مجله مهندسی مکانیک مدرس، مرداد 1396، دوره 17، شماره 5، ص‌ص 86-94

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

تحلیل ارتعاش محوری میله‌های غیرمحلی انتگرال- دیفرانسیلی دوفازی با استفاده از روش ایزوژئومتریک

سید محمد حسین گوشه‌گیر[1]، شیرکو فاروقی[2*]

1- فارغ التحصیل کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی ارومیه، ارومیه
2- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی ارومیه، ارومیه
* ارومیه، صندوق پستی 419-57155، sh.farughi@uut.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 30 بهمن 1395
پذیرش: 17 فروردین 1396
ارائه در سایت: 09 اردیبهشت 1396

کلید واژگان:
تئوری الاستیسیته غیر محلی انتگرال-دیفرانسیلی دو فازی
ایزوژئومتریک
نانو میله
ارتعاش محوری

چکیده

در این مقاله، ارتعاش محوری نانومیله براساس تئوری الاستیسیته غیر محلی انتگرال- دیفرانسیلی دو فازی با استفاده از روش ایزوژئومتریک مورد تحلیل واقع شده است. تئوری غیرمحلی انتگرال-دیفرانسیلی دوفازی، نه تنها خاصیت غیرمحلی را به شکلی انتگرالی و تحت تابع وزنی کرنل نشان می‌دهد؛ بلکه انحنای محلی و غیرمحلی را برای یک ماده الاستیک غیرمحلی دوفازی بصورت خطی ترکیب می‌کند. رویکرد جدید ایزوژئومتریک روش المان محدود را با هندسه محاسباتی پیوند داده و می‌تواند مدل هندسی دقیقی از مسئله ارائه نماید. همچنین با استفاده از توابع پایه بی-اسپیلاین با مرتبه پیوستگی دلخواه می‌تواند جایگزین بهتری برای روش‌های المان محدود کلاسیک باشد. نتایج بدست آمده از نظر سرعت و کیفیت همگرایی، حاکی از برتری رویکرد ایزوژئومتریک بر روش المان محدود است. همچنین دراین مدل اثرات پارامترهای فازی و غیرمحلی بر فرکانس‌های طبیعی نانومیله مورد بررسی قرار گرفته و نشان‌داده شد که افزایش پارامترهای فاز محلی و مقیاس طولی غیرمحلی به ترتیب، باعث افزایش و کاهش مقادیر فرکانس‌های طبیعی نانومیله می‌شود. نهایتاً برای دو حالت ویژه، فرکانس‌های مجانبی برای یک مدل میله غیرمحلی انتگرال-دیفرانسیلی دوفازی بدست آمده و با نتایج موجود متناظر در حالت دیفرانسیلی ارینگن مقایسه گردید.

Analysis of axial vibration of nanorods with two phase integro-differential nonlocal elasticity based on Iso-geometric approach

Seyed Mohammad Hossein Goushegir, Shirko Faroughi*

Faculty of Mechanical Engineering, Urmia University of Technology, Urmia, Iran
* P.O.B. 57155-419 Urmia, Iran, sh.farughi@uut.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 18 February 2017
Accepted 06 April 2017
Available Online 29 April 2017

Keywords:
Two phase integro differential nonlocal elasticity
Isogeometric
Nanorod
Axial vibration

ABSTRACT

In this work, axial vibration of nanorod was analyzed based on two phase integro-differential nonlocal elasticity theory using isogeometric method. Two phase integro-differential nonlocal elasticity theory not only shows the nonlocal property in an integrated manner based on kernel weight function, but also combines local and nonlocal linear curvature for a two phase nonlocal elastic material. The new isogeometric approach combines finite element method with computational geometry and can present an accurate geometric model for the problem. Also, using b-spline basis functions with arbitrary continuity order, it can be a better alternative for classical finite element methods. The obtained results indicated that isogeometric approach was superior to finite element method in terms of speed and convergence quality. Moreover, in this model, the effects of phase and nonlocal parameters on the natural frequencies of the nanorod were investigated and it was shown that increase of parameters of local phase and nonlocal length scale, respectively, increased and decreased the values of natural frequencies of nanorods. Finally, for two special cases, asymptotic frequencies for a single type of nonlocal rod, two phase integro-differential was obtained and the results were compared with corresponding available differential Eringen results.

1- مقدمه

در سال‌های اخیر، برخلاف شبیه‌سازی‌های اتمی، تئوری‌های وابسته به اندازه به دلیل قابلیت آن‌ها در ارائه کردن مدل‌های پیوستار و تبع آن، کاهش محاسبات در تحلیل نانوساختارهای مکانیکی، توجه محققین را به‌طور فزاینده‌ای جلب نموده است. در بین تئوری‌های وابسته به اندازه، تئوری پیوستار غیرمحلی ارینگن [1-3] اثر مقیاس و اندرکنش‌های بین اتمی دور- برد را به‌صورت پارامترهای ماده وارد معادلات ساختاری می‌کند. بعدها، ادلن و لاوز [4]، ادلن و همکارانش [5] و ارینگن و ادلن [6] فرمول‌بندی معادلات غیرمحلی را در یک چهارچوب ترمودینامیکی بهبود بخشیده و اندرکنش‌های بین اتمی را در معادلات ساختاری به فرمی انتگرالی اعمال نمودند. شکل انتگرالی تئوری غیرمحلی بیان می‌کند که تنش در یک نقطه خاص از ماده، تابعی از تنش‌های محلی در تمام نقاط محصور در یک فاصله شعاعی از آن

Please cite this article using:

S. M. H. Goushegir, Sh. Faroughi, Analysis of axial vibration of nanorods with two phase integro-differential nonlocal elasticity based on Iso-geometric approach, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 5, pp. 86-94, 2017 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

نقطه است که پروفیل آن تابع با فاصله گرفتن از نقطه مورد نظر زوال[1] پیدا می‌کند. ارینگن [7] و آلتان [8]، مدل جامع‌تری با عنوان تئوری الاستیسیته انتگرال- دیفرانسیلی غیرمحلی دوفازی[2] ارائه کرده‌اند که مبنی‌بر آن، با نسبت دادن یک سهم حجمی به هر دو تئوری الاستیسیته محلی و غیرمحلی انتگرالی، یک مدل جدید غیرمحلی دوفازی ساخته می‌شود.

یافتن یک تابع کرنل مثبت فاصله-زوال‌پذیر[3] (یا تضعیف شونده[4]) که از نظر فیزیکی معنادار باشد؛ بسته به شرایط مسئله نقشی کلیدی در اعمال تئوری انتگرالی ارینگن در معادلات ساختاری ایفا می‌کند. مطالعات محدودی به منظور تولید و انتخاب صحیح توابع کرنل در حل مسائل انجام گرفته است. به‌طور مثال، بازانت و چانگ [9] تاثیر انتخاب توابع مختلف وزنی مورد استفاده در میانگین‌گیری کرنش، بر ناپایداری‌ها در محدوده‌های الاستیک را بررسی کرده‌اند. آن‌ها کرنل‌های متداول بسیاری را از جمله: کرنل توزیع نرمال[5]، مثلثی، مثلثی سیخ مانند[6] و توابع نمایی دوطرفه[7] بوسیله روش المان محدود امتحان نموده‌اند. پیکو [10]، به‌طور تحلیلی گروهی از توابع کرنل را بر پایه طبیعت گسسته مواد در مقیاس‌های کوچک اتمی تولید کرده و نتایج خود را با شبیه سازی‌های اتمی صحه گذاری نمود. غوش و همکارانش [11]، بطور عمومی برای مواد همسانگرد دسته ای از توابع کرنل دو و سه بعدی را بر پایه داده‌های پراکنش فونون[8] در یک بعد تولید نمود.

