,xx}) \quad (32)$$

که I ممان اینرسی سطح مقطع نانو تیر است و بصورت زیر تعریف می شود.

$$I = \int_A z^2 dA \quad (33)$$

انرژی پتانسیل کل نانو تیر بصورت زیر قابل بیان است.

$$\Pi = U - W \quad (34)$$

که U انرژی کرنشی و W کار انجام شده توسط بار عرضی گسترده $p(x)$ است.

از طرفی کار انجام شده توسط بار عرضی گسترده $p(x)$ عبارتست از:

$$W = \int_0^a p(x) w dx \quad (35)$$

از طرف دیگر انرژی کرنشی را می توان بصورت زیر نوشت:

$$U = \int_0^a \int_A \sigma_x^{nl} \varepsilon_x dA dx \quad (36)$$

با جایگذاری روابط (2)، (3) و (32) در رابطه (36) خواهیم داشت:

$$U = - \int_0^a M_x^{nl} w_{,xx} dx \quad (37)$$

حال با استفاده از اصل کار مجازی به استخراج معادلات حاکم و شرایط مرزی نانو تیر که تحت بار عرضی گسترده $p(x)$ قرار دارد، می پردازیم. برای این منظور باید داشته باشیم:

$$\delta \Pi = 0 \quad (38)$$

با محاسبه تغییرات مرتبه اول انرژی پتانسیل نانو تیر با استفاده از روابط (14) و (16) و سپس صفر قرار دادن آن، معادله دیفرانسیلی حاکم بر نانوتیر بصورت زیر بدست می آید.

$$[N^*(E_b I w_{,xx})]_{,xx} = p \quad (39)$$

شرایط مرزی شامل تعیین مقدار یکی از متغیرهای ذکر شده در رابطه (40) برای هر یک از مرزها می باشد.

$$x = 0, a: \begin{cases} w \parallel N^*(w_{,xxx}) \\ w_{,x} \parallel N^*(w_{,xx}) \end{cases} \quad (40)$$

معادله دیفرانسیلی حاکم بر نانوتیر بصورت زیر نیز قابل بیان است.

$$[M_x^{nl}]_{,xx} = -p \quad (41)$$

شرایط مرزی همچنین شامل تعیین مقدار یکی از متغیرهای ذکر شده در رابطه (42) برای هر یک از مرزها می باشد.

$$x = 0, a: \begin{cases} w \parallel Q_x^{nl} \\ w_{,x} \parallel M_x^{nl} \end{cases} \quad (42)$$

که Q_x^{nl} نیروی برشی منتجه غیرمحلّی بصورت زیر تعریف می شود.

$$Q_x^{nl} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xz}^{nl} dz = N^*(-E_b I w_{,xxx}) \quad (43)$$

همچنین معادله دیفرانسیلی حاکم برای نانو تیر روی تکیه گاه ساده که تحت بار عرضی گسترده $p(x)$ قرار دارد، بر اساس تئوری الاستیسیته غیرمحلّی اصلاح شده اولیه عبارتست از:

با جایگذاری روابط (55) و (56) در رابطه (39) و حل معادله حاصل، ضرایب بسط سری فوریه مربوط به خیز نانو صفحه بصورت زیر بدست می‌آید.

$$C_{mn} = \frac{p_m a^4}{EI \pi^4 A^4} \left(\frac{1}{S_0} \right), \quad S_0 = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i (\mu^2 \pi^2 A^2)^i \quad (57)$$

مطابق آنچه در قسمت 1-3 برای نانو صفحه بیان شد، با تجدید آرایش سری S_0 سری S بصورت یک تصاعد هندسی با قدر نسبت $\mu^4 \pi^4 A^4$ و جمله اول برابر 1 قابل بازنویسی است.

$$S_0 = (1 - \mu^2 \pi^2) S, \quad S = \sum_{i=0}^{\infty} (\mu^2 \pi^2 A^2)^{2i} \quad (58)$$

