مجله مهندسی مکانیک مدرس، مرداد 1396، دوره 17، شماره 5، ص‌ص 31-40

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

مقایسه روش المان محدود و روش جداسازی متغیرها در بررسی رفتار فرکانسی تیر پیزوالکتریکی بایمورف

سعید ایرانی[1*]، مجتبی فرخ[2]، میثم پاشنا[3]، سینا حیدری صومعه[3]

1- دانشیار، مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

2- استادیار، مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

3- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

* تهران، صندوق پستی 16569-83911، irani@kntu.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 28 دی 1395

پذیرش: 03 فروردین 1396

ارائه در سایت: 09 اردیبهشت 1396

کلید واژگان:

پیزوالکتریک

المان محدود

دریافت انرژی

تیر بایمورف

چکیده

در سال‌های اخیر برای محاسبه انرژی خروجی از پیزوالکتریک‌ها از انواع روش‌های تحلیلی استفاده شده است، ولی استفاده از روش المان محدود با استفاده از نرم‌افزارهای تحلیلی در انواع اتصالات مداری صفحات پیزوالکتریکی اتفاقی نو در این حوزه است، به همین علت در این مقاله سعی شده است که برای اولین بار میان شکلی از تحلیل عددی به نام روش تحلیلی جداسازی متغیرها با تحلیل روش المان محدود به کمک نرم‌افزار آباکوس مقایسه انجام شود تا مزیت‌های این دو روش نسبت به هم، در انواع حالت‌های اتصال صفحات پیزوالکتریکی مشخص گردد. مدل موردنظر، یک تیر بایمورف با دولایه پیزوالکتریک و یک لایه‌ی مرکزی الاستیک است. این تیر بایمورف با تحریک پایه در فرکانس‌های مختلف شروع به ارتعاش می‌کند. در ابتدا از روش تحلیلی جداسازی متغیرها در حالت پایا برای بررسی رفتار فرکانسی تیر بایمورف استفاده شده است. در این روش ابتدا معادلات حرکت در حالت مداری موازی و سری به‌صورت پارامترهای مجزا به دست می‌آیند. سپس به کمک اصل جداسازی متغیرها، معادلات حل شده‌اند و دو معادله‌ی کوپل شده‌ی مکانیکی و الکتریکی به دست می‌آیند. درنهایت، ولتاژ، جریان و توان الکتریکی خروجی برحسب فرکانس به‌دست آمده‌اند. در ادامه برای بررسی به روش المان محدود، تیر بایمورف به کمک نرم‌افزار آباکوس مدل می‌شود. بعد از محاسبه ولتاژ خروجی، جریان و توان الکتریکی خروجی نیز به‌دست می‌آیند و نتایج دو روش المان محدود و جداسازی متغیرها در حالت پایا باهم مقایسه و صحت‌سنجی شده‌اند.

A comparison between finite element and separation of variables method in investigating frequency behavior of Bimorph piezoelectric beam

Saied Irani*, Mojtaba Farrokh, Meisam Pashna, Sina Heydari Someeh

Faculty of Aerospace Engineering, Khaje Nasir Toosi University, Tehran, Iran
* P.O.B. 16569-83911, Tehran, Iran, irani@kntu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 17 January 2017
Accepted 23 March 2017
Available Online 29 April 2017

Keywords:
Piezoelectric
finite element
energy harvesting
Bimorph beam

ABSTRACT

In recent years, a variety of analytical methods have been used to calculate the output piezoelectric energy, but the use of finite element method using analysis software in a variety circuit connection of piezoelectric layers is something new in this field. So for the first time in this article it is tried particular form of numerical analysis method is called separation of variables compared with the finite element method, to take advantage of these methods in a variety connection of piezoelectric layers is to be determined. The model is a Bimorph beam with two piezoelectric layers and a central elastic layer. This Bimorph beam starts vibrating at various frequencies as a result of base excitation. First, frequency behavior of the Bimorph beam is simulated using the separation of variables method. In this method, the equations of motion in parallel and series connection of piezoelectric layers are obtained as separate parameters. The coupled mechanical and electrical equations are derived using the solution of equations obtained from the separation of variables method. Finally, the output voltage, current and power are obtained in terms of frequency.
Then, the Bimorph beam is modeled based on finite element method using ABAQUS software. After the illustrating output voltage, current and power diagrams are illustrated for a certain range of frequencies and the results of the finite element method and the steady state method are compared to validate the model.

1- مقدمه

برای دریافت انرژی با استفاده از حرکت‌ها و نوسان‌های محیطی و استفاده از آن‌ها راه‌های گوناگونی به‌منظور تولید انرژی اجزاء الکترونیکی و یا حس‌گرها وجود دارد. ویلیامز و یاتز [1] سه راه اصلی تبدیل انرژی از ارتعاشات به الکتریسیته را پیشنهاد کردند که عبارت‌اند از الکترومگنت‌ها [3،2] و الکترواستاتیک [4] و پیزوالکتریک [7-5].

Please cite this article using:

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

S. Irani, M. Farrokh, M. Pashna, S. Heydari Someeh, A comparison between finite element and separation of variables method in investigating frequency behavior of Bimorph piezoelectric beam, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 5, pp. 31-40, 2017 (in Persian)

در دهه‌های گذشته فرایند تبدیل انرژی توسط پژوهشگران متعددی بررسی شده است [8]. تحقیقات در مورد مدل‌های مکانیکی برای دریافت انرژی نشان می‌دهد عملکرد حقیقی پیزوالکتریک‌ها در شارژ حقیقی باتری در تبدیل جریانات الکتریکی متناوب به مستقیم با پیچیدگی‌هایی همراه است [13-9]. در حوزه‌ی روش‌های حل عددی اخیراً اجستاریا و همکاران [14] یک تیر بایمورف را مدل کرده‌اند و تلاش نموده‌اند معادلات تحریک استاتیکی (با شعاع ثابت و یک نیروی متمرکز) را با معادلات تیر اویلر برنولی دینامیکی (با شعاع انحنای متفاوت) در حالت تحریک پایه بدون نیروی متمرکز ترکیب کنند. بنابراین این روش مدل‌سازی بسیار متفاوت به نظر می‌رسد.

در این مقاله از روش جداسازی متغیرها در حالت پایا به‌عنوان روش تحلیلی برای بررسی تیر بایمورف استفاده شده است که این روش با دستیابی به معادلات کوپله مکانیکی و الکتریکی ما را قادر می‌سازد تا مدل موردنظر را در حالت‌های مختلف اتصالات صفحات پیزوالکتریک بررسی کنیم.

محققان علاوه بر استفاده از روش حل عددی از انواع روش‌های المان محدود برای بررسی خواص پیزوالکتریک‌ها استفاده می‌کنند. استفاده از روش‌های المان محدود و کاربرد نرم‌افزارهای تحلیلی روشی نوپا برای بررسی انرژی دریافت شده به‌وسیله‌ی انواع سیستم‌های تبدیل انرژی است که یکی از روش‌های مورد بررسی در این مقاله روش المان محدود است. از جمله تحقیقاتی که اخیراً با روش المان محدود انجام‌شده کار بر روی خواص ترموالکترومکانیکی، کنترل ارتعاشی و دریافت انرژی از پیزوالکتریک‌ها است. در حوزه‌ی خواص ترموالکترومکانیکی می‌توان به مقاله‌ی فولینک شانگ و مینهارد کونا [15] اشاره کرد که در این پژوهش به کمک روش اجزا محدود و با استفاده از نرم‌افزار آباکوس رفتار ترموالکترومکانیک مواد پیزوالکتریکی بررسی شده است. به‌صورتی که پاسخ‌های این مواد با توجه به بار دمایی وارد بر ماده پیزوالکتریک بررسی‌شده‌اند.

در حوزه‌ی کنترل ارتعاشی نیز می‌توان از مقاله‌ی برایان بیلارجیون و همکاران [16] نام برد که در آن کنترل ارتعاش یک تیر بایمورف را به کمک روش المان محدود و با نرم‌افزار آباکوس بررسی کرده‌اند.

یکی از مباحث مورد توجه در دریافت انرژی پیزوالکتریک‌ها در روش المان محدود، استفاده از پوسته‌های نازک پیزوالکتریک و ساندویچ‌های پیزوالکتریک است که در مورد پوسته‌های نازک رزولت [17] و در مورد ساندویچ‌ها مارکو تریدداد و روگر اوهایون [18] خواص مکانیکی و الکتریکی مواد پیزوالکتریکی را بررسی کرده‌اند و با استفاده از نرم‌افزار تحلیلی نتایج خود را صحت‌سنجی کرده‌اند.

برای ساده‌سازی مدل، یک بار مقاومتی را برای مدار الکتریکی در نظر می‌گیرند تا بتوانند ولتاژ خروجی را پیش‌بینی کنند. این در حالی است که اکثر مدل‌ها برای دریافت‌کننده انرژی یک درجه آزادی در نظر گرفته می‌شوند [20,19].