به‌طورکلی، به‌علت سادگی اعمال تئوری دیفرانسیلی غیرمحلی ارینگن در تحلیل استاتیک و دینامیک مسائل یک و دوبعدی، تئوری انتگرال- دیفرانسیلی غیرمحلی از استقبال بسیار کمتری از سوی جامعه محققین برخوردار شده است. پولیزوتو [12]، برای اولین بار بوسیله روش المان محدود غیرمحلی[9] (NL-FEM) و یک روش تکرار شونده[10] جایگزین مبتنی بر المان محدود، فرمول‌بندی مدل انتگرالی غیرمحلی را براساس سه رویکرد در حساب تغییرات به‌دست آورد. پیزانو و فوسچی [13]، به‌وسیله تبدیل معادلات حرکت به معادلات حل‌شدنی استاندارد انتگرالی وولترآی مرتبه دوم[11]، یک راه حل بسته برای مسئله میله الاستیک تحت کشش براساس تئوری انتگرالی غیرمحلی ارینگن ارائه داده اند. روش NL-FEM برای حل استاتیک مسائل الاستیک دو بعدی برای مواد همگن [14] و ناهمگن [15] براساس تئوری انتگرال-دیفرانسیلی دوفازی توسعه و به‌کار گرفته شده است. به تازگی، خدابخشی و رددی [16]، یک مدل منسجم برای تحلیل خمش تیرهای اویلر-برنولی برمبنای تئوری انتگرال-دیفرانسیلی غیرمحلی ارائه نموده اند. آن‌ها یک فرمول‌بندی عمومی سه‌بعدی برمبنای روش المان محدود برای حل معادلات حاکمه، توسعه داده‌اند.

در تمام منابع فوق الذکر، رویکردهایی برمبنای روش المان محدود به عنوان روش حل ارائه گردیده است. مطابق با یافته‌های شعات [17]، استفاده از رویکردهای مبتنی بر المان محدود به منظور حل مسائل الاستیک انتگرال- دیفرانسیلی غیرمحلی بسیار چالش برانگیز و از نظر محاسباتی هزینه بر است. علاوه بر آن، بنابر خدابخشی و رددی [16]، در مدل المان محدود غیرمحلی انتگرالی، افزایش تعداد المان‌ها برای رسیدن به دقت دلخواه، منجر به افزایش تعداد درآیه‌های غیرصفر در ماتریس سختی کل شده و در نتیجه، زمان اجرای محاسبات در کامپیوتر بطور قابل توجهی افزایش خواهد یافت.

تا بحال، تحقیقات اندکی در مورد تحلیل ایزوژئومتریک نانوتیرها [18]، نانوکمان‌ها[12] [19] و نانوورق‌ها [20-22] انجام گرفته است. اما تاکنون ارتعاش نانومیله‌های انتگرال-دیفرانسیلی دوفازی با استفاده از روش ایزوژئومتریک مورد بررسی قرار نگرفته است.

در این تحقیق به تحلیل ارتعاش آزاد نانومیله‌ها براساس تئوری غیرمحلی انتگرال-دیفرانسیلی دوفازی پرداخته خواهد شد. ابتدا فرمول‌بندی عمومی ایزوژئومتریک مدل غیرمحلی انتگرال-دیفرانسیلی دوفازی توسعه داده شده و سپس فرمول‌بندی پارامتریک یک المان ایزوژئومتریک میله[13] غیرمحلی ارائه شده است. در این مدل جدید ارائه شده، تابع کرنل مورد استفاده از نوع تابع گرادیان-تنش اصلاح شده است که برای اولین بار در تحلیل‌ها به‌کار رفته است. سرعت همگرایی این المان جدید میله غیرمحلی، به‌وسیله استراتژی‌های متفاوت ریزسازی مش، مورد بررسی قرار گرفته است. پارامترهای فاز محلی و غیرمحلی و همچنین تأثیر پارامتر مقیاس طولی بر فرکانس‌های طبیعی نانومیله مورد بررسی قرار خواهد گرفت و نتایج به‌دست آمده از روش حاضر با روش المان محدود مقایسه می‌گردد.

2- رویکرد ایزوژئومتریک مبتنی بر توابع بی-اسپیلاین[14]

2-1- بردار گرهی[15]

در فضای یک بعدی، بردار گرهی یک دستگاه مختصات غیرنزولی در فضای پارامتری می‌باشد که به‌صورت $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$ نوشته می‌شود، به‌طوری که $\xi_i \in R$ گره i-ام بوده و i، اندیس گره $(i = 1, 2, 3, \dots, n+p+1)$ است. پارامتر p مرتبه چند جمله‌ای و nتعداد توابع پایه‌ای است که در تولید منحنی بی-اسپیلاین استفاده می‌شود. گره‌ها فضای پارامتری را به المان‌ها تقسیم می‌کنند و مرزهای المان در فضای فیزیکی، به‌طور ساده تصاویر خطوط گرهی تحت نگاشت بی-اسپیلاین می‌باشند. وقتی که در فضای پارامتری فاصله بین نقاط برابر باشد، بردار گرهی یکنواخت است و اگر فاصله‌ها نامساوی باشند، بردار گرهی غیریکنواخت می‌باشد. در بردارهای گرهی ممکن است مقادیر گره‌ها تکرار شوند و بیش از یک گره، دارای مقادیر یکسانی باشند. تکرار[16] مقادیر نقاط، مفهوم مهمی در خصوصیات توابع پایه‌ای دارد. برداری گرهی، که مقادیر ابتدا و انتهای آن $p+1$ بار تکرار شود بردار گرهی باز نامیده می‌شود که بیشترین کاربرد را در تحلیل‌ها و مدل‌سازی‌ها دارند.

2-2- توابع پایه

با در دست داشتن یک بردار گرهی می‌توان توابع پایه مربوطه را به‌صورت بازگشتی تعیین کرد که شروع آن یک تابع قطعه قطعه ثابت است $(p = 0)$.

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \xi_i \le \xi < \xi_{i+1} \\ 0 & \end{cases} \quad (1)$$

برای $p = 1, 2, \dots$ توابع پایه با استفاده از رابطه زیر تعیین می‌گردند.

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (2)$$

که این رابطه، نشأت گرفته از رابطه بازگشتی کاکس-دی بور[17] است

[1] Decaying
[2] Two-phase integro-differential nonlocal elasticity
[3] Positive distance-decaying kernel
[4] Attenuating
[5] Normal distribution
[6] Spiked triangular
[7] Bilateral exponential
[8] Phonon dispersion
[9] Nonlocal finite element method
[10] Iterative
[11] Volterra integral equation of second kind
[12] Nano-arches
[13] Isogeometric rod element
[14] B-Spline functions
[15] Knot vector
[16] Multiplicity
[17] Cox-de Boor recursion formula

[23]. نتایج اعمال روابط (1) و (2) بر یک بردار گرهی یکنواخت در "شکل 1" نشان داده شده است. شایان ذکر است که برای توابع بی-اسپیلاین با $p = 0$ و $p = 1$ نتایج به ترتیب مشابه توابع استاندارد قطعه‌ای ثابت و خطی در اجزاء محدود است.

2-3- ریزسازی مش[1]

روندهای ریزسازی مش نیز از مؤلفه‌های اساسی فناوری نربز است. دو استراتژی ریزسازی-h و ریزسازی-p شبیه به روش المان محدود، و نوع جدید مرتبه بالا و کارامدتر آن یعنی ریزسازی-k می‌باشد. در ریزسازی-p، پیوستگی C^0 در طول گره‌ها (مرزهای المان‌ها) حفظ می‌شود. در ریزسازی-k، پیوستگی مرتبه C^{p-1} حداقل درون وصله‌ها در طول گره‌ها قابل دست یابی است. همواری اضافی در ریزسازی-k در حالاتی مانند ارتعاش آزاد ساختارها، چندشاخگی[2] کمانش تیرهای نازک، ورق‌ها و پوسته‌ها که در آن‌ها راه‌حل‌های دقیق بطور غالب بسیار هموار هستند؛ به‌طور مشهودی مطلوب است. علاوه بر آن، ریزسازی-k پارامترگذاری بسیار مختصری از توابع هموار ارائه می‌کند.

3- تئوری غیرمحلی انتگرال-دیفرانسیلی دوفازی

در تعریف کلی تئوری غیرمحلی ارینگن [24]، تنش در یک نقطه مرجع مانند x درون جسم نه تنها به کرنش در x وابسته است؛ بلکه به میدان کرنشی در تمامی نقاط دیگر ماده ($\acute{x}$) نیز وابستگی دارد. در تئوری انتگرالی غیرمحلی، این وابستگی به شکل یک انتگرال وزن‌دار[3] بیان می‌شود. که تابع وزنی آن یک تابع کرنل اسکالر، مانند $\mathrm{H}(x,\acute{x},l_c)$ است. در این تئوری، تنش در نقطه $x \in \acute{\mathrm{V}}$ به‌صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$\sigma(x) = \int_{\acute{V}} H(x,x,l_c) D : \epsilon(\acute{x}) d\acute{V} \qquad (3)$$

که در آن به ترتیب، $\epsilon(\acute{x})$، D و $\acute{\mathrm{V}}$ کرنش در نقطه $\acute{x}$، تانسور مرتبه چهار مدول‌های کلاسیک خطی الاستیک ماده و حجم نانوورق است. پارامتر l_c پارامتر مقیاس طولی نام دارد.