با استفاده از آزمون نسبت برای همگرایی سری، شعاع همگرایی سری S عبارتست از:

$$\mu_{\text{conv}} = \frac{1}{\pi A} \quad (59)$$

حال با محاسبه سری S و با استفاده از روابط (55) و (57)، رابطه زیر برای خیز بیشینه نانو تیر بر اساس تئوری الاستیسیته غیرمحلّی اصلاح شده کامل استخراج خواهد شد.

$$w_{\text{max}} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p_m a^4}{E_b I \pi^4} \left(\frac{1 + \mu^2 \pi^2 A^2}{A^4} \right) \quad (60)$$

همچنین خیز بیشینه نانو تیر بر اساس تئوری الاستیسیته غیرمحلّی اصلاح شده اولیه عبارتست از:

$$w_{\text{max}} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p_m a^4}{E_b I \pi^4} \left(\frac{1}{A^4 (1 - \mu^2 \pi^2 A^2)} \right) \quad (61)$$

4- بررسی و تحلیل نتایج

در ابتدا بمنظور اعتبار سنجی تئوری ارائه شده، در شکل 3 نتایج خیز بیشینه گرافن مربعی روی تکیه گاه ساده تحت بار متمرکز بر اساس تئوری ارائه شده با نتایج شبیه سازی مولکولی [24] مقایسه شده است. در شکل 3 مشخصات نانو صفحه بصورت زیر در نظر گرفته شده است.

$$E_p = 803.38 \text{ GPa}, \quad \nu = 0.25$$

$$e_0 L_1 = 0.93 \text{ nm}, \quad L_e = a, \quad h = 0.335 \text{ nm}$$

نتایج شکل 3 تطابق بسیار خوبی را میان نتایج تئوری الاستیسیته غیرمحلّی اصلاح شده کامل و شبیه سازی دینامیک مولکولی نشان می‌دهد که این موضوع اعتبار تئوری ارائه شده را اثبات می‌کند.

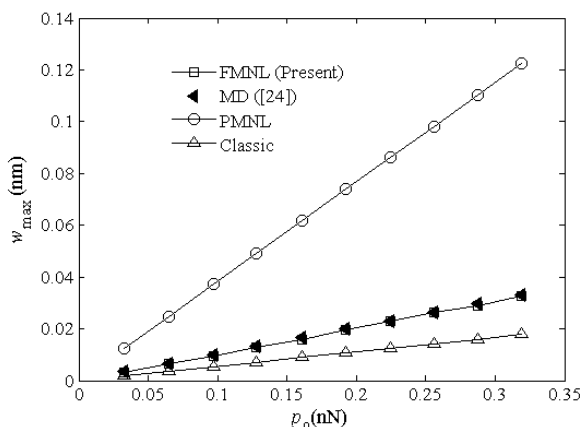


Fig. 3 Comparison of the maximum deflection of a simply supported square nanoplate under concentrated load calculated by classic theory, nonlocal theories. and MD simulation.

شکل 3 مقایسه خیز بیشینه نانو صفحه مربعی روی تکیه گاه ساده تحت بار متمرکز بر اساس تئوری کلاسیک و تئوری‌های غیرمحلّی با نتایج شبیه سازی مولکولی

که r نسبت منطری نانو صفحه می‌باشد. حال با تجدید آرایش سری S_0 ، سری S_0 بصورت یک تصاعد هندسی با قدر نسبت $\mu^4 \pi^4 A^4$ و جمله اول برابر 1 قابل بازنویسی است.

$$S_0 = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i (\mu^2 \pi^2 A^2)^i$$

$$= (1 + \mu^4 \pi^4 A^4 + \dots)$$

$$= (\mu^2 \pi^2 A^2 + \mu^6 \pi^6 A^6 + \dots)$$

$$= (1 + \mu^4 \pi^4 A^4 + \dots)$$

$$= -\mu^2 \pi^2 A^2 (1 + \mu^4 \pi^4 A^4 + \dots)$$

$$= (1 - \mu^2 \pi^2) S, \quad S = \sum_{i=0}^{\infty} (\mu^2 \pi^2 A^2)^{2i} \quad (50)$$