به‌عنوان روش مناسب می‌توان استفاده از المان‌های متقارن برای بررسی مواد پیزوالکتریک را به‌عنوان یکی از فن‌های مناسب در حوزه تحلیل المان محدود نام برد، در این راستا ویلبرگ و همکاران [21] انواع ساختارهای میکروپیزوالکتریکی را به کمک روش المان محدود متقارن بررسی کرده‌اند. و به کمک این روش و صحت‌سنجی با روش‌های عددی مشخص شده است که روش المان متقارن روش مناسبی برای بررسی خواص پیزوالکتریکی هست.

در این مقاله سعی شده با کمک روش تحلیلی جداسازی متغیرها و روش المان محدود با به‌کارگیری نرم‌افزار تحلیلی آباکوس مدل تیر بایمورف پیزوالکتریکی مورد بررسی قرار گیرد و با مقایسه‌ی نتایج روش المان محدود با روش حل جداسازی متغیرها و صحت‌سنجی نتایج می‌توان از روش المان محدود برای تحلیل مدل‌های دارای پیچیدگی که روش‌های تحلیلی قادر به بررسی آن‌ها نیستند، استفاده کرد. بنابراین در کنار بررسی رفتار فرکانسی تیر پیزوالکتریکی بایمورف یکی از اهداف دیگر این مقاله دست‌یابی به روشی کلی برای بررسی سیستم‌های پیچیده‌تر است که روش‌های تحلیلی قادر به بررسی آن نیستند.

2- مدل سازی تیر بایمورف براساس روش جداسازی متغیرها در حالت پایا

در این پخش می‌خواهیم پاسخ غیرگذرای سیستم را به کمک روش جداسازی متغیرها در حالت پایا بررسی کنیم. مینتم و همکاران [22] تیر دارای یک تکه پیزوالکتریک را بدون در نظر گرفتن حالت اتصال صفحات پیزوالکتریک و ارتورک و انمن [23] تیر دارای یک‌لایه پیزوالکتریک فقط در حالت سری را بررسی کرده‌اند، اما در این بخش تیر با چندلایه‌ی پیزوالکتریک رو مورد بررسی قرار دهیم که در آن علاوه بر حالت سری در حالت اتصال موازی صفحات پیزوالکتریک نیز بررسی شده است.

مدل مورد بررسی ما، یک تیر بایمورف با دو لایه‌ی پیزوالکتریک و یک‌لایه‌ی میانی است که با تحریک پایه شروع به ارتعاش می‌کند و این ارتعاش در لایه‌های پیزوالکتریک سبب تولید انرژی الکتریکی می‌شود. برداشت انرژی الکتریکی در این سیستم به کمک مدار الکتریکی انجام می‌شود که در آن لایه‌های پیزوالکتریک به‌صورت اتصال موازی و سری مانند "شکل 1" به هم متصل شده‌اند و یک مقاومت به‌عنوان مقاومت کل مدار در نظر گرفته می‌شود.

در ادامه به روند بررسی رفتار فرکانسی تیر چندلایه پیزوالکتریک می‌پردازیم.

می‌دانیم معادله کلی پیوستگی تیر غیرمیرا با تحریک پایه به‌صورت رابطه (1) است.

$$YI\frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4}+m\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}=0 \tag{1}$$

در رابطه‌ی (1)، $w(x,t)$ خیز تیر در موقعیت x و زمان t است و YI سختی خمشی تیر است.

با تعمیم معادله‌ی پیوستگی برای تیر پیزوالکتریک بایمورف با در نظر گرفتن تأثیرات دمپینگ هوا و بدون در نظر گرفتن تأثیرات ولتاژ به‌صورت رابطه‌ی (2) است.

$$\frac{\partial^2 M(x,t)}{\partial x^2}+c_{\mathrm{s}}I\frac{\partial^5 w_{\mathrm{rel}}(x,t)}{\partial x^4\partial t}+c_{\mathrm{a}}\frac{\partial w_{\mathrm{rel}}(x,t)}{\partial t}=-m\frac{\partial^2 w_{\mathrm{b}}(x,t)}{\partial t^2} \tag{2}$$

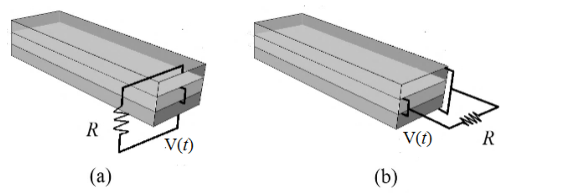


Fig.1 Bimorph piezoelectric energy harvester configurations with (a) series connection of piezo ceramic layers, (b) parallel connection of piezoceramic layers

شکل 1 شکل تیر بایمورف پیزوالکتریک دریافت‌کننده‌ی انرژی در حالت اتصال سری (a) و موازی (b) لایه‌های پیزوالکتریک

در معادله‌ی (2) مقدار جابه‌جایی پایه‌ی تیر را با $\mathrm{w_b}(x,t)$ نشان می‌دهیم که به‌صورت رابطه‌ی (3) محاسبه می‌شود.

$$w_{\mathrm{rel}}(x,t)=g(t)+xh(t) \tag{3}$$

پارامتر $g(t)$ جابه‌جایی در جهت عمود بر محور تیر را نشان می‌دهد و $h(t)$ دوران در جهت جابه‌جایی را نشان می‌دهد.

در رابطه‌ی (2)، $w_{\mathrm{rel}}(x,t)$ خیز تیر در موقعیت x و زمان t است. $M(x,t)$ ممان خمشی داخلی تیر به‌جز اثرات نسبت دمپینگ کرنشی است. $c_{\mathrm{s}}I$ ترم دمپینگ معادل سطح مقطع کامپوزیت است که به سبب کرنش ایجاد می‌شود. c_a ضریب دمپ‌ها است. m جرم در واحد طول است.

ممان اول سطح مقطع که به سبب کرنش محوری ایجاد می‌شود که درنهایت باعث خمش می‌شود به‌صورت رابطه‌ی (4) است.

$$M(x,t)=-b\Big(\int_{-h_{\mathrm{p}}-\frac{h_{\mathrm{s}}}{2}}^{-\frac{h_{\mathrm{s}}}{2}}T^{\mathrm{p}}ydy+\int_{-\frac{h_{s}}{2}}^{\frac{h_{\mathrm{s}}}{2}}T^{\mathrm{s}}ydy$$
$$+\int_{\frac{h_{\mathrm{s}}}{2}}^{h_{\mathrm{p}}+\frac{h_{\mathrm{s}}}{2}}T^{\mathrm{p}}ydy\Big) \tag{4}$$

در رابطه‌ی (4)، b عرض تیر، h_p ضخامت هر لایه پیزوالکتریک، p و sپسوندهای لایه پیزوالکتریک و لایه‌ی مرکزی هستند. T^pو T^s به ترتیب تنش در لایه‌های پیزوالکتریک و لایه‌ی مرکزی هستند که به‌صورت رابطه‌ی (5) و (6) معرفی می‌شوند.

$$T^{\mathrm{s}}=Y_{\mathrm{s}}S^{\mathrm{s}} \tag{5}$$

در این رابطه Y_s مدول یانگ و S^s کرنش محوری مرکز تیر است.

$$T^{\mathrm{p}}=c_{11}{}^{\mathrm{E}}S^{p}-e_{31}E_3 \tag{6}$$

$c_{11}=1/\mathrm{s}_{11}^{E}$ برابر مدول الاستیسیته پیزوالکتریک و $e_{31}=d_3/s_{11}^{E}$ ثابت پیزوالکتریکی هست. و S^p کرنش محوری پیزوالکتریک است.

کرنش محوری تیر برابر انحنا تیر در موقعیت x است که به‌صورت رابطه‌ی (7) هست.

$$S(x,y,t)=-y\frac{\partial^2 w_{\mathrm{rel}}(x,t)}{\delta x^2} \tag{7}$$

نکته‌ای که بسیار حائز اهمیت است این است که ولتاژ به‌صورت رابطه‌ی خمشی در معادله‌ی پیوستگی ظاهر می‌شود یعنی رابطه‌ی خمش معادله‌ی پیوستگی به‌صورت رابطه‌ی (8) است.

$$M^{\mathrm{s}}(x,t)=YI\frac{\partial^2 w_{\mathrm{rel}}(x,t)}{\partial x^2}+V_{\mathrm{s}}v_{\mathrm{s}}(t)\Big[\frac{d\delta(x)}{dx}$$
$$-\frac{d\delta(x-L)}{dx}\Big] \tag{8}$$

که ثابت الکتریکی در حالت اتصال سری و موازی صفحات پیزوالکتریک به ترتیب به‌صورت روابط (9- الف) و (9- ب) هستند.

$$\vartheta_s=\frac{e_{31}b}{2h_p}\left[\frac{h_{\mathrm{s}}{}^2}{4}-\left(h_{\mathrm{p}}+\frac{h_{\mathrm{s}}}{2}\right)^2\right] \tag{9- الف}$$

$$\vartheta_{\mathrm{p}}=\frac{e_{31}b}{h_{\mathrm{p}}}\left[\frac{h_s{}^2}{4}-\left(h_{\mathrm{p}}+\frac{h_{\mathrm{s}}}{2}\right)^2\right] \tag{9- ب}$$