مطابق با ارینگن [7] و آلتان [8] ترکیب خطی دو مدل محلی و غیرمحلی الاستیک به‌صورت یک تئوری واحد کامل تر دوفازی قابل بیان است. بنابر این مدل، تنش در نقطه x از طریق رابطه زیر به‌دست می‌آید.

$$\sigma(x) = \eta_1 D : \epsilon(x) + \eta_2 \int_{\acute{V}} H(x,\acute{x},l_c) D : \epsilon(\acute{x}) d\acute{V} \qquad (4)$$

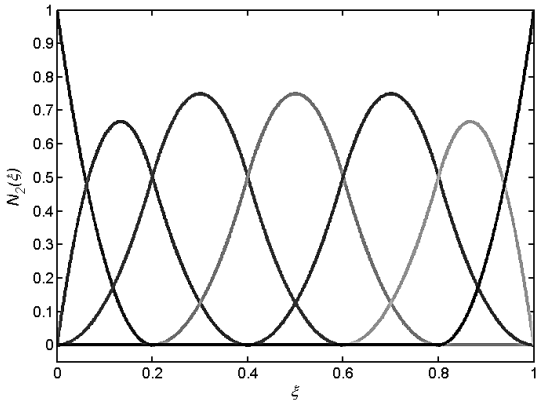


Fig. 1 B-spline basis function with corresponding open knot vector

شکل 1 توابع پایه بی-اسپیلاین متناظر با بردار گرهی یکنواخت $\Xi = \{0,0,0,0.2,0.4,0.6,0.8,1,1,1\}$

[1] Mesh refinement
[2] Bifurcation
[3] Weighted integral

که در آن، کسرهای حجمی η_1 و η_2 فازهای محلی و غیرمحلی ماده را در جسم مشخص کرده و درجه خاصیت محلی و غیرمحلی را در مدل حاضر کنترل می‌نمایند. در حالت ($\eta_1 = 1, \eta_2 = 0$)، معادلات ساختاری صرفاً محلی و در حالت ($\eta_1 = 0, \eta_2 = 1$)، معادلات اصلی ساختاری تئوری انتگرالی ارینگن بازیابی می‌شوند. پارامترهای فاز η_1 و η_2 ثوابت مثبتی هستند که رابطه $\eta_1 + \eta_2 = 1$ را ارضا می‌کنند.

4- فرمول‌بندی عمومی ایزوژئومتریک مدل غیرمحلی انتگرال-دیفرانسیلی دوفازی

در روابط زیر، معادلات تعادل و شرایط مرزی مانند فرمول‌بندی مدل کلاسیک محلی است با این تفاوت که تانسور تنش σ با تعریف موجود در معادله (4)، جایگزین می‌گردد.

$$\nabla \cdot \sigma + b = \rho \ddot{u} \quad \text{در} \quad V$$
$$u = \tilde{u} \quad \text{در روی} \ \Gamma_u\,, \quad t = \tilde{t} \quad \text{در روی} \ \Gamma_t \qquad (5)$$

که در آن، V دامنه داخلی جسم، Γ_u بخشی از مرز است که جابجایی‌ها در آن تعریف شده است؛ و Γ_t بخشی از مرز است که نیروهای تماسی در آن تعیین شده اند. دو مرز Γ_u و Γ_t از هم کاملاً جدا بوده و دارای خاصیت $\Gamma_u \cup \Gamma_t = \Gamma$ هستند که در آن، Γ کل مرز دامنه می‌باشد. همچنین، ρ جرم واحد حجم جسم می‌باشد. علامت "$\cdot\cdot$" در معادله (5)، بیانگر دوبار مشتق‌گیری نسبت به زمان است.

انرژی پتانسیل کل سیستم را می‌توان به شکل زیر نوشت [25].

$$\Pi(u) = U + V^E = \int_V \left(\frac{1}{2}\sigma : \epsilon - b \cdot u\right) dV - \oint_\Gamma t \cdot u \, dS \qquad (6)$$

با جایگذاری معادله (4) در معادله (6)، انرژی پتانسیل غیرمحلی کل مطابق زیر به‌دست می‌آید.

$$\Pi(u) = \int_V \left(\frac{1}{2}\eta_1 \epsilon(x) : D : \epsilon(x) + \frac{1}{2}\int_{\acute{V}} \eta_2 H(x,\acute{x},l_c)\, \epsilon(x) : D : \epsilon(\acute{x})\, d\acute{V} - b \cdot u\right) dV - \oint_\Gamma t \cdot u \, dS \qquad (7)$$

مطابق روند موجود در المان محدود [26]، شکل ضعیف[4] معادله (7) به صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$0 = \int_{V_e} \{-(\nabla w)^{\mathrm{T}} : \left[\eta_1 D : \epsilon_e(x) + \sum_{\acute{e}=1}^{N_{el}} \int_{\acute{V}} \eta_2 H(x,\acute{x},l_c)\, D : \epsilon_{\acute{e}}(\acute{x})\, d\acute{V}\right]\} dV + \int_{V_e} w^{\mathrm{T}} \cdot b_e \, dV + \oint_{\Gamma_e} w^{\mathrm{T}} \cdot t_e \, dS \qquad (8)$$

که در آن، N_{el} تعداد المان‌ها در دامنه است و t_e بردار نیروی تماسی در راستای مرز المان e می‌باشد. جملات غیرمحلی با المان $\acute{e}$ مرتبط هستند که با المان e اندرکنش دارند. همچنین، w تابع وزنی دلخواه است.

در مرحله بعد، میدان جابجایی $u(x)$ با تقریب ایزوژئومتریک جایگزین می‌گردد و میدان کرنش به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$u(x) = N_p^e \Delta_e \quad x \in V_e\,, \ e = 1, \dots, N_{el}$$
$$\epsilon(x) = B_e \Delta_e \qquad (9)$$

در معادله (9)، Δ_e بردار متغیرهای کنترلی المان e و N_p^e ماتریس توابع شکل نربز است که میدان جابجایی المان را به جابجایی‌های کنترلی آن مرتبط می‌نماید.

تابع وزنی w در فرم ضعیف معادله (8)، با توابع شکل N_p^e، جایگزین شده و در نتیجه خواهیم داشت.

$$\nabla w = B_e \qquad (10)$$

[4] Weak form

نهایتاً، u و w به ترتیب، از معادلات (9) و (10)، در معادله (8) قرار داده شده و مدل ایزوژئومتریک نهایی برای یک المان e مطابق زیر به‌دست می‌آید.

$$0 = \int_{V_e}\Big\{-B_e{}^{\mathrm{T}} : \Big[\eta_1\, D : B_e\Delta_e + \sum_{\acute{e}=1}^{N_{el}}\int_{V_{\acute{e}}}\eta_2\, H(x,\acute{x},l_c)\, D : B_{\acute{e}}\Delta_{\acute{e}}\, d\acute{V}\Big] + N_p^{e\mathrm{T}} b_e\Big\} dV + \oint_{\Gamma_e} N_p^{e\mathrm{T}} t_e\, dS \quad (11)$$

با توجه به معادله (5)، معادله (11) با درنظرگرفتن انرژی جنبشی، و جابجایی مودال $\Delta_e = \Delta_e e^{-i\omega t}$ (ω فرکانس طبیعی جسم است.) به صورت زیر قابل بازنویسی است.

$$\omega^2 \int_{V_e}\rho N_p^{eT} : N_p^e\Delta_e dV = \int_{V_e}\Big\{-B_e{}^{\mathrm{T}} : \Big[\eta_1\, D : \quad B_e\Delta_e + \sum_{\acute{e}=1}^{N_{el}}\int_{V_{\acute{e}}}\eta_2\, H(x,\acute{x},l_c)\, D : B_{\acute{e}}\Delta_{\acute{e}}\, d\acute{V}\Big] + N_p^{eT} b_e\Big\} dV + \oint_{\Gamma_e} N_p^{eT} t_e\, dS \quad (12)$$

5- مدل ایزوژئومتریک میله غیرمحلی انتگرال-دیفرانسیلی دوفازی

یک میله مستقیم، همگن و همسانگرد به طول L و سطح مقطع ثابت A مطابق "شکل 2" درنظر گرفته شده است. مبدأ مختصات در ابتدای میله و محور x در راستای مرکز سطح مقطع میله قرار داده شده است.