با استفاده از آزمون نسبت برای همگرایی سری، شعاع همگرایی سری S عبارتست از:

$$\mu_{\text{conv}} = \frac{1}{\pi A} \quad (51)$$

حال با محاسبه سری S و با استفاده از روابط (47) و (49)، رابطه زیر برای خیز بیشینه نانو صفحه بر اساس تئوری الاستیسیته غیرمحلّی اصلاح شده کامل استخراج خواهد شد.

$$w_{\text{max}} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_{mn} a^4}{D \pi^4} \left(\frac{1 + \mu^2 \pi^2 A^2}{A^4} \right) \quad (52)$$

همچنین خیز بیشینه نانو صفحه بر اساس تئوری الاستیسیته غیرمحلّی اصلاح شده اولیه عبارتست از:

$$w_{\text{max}} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_{mn} a^4}{D \pi^4} \left(\frac{1}{A^4 (1 - \mu^2 \pi^2 A^2)} \right). \quad (53)$$

3-2- نانو تیر

با استفاده از معادله (40) شرایط مرزی نانو تیر روی تکیه گاه ساده بصورت زیر قابل بیان است.

$$\begin{cases} w|_{x=0,a} = 0 \\ M_x^{nl}|_{x=0,a} = -D \mathcal{N}^*(w_{,xx})|_{x=0,a} = 0 \end{cases} \quad (54)$$

چنانچه میدان جابجایی به فرم زیر در نظر گرفته شود، شرایط مرزی را ارضا می‌کند.

$$w(x) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \quad (55)$$

همچنین بار جانبی گسترده $p(x, y)$ را نیز می‌توان بصورت زیر بسط داد.

$$p(x) = \sum_{m=1}^{\infty} p_m \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \quad (56)$$

که p_m ضرایب بسط فوریه برای حالات مختلف بارگذاری در جدول 2 داده شده می‌باشند.

جدول 2 ضرایب بسط فوریه مربوط به بار اعمال شده به نانو تیر برای حالات مختلف بار گذاری

Table 2 Fourier coefficients of applied force on nano beam for various case of loading

بارگذاری	$p(x)$	p_m
نوع اول	p_0	$\frac{4p_0}{\pi^2 m} \quad m = 1, 3, \dots$
نوع دوم	$p_0 \delta\left(x - \frac{a}{2}\right)$	$\frac{2p_0}{a} \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) \quad m = 1, 3, \dots$
نوع سوم	$p_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)$	$p_0 \quad m = 1$

شکل (a) و شکل (a) حاکی از آن است که نتایج خیز بیشینه نانو صفحه مربعی و همچنین نانو تیر روی تکیه‌گاه ساده تحت بار عرضی گسترده یکنواخت بر اساس تئوری الاستیسیته غیرمحملی بر نتایج تئوری الاستیسیته کلاسیک منطبق می‌باشد. لذا تئوری الاستیسیته غیرمحملی در پاره‌ای از موارد از جمله مورد ذکر شده قادر به در نظر گرفتن اثر مقیاس کوچک نمی‌باشد که به این نقص در مقالات دیگر نیز اشاره شده است [17-19]. همچنین تئوری الاستیسیته غیرمحملی قادر به بررسی خمش نانو صفحه مربعی و نانو تیر روی تکیه‌گاه ساده تحت بار متمرکز نمی‌باشد، از اینرو در شکل (b) و شکل (b) نموداری برای این تئوری ترسیم نگردیده است. این نقایص از آنجا ناشی می‌شود که در معادلات ساختاری غیرمحملی تنش بصورت تابع صریحی از کرنش قابل بیان نیست. لذا جهت تحلیل رفتار مکانیکی نانو مواد بر اساس تئوری الاستیسیته غیرمحملی مجبور به اعمال عملگر غیرمحملی بر معادله دیفرانسیلی تعادل هستیم. حال آنکه در حالت کلی پاسخ هر معادله دلخواه لزوماً بر پاسخ معادله‌ای که از اعمال یک عملگر دلخواه بر معادله اصلی بدست آمده منطبق نخواهد بود. تئوری نوین ارائه شده موسوم به تئوری غیرمحملی