دو پارامتر جرم و ثابت سختی خمشی تیر به ترتیب به‌صورت رابطه‌ی (10) و (11) می‌باشند.

$$m=b(\rho_s h_s+2\rho_p h_p)) \tag{10}$$

$$YI=\frac{2b}{3}\Big[Y_s\frac{h_s{}^3}{8}+c^{E}{}_{11}\left(\left(h_p-\frac{h_s}{2}\right)^3-\frac{h^3}{8}\right)\Big] \tag{11}$$

2-1- حل معادلات با استفاده از روش جداسازی متغیرها

با توجه به روش جداسازی متغیرها تابع خیز تابع را می‌توانیم به‌صورت تابع مقدار ویژه همگرا بنویسیم. خیز تیر بیمورف برای دو حالت سری و موازی به ترتیب به‌صورت روابط (12) و (13) به دست می‌آیند.

$$w_{\mathrm{rel}}^{\mathrm{s}}(x,t)=\sum_{r=1}^{\infty}\varphi_{\mathrm{r}}(x)\eta_{\mathrm{r}}^{\mathrm{s}}(t) \tag{12}$$

$$w_{\mathrm{rel}}^{\mathrm{p}}(x,t)=\sum_{r=1}^{\infty}\varphi_{\mathrm{r}}(x)\eta_{\mathrm{r}}^{\mathrm{p}}(t) \tag{13}$$

بعد از جایگذاری رابطه‌ی خیز در معادله‌ی پیوستگی (2)، بدون در نظر گرفتن نوع اتصال صفحات پیزوالکتریک و صرف نظر کردن از چرخش پایه ی تیر، معادلات حرکت در مختصات مدال به‌صورت رابطه‌ی (14) به دست می‌آید.

$$f_r(t)=\frac{d^2\eta_r^s(t)}{dt^2}+2\xi_{\mathrm{r}}\omega_{\mathrm{r}}\frac{d\eta_{\mathrm{r}}^{\mathrm{s}}(t)}{dt}+\omega_{\mathrm{r}}{}^2\eta_{\mathrm{r}}{}^{\mathrm{s}}(t)$$
$$+X_{\mathrm{r}}^{\mathrm{s}}v_{\mathrm{s}}(t) \tag{14}$$

در این معادله ξ_r ضریب نسبت دمپینگ است که ترکیب تأثیرات دمپینگ سازه‌ای c_sI و دمپینگ هوا c_a است.

ترم‌های کوپلینگ الکترومکانیکی به‌صورت روابط (15- الف) و (15- ب) هستند.

$$X_{\mathrm{r}}^{\mathrm{s}}=\vartheta_{\mathrm{s}}\frac{d\emptyset_{\mathrm{r}}(x)}{dx}\Big\lfloor x=L \tag{15- الف}$$

$$X_{\mathrm{r}}^{\mathrm{p}}=\vartheta_{\mathrm{p}}\frac{d\emptyset_{\mathrm{r}}(x)}{dx}\Big\lfloor x=L \tag{15- ب}$$

برای مقدار ϑ_s و ϑ_p از رابطه‌ی (9- الف) و (9- ب) استفاده می‌کنیم. $\varphi_r(x)$ مقدار ویژه بی‌بعد شده‌ی جرم برای مسئله‌ی متناظر غیردمپ شده برای ارتعاش آزاد سیستم هست که به‌صورت رابطه‌ی (16) به دست می‌آید.

$$\varphi_r(x)=C_r\Big[\cos\frac{\lambda_r}{L}x-\cosh\frac{\lambda_r}{L}x+$$
$$\zeta_r\left(\sin\frac{\lambda_r}{L}x-\sinh\frac{\lambda_r}{L}x\right)\Big] \tag{16}$$

مقدار ζ_r از رابطه‌ی (17) به دست می‌آید.

$$\zeta_{\mathrm{r}}=\frac{\sin\lambda_{\mathrm{r}}-\sinh\lambda_{\mathrm{r}}}{\cos\lambda_{\mathrm{r}}-\cos\lambda_{\mathrm{r}}} \tag{17}$$

و مقدار C_r، ثابت دامنه‌ی مودال است که با نرمالایز کردن مقدار ویژه توابع متعامد در رابطه‌ی (18) و (19) به‌دست می‌آیند.

$$\int_0^L\varphi_{\mathrm{s}}(x)m\varphi_{\mathrm{r}}(x)dx=\delta_{\mathrm{rs}} \tag{18}$$

$$\int_0^L\varphi_s YI\frac{d^4\varphi_r(x)}{dx^4}dx-\left[\varphi_s(x)YI\frac{d^3\varphi_r(x)}{dx^3}\right]+$$
$$+\Big[\frac{d\varphi_{\mathrm{r}}(x)}{dx}YI\frac{d^2\varphi_{\mathrm{r}}(x)}{dx^2}\Big]=\omega_{\mathrm{r}}{}^2\delta_{\mathrm{rs}} \tag{19}$$

در این رابطه δ_{rs} دلتای کرانکر است.

مقدار فرکانس‌های طبیعی تیر برابر رابطه (20) است.

$$\omega_r=\lambda^2{}_{\mathrm{r}}\sqrt{\frac{YI}{mL^4}} \tag{20}$$

به‌صورتی که مقدار ویژه سیستم λ با حل معادله‌ی (21) به دست می‌آید.

$$1+\cos\lambda\cosh\lambda-\frac{\lambda^3 h}{mL^3}(\cosh\lambda\sin\lambda+\sinh\lambda\cos\lambda)=0 \tag{21}$$

درحرکت هماهنگ در فرکانس ω به ترتیب مقادیر پاسخ مدال تیر در حالت پایا و ولتاژ با بار مقاومتی به صورت فرکانسی هماهنگ $\eta_r^s=H_r^s e^{jwt}$ و $v_s=V_s e^{jwt}$ فرض می‌شوند.

با در نظر گرفتن این فرض روابط قبل به معادله (22) تبدیل می‌شوند.

$$(\omega_\mathrm{r}^2-\omega^2+j2\xi_\mathrm{r}\omega_\mathrm{r}\omega)H_\mathrm{r}^\mathrm{s}+X_\mathrm{r}^\mathrm{s}V_\mathrm{s}=F_\mathrm{r} \tag{22}$$

برای چرخش کوچک $g(t)$ و جابه‌جایی‌های کوچک $h(t)$ و همچنین شکل نیروی مودی f_r می‌توانیم شکل فرکانسی آن را به کار ببریم که به‌صورت روابط (23-25) هستند.

$$g(t)=\theta_0 e^{jwt} \tag{23}$$

$$h(t)=W_0 e^{jwt} \tag{24}$$

$$f_r(t)=F_0 e^{jwt} \tag{25}$$

در این رابطه مقدار دامنه نیروی مودی برابر رابطه‌ی(26) است.

$$F_r=-\sigma_\mathrm{r}w^2W_0-\tau_\mathrm{r}w^2\theta_0 \tag{26}$$

که مقادیر σ_r و τ_r به‌صورت رابطه‌ی (27) و (28) به دست می‌آیند.

$$\sigma_r=-m\int_0^l \phi_r(x)dx \tag{27}$$

$$\tau_r=-m\int_0^l x\phi_r(x)dx \tag{28}$$

2-2- معادلات کوپله مدار الکتریکی

همان‌طور که در قبل اشاره کردیم می‌توان لایه‌های پیزوالکتریک را به‌صورت مدار موازی و سری به هم متصل کرد.

برطبق قوانین کیرشهف معادله‌ی الکتریکی به‌صورت رابطه‌ی (29) است.

$$\frac{C_\mathrm{p}}{2}\frac{dv_\mathrm{s}(t)}{dt}+\frac{v_\mathrm{s}(t)}{R_1}=i_\mathrm{p}(t) \tag{29}$$

به صورتی که ترم‌های ظرفیت داخلی خازن و منبع جریان، به ترتیب به‌صورت رابطه‌ی (30) و (31) هستند.

$$C_p=\frac{\varepsilon_{33}bL}{h_p} \tag{30}$$

$$i_p(t)=\sum_{r=1}^{\infty}k_\mathrm{r}\frac{d\eta_\mathrm{r}(t)}{dt} \tag{31}$$

$$k_r=-e_{31}h_\mathrm{pc}b\int_0^L\frac{d^2\varphi_r(x)}{dx^2}dx \tag{32}$$

در حرکت هماهنگ در فرکانس ω پاسخ مدال تیر در حالت پایا برابر $\eta_r=H_r^s e^{jwt}$ و ولتاژ با بار مقاومتی برابر $v_s=V_s e^{jwt}$ و به‌صورت هماهنگ فرض می‌شوند که با جایگذاری در معادله‌ی (29) برابر با رابطه‌ی (33) می‌شود.

$$\left(\frac{1}{R_1}+j\omega\frac{C_p}{2}\right)V_s-jw\sum_{r=1}^{\infty}k_rH_r^s=0 \tag{33}$$

درنهایت با در نظر گرفتن دو معادله‌ی (22) و (33) معادلات کوپلینگ به‌صورت رابطه‌ی (34) و (35) می‌شوند.