تنها کرنش غیرصفر در میله برحسب جابجایی محوری $u = u(x,t)$ برابر است با.

$$\epsilon(x) = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (13)$$

تنش غیرمحلی دوفازی، از معادله (4) مطابق زیر تعیین می‌گردد.

$$\sigma(x) = \eta_1 E\,\frac{\partial u}{\partial x} + \int_0^L\int_{\acute{A}}\eta_2 H(x,\acute{x},l_c) E\,\frac{\partial u}{\partial x}\, d\acute{A}\, d\acute{x} \quad (14)$$

در معادله (14)، تابع کرنل برای مدل میله حاضر در یک-بعد بصورت $H(x,\acute{x},l_c) = \frac{1}{2l_c}\exp(|x-\acute{x}|/l_c)$ تعریف شده است. با اعمال محاسبات عمومی بخش 4 برای مدل میله با میدان تنش و کرنش ارائه شده در معادلات (13) و (14)، فرمول‌بندی یک بعدی ایزوژئومتریک برای یک المان میله غیرمحلی بدست خواهد آمد. بنابراین، معادله (12) به‌صورت خلاصه شده، بدون درنظر گرفتن نیروهای تماسی t_e و نیروهای حجمی b_e وارده به سیستم، به فرم مسئه مقداریژه تعمیم یافته زیر قابل بیان است.

$$\eta_1 K_e^{lcl}\Delta e + \eta_2 \sum_{\acute{e}=1}^{N_{el}} K_{e\acute{e}}^{nlcl}\Delta e = \omega^2 M_e\Delta_e \quad (15)$$

که در آن،

$$(K_e^{lcl})_{ij} = \int_{x_1^e}^{x_2^e} EA^e\,\frac{d(N_p^e)_i}{dx}\frac{d(N_p^e)_j}{dx}dx \quad i,j = 1\dots 2$$

$$\left(K_{e\acute{e}}^{nlcl}\right)_{ij} = \int_{x_1^e}^{x_2^e}\int_{x_1^{\acute{e}}}^{x_2^{\acute{e}}} H(x,\acute{x},l_c) EA^e A^{\acute{e}}\,\frac{d(N_p^e)_i}{dx}\frac{d(N_p^{\acute{e}})_j}{d\acute{x}}\, d\acute{x}\, dx \quad i,j = 1\dots 2$$

$$(M_e)_{ij} = \int_{x_1^e}^{x_2^e}\rho A^e\left(N_p^e\right)_i\left(N_p^e\right)_j dx$$

$$\Delta e = \langle u_1^e \quad u_2^e\rangle^{\mathbf{T}} \quad (16)$$

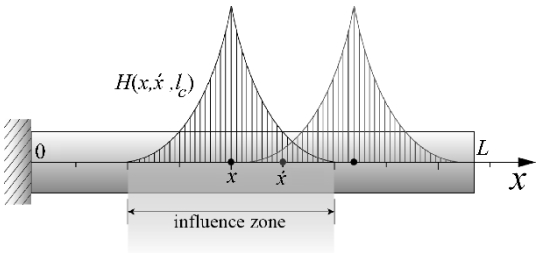


Fig. 2 geometry and coordinate of rod model

شکل 2 هندسه و مختصات مدل میله

6- نتایج عددی

در این بخش، کارایی و دقت المان میله ایزوژئومتریک حاضر در تحلیل ارتعاش آزاد نانومیله‌های یکنواخت در قالب نتایج عددی نشان داده شده است. بدین منظور، نرخ همگرایی انواع رویکردهای ریزسازی شبکه مورد استفاده در روش ایزوژئومتریک از جمله: ریزسازی-p، ریزسازی-h و ریزسازی-k مورد مقایسه قرار گرفته شده است. به‌علاوه، اثر پارامترهای غیرمحلی l_c و فازی η_1 بر فرکانس‌های طبیعی مودهای مختلف ارتعاش آزاد میله و در شروط مرزی دو سر گیردار (SS) و یکسر گیردار (SF) بررسی شده است. در نهایت، پاسخ فرکانسی مدل انتگرالی نانومیله ایزوژئومتریک تحت تک سیگنال مربعی[1] به‌دست آمده و اثر پارامتر l_c بر آن مورد بحث قرار گرفته است. در تمام طول این بخش، پارامتر فرکانسی بی-بعد $\omega^h = \omega^2\rho AL^2/EA$ در تحلیل‌ها مورد استفاده قرار گرفته است. که در آن، L طول نانومیله است.

6-1- همگرایی و دقت نتایج

در "شکل 3"، همگرایی سه پارامتر اول فرکانسی بی-بعد مربوط به یک مدل میله غیرمحلی انتگرالی دو سر گیردار با $l_c = 0.2L$ نشان داده شده است. در این شکل، ریزسازی-h مورد بررسی قرار گرفته شده است. همچنین، مرتبه توابع شکل برابر با $p = 1,2,3$ درنظر گرفته شده است.

در "شکل 3"، با افزایش تعداد المان‌ها از 1 تا 32 همگرایی فرکانس‌های طبیعی سه مود اول مشهود است. همان‌گونه که مشاهده می‌شود، به ازای ($p = 1$) در دو مود اول ارتعاش، فرکانس‌ها از تعداد 28 المان و فراتر از آن، همگرا می‌شوند ولی فرکانس سوم ارتعاش، همگرا نشده است. در این حالت، توابع شکل نربز معادل توابع درونیاب با پیوستگی C^0 در روش المان محدود است. در ضمن، نمودار همگرایی در این مرتبه از توابع شکل، دارای نوسانات[2] زیادی است و همگرایی پیوسته و پایداری ندارد. به ازای ($p = 2$) فرکانس پایه با یک نوسان در $N_{el} = 2$ به‌طور یکنواخت همگرا می‌شود. در این حالت، مودهای دوم و سوم ارتعاش نیز به‌طور یکنواخت همگرا می‌شوند. همچنین با بررسی ($p = 3$) می‌توان نتیجه گرفت که سرعت و پایداری در همگرایی نتایج وابستگی شدیدی به انتخاب مرتبه توابع نربز در روش ایزوژئومتریک دارد. به‌طوری‌که برای $p = 2$ و $p = 3$ به ترتیب، با درنظر گرفتن حداقل 16 و 8 المان نتایج به‌طور مطلوبی همگرا می‌گردند. جدول 1، اطلاعات

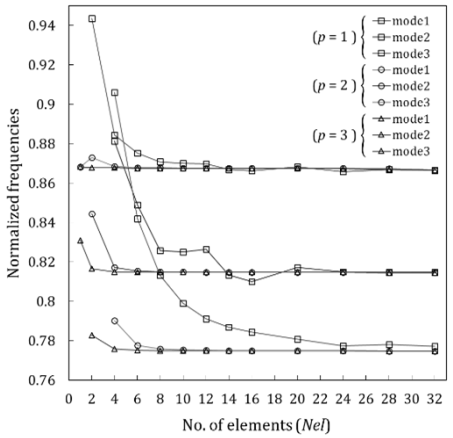


Fig. 3 convergence of first three normalized frequency of clamped – clamped nanorod

شکل 3 همگرایی سه پارامتر فرکانسی اول نرمالیزه یک میله غیرمحلی دو سر گیردار

[1] Single square signal
[2] Oscillations

جدول 1 خلاصه ای از تحلیل همگرایی "شکل 3" و مشخصات توابع پایه به‌کار رفته در آن

Table 1 A brief summary of convergence analysis related to "Figure 3" and specifications of the applied basis functions

مرتبه تابع شکل (p)	پیوستگی	کیفیت[1]	نوسان
p = 1 (FEM)	C^0	بد	دارد
p = 2 (IGA B-Spline)	C^1	متوسط	فقط در فرکانس پایه
p = 3 (IGA B-Spline)	C^2	خوب	ندارد

مربوط به توابع شکل به‌کار رفته در "شکل 3" را به‌صورت خلاصه‌وار نشان می‌دهد.

"شکل 4"، نرخ همگرایی $\ln(\omega^h/\omega-1)$ سه فرکانس اول را برحسب افزایش مرتبه توابع پایه (p)، برای یک مدل میله غیرمحلی $l_c = 0.2L$ و با شروط مرزی دو سرگیردار نشان می‌دهد. در این مطالعه، با درنظر گرفتن چهار المان ایزوژئومتریک ($N_{el} = 4$) دو رویکرد ریزسازی نوع p و k با هم مقایسه شده است.