بمنظور مقایسه بهتر میان نتایج سه تئوری الاستیسیته غیرمحملی، غیرمحملی اصلاح شده اولیه و غیرمحملی اصلاح شده کامل، پارامتر χ_B بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$\chi_B = \frac{w_{max}}{w_{max}|_{\mu=0}} \quad (62)$$

پارامتر χ_B نشان دهنده نسبت خیز بیشینه بر اساس تئوری‌های مختلف غیرمحملی (مانند تئوری الاستیسیته غیرمحملی، غیرمحملی اصلاح شده اولیه و غیرمحملی اصلاح شده کامل) به خیز بیشینه بر اساس تئوری کلاسیک برای نانو صفحه مستطیلی یا نانو تیر روی تکیه‌گاه ساده تحت بار عرضی می‌باشد. شکل و شکل مقادیر پارامتر χ_B را بر حسب پارامتر غیرمحملی بی بعد μ برای نانو صفحه مربعی و نانو تیر روی تکیه‌گاه ساده و تحت بارگذاری‌های نوع اول، دوم و سوم که در جدول 1 و 2 معرفی شده اند، نشان می‌دهد. مطابق شکل و شکل برای مقادیر بسیار کوچک μ ، نتایج تئوری‌های غیرمحملی اصلاح شده اولیه و تئوری‌های غیرمحملی اصلاح شده کامل بر هم منطبق است. حال آنکه با افزایش μ نتایج این دو تئوری از هم فاصله می‌گیرد.

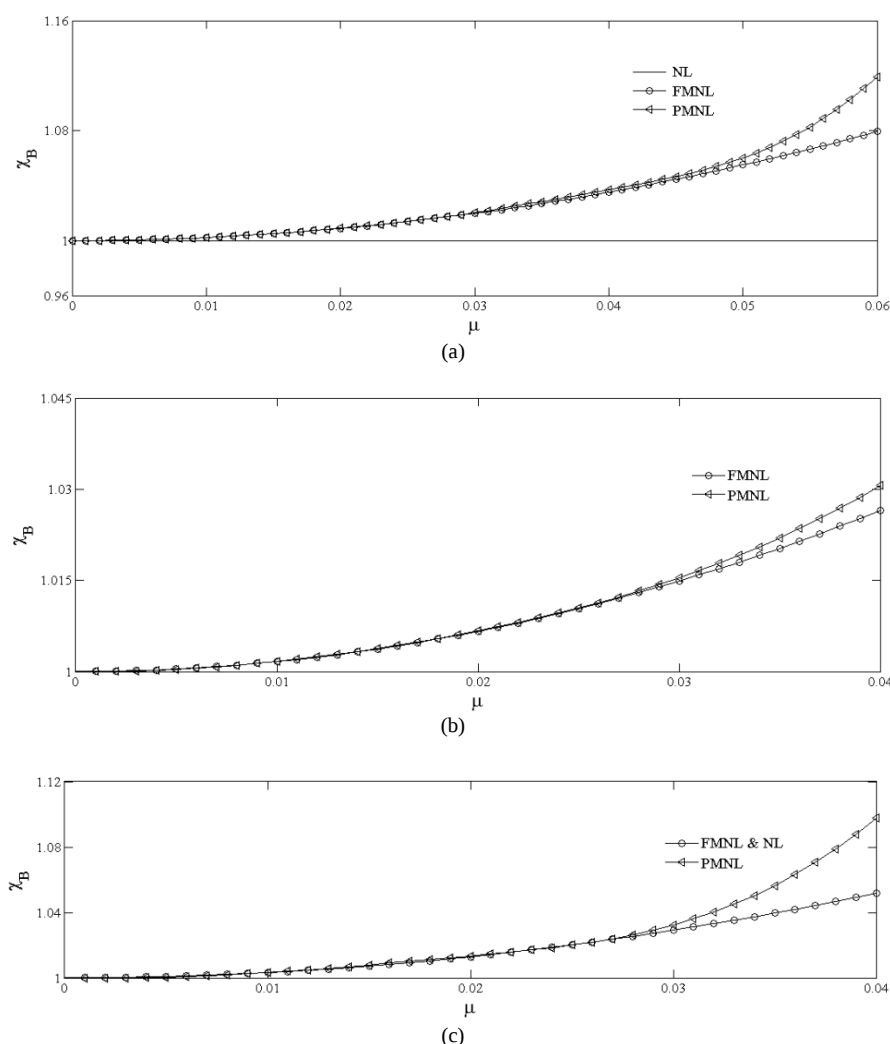


Fig. 4 The ratio of maximum deflection based on NL, PMNL and FMNL theories to classical maximum deflection of a simply supported square nanoplate under case loading (a) first type, (b) second type and (c) third type