$$(\omega_\mathrm{r}^2-\omega^2+j2\xi_\mathrm{r}\omega_\mathrm{r}\omega)H_\mathrm{r}^\mathrm{s}+X_\mathrm{r}^\mathrm{s}V_\mathrm{s}=F_\mathrm{r} \tag{34}$$

$$\left(\frac{1}{R_1}+j\omega\frac{C_\mathrm{p}}{2}\right)V_\mathrm{s}-jw\sum_{r=1}^{\infty}k_rH_\mathrm{r}^\mathrm{s}=0 \tag{35}$$

3-2- شکل‌های پاسخ فرکانسی در حالت سری و موازی

مقدار H_r^s از رابطه‌ی (34) به دست می‌آید و با جای گذاری در رابطه‌ی (35) تابع پاسخ فرکانسی ولتاژ خروجی به‌صورت رابطه‌ی (36) به‌دست می‌آید.

$$v_p(t)=\frac{\sum_{r=1}^{\infty}\frac{j\omega\theta_\mathrm{r}\sigma_\mathrm{r}}{\omega_\mathrm{r}^2-\omega^2+j2\xi_\mathrm{r}\omega_\mathrm{r}\omega}}{\frac{1}{R_t}+j\omega C_p+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{j\omega{\theta_\mathrm{r}}^2}{\omega_\mathrm{r}^2-\omega^2+j2\xi_\mathrm{r}\omega_\mathrm{r}\omega}}e^{jwt} \tag{36}$$

از رابطه‌ی $i(t)=v(t)/R$ برای جریان به‌صورت رابطه‌ی (37) به دست می‌آید.

$$i(t)=\frac{1}{R_t}\times\frac{\sum_{r=1}^{\infty}\frac{j\omega\theta_r\sigma_r}{\omega_\mathrm{r}^2-\omega^2+j2\xi_\mathrm{r}\omega_\mathrm{r}\omega}}{\frac{1}{R_\mathrm{t}}+j\omega C_\mathrm{p}+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{j\omega{\theta_r}^2}{\omega_\mathrm{r}^2-\omega^2+j2\xi_\mathrm{r}\omega_\mathrm{r}\omega}}e^{jwt} \tag{37}$$

از رابطه‌ی $p=(v(t))^2/R$، توان خروجی به‌صورت رابطه‌ی (38) به دست می‌آید.

$$p(t)=\frac{\left(\frac{\sum_{r=1}^{\infty}\frac{j\omega\theta_r\sigma_r}{\omega_\mathrm{r}^2-\omega^2+j2\xi_\mathrm{r}\omega_\mathrm{r}\omega}}{R_t+j\omega C_\mathrm{p}+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{j\omega r^2}{\omega_r^2-\omega^2+j2\xi_\mathrm{r}\omega_\mathrm{r}\omega}}e^{jwt}\right)^2}{R_t} \tag{38}$$

توجه شود R_t به‌عنوان مقاومت معادل مدار در حالت موازی دو برابر حالت سری است و مقادیر کوپلینگ مودال الکترومکانیکی و ظرفیت معادل تیر با توجه به روابط در حالت اتصال سری و موازی صفحات پیزوالکتریک به‌صورت جدول 1 به‌دست می‌آیند.

مشخصات کلی تیر بایمورف موردنظر به‌صورت جدول 2 است.

تابع پاسخ فرکانسی ولتاژ خروجی در حالت تحریک پایه از فرکانس 0 تا 5000 در حالت اتصال سری و موازی صفحات پیزوالکتریک با توجه به رابطه‌ی (36) به‌صورت "شکل 2" به‌دست می‌آیند همان‌طور که مشخص است در این بازه‌ی فرکانسی سه ماکزیمم وجود دارند که برابر سه مود اول

جدول 1 کوپلینگ مودال الکترومکانیکی و ظرفیت معادل تیر دریافت‌کننده انرژی برای حالت اتصال سری و موازی صفحات پیزوالکتریک

Table 2 Modal electromechanical coupling and equivalent capacitance of a Bimorph energy harvester for the series and the parallel connections of the piezocermaic layers

	اتصال موازی	اتصال سری
θ_r	$-2e_{31}bh_\mathrm{pc}\frac{d\emptyset_\mathrm{r}(x)}{dx}\rfloor x=L$	$-e_{31}bh_\mathrm{pc}\frac{d\emptyset_\mathrm{r}(x)}{dx}\rfloor x=L$
C_p	$\frac{2\varepsilon_{33}^s bL}{h_\mathrm{p}}$	$\frac{\varepsilon_{33}^s bL}{2h_\mathrm{p}}$

جدول2 مشخصات هندسی و مشخصات مواد تیر بیمورف یک سر گیردار

Table 1 Geometric properties and material properties of the Bimorph cantilever beam

مشخصات هندسی و مشخصات مکانیکی لایه‌های تیر بایمورف	لایه‌های پیزوالکتریک	لایه‌ی میانی
طول تیر L (mm)	30	30
عرض تیر b (mm)	5	5
ضخامت تیر h_s, h_p (mm)	0.15	0.15
جنس تیر	PZT-5A	آلومینیوم
مدول الاستیکی (GPa)	61	70
چگالی $(\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{l}^3})$	7750	2700
ثابت پیزوالکتریکی e_{31} $(\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2})$	-10.4	-
ثابت گذردهی ε_{31} $(\frac{\mathrm{nF}}{\mathrm{m}})$	13.3	-

تیر بایمورف هستند که به ترتیب به‌صورت، مود اول تیر در فرکانس 185 Hz مود دوم در 1160 و مود سوم در 3247 به دست می‌آیند.

مقدار ولتاژ در حالت سری برابر 0.007 و مقدار ولتاژ در حالت موازی برابر 0.014 است و همین‌طور که در "شکل 2" مشخص است، این مقادیر در مودهای دوم و سوم کاهش پیدا می‌کنند.

تابع پاسخ فرکانسی جریان خروجی در حالت تحریک پایه از فرکانس 0 تا 5000 در حالت اتصال سری و موازی صفحات پیزوالکتریک با توجه به رابطه‌ی (37) به‌صورت "شکل 3" به‌دست می‌آیند.

تابع پاسخ فرکانسی توان خروجی در حالت تحریک پایه از فرکانس 0 تا 5000 در حالت اتصال سری و موازی صفحات پیزوالکتریک با توجه به رابطه‌ی (37) به‌صورت "شکل 4" به دست می‌آیند.

3- بررسی رفتار فرکانسی تیر بایمورف به روش المان محدود

در بررسی‌هایی که اخیراً بر روی تیر پیزوالکتریکی به روش المان محدود انجام شده است می‌توان به مقاله ملینگ ژو و همکاران [24] اشاره کرد که

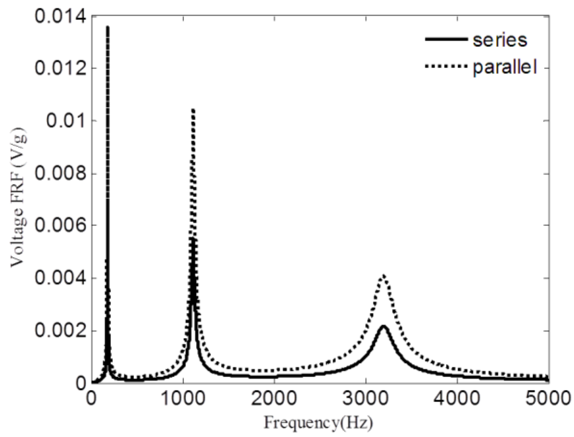


Fig. 2 Voltage FRFs of the Bimorph for series and parallel connections of the piezoceramic layers using separation of variables method at steady state

شکل 2 نمودار تابع پاسخ فرکانسی ولتاژ در حالت اتصال سری و موازی صفحات پیزوالکتریک به روش جداسازی متغیرها در حالت پایا

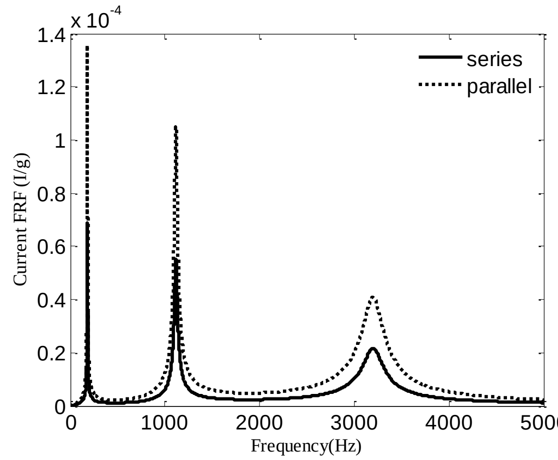


Fig. 3 Current FRFs of the Bimorph for series and parallel connections of the piezoceramic layers for separation of variables method at steady state

شکل 3 نمودار تابع پاسخ فرکانسی جریان در حالت اتصال سری و موازی صفحات پیزوالکتریک به روش جداسازی متغیرها در حالت پایا