همان‌طور که در "شکل 4" مشاهده می‌شود، افزایش مرتبه توابع پایه باعث تسریع همگرایی راه حل در هر دو رویکرد ریزسازی p و k می‌گردد. که این نرخ همگرایی بالا، به‌خصوص در فرکانس پایه بسیار مشهود است. در هر دو استراتژی ریزسازی p و k، فرکانس‌ها در هر سه مود ارتعاش در $p = 4$ به حل ریتز ($N_{\mathrm{Ritz}} = 40$) همگرا می‌گردند. همچنین، نرخ همگرایی در ریزسازی-p نسبت به ریزسازی-k به ازای تعداد المان‌های یکسان، بالاتر است.

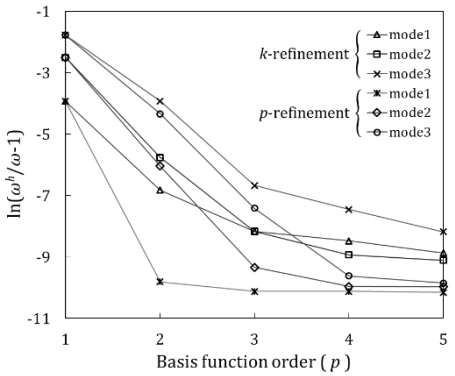


Fig. 4 convergence rate of first three frequency of nanorod

شکل 4 نرخ همگرایی سه پارامتر فرکانسی اول یک میله غیرمحلی، با افزایش مرتبه توابع پایه (p) و مقایسه دو استراتژی ریزسازی نوع p و k

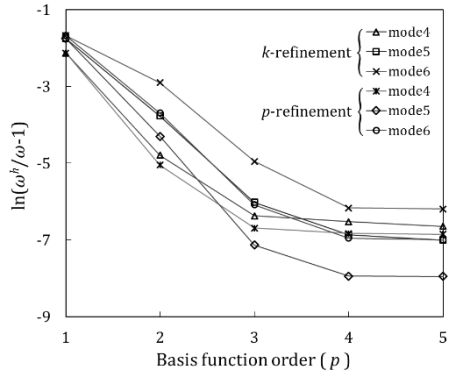


Fig. 5 rate of convergence of second three frequency of nanorod

شکل 5 نرخ همگرایی سه پارامتر فرکانسی دوم یک میله غیرمحلی

[1] کیفیت شامل دو عامل سرعت و یکنواختی در همگرایی است.

با این حال شایان ذکر است که نسبت به رویکرد ریزسازی-k، تعداد بسیار بیشتری از نقاط کنترلی به‌منظور استفاده از رویکرد ریزسازی-p لازم است. که این امر متعاقباً به‌طور قابل ملاحظه‌ای حجم محاسبات را خصوصاً در تحلیل میله‌های غیرمحلی انتگرال-دیفرانسیلی دوفازی دوچندان می‌نماید.

"شکل 5"، نرخ همگرایی سه فرکانس دوم را برحسب افزایش مرتبه توابع پایه (p)، برای میله غیرمحلی مفروض در تحلیل "شکل 4" نشان می‌دهد. در این مطالعه، با درنظر گرفتن هفت المان ایزوژئومتریک ($N_{el} = 7$) دو رویکرد ریزسازی نوع p و k با هم مقایسه شده است. در استراتژی ریزسازی p ، فرکانس‌ها در تمام مودهای ارتعاش به ازای $p = 4$ به حل ریتز ($\mathrm{N_{Ritz}} = 40$) همگرا می‌گردند. این درحالی است که رویکرد ریزسازی-k به ازای $p = 7$ به همگرایی مطلوب می‌رسد. بار دیگر می‌توان نتیجه گرفت که برای سه مود دوم ارتعاش، نرخ همگرایی در ریزسازی-k نسبت به ریزسازی-p به ازای تعداد المان‌های یکسان، بالاتر است.

6-2- اثر پارامتر مقیاس طولی غیرمحلی

اثر پارامتر مقیاس طولی غیرمحلی l_c بر سه فرکانس طبیعی اول بی-بعد $\omega_{nlcl}/\omega_{lcl}$ یک نانومیله دو سر ثابت در "شکل 6" نشان داده شده است. که در آن، ω_{nlcl} فرکانس طبیعی به‌دست آمده برمبنای تئوری الاستیک انتگرالی غیرمحلی حاضر بوده و ω_{lcl} بیانگر فرکانس طبیعی متناظر مبتنی بر تئوری الاستیک محلی (کلاسیک) می‌باشد. مدل ایزوژئومتریک نانومیله تحت بررسی، کاملاً غیرمحلی فرض شده ($\eta_2 = 1$) و مرتبه توابع پایه نربز $p = 4$ در نظر گرفته شده است. همچنین در این مثال، میله توسط 6 المان ایزوژئومتریک گسسته‌سازی شده است ($N_{el} = 6$). در "شکل 6" علاوه بر مدل انتگرالی غیرمحلی، مدل دیفرانسیلی غیرمحلی ارینگن برای نانومیله مفروض نیز ارائه شده است.

نتایج نشان می‌دهد که برای تمامی مودهای ارتعاش افزایش پارامتر مقیاس طولی غیرمحلی، فرکانس‌های طبیعی را در هر دو رویکرد دیفرانسیلی و انتگرالی کاهش می‌دهد؛ اما به استثنای فرکانس پایه، به ازای مودهای دوم و سوم ارتعاش، این کاهش در تئوری دیفرانسیلی غیرمحلی ارینگن، اندکی شدیدتر می‌باشد. برای مثال براساس مدل غیرمحلی دیفرانسیلی، با افزایش l_c از مقدار 0 تا 1، فرکانس‌های اول، دوم و سوم نانومیله به ترتیب، تا -69.30%، -83.52% و -88.34% افت می‌کنند. در حالی که متناظراً،

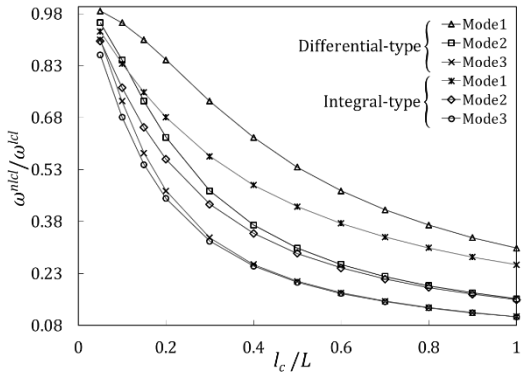


Fig. 6 changes of first three normalized clamped- clamped nanorods versus normalized length scale based on integral and differential types model

شکل 6 تغییرات سه فرکانس طبیعی اول نرمالیزه نانومیله دو سر ثابت برحسب پارامتر مقیاس طولی بی-بعد شده برمبنای تئوری‌های انتگرالی غیرمحلی و دیفرانسیلی غیرمحلی ارینگن.

برای مدل غیرمحلی انتگرالی این افت فرکانس به ترتیب بصورت: 72.39%−، 82.83%− و 87.75%− می‌باشد. می‌توان از روی نمودارهای "شکل 6" دریافت که با افزایش پارامتر l_c و همچنین بالاتر رفتن مود ارتعاش، فرکانس‌های طبیعی حاصل از دو رویکرد دیفرانسیلی و انتگرالی نانومیله به هم نزدیک تر می‌شوند.

6-3- اثر پارامتر فاز محلی

اثر پارامتر فاز محلی η_1 بر فرکانس‌های طبیعی نرمال‌سازی شده به ازای مقادیر پارامتر مقیاس طولی غیرمحلی $l_c = \{0.1, 0.2, 0.3\}$ در "شکل 7" به نمایش درآمده است. نتایج برای مودهای ارتعاش اول، دوم و سوم ارائه شده اند. "شکل 7"، نشان می‌دهد که با افزایش η_1 از مقدار 0 تا 1، همچنان که ماده از فاز غیرمحلی خالص به فاز محلی خالص گذار می‌کند؛ به ازای تمامی مقادیر l_c، فرکانس‌های نرمال‌سازی شده در تمامی مودهای ارتعاش افزایش می‌یابند. این پدیده به این دلیل اتفاق می‌افتد که با افزایش مقدار پارامتر فاز محلی، بخش محلی بر بخش غیرمحلی در معادلات ساختاری غالب شده و این منجر به کم شدن خاصیت غیرمحلی در نانوورق می‌گردد و بنابراین، اثر غیرمحلی کمرنگ‌تر خواهد شد.