شکل 4 مقایسه نسبت خیز بیشینه نانو صفحه مربعی روی تکیه‌گاه ساده بر اساس تئوری‌های الاستیسیته غیرمحملی، غیرمحملی اصلاح شده اولیه و غیرمحملی اصلاح شده کامل به خیز بیشینه بر اساس تئوری الاستیسیته کلاسیک تحت بارگذاری‌های (الف) نوع اول، (ب) نوع دوم (ج) نوع سوم

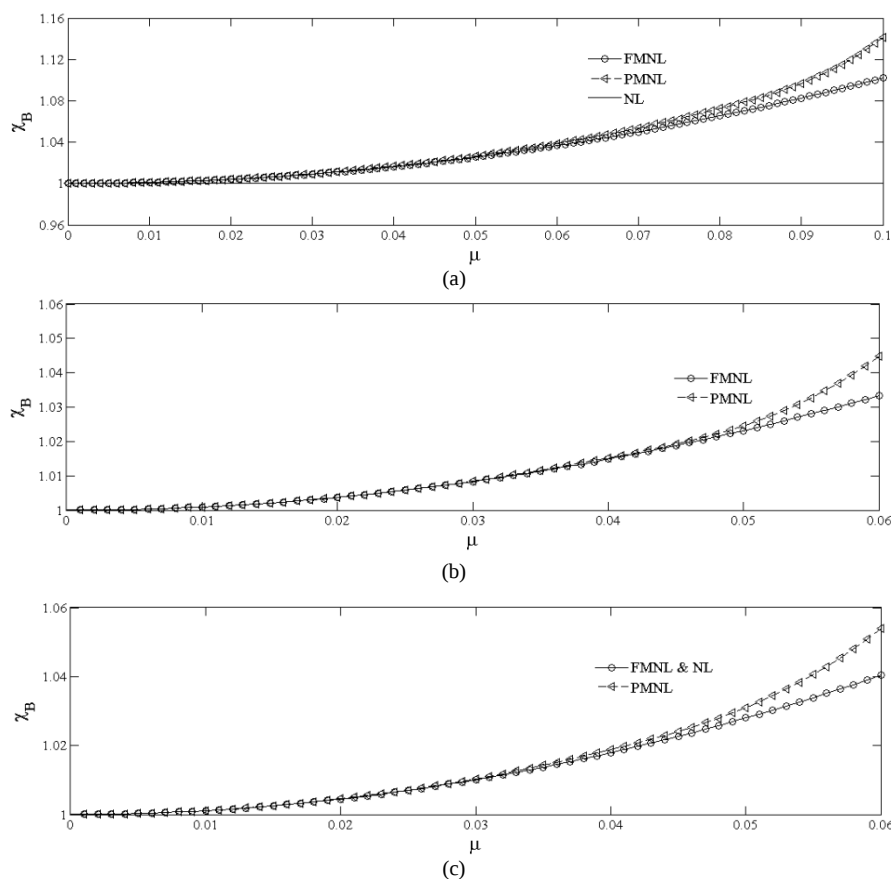


Fig. 5 The ratio of maximum deflection based on NL, PMNL and FMNL theories to classical maximum deflection of a simply supported nanobeam under case loading (a) first type (b) second type and (c) third type

شکل 5 مقایسه نسبت خیز بیشینه نانو تیر روی تکیه گاه ساده بر اساس تئوری‌های الاستیسیته غیرمحلّی، غیرمحلّی اصلاح شده اولیه و غیرمحلّی اصلاح شده کامل به خیز بیشینه بر اساس تئوری الاستیسیته کلاسیک تحت بارگذاری‌های (الف) نوع اول، (ب) نوع دوم (ج) نوع سوم