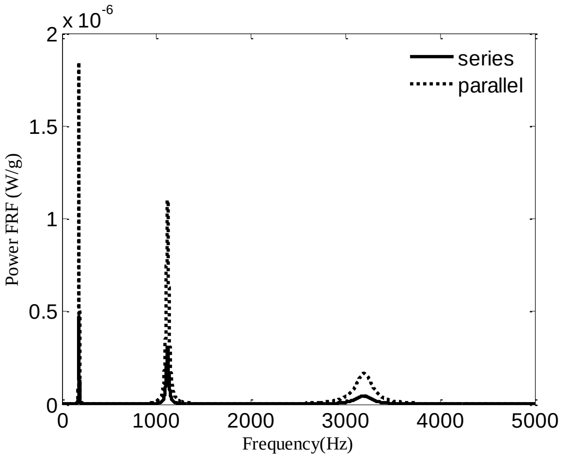


Fig. 4 Power FRFs of the Bimorph for series and parallel connections of the piezoceramic layers for separation of variables method at steady state

شکل 4 نمودار تابع پاسخ فرکانسی توان خروجی در حالت اتصال سری و موازی صفحات پیزوالکتریک به روش جداسازی متغیرها در حالت پایا

در آن جریان و توان خروجی یک تیر الاستیکی همراه تکه‌های پیزوالکتریک فقط در یک مود بدون در نظر گرفتن حالت اتصال صفحات پیزوالکتریکی بررسی‌شده‌اند. اما در این بخش سعی شده تا در گامی نو یک تیر چندلایه‌ی پیزوالکتریک در حالت اتصال سری و موازی صفحات پیزوالکتریک در چند مود اول تیر با روش المان محدود و به کمک نرم‌افزار آباکوس بررسی شود.

در این قسمت تیر بایمورف علاوه بر مودهای خمشی، در مودهای پیچشی نیز بررسی شده است. نحوه‌ی اتصال صفحات پیزوالکتریک و مدل‌سازی آن و همچنین نوع قید گزاری میان صفحات در به دست آوردن نتایج صحیح از اهمیت زیادی برخوردار هستند لذا تلاش شده تمام مراحل به‌دقت توضیح داده شوند.

در این قسمت سعی داریم از روش المان محدود برای بررسی رفتار فرکانسی تیر بایمورف استفاده کنیم که برای این امر از نرم‌افزار آباکوس بهره گرفته‌ایم.

3-1- تحلیل نرم‌افزار آباکوس

نرم‌افزار آباکوس یکی از قدرتمندترین نرم‌افزارها در زمینه‌ی تحلیل مسائل مهندسی به شمار می‌رود که اساس تحلیل و حل به روش المان محدود است و توانای معرفی مواد پیزوالکتریک و مش‌بندی و درنهایت بررسی ولتاژ خروجی حاصل از جابه‌جای و یا با بالعکس را دارا هست. ذکر این نکته دارای اهمیت است که خروجی نرم‌افزار آباکوس پتانسیل ولتاژ خروجی را نشان می‌دهد و برای به‌دست آوردن شکل رفتار فرکانسی پیزوالکتریک‌ها باید با توجه به فرکانس پایه و دامنه، تغییرات لازم را بر روی خروجی نرم‌افزار آباکوس انجام دهیم.

فرض مدل‌سازی تیر بایمورف موردنظر این است که جنس مواد سازنده پیزوالکتریک و قسمت الاستیک تیر بایمورف، ایزوتروپیک فرض می‌شوند.

در ادامه مراحل مدل‌سازی تیر بایمورف تا تحلیل آن به تفضیل از مرحله‌ی مدل‌سازی هندسی، نسبت دادن مشخصات مواد، قیدبندی، مش‌بندی و درنهایت تحلیل کلی تیر بایمورف مدل شده به‌طور کامل بیان شده است.

3-2- مدل‌سازی تیر بایمورف

در ابتدا سه قسمت تیر بایمورف جداگانه ساخته می‌شوند و بعد از سرهم کردن آن‌ها شکل کلی تیر بایمورف با توجه به مشخصات هندسی جدول 1 به‌صورت "شکل 5" می‌شود.

توجه شود که هر سه صفحه به کمک قید اتصال گره به هم متصل شده‌اند و ولتاژ صفحات پیزوالکتریکی که به صفحه‌ی میانی آلومینیومی متصل هستند با توجه به نوع مدار اتصال که در "شکل 1" نشان داده شده است، صفر در نظر گرفته می‌شود.

در ادامه با توجه به مشخصات مواد که در جدول 2 آورده شده است می‌بایست مشخصات ماده‌ی سازنده‌ی تیرها را به آن‌ها نسبت دهیم.

با فرض این‌که جنس قسمت پیزوالکتریکی و قسمت میانی تیر بایمورف هردو به‌صورت ایزوتروپیک باشد مشخصات تیر از قبیل چگالی مدول الاستیکی ضریب دی‌الکتریک همانند جدول 2 وارد می‌گردد و با تفاوت اینکه ثابت تنش پیزوالکتریک باید به‌صورت ماتریس وارد گردد.

$$e=\begin{bmatrix}-5.4915 & 0 & 0\\ -5.4915 & 0 & 0\\ 15.7205 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & -12 & -12\\ 0 & -12 & 0\end{bmatrix}\left(\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}\right) \tag{39}$$

بعد از تعیین مشخصات مواد سازنده، در این قسمت می‌بایست جهت قطب‌های پیزوالکتریک برای حالت اتصال سری و موازی قطب‌ها با توجه به "شکل 1" به جسم نسبت داده شود که در حالت موازی قطب‌ها در جهت همدیگر و در حالت سری قطب‌ها خلاف جهت همدیگر می‌باشند که این امر در "شکل 6" مشخص شده است.

سپس مطابق مدار الکتریکی، صفحات بالایی و پایینی به‌عنوان خروجی ولتاژ در نظر گرفته می‌شود و ولتاژ دو صفحه با کمک قید معادله در یک نقطه‌ی مرجع معادل می‌شود.

در ادامه برای تیر بایمورف شرایط مرزی را با توجه به تحلیل حالت پایا تعریف می‌کنیم به صورتی که انتهای تیر در تمام جهات به‌غیراز جهت عمود بر محور که جهت تحریک پایه است، مقید می‌شود.

و بعد از قیدگذاری انتهای تیر، تیر بایمورف موردنظر به کمک مش نوع دوم به‌صورت "شکل 7" مش‌بندی می‌شود.

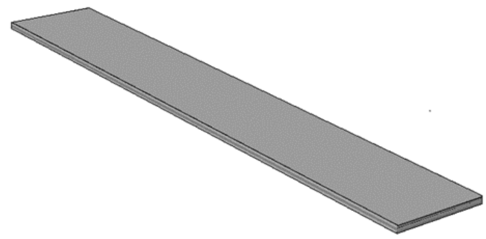
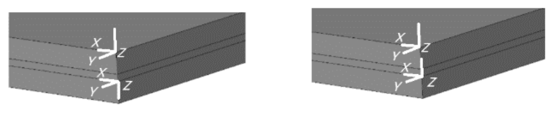


Fig. 5 View of a Bimorph cantilever beam

شکل 5 نمای کلی تیر بایمورف یک سر گیردار



(a)		(b)

Fig. 6 Assigning the direction of piezoelectric poles in series (a) and parallel (b) connection of piezoelectric layers

شکل 6 تعیین جهت قطب‌های پیزوالکتریک در اتصال حالت سری (a) و موازی (b) لایه‌های پیزوالکتریک

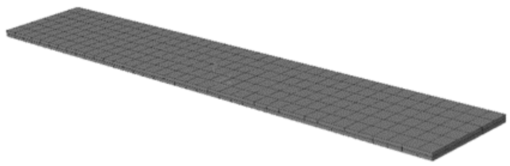


Fig. 7 Meshing Bimorph cantilever beam

شکل 7 مش بندی تیر بایمورف یک سر گیردار

در آخر تیر را به روش جداسازی متغیرها حالت پایا از فرکانس تحریک پایه 0 تا 5000 تحت آنالیز حالت پایدار قرار می‌دهیم.

3-3- نتایج خروجی نرم‌افزار آباکوس

پس از اتمام تحلیل حالت پایدار به‌وسیله نرم‌افزار آباکوس مشاهده می‌کنیم در فرکانس 0 تا 5000 سه مود اول تیر به‌صورت "شکل 8" ظاهر می‌شوند.

در این قسمت مشاهده می‌کنیم به کمک تحلیل فرکانسی قادر خواهیم بود مودهای خمشی تیر را نیز مورد بررسی قرار دهیم. همین‌طور که مشخص است سه مود اول خمشی تیر به‌صورت "شکل 9" است.

مقدار ولتاژ خروجی به‌دست‌آمده در مودهای پیچشی در حالت اتصال سری صفحات پیزوالکتریک با توجه به تحلیل فرکانسی تیر بایمورف به ترتیب برابر 268.89×10^{-10} و 277.81×10^{-10} و 300.258×10^{-10} هستند که این مقادیر به‌وضوح نشان می‌دهد مودهای پیچشی انرژی الکتریکی کمتری نسبت به مودهای خمشی تولید می‌کنند بنابراین تیر بایمورف در حالت مودهای خمشی انرژی الکتریکی بیشتری تولید می‌کند.