مطابق "شکل 7"، با افزایش پارامتر فاز محلی در مودهای بالاتر ارتعاش، افزایش فرکانس‌ها شدیدتر است. همچنین می‌توان مشاهده کرد که در هر مود ارتعاش، با افزایش η_1 به ازای مقادیر بالاتر پارامتر غیرمحلی l_c، فرکانس‌های طبیعی سریعتر خیز می‌کنند. زیرا هنگامی که پارامتر η_1 از مقدار 0 تا 1 افزایش می‌یابد، نقش ماتریس سختی غیرمحلی در تولید ماتریس سختی کل به‌طور تدریجی محو شده و بلعکس، نقش ماتریس سختی محلی در تعیین رفتار دینامیکی نانو میله پررنگ‌تر خواهد شد. از سوی دیگر به‌طور همزمان، افزایش l_c به‌طور ذاتی اثر غیرمحلی را در ماتریس سختی غیرمحلی افزایش داده و بطور مضاعف، سختی سیستم را به ازای مقادیر کمتر η_1 تضعیف بخشیده و بنابراین صعود فرکانس‌های طبیعی از مقادیر کمتری شروع شده و به مقدار محلی افزایش می‌یابند. اثر ذاتی پارامتر مقیاس طولی در ماتریس سختی غیرمحلی را می‌توان این گونه توجیه کرد که وقتی l_c افزایش می‌یابد مطابق تعریف تابع کرنل، دامنه محاسباتی تابع کرنل افزایش یافته و تعداد بیشتری از المان‌های ایزوژئومتریک وارد قلمرو تاثیر[1] می‌شوند و بنابراین اثر فواصل کوچک بین المان‌ها که اتم‌های نانومیله کربنی را تقریب می‌زنند؛ بیش از پیش نمود می‌یابد. درنتیجه، مدل پیوستار به مدل اتمی گسسته نزدیک‌تر شده و باعث کاهش سختی ساختاری سیستم شده و فرکانس‌های طبیعی را کاهش می‌دهد.

در "شکل 8"، اثر افزایش المان‌ها $N_{el} = \{5, 10, 20, 30\}$ در تغییرات فرکانس‌های طبیعی پایه نرمال‌سازی شده یک مدل میله غیرمحلی انتگرالی با پارامتر مقیاس طولی غیرمحلی بی-بعد $l_c/L = 0.1$ برحسب پارامتر فاز محلی (η_1) برمبنای دو روش ایزوژئومتریک و المان محدود بررسی شده است. در روش ایزوژئومتریک از ریزسازی-k استفاده شده و مرتبه توابع پایه برابر با $p = 4$ درنظر گرفته شده است.

از "شکل 8" می‌توان دریافت که در روش ایزوژئومتریک با افزایش المان‌ها، فرکانس‌های طبیعی برای هر دو شرایط مرزی دوسر ثابت و یکسر ثابت کاهش یافته و این کاهش به ازای مقادیر کوچک پارامتر فاز محلی خصوصاً در بازه $0 < \eta_1 < 0.2$، شدت بیشتری دارد. با افزایش η_1 از مقدار 0 تا 1 مقادیر فرکانس غیرمحلی پایه برای تمامی حالات المان‌گذاری، بر هم منطبق شده و دقیقاً به مقدار متناظر محلی می‌رسد. این درحالی است که در روش المان محدود با افزایش المان‌ها به ازای تمامی مقادیر بازه $\eta_1 \in [0,1]$، مقادیر فرکانس غیرمحلی پایه بر هم منطبق نشده و با خطای زیادی (خصوصاً به ازای $N_{el} = 5$) مقادیری بیشتر از فرکانس متناظر محلی اتخاذ می‌کنند. خطای مذکور برای شرایط مرزی یکسر گیردار کمتر از حالت مرزی دوسر ثابت بوده و در این حالت، دو نمودار مربوط به تعداد المان $N_{el} = 20$ و $N_{el} = 30$ با افزایش پارامتر فاز محلی بر هم کاملاً منطبق شده و به مقدار محلی متناظر می‌رسند. با این تفاسیر می‌توان نتیجه گرفت که روش ایزوژئومتریک برای مدل‌سازی رفتار دینامیکی میله‌های انتگرالی غیرمحلی دوفازی بسیار مناسب‌تر و کارآمدتر از روش المان محدود بوده و دقت نتایج حاصله را تضمین می‌بخشد.

6-4- تابع پاسخ فرکانسی (FRF)[2] برای مدل انتگرال-دیفرانسیلی غیرمحلی میله

به‌منظور دست‌یابی به تابع پاسخ فرکانسی مدل انتگرال-دیفرانسیلی غیرمحلی میله ابتدا لازم است که مدل مودال[3] ساختار مربوطه فرمول‌بندی و ارائه گردد. تانسور سختی دینامیکی[4] $\mathbb{z}(\omega)$ برای مدل انتگرال- دیفرانسیلی غیرمحلی میله را می‌توان به‌صورت زیر تعریف نمود:

$$\mathbb{z}(\omega) = ([K] - \omega^2[M]) \quad (17)$$

که در آن، $[K]$، $[M]$ ماتریس‌های ایزوژئومتریک سختی و جرم کل ساختار می‌باشند.

با ضرب طرفین معادله (17) در ماتریس مودال $[\Delta]$ و ترانهاده آن و استفاده از خاصیت تعامد بردارهای ویژه خواهیم داشت [27]:

$$[\Delta]^{\mathrm{T}}\mathbb{z}(\omega)[\Delta] = [\Delta]^{\mathrm{T}}([K] - \omega^2[M])[\Delta] \quad (18\text{-الف})$$

$$[\Delta]^{\mathrm{T}}\mathbb{z}(\omega)[\Delta] = [\Gamma] - \omega^2[I] \quad (18\text{-ب})$$

که در آن، ماتریس‌های مربعی $[\Gamma]_m = [\Delta]^{\mathrm{T}}[K][\Delta]$ و $[I]_m = [\Delta]^{\mathrm{T}}[I][\Delta]$ با توجه به خاصیت تعامد در بردارهای ویژه به ترتیب، برابر با $\mathrm{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_m^2)$ و $\mathrm{diag} = (1, 1, \dots, 1)$ می‌باشد.

با ضرب معادله (18-ب) در $[\Delta]^{-1}$ و $[\Delta]^{-\mathrm{T}}$ و معکوس کردن روابط نهایتاً به ماتریس نرمی دینامیکی[5] $\mathbb{H}(\omega)$ خواهیم رسید.

$$\mathbb{H}(\omega) = [\Delta]([\Gamma] - \omega^2[I])^{-1}[\Delta]^{\mathrm{T}} \quad (19)$$

سرانجام، پاسخ فرکانسی از حاصل‌ضرب زیر به‌دست می‌آید:

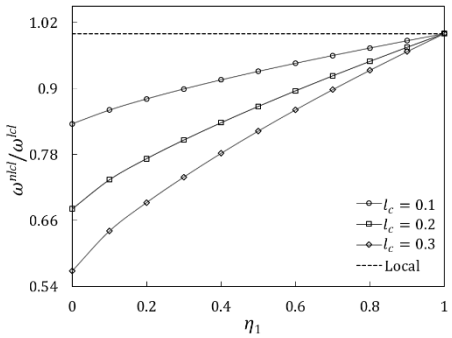
$$X(\omega) = \mathbb{H}(\omega)F(\omega) \quad (20)$$

که در آن، $F(\omega)$ بردار تحریک در فضای فرکانسی است.

هدف، یافتن پاسخ فرکانسی یک نانومیله غیرمحلی انتگرالی دوفازی دوسر ثابت به تحریک تک سیگنال مربعی و بررسی اثر پارامتر l_c بر آن می‌باشد. در این مثال عددی، پارامتر مقیاس طولی غیرمحلی بی-بعد برابر با $\tau = l_c/L = \{0.5, 0.6\}$ درنظر گرفته شده است. نانومیله غیرمحلی دوفازی مذکور با $N_{el} = 50$ المان ایزوژئومتریک گسسته‌سازی شده و مرتبه توابع پایه برابر با $p = 6$ درنظر گرفته شده است. همچنین از رویکرد ریزسازی-p به منظور دست‌یابی به ماتریس‌های سختی و جرم کل استفاده شده است. در تمام حالات بررسی شده سیگنال تحریک به وسط نانومیله ($x = L/2$) اعمال شده و پاسخ فرکانسی در آن نقطه به‌دست آمده است. در "شکل 9"، پاسخ فرکانسی با در نظر گرفتن مقدار پارامتر فاز غیرمحلی $\eta_2 = 1$ بدست