تجدید آرایش ضریب بسط فوریه سری فوق الذکر که خود یک سری بینهایت از پارامتر غیرمحلّی و توان‌های مرتبه بالاتر آن می‌باشد، ضریب بسط فوریه بصورت یک سری هندسی بازنویسی شد و با استفاده از آن رابطه‌ای برای خیز بیشینه نانو صفحه استخراج شد. همچنین بمنظور بررسی حوزه کارایی تئوری ارائه شده با استفاده از آزمون نسبت برای همگرایی سری هندسی ذکر شده، شعاع همگرایی سری بدست آمد. در آخر بمنظور بررسی اعتبار تئوری ارائه شده خیز ناشی از خمش نانو صفحه مربعی تحت بار متمرکز روی تکیه‌گاه ساده بر اساس تئوری الاستیسیته غیرمحلّی اصلاح شده کامل با نتایج شبیه سازی دینامیک مولکولی مورد مقایسه قرار گرفت و تطابق بسیار خوبی میان نتایج مشاهده شد.

در این مقاله نشان داده شد که تئوری الاستیسیته غیرمحلّی اصلاح شده کامل ضمن رفع نقص تئوری الاستیسیته غیرمحلّی مبنی بر ناتوانی در نظر گرفتن اثر مقیاس کوچک در برخی مسائل، می‌تواند معیار مناسبی را برای بررسی حوزه کارایی و محدودیت‌های تئوری الاستیسیته غیرمحلّی اصلاح شده اولیه ارائه دهد.

6- پیوست

نانو صفحه

بر اساس تئوری الاستیسیته غیرمحلّی معادلات دیفرانسیلی حاکم بر نانو صفحه مستطیلی نازک، همگن و ایزوتروپیک به طول a ، عرض b و ضخامت

اصلاح شده کامل ضمن رفع نقیصه فوق الذکر، معیار مناسبی برای بررسی دقت تئوری غیرمحلّی اصلاح شده اولیه ارائه می‌دهد. در این مورد توضیحات تکمیلی در پیوست آورده شده است.

شکل (c) و شکل (c) مقادیر پارامتر χ_B را بر حسب پارامتر غیرمحلّی بی بعد μ برای نانو صفحه مربعی و نانو تیر روی تکیه‌گاه ساده و تحت بارگذاری سینوسی نشان می‌دهد. همانطور که در شکل (c) و شکل (c) پیداست نتایج خیز بیشینه نانو صفحه مربعی و نانو تیر روی تکیه‌گاه ساده تحت بار عرضی گسترده سینوسی بر اساس تئوری الاستیسیته غیرمحلّی بر نتایج تئوری الاستیسیته غیرمحلّی اصلاح شده کامل منطبق می‌باشد.

5- نتیجه گیری

در این مقاله برای اولین بار تئوری نوینی جهت تحلیل خمش نانو تیر و نانو صفحه، موسوم به تئوری الاستیسیته غیرمحلّی اصلاح شده کامل ارائه شده است. در این تئوری رابطه میان تنش غیرمحلّی و کرنش توسط معادلات ساختاری غیرمحلّی اصلاح شده تعریف شده است. بدین منظور در ابتدا معادلات دیفرانسیلی حاکم و شرایط مرزی نانو تیر و نانو صفحه روی تکیه‌گاه ساده تحت بار عرضی گسترده با استفاده از روش انرژی استخراج شد.