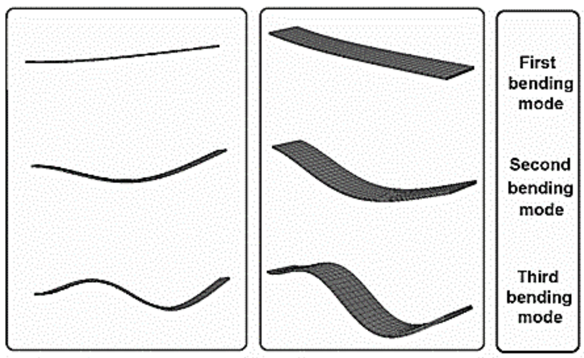


Fig. 8 The first three bending modes of Bimorph beam in base excitation for a frequency range of 0 to 5000

شکل 8 شکل سه مود اول خمشی تیر بایمورف در تحریک از فرکانس 0 تا 5000

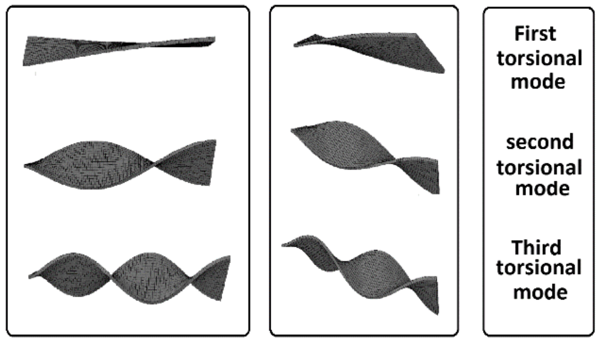


Fig. 9 The first three torsional modes of Bimorph beam

شکل 9 شکل سه مود اول پیچشی تیر بایمورف

در ادامه با در نظر گرفتن مودهای خمشی برای به دست آوردن نمودار شکل مودی ولتاژ خروجی روش تحلیلی جداسازی متغیرها به کمک ما می‌آید به‌طوری‌که می‌بایست مقادیر ولتاژ خروجی را با توجه به نتایج به‌دست آمده در روش تحلیلی جداسازی متغیرها به‌صورت رابطه‌ی زیر به‌دست آورد.

$$V_{\mathrm{FRF}} = \frac{V}{(-\omega^2 \times w_0)} \tag{40}$$

به کمک رابطه‌ی (40) شکل مودی فرکانس‌های خروجی در حالت سری و موازی به‌صورت "شکل 10" به دست می‌آید.

با توجه به رابطه‌ی $I = V/R$ در "شکل 11" شکل مودی جریان خروجی تیر بایمورف برحسب فرکانس در حالت اتصال سری و موازی صفحات پیزوالکتریکی در حالتی که مقاومت داخلی مدار برابر 100 اهم است مشخص شده است. روند کاهشی شکل جریان خروجی در هر مود شبیه رفتار تابع پاسخ فرکانسی ولتاژ خروجی است.

و در انتها با توجه به رابطه‌ی $P = V^2/R$ در "شکل 12" شکل مودی توان خروجی تیر بایمورف برحسب فرکانس در حالت اتصال سری و موازی صفحات پیزوالکتریکی در حالتی که مقاومت داخلی مدار برابر 100 اهم است مشخص شده است.

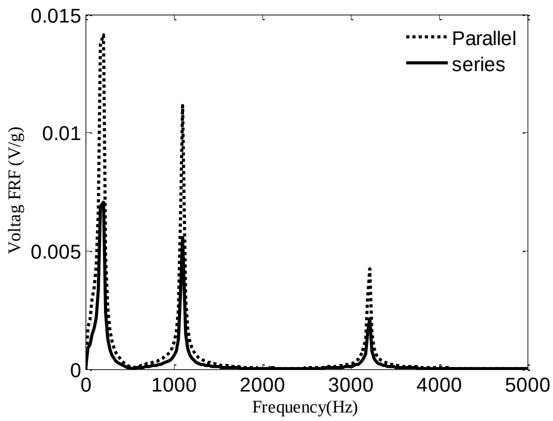


Fig. 10 Voltage FRFs of the Bimorph for series and parallel connections of the piezoceramic layers for finite element method with the help of Abaqus software

شکل 10 نمودار تابع پاسخ فرکانسی ولتاژ خروجی در حالت اتصال سری و موازی لایه‌های پیزوالکتریک به روش المان محدود با کمک نرم‌افزار آباکوس

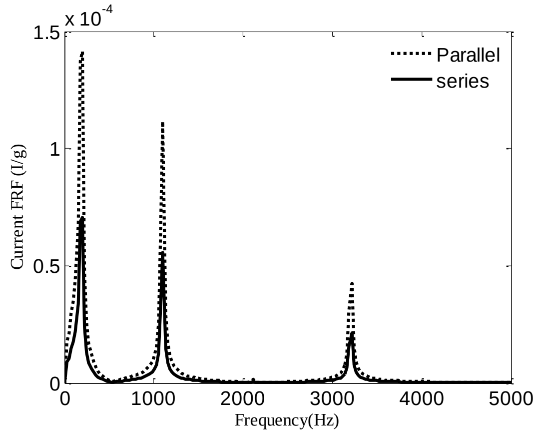


Fig. 11 Current FRFs of the Bimorph for series and parallel connections of the piezoceramic layers using finite element method in Abaqus software

شکل 11 نمودار تابع پاسخ فرکانسی جریان در حالت اتصال سری و موازی لایه‌های پیزوالکتریک به روش المان محدود با کمک نرم‌افزار آباکوس

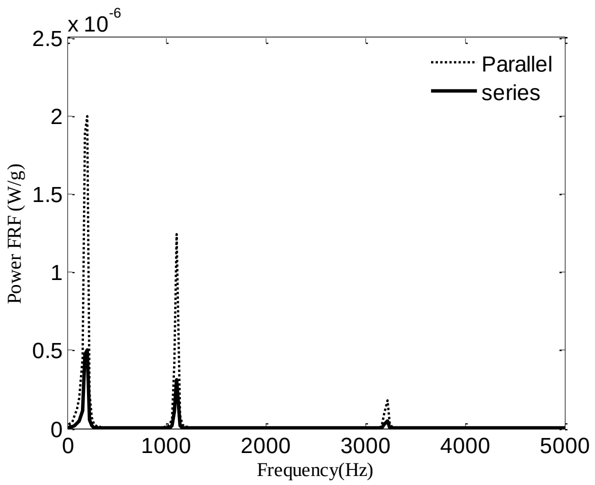


Fig. 12 Power FRFs of the Bimorph for series and parallel connections of the piezoceramic layers for finite element method with the help of Abaqus software

شکل 12 نمودار تابع پاسخ فرکانسی جریان در حالت اتصال سری و موازی لایه‌های پیزوالکتریک به روش المان محدود با کمک نرم‌افزار آباکوس

4- صحت‌سنجی

در ادامه شکل رفتار فرکانسی در هر دو روش جداسازی متغیرها در حالت پایا و روش المان محدود، ولتاژ، جریان و توان الکتریکی خروجی در حالت اتصال سری و موازی باهم مقایسه می‌شوند.

در "شکل 13"، تابع پاسخ فرکانسی ولتاژ خروجی در حالت اتصال سری صفحات پیزوالکتریک را برای تحلیل حالت پایا و المان محدود می‌بینیم.

در ادامه، تابع پاسخ فرکانسی ولتاژ خروجی در حالت اتصال موازی صفحات پیزوالکتریک برای روش جداسازی متغیرها در حالت پایا و المان محدود در "شکل 14" نمایش داده شده است.

در ادامه تابع پاسخ فرکانسی جریان خروجی در حالت اتصال سری لایه‌های پیزوالکتریک را برای روش جداسازی متغیرها در حالت پایا و المان محدود در "شکل 15" می‌بینیم.