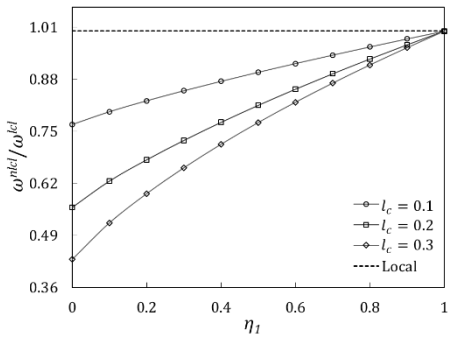
[1] Influence zone

[2] Frequency response function
[3] Modal model
[4] Dynamic stiffness
[5] Receptance



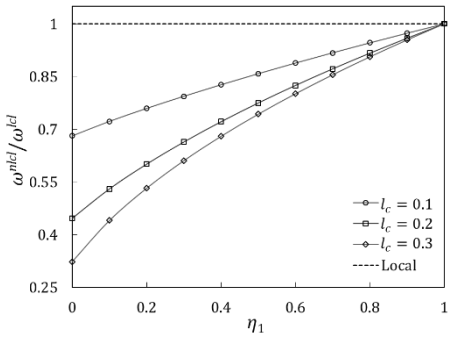
(الف)

(a)



(ب)

(b)

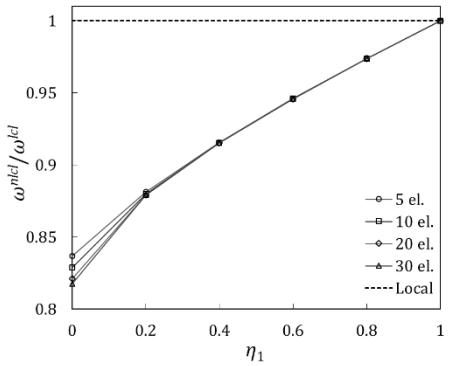


(ج)

(c)

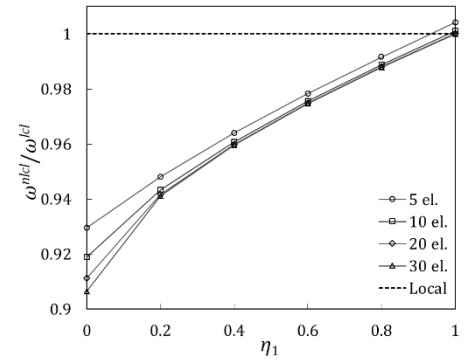
Fig. 7 changes of normalized natural frequencies of clamped- clamped nanorod versus local phase parameter a) mode 1, b) mode 2 and c) mode 3

شکل7 تغییرات فرکانس طبیعی نرمالیزه نانومیله دو سر ثابت برحسب پارامتر فاز محلی (η_1) به ازای مقادیر متفاوت l_c، در مودهای: (الف) اول، (ب) دوم و (ج) سوم ارتعاش



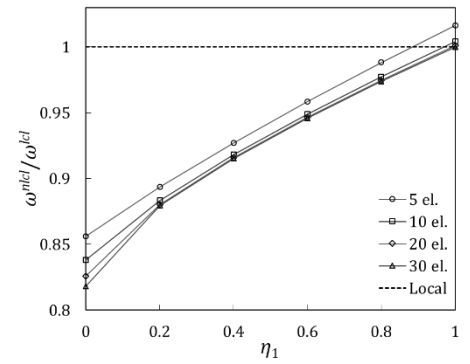
(ب)

(b)



(ج)

(c)

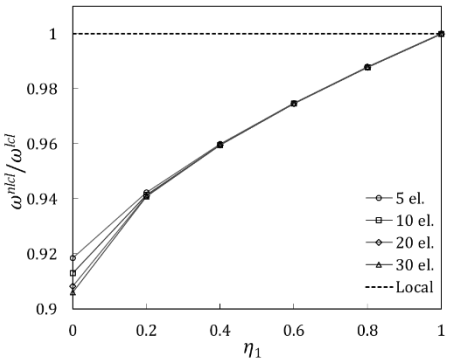


(د)

(d)

Fig. 8 changes of first normalized frequency of nanorod versus local phase parameter a) Isogeometric and clamped- free B.C.[1], b) Isogeometric and clamped-clamped B.C., c) finite element and clamped –free B.C. and d) finite element and clamped-clamped B.C.

شکل 8 تغییرات فرکانس‌های طبیعی پایه نرمالیزه نانومیله غیرمحلی انتگرالی برحسب پارامتر فاز محلی (η_1): (الف) ایزوژئومتریک و شرایط مرزی یکسر گیردار، (ب) ایزوژئومتریک و شرایط مرزی دوسر گیردار، (ج) المان محدود و شرایط مرزی یکسر گیردار و (د) المان محدود و شرایط مرزی دوسر گیردار



(الف)

(a)

آمده و با پاسخ فرکانسی مدل محلی میله مقایسه شده است. در "شکل 9-الف" و "شکل 9-ب" به‌ترتیب، مقدار پارامتر τ برابر با 0.5 و 0.6 فرض شده است.

همان‌طور که در "شکل 9" مشاهده می‌شود، پدیده جمع‌شوندگی[2] مودهای ارتعاش در بازه فرکانسی بالا برای مدل غیرمحلی میله

[1] Boundary conditions
[6] Clustering phenomenon

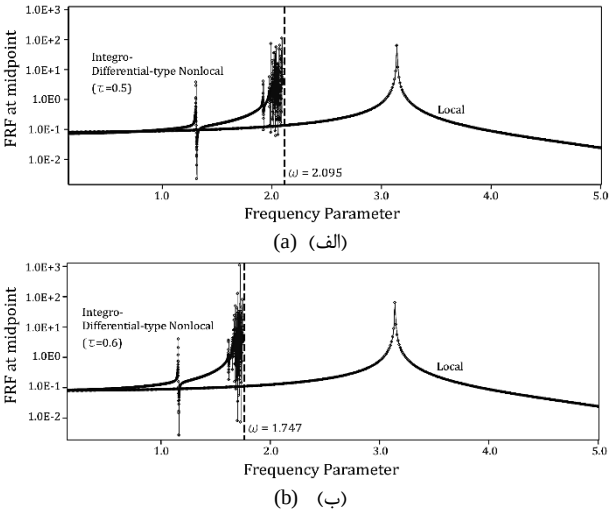


Fig. 9 frequency response function of isogeometric local and nonlocal rod for two different nonlocal parameters. In (a) the parameter $\tau = 0.5$ and in (b) the parameter $\tau = 0.6$. The escape frequency limit is shown by dashed-line.

شکل 9 توابع پاسخ فرکانسی برای مدل ایزوژئومتریک میله محلی و غیرمحلی انتگرالی دوسر ثابت به ازای دو مقدار متفاوت پارامتر غیرمحلی τ. در (الف) پارامتر τ برابر با 0.5 و در (ب) پارامتر τ برابر با 0.6 می‌باشد. حد فرکانس قطع با خط‌چین مشخص شده است.

به‌وجود آمده است. این رفتار کاملاً متفاوت از مدل محلی، ناشی از وجود فرکانس مجانبی[1] است. در این مطالعه فرکانس مجانبی برای حالات (الف) و (ب) به ترتیب برابر با 2.095 و 1.747 می‌باشد. با افزایش مقدار پارامتر l_c، مقدار فرکانس مجانبی کاهش می‌یابد. که این پدیده با مدل غیرمحلی دیفرانسیلی ارینگننیز سازگاری دارد [28].

7- نتیجه‌گیری

در پژوهش حاضر، ابتدا با استفاده از تئوری الاستیک انتگرال- دیفرانسیلی غیرمحلی دوفازی، فرمول‌بندی عمومی ایزوژئومتریک توسعه داده شد. سپس معادلات حرکت یک المان میله ایزوژئومتریک یکنواخت غیرمحلی مدل شده و به‌وسیله آن، رفتار دینامیکی میله‌های کوچک-مقیاس مورد بررسی قرار گرفت. در این مطالعه، تأثیر پارامتر مقیاس طولی غیرمحلی و پارامترهای فازی روی پارامتر فرکانس بررسی شد. به‌علاوه، به‌منظور مطالعه کارکرد روش ایزوژئومتریک در مسئله ارتعاش مدل انتگرال- دیفرانسیلی میله، سرعت و کیفیت همگرایی نتایج و استراتژی‌های مختلف ریزسازی شبکه برای مدل میله غیرمحلی مذکور مورد بررسی قرار گرفته است. شایان ذکر است که، تابع کرنل استفاده شده در این‌جا از نوع تابع گرادیان- تنش اصلاح شده بوده که برای اولین بار در تحلیل‌ها به‌کار رفته است. درنهایت، اثر پارامتر مقیاس طولی غیرمحلی بر پاسخ فرکانسی مدل میله ارائه شده، تحت یک سیگنال مربعی به‌دست آمد.