و به کمک روش ناویر رابطه‌ای برای خیز بیشینه ناشی از خمش نانو تیر و نانو صفحه، که بصورت یک سری فوریه می‌باشد، بدست آمد سپس با

- [8] X. Liang, S. Hu, S. Shen, A new Bernoulli-Euler beam model based on a simplified strain gradient elasticity theory and its applications, *Composite Structures*, Vol. 111, No. 1, pp. 317-323, 2014.
- [9] A. Shakouri, T. Y. Ng, R. M. Lin, A study of the scale effects on the flexural vibration of graphene sheets using REBO potential based atomistic structural and nonlocal couple stress thin plate models, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, Vol. 50, No. 1, pp. 22-28, 2013.
- [10] A. Ashoori, M. J. Mahmoodi, The modified version of strain gradient and couple stress theories in general curvilinear coordinates, *European Journal of Mechanics - A/Solids*, Vol. 49, No. 1, pp. 441-454, 2015.
- [11] A. C. Eringen, D. G. B. Edelen, On nonlocal elasticity, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 10, No. 1, pp. 233-248, 1972.
- [12] A. Farajpour, A. R. Shahidi, M. Mohammadi, M. Mahzoon, Buckling of orthotropic micro/nanoscale plates under linearly varying in-plane load via nonlocal continuum mechanics, *Composite Structures*, Vol. 94, No. 5, pp. 1605-1615, 2012.
- [13] M. Kermajani, S. Hosseini-Hashemi, R. Nazemzadeh, S. Amirabdollahian, Exact solutions for buckling of rectangular nanoplates via nonlocal third order plate theory, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 13, No. 133, pp. 33-42, 2012. (in persian فارسی)
- [14] S. A. Emam, A general nonlocal nonlinear model for buckling of nanobeams, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 37, No. 10-11, pp. 6929-6939, 2013.
- [15] M. E. Golmakani, J. Rezatalab, Nonlinear bending analysis of orthotropic nanoplates based on nonlocal model of Eringen using DQM, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 13, No. 12, pp. 122-136, 2012. (in persian فارسی)
- [16] M. Jabbarzadeh, H. Talati, A. R. Noroozi, Jabbarzadeh-Nonlinear analysis of circular graphene sheet using nonlocal continuum mechanic theory, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 13, No. 13, pp. 57-66, 2012. (in persian فارسی)
- [17] J. Peddieson, G. R. Buchanan, R. P. McNitt, Application of nonlocal continuum models to nanotechnology, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 41, No. 1, pp. 305-312, 2003.
- [18] S. A. M. Ghannadpour, B. Mohammadi, J. Fazilati, Bending, buckling and vibration problems of nonlocal Euler beams using Ritz method, *Composite Structures*, Vol. 96, No. 1, pp. 584-589, 2013.
- [19] N. Challamel, C. M. Wang, The small length scale effect for a non-local cantilever beam: a paradox solved, *Nanotechnology*, Vol. 19, No. 34, pp. 345703 (7pp), Aug 27, 2008.
- [20] D. Kumar, C. Heinrich, A. M. Waas, Buckling analysis of carbon nanotubes modeled using nonlocal continuum theories, *Journal of Applied Physics*, Vol. 103, No. 1, pp. 073521(8pp), 2008.
- [21] Q. Yang, C. W. Lim, Thermal effects on buckling of shear deformable nanocolumns with von Kármán nonlinearity based on nonlocal stress theory, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, Vol. 13, No. 2, pp. 905-922, 2012.
- [22] R. Hosseini-Ara, H. R. Mirdamadi, H. Khademyzadeh, R. Mostolizadeh, Stability analysis of carbon nanotubes based on a novel beam model and its comparison with sanders shell model and molecular dynamics simulations, *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, Vol. 34, No. 2, pp. 126-134, 2012.
- [23] K. Amara, A. Tounsi, I. Mechab, E. A. Adda-Bedia, Nonlocal elasticity effect on column buckling of multiwalled carbon nanotubes under temperature field, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 34, No. 12, pp. 3933-3942, 2010.
- [24] L. Y. Huang, Q. Han, Y. J. Liang, Calibration of Nonlocal Scale Effect Parameter for Bending Single-Layered Graphene Sheet under Molecular Dynamics, *Nano*, Vol. 07, No. 05, pp. 1250033, 2012.
- [25] J. N. Reddy, Nonlocal nonlinear formulations for bending of classical and shear deformation theories of beams and plates, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 48, No. 11, pp. 1507-1518, 2010.

h که تحت بار عرضی گسترده $p(x, y)$ قرار دارد، بصورت زیر قابل بیان است [25,15].