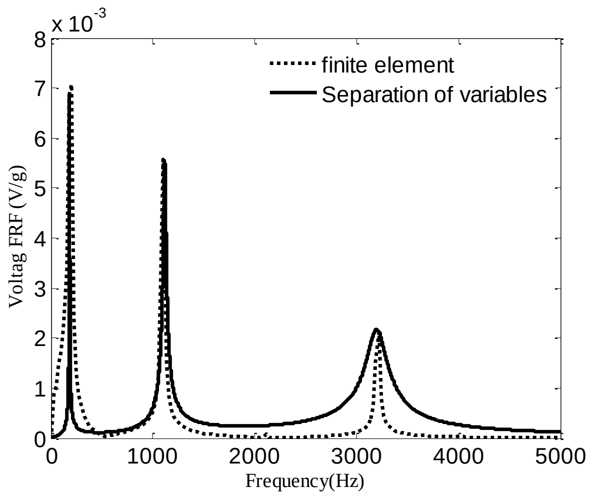


Fig. 13 comparing the output voltage of the Bimorph using finite element method and separation of variables method at steady state for series connection of the piezoceramic layers

شکل 13 مقایسه شکل ولتاژ خروجی تیر بایمورف، میان روش تحلیلی جداسازی متغیرها در حالت پایا و روش اجزاء محدود در حالت اتصال سری صفحات پیزوالکتریک

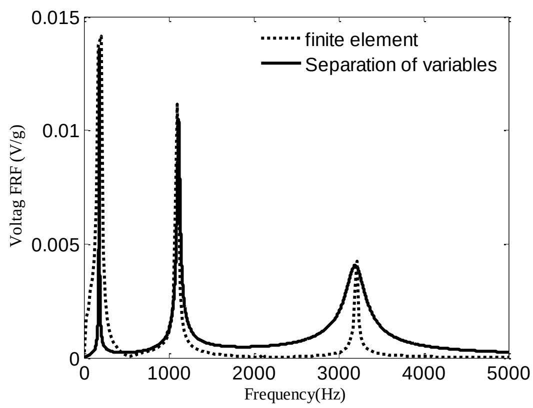


Fig. 14 Variation of the voltage output of the Bimorph for separation of variables method at steady state and finite element method for parallel connection of the piezoceramic layers

شکل 14 مقایسه ولتاژ خروجی تیر بایمورف، میان روش تحلیلی جداسازی متغیرها در حالت پایا و روش المان محدود در حالت اتصال موازی صفحات پیزوالکتریک

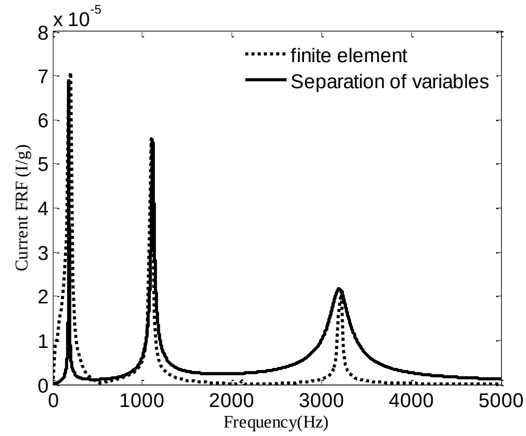


Fig. 15 Variation of the current output of the Bimorph for separation of variables method at steady state and finite element method for series connection of the piezocerami layers

شکل 15 مقایسه جریان خروجی تیر بایمورف، میان روش تحلیلی جداسازی متغیرها در حالت پایا و روش المان محدود در حالت اتصال سری صفحات پیزوالکتریک

در "شکل 16"، تابع پاسخ فرکانسی جریان خروجی در حالت اتصال موازی صفحات پیزوالکتریک را برای روش جداسازی متغیرها در حالت پایا و اجزا محدود می‌بینیم.

سپس تابع پاسخ فرکانسی ولتاژ خروجی در حالت اتصال سری صفحات پیزوالکتریک در روش جداسازی متغیرها در حالت پایا و المان محدود در "شکل 17" نشان داده شده است.

در "شکل 18" تابع پاسخ فرکانسی ولتاژ خروجی را در حالت اتصال سری صفحات پیزوالکتریک را برای روش جداسازی متغیرها در حالت پایا و المان محدود می‌بینیم.

5- نتیجه‌گیری

در این مقاله یک تیر بایمورف با لایه‌های پیزوالکتریک در حالت اتصال سری و موازی صفحات پیزوالکتریک با دو روش المان محدود و روش تحلیلی جداسازی متغیرها در حالت پایا بررسی شده است.

براساس نتایج هردو روش مشخص شد که مقادیر ولتاژ، جریان و توان خروجی، در اتصال موازی به مراتب بیشتر از حالت سری هستند به صورتی

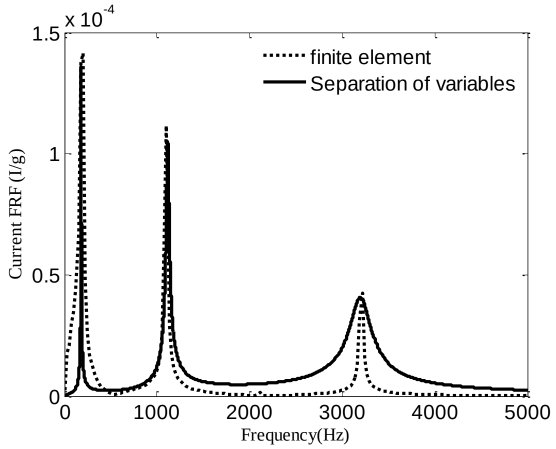


Fig. 16 Variation of the current output of the Bimorph for separation of variables method at steady state and finite element method for parallel connection of the piezoceramic layers

شکل 16 مقایسه جریان خروجی تیر بایمورف، میان روش تحلیلی جداسازی متغیرها در حالت پایا و روش المان محدود در حالت اتصال موازی صفحات پیزوالکتریک

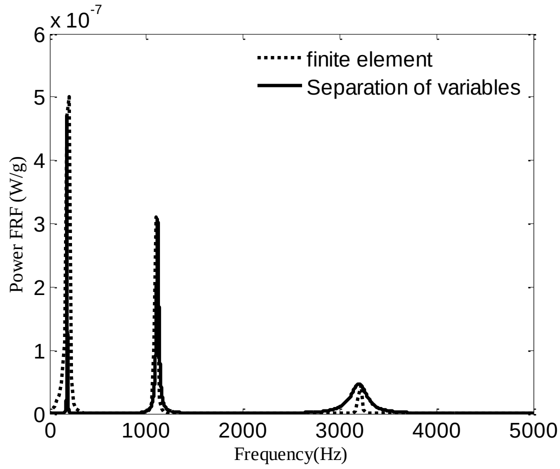


Fig. 17 Variation of the power output of the Bimorph for separation of variables method at steady state and finite element method for series connection of the piezoceramic layers

شکل 17 مقایسه توان خروجی تیر بایمورف، میان روش تحلیلی جداسازی متغیرها در حالت پایا و روش المان محدود در حالت اتصال سری صفحات پیزوالکتریک

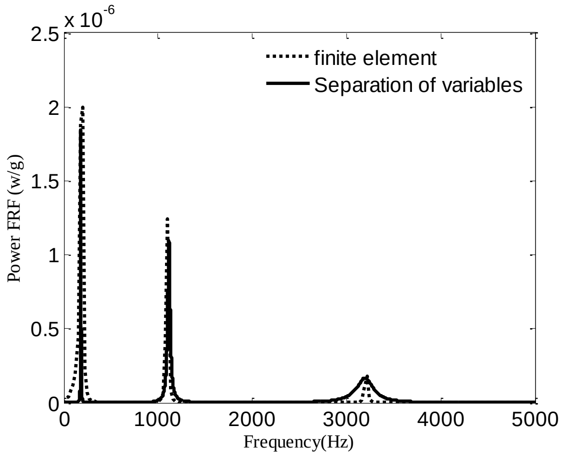


Fig. 18 Variation of the power output of the Bimorph for separation of variables method at steady state and finite element method for parallel connection of the piezoceramic layers

شکل 18 مقایسه توان خروجی تیر بایمورف، میان روش تحلیلی جداسازی متغیرها در حالت پایا و روش المان محدود در حالت اتصال موازی صفحات پیزوالکتریک

که ولتاژ و جریان الکتریکی خروجی در حالت موازی تقریباً دو برابر حالت اتصال سری است و توان خروجی در حالت موازی تقریباً چهار برابر حالت سری هستند بنابراین همین‌طور که از نتایج تحلیل هردو روش مشخص است برای بازدهی بیشتر تیر بایمورف می‌توان از اتصال موازی صفحات پیزوالکتریک به‌جای اتصال سری بهره برد.

در بررسی روش المان محدود و با مشاهده نتایج خروجی نرم‌افزار آباکوس مشاهده شد نرم‌افزار فقط ولتاژ خروجی را به ما می‌دهد در این‌جا با کمک روش جداسازی متغیرها به این نکته رسیدیم که با تقسیم ولتاژ خروجی نرم‌افزار، بر مجذور فرکانس پایه ضرب در دامنه نوسان به صورتی که در رابطه‌ی (40) نشان داده شده است، می‌توان از خروجی ولتاژ نرم‌افزار به تابع پاسخ فرکانسی ولتاژ خروجی و سپس تابع پاسخ فرکانسی جریان و توان الکتریکی خروجی دست‌یافت و با توجه به این امر می‌توانیم تابع پاسخ فرکانسی بسیاری از سیستم‌هایی را که پیش‌تر قادر به بررسی پاسخ فرکانسی آن‌ها نبودیم را بررسی کنیم .

در ادامه با بررسی هر دو روش مشخص شد روش اجزاء محدود علاوه بر محاسبه‌ی مودهای خمشی مودهای پیچشی را نیز محاسبه می‌کند که این یکی از مزیت‌های روش المان محدود نسبت به روش تحلیلی جداسازی متغیرها است که نشان می‌دهد مقدار انرژی الکتریکی تولیدی در مودهای خمشی بیشتر از مودهای پیچشی است.