از تجزیه و تحلیل‌های موجود نتایج زیر قابل جمع‌بندی است.

- کیفیت همگرایی نتایج حاصل از روش ایزوژئومتریک به مراتب بهتر از کیفیت همگرایی نتایج روش المان محدود با توابع پایه درون‌یاب خطی است.
- افزایش مرتبه توابع پایه نرخ همگرایی نتایج را افزایش می‌دهد و این افزایش برای نمونه حل شده، در فرکانس پایه محسوس‌تر است.
- در شرایط یکسان، نرخ همگرایی در استراتژی ریزسازی-p بالاتر از ریزسازی-k است اما به دلیل افزایش تعداد نقاط کنترلی استفاده از استراتژی-p از نظر محاسباتی هزینه‌بر است.
- برای تمامی مودهای ارتعاش، افزایش پارامترهای مقیاس طولی غیرمحلی و فاز غیرمحلی فرکانس‌های طبیعی را کاهش می‌دهد.
- به ازای مقدار معین پارامتر مقیاس طولی غیرمحلی، فرکانس حاصل از رویکرد انتگرالی کوچکتر از فرکانس متناظر حاصل از روش دیفرانسیلی است.
- مقدار فرکانس مجانبی برای مدل میله غیرمحلی انتگرالی با مقدار پارامتر مقیاس طولی غیرمحلی نسبت عکس دارد.

8- فهرست علایم

U	انرژی کرنشی
$F(\omega)$	بردار تحریک در فضای فرکانسی
b	بردار نیروهای حجمی
w	تابع وزنی
D	تانسور مدول‌های الاستیک ماده
N_{el}	تعداد المان‌های ایزوژئومتریک
n	تعداد توابع پایه‌ای
N_{Ritz}	تعداد جملات توابع پایه‌ای ریتز
$N_{i,p}(\xi)$	توابع پایه‌ای مرتبه p یک بعدی
V	حجم نانومیله
A	سطح مقطع نانومیله
L	طول نانومیله
V^E	کار نیروهای خارجی
M_e	ماتریس جرم المان e
K_e	ماتریس سختی المان e
$\mathbb{Z}(\omega)$	ماتریس سختی دینامیکی
$\mathbb{H}(\omega)$	ماتریس نرمی دینامیکی
E	مدول یانگ
p	مرتبه توابع پایه‌ای
x	مکان نقطه مرجع
u	میدان جابجایی محوری
$\tilde{t}$	نیروهای تماسی

علایم یونانی

Ξ	بردار گرهی
Δ_e	بردار متغیرهای کنترلی المان e
η_2	پارامتر فازی غیرمحلی
η_1	پارامتر فازی محلی
ω^h	پارامتر فرکانسی بی-بعد
τ	پارامتر مقیاس طولی غیرمحلی بی-بعد
Π	تابعی انرژی کل
σ	تانسور تنش
ϵ	تانسور کرنش

[2] Asymptotic frequency

ρ چگالی (kgm^{-3})

Γ شرایط مرزی مسئله

ω فرکانس طبیعی نانومیله

ξ_i مختصه گره i-ام در فضای پارامتری

زیرنویس‌ها

e المان

Ritz ریتز

9- مراجع

[1] E. Kröner, Elasticity theory of materials with long range cohesive forces, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 3, No. 5, pp. 731-742, 1967.

[2] I. A. Kunin, The theory of elastic media with microstructure and the theory of dislocations, *Mechanics of generalized continua*, Berlin Heidelberg, Germany, pp. 321-329, 1968.

[3] J. A. Krumhansl, Some considerations of the relation between solid state physics and generalized continuum mechanics, *Mechanics of generalized continua*, Berlin Heidelberg, Germany, pp. 298-311,1968.

[4] G. B. Edelen, L. Norman, On the thermodynamics of systems with nonlocality, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol. 43, No. 1,pp. 24-35, 1971.

[5] D. G. B. Edelen, A. E. Green, Laws, Nonlocal continuum mechanics, *Archive for Rationale Mechanics and Analysis*,Vol. 43, No. 1,pp. 36–44,1971.

[6] A. C. Eringen, D. G. B. Edelen, On nonlocal elasticity, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 10, No. 3, pp. 233–248, 1972.

[7] A. C. Eringen,Theory of nonlocal elasticity and some applications, The international journal of structural mechanics and materials science,Vol. 21, No. 62, pp. 313–342, 1987.

[8] S. B. Altan, Existence in nonlocal elasticity, *Archive Mechanics* ,Vol. 41, No. 1, pp. 25–36,1989.

[9] Z. P. Bazant, T. P. Chang, Instability of nonlocal continuum and strain averaging, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 10, No. 110, pp. 1441–1450, 1984.

[10] R. C. Picu, On the functional form of non-local elasticity kernels, *Journal of Mechnical Physis*, Vol. 50, No. 9, pp. 1923–1939, 2002.

[11] S. Ghosh, V. Sundararaghavan, A. M. Waas, Construction of multi-dimensional isotropic kernels for nonlocal elasticity based on phonon dispersion data, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 51, No. 2, pp. 392-401, 2014.

[12] C. Polizzotto, Nonlocal elasticity and related variational principles, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 38, No. 42–43, pp. 7359–7380,2001.

[13] A. A. Pisano, P. Fuschi, Closed form solution for a nonlocal elastic bar in tension, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 40, No. 1, pp. 13–23,2003.

[14] A. A. Pisano, A. Sofi, P. Fuschi, Nonlocal integral elasticity: 2D finite element based solutions, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 46, No. 21, pp. 3836–3849, 2009.

[15] A. A. Pisano, A. Sofi, P. Fuschi, Finite element solutions for nonhomogeneous nonlocal elastic problems, *Mechanics Research Communications*, Vol. 36, No. 7, pp. 755-761, 2009.

[16] P. Khodabakhshi, J. N. Reddy, A unified integro-differential nonlocal model, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 95, No. 1, pp. 60-75, 2015.

[17] M. Shaat, Iterative nonlocal elasticity for Kirchhoff plates, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 90, No. 11, pp. 162-170, 2015.

[18] Norouzzadeh, R. Ansari, H. Rouhi. Pre-Buckling Responses of Timoshenko Nanobeams Based on the Integral and Differential Models of Nonlocal Elasticity: an Isogeometric Approach, *Applied Physics A*. Vol. 123, No. 5, pp. 1-11, 2017.

[19] M. Malagu, *strain gradient approach to the analysis of nanoarches: Formulation and numerical solution with NURBS interpolation*, Accessed on June 2012, http://resolver.tudelft.nl/uuid:6ed908e1-8f7d-48b0-ae5f-a6fc852a27f6.

[20] N. T. Nguyen, D. Hui, J. Lee, H. Nguyen-Xuan, An efficient computational approach for size-dependent analysis of functionally graded nanoplates, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 297, pp. No. 6, 191-218,2015.

[21] P. Phung-van, M. Abdel-wahab, K. M. Liew, S. Bordas, H. Nguyen-xuan, Isogeometric analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates using higher-order shear deformation theory, *Composite structures*, Vol. 123, pp. 137-149, 2015.

[22] S. Natarajan, S. Chakraborty, M. Thangavel, S. Bordas, T. Rabczuk, Size-dependent free flexural vibration behavior of functionally graded nanoplates, *Computational Materials Science*, Vol. 65, pp. 74-80, 2012.

[23] C. D. Boor, *A Practical Guide to Splines*, Second Edition, pp. 108-130, New York: Springer-Verlag, 1978.

[24] A. Eringen, Nonlocal polar elastic continua, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 10, No. 1, pp. 1-16, 1972.

[25] J. N. Reddy, *Energy Principles and Variational Methods in Applied Mechanics*, Second Edition, pp. 136-149, New York: Wiley, 2002.

[26] J. N. Reddy, *An Introduction to the Finite Element Method*, Third Edition, pp. 230-245, New York: NY, McGraw-Hill Higher Education, 2006.

[27] D. J. Ewins, *Modal testing: Theory, practice, and application*, Second Edition, pp. 130-152, England: Baldock, Hertfordshire, Research Studies Press, 2000.

[28] S. Adhikari, T. Murmu, M. A. McCarthy, Frequency domain analysis of nonlocal rods embedded in an elastic medium, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, Vol. 59, No. 32, pp. 33-40, 2014.