$$D^4 w = (1 - N)p(x, y) \quad (63)$$

چنانچه نانو صفحه تحت بار عرضی گسترده یکنواخت $p(x, y) = p_0$ قرار داشته باشد، معادله دیفرانسیلی حاکم بر رفتار نانو صفحه بصورت زیر ساده می‌شود.

$$D^4 w = p_0 \quad (64)$$

واضح است که رابطه (64) بر معادله دیفرانسیلی حاکم بر رفتار نانو صفحه بر اساس تئوری الاستیسیته کلاسیک منطبق می‌باشد.

همچنین برای نانو صفحه‌ای که تحت بار عرضی متمرکز $p(x, y) = p_0 \delta(x - a/2, y - b/2)$ قرار داشته باشد، بدلیل مشتق ناپذیری تابع دلتای دیراک بدست آوردن معادله دیفرانسیلی حاکم بر رفتار نانو صفحه امکان ناپذیر می‌باشد.

نانو تیر

بر اساس تئوری الاستیسیته غیرمحملی معادلات دیفرانسیلی حاکم بر نانو تیر نازک، همگن و ایزوتروپیک به طول a ، سطح مقطع مستطیلی $b \times h$ که تحت بار عرضی گسترده $p(x)$ قرار دارد، بصورت زیر قابل بیان است [25].

$$EI w_{xxxx} = (1 - N)p(x) \quad (65)$$

چنانچه نانو تیر تحت بار عرضی گسترده یکنواخت $p(x) = p_0$ قرار داشته باشد، معادله دیفرانسیلی حاکم بر رفتار نانو تیر بصورت زیر ساده می‌شود.

$$EI w_{xxxx} = p_0 \quad (66)$$

واضح است که رابطه (66) بر معادله دیفرانسیلی حاکم بر رفتار نانو تیر بر اساس تئوری الاستیسیته کلاسیک منطبق می‌باشد.

همچنین برای نانو تیری که تحت بار عرضی متمرکز $p(x) = p_0 \delta(x - a/2)$ قرار داشته باشد، بدلیل مشتق ناپذیری تابع دلتای دیراک بدست آوردن معادله دیفرانسیلی حاکم بر رفتار نانو تیر امکان ناپذیر می‌باشد.

7- مراجع

- [1] R. Martel, T. Schmidt, H. R. Shea, T. Hertel, P. Avouris, Single- and multi-wall carbon nanotube field-effect transistors, *Applied Physics Letters*, Vol. 73, No. 17, pp. 2447-2449, 1998.
- [2] S. Badranyana, D. K. Bhat, S. Shenoy, Y. Ullal, A. C. Hegde, Novel Fe-Ni-Graphene composite electrode for hydrogen production, *International Journal of Hydrogen Energy*, Vol. 40, No. 33, pp. 10453-10462, 2015.
- [3] P. Lian, X. Zhu, S. Liang, Z. Li, W. Yang, H. Wang, Large reversible capacity of high quality graphene sheets as an anode material for lithium-ion batteries, *Electrochimica Acta*, Vol. 55, No. 12, pp. 3909-3914, 2010.
- [4] R. C. Pawar, D.-H. Choi, C. S. Lee, Reduced graphene oxide composites with MWCNTs and single crystalline hematite nanorhombhedra for applications in water purification, *International Journal of Hydrogen Energy*, Vol. 40, No. 1, pp. 767-778, 2015.
- [5] X. Sun, P. Cheng, H. Wang, H. Xu, L. Dang, Z. Liu, Z. Lei, Activation of graphene aerogel with phosphoric acid for enhanced electrocapacitive performance, *Carbon*, Vol. 92, No. 1, pp. 1-10, 2015.
- [6] S. Govindjee, J. L. Sackman, On the use of continuum mechanics to estimate the properties of nanotubes, *Solid State Communications*, Vol. 110, No. 1, pp. 227-230, 1999.
- [7] A. C. Eringen, *Nonlocal Continuum Field Theories*, pp. 71-175: Springer-Verlag NewYork, Inc., 2002.