با توجه به صحت‌سنجی نتایج روش المان محدود با روش جداسازی متغیرها، روش المان محدود را می‌توان به انواع ساختارها که مدل‌سازی آن‌ها به‌صورت روابط ریاضی ممکن نیست تعمیم داد و به کمک آن می‌توان ساختارهای بسیار پیچیده‌تری را بررسی کرد و انواع تابع پاسخ فرکانسی آنها را نیز موردد بررسی قرارداد که می‌توان گفت این مزیت ها، روش المان محدود را نه‌تنها نسبت به روش جداسازی متغیرها بلکه به کلیه‌ی روش‌های تحلیلی ممتاز می‌سازد.

نوآوری طرح

- به دست آوردن تابع پاسخ فرکانسی تیر بایمورف به روش المان محدود به کمک نرم افزار آباکوس با استفاده از رابطه‌ی (40) که درواقع نقطه‌ی اصلی مقایسه رفتار فرکانسی درروش المان محدود و روش جداسازی متغیرها در حالت پایا است.
- به دست آوردن مودهای پیچشی علاوه بر مودهای خمشی درروش المان محدود و محاسبه‌ی ولتاژ خروجی در مودهای پیچشی به کمک تحلیل فرکانسی تیر بایمورف
- بررسی ولتاژ، جریان و توان خروجی در هر دو حالت اتصال سری و موازی صفحات پیزوالکتریک به کمک نرم‌افزار المان محدود آباکوس و روش جداسازی متغیرها برای یافتن بهینه‌ترین حالت اتصال صفحات پیزوالکتریک که مشخص شد حالت اتصال موازی بهینه‌تر است.

6- فهرست علائم

b	عرض تیر (mm)
c_{11}	مدول الاستیسیته پیزوالکتریک (GPa)
C_p	ظرفیت معادل الکتریکی تیر
e_{31}	ثابت پیزوالکتریک($\mathrm{cm^{-2}}$)
F_r	دامنه‌ی نیروی مودی تیر
g	دوران پایه تیر
H_r	دامنه‌ی مودی جرم تیر
h_{pc}	فاصله مرکز لایه پیزوالکتریک از مرکز تیر (m)
I	جریان (A)
k_r	ضریب کوپلینگ الکتریکی
L	طول تیر (mm)
M	کشتاور خمشی وارد بر تیر(Nm)
P	توان (W)
R	مقاومت (Ω)
R_1	مقاومت معادل مداری (Ω)
S^s	کرنش محوری
V	ولتاژ (V)
V_{FRF}	شکل رفتار فرکانسی ولتاژ
W_0	دامنه نوسان پایه (m)
w_b	جابه‌جایی پایه تیر (m)
w_{rel}	خیز تیر (m)
X_r	ترم کوپلینگ الکترومکانیکی
Y_s	مدول الاستیسیته لایه ی الاستیک (GPa)

علائم یونانی

ε_{31}	ثابت گذردهی ($\mathrm{nFm^{-1}}$)
ω	فرکانس تحریک پایه (Hz)
φ_r	مقدار ویژه بی‌بعد شده‌ی جرم
η_r	مقدار ویژه بی‌بعد شده‌ی جرم
θ_0	دامنه‌ی چرخش پایه تیر
θ_{r}	کوپلینگ مودال الکترومکانیکی
ρ	چگالی ($\mathrm{kgrm^{-3}}$)
ϑ	ثابت الکتریکی
σ_r	تنش خمشی تیر
τ_r	تنش پیچشی تیر
ξ_r	ضریب نسبت دمپینگ
δ_{rs}	دلتای کرانکر

بالانویس‌ها

p	اتصال موازی صفحات پیزوالکتریک
s	اتصال سری صفحات پیزوالکتریک

زیرنویس‌ها

FRF	شکل رفتار فرکانسی
p	لایه‌ی پیزوالکتریک
s	لایه‌ی میانی انعطاف‌پذیر

7- مراجع

[1] C. B. Williams, R. Yates, Analysis of a micro-electric generator for microsystems, *Sensors and Actuators A: Phisical*, Vol. 52, No. 2, pp. 8–11, 1996.

[2] P. Glynne-Jones, M J. Tudor, S. P. Beeby, N. M. White, An electromagnetic, vibration-powered generator for intelligent sensor systems, *Sensors and Actuators A: Physical,*Vol. 110, No. 1, pp. 344-349, 2004.

[3] D. P. Arnold, Review of microscale magnetic power generation, *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 43, No. 11, pp. 3940-3951, 2007.

[4] P. Mitcheson, P. Miao, B. Start, E. Yeatman, A. Holmes, T. Green, MEMS electrostatic micro-power generator for low frequency

447–454, 2007.

[15] F. Shang, M. Kuna, M. Scherzer, Development of finite element techniques for three-dimensional analyses of thermopiezoelectric materials, *Journal of Engineering Materials and Technology*, Vol. 125, No. 4, pp. 18-21, 2003.

[16] B. P. Baillargeon, S. S. Vel, J. S. Koplik, Utilizing ABAQUS to Analyze the Active Vibration Suppression of Structural Systems, *ABAQUS Users' Conference, Boston, USA,* pp. 25-27, 2004.

[17] A F.D. Roosevel, Finite element modeling of piezoelectric structures, *AIAA Journal*, Vol. 31, No. 5, pp. 930-937, *1993*.

[18] A. Benjeddou, M. A. Trindade, R. Ohayon, New shear actuated smart structure beam finite element, *Article in AIAA Journal*, Vol. 37, No. 3, pp.378-383, 1999.

[19] S. Roundy, P. Wright, J. Rabaey, A study of low level vibrations as a power source for wireless sensor nodes, *Computer Communications*, Vol. 26, No. 11, pp. 1131–1144, 2003.

[20] N. duToit, B. Wardle, S. Kim, Design considerations for MEMS-scale piezoelectric mechanical vibration energy harvesters, *Article in Integrated Ferroelectrics*,Vol. 71, No. 1, pp. 121–160, 2005.

[21] C. Willberg, U. Gabbert, Development of a three-dimensional piezoelectric isogeometric finite element for smart structure applications Received, *Acta Mechanica*, Vol. 223, No. 8, pp. 1837-1850, 2011.

[22] A. Mineto, M. P. Braun, H. A. Navarro, P. S. Varoto, Modelling of a cantilever beam for piezoelectric energy harvesting, 9th *Brazilian conference on Dynamics, control and their applications*, Sao Carlos, Brazil, pp. 599-605, 2010.

[23] A. Erturk, D. J. Inman., A distributed parameter electromechanical model for cantilevered piezoelectric energy harvesters, *Journal of Vibration And Acoustics*,Vol. 130, No. 4, pp. 1-15, 2008.

[24] M. Zhu, E. Worthington, J. Njuguna, Analyses of Power Output of Piezoelectric Energy Harvesting Devices Directly Connected to a Resistive Load Using a Coupled Piezoelectric-Circuit Finite Element Method, *IEEE transactions on ultrasonics*, Vol. 56, No. 7, pp. 1309-1317, 2009.

operation, *Sensors and Actuators A: Physical*,Vol. 115, No. 2, pp. 523–529, 2004.

[5] S. R. Anton, H. A. Sodano, A review of power harvesting using piezoelectric materials, *Smart Materials and Structures*, Vol. 16, No. 3, pp. 95-207, 2007.

[6] S. Priya, Advances in energy harvesting using low profile piezoelectric transducers, *Journal of Electroceramics*, Vol. 19, No. 1, pp. 167–184, 2007.

[7] K. A. Cook-Chennault, N. Thambi, A. M. Sastry, Powering MEMS portable devices—a review of non-regenerative and regenerative power supply systems with emphasis on piezoelectric energy harvesting systems, *Smart Materials and Structures*, Vol. 17, No. 4, pp. 1-33, 2008.

[8] S. P. Beeby, M. J. Tudor, N. M. White, Energy harvesting vibration sources for microsystems applications, *Measurement Science and Technology*, Vol. 17, No.12, pp. 175-195, 2006.

[9] G. K. Ottman, H. F. Hofmann, A. C. Bhatt, G. A. Lesieutre, Adaptive piezoelectric energy harvesting circuit for wireless remote power supply, *IEEE Transactions on power electronics*, Vol. 17, No. 5, pp. 669–676, 2002.

[10] M. J. Guan, W. H. Liao, On the efficiencies of piezoelectric energy harvesting circuits towards storage device voltages, *Smart Materials and Structures*, Vol. 16, No. 2, pp. 498–505, 2007.

[11] D .Guyomar, A. Badel, E. Lefeuvre, Toward energy harvesting using active materials and conversion improvement by nonlinear processing, *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control*, Vol. 52, No. 4, pp. 584–595, 2005.

[12] Y. C. Shu, I. C. Lien, Analysis of power output for piezoelectric energy harvesting systems, *Smart Materials and Structures,* Vol. 15, No. 6, pp. 1499–1512, 2006.

[13] Y. C. Shu, I. C. Lien, W. J. Wu, An improved analysis of the SSHI interface in piezoelectric energy harvesting, *Smart Materials and Structures*, Vol. 16, No. 6, pp. 2253–2264, 2007.

[14] J. Ajitsaria, S. Y. Choe, D. Shen, D. J. Kim, Modeling and analysis of a Bimorph piezoelectric cantilever beam for voltage generation, *Smart Materials and Structures,* Vol. 16, No. 2, pp.