مجله مهندسی مکانیک مدرس، آذر 1396، دوره 17، شماره 9، ص‌ص 153-164

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

بررسی محیط سیال و اثر اندازه بر روی رفتار دینامیکی میکروصفحه

مهدی آقابابایی بنی[1]، محمدرضا قضاوی خوراسگانی[2*]، قادر رضازاده[3]

1- دانشجوی دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران
2- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران
3- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه ارومیه، ارومیه
* تهران، صندوق پستی 14115-177، ghazavim@modares.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 15 خرداد 1396
پذیرش: 14 تیر 1396
ارائه در سایت: 17 شهریور 1396

کلید واژگان:
میکروصفحه
رفتار دینامیکی
اثر اندازه
فیلم سیال
کشش صفحه میانی

چکیده

در این مقاله اثر فیلم سیال و اثر اندازه بر روی رفتار دینامیکی میکروصفحه بررسی شده است. میکروصفحه‌ی موردنظر یک صفحه‌ی دوسرگیردار می‌باشد که توسط نیروی الکترواستاتیک تحریک می‌شود. فضای بین میکروصفحه و بستر صلب، هوا وجود دارد. معادله حرکت صفحه با استفاده از تئوری مرتبه اول تنش برشی و تئوری کوپل تنش و در نظر گرفتن کرنش‌های ون‌کارمن به‌دست می‌آید. معادله حاکم بر فشار سیال معادله رینولدز غیرخطی و تئوری میکروپلار برای لحاظ کردن اثر اندازه در سیال می‌باشد. با استفاده از روش المان محدود معادلات حرکت ورق و با استفاده از روش اختلاف محدود معادلات رینولدز، خطی‌سازی می شود. معادلات دیفرانسیل مرتبه اول وابسته به زمان با استفاده از روش انتگرال‌گیری مستقیم نیومارک حل می‌شود. اثرات اندازه و اثر کشیدگی صفحه‌ی میانی بر رفتار دینامیکی ورق و همچنین تغییرات فاکتور کیفیت نسبت به پارامترهای مختلف به‌عنوان نتایج این مقاله ارائه می شود. براساس نتایج، در نظر گرفتن اثر کشش صفحه‌ی میانی صلبیت میکروصفحه را افزایش داده و بخصوص برای ولتازهای تحریک با دامنه‌ی بالاتر این اثر واضح‌تر است. در نظر گرفتن اثر اندازه در صفحه باعث افزایش و در سیال باعث کاهش صلبیت سیستم می‌شود. افزایش فشار سیال باعث کاهش دامنه نوسان در تحریک پله‌ای می‌شود که ناپایداری دینامیکی را به تعویق می اندازد. با افزایش پارامتر کوپلینگ سیال فرکانس طبیعی میکروصفحه افزایش می‌یابد، اما با افزایش پارامتر مقیاس طول سیال این فرکانس و همچنین فاکتور کیفیت سیستم کاهش پیدا می‌کند.

A study of fluid media and size effect on dynamic response of microplate

Mahdi Aghababaie Beni[1], Mohammad Reza Ghazavi Khorasgnai[1*], Ghader Rezazadeh[2]

1- Department of Mechanical Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran
2- Department of Mechanical Engineering, Urmia University, Urmia, Iran
* P.O.B. 14115-177, Tehran, Iran, ghazavim@modares.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 05 June 2017
Accepted 05 July 2017
Available Online 08 September 2017

Keywords:
Microplate
Dynamic response
Size effect
Squeeze film
Mid-plane stretching

ABSTRACT

This paper analyzes the effect of squeeze film and size effect on dynamic response of microplate. The microplate in this work is a clamped-clamped plate, which is excited using electrostatic force. The gap between microplate and substrate is filled with air. First order shear deformation theory (FSDT) and couple stress theory (CST) and considering Von Karman's strains are used to model the equation of motion of microplate. Non-linear Reynolds equation based on Micropolar theorem is deployed to apply the size effect on the fluid. Afterward, Equations are discretized by applying couple finite element method and finite difference method. The first-order differential equations are solved utilizing Newmark's method. One of the contributions is presenting the influences of size effect and mid-plane stretching on the microplate dynamic behavior, also the influence of different parameters on the quality factor. According to the results, mid-plane stretching effect increases the microplate rigidity. Interestingly, this effect is more dominant for voltages with higher amplitude. This paper emphasizes that considering the plate size effect will increase the rigidity of the system. Moreover, the plate size effect increases the rigidity of the system whereas the fluid size effect decreases it. Increasing the fluid's pressure results in decrease in the amplitude of oscillations in step voltage excitation which postpones the dynamic pull-in. This paper concludes that increasing the coupling parameter of fluid increases the natural frequency of microplate, whereas increasing the fluid length scale parameter decreases the natural frequency and quality factor of the system.

1- مقدمه

سیستم‌های میکرو/نانوالکترومکانیکی[1] تحول شگرفی در صنعت و تکنولوژی به وجود آورده‌اند. هم اکنون امکان ساخت شتاب‌سنج‌هایی[2] با ابعادی بسیار کوچکتر از یک میلی‌متر، موتورهای میکروسکوپی و چرخدنده‌هایی کوچکتر از یک تار مو وجود دارد. وزن کم، ابعاد کوچک، مصرف انرژی پایین و دوام بالای سیستم‌های میکروالکترومکانیکی باعث جذابیت بیشتر این سیستم‌ها گردیده است. از مهمترین انواع میکرو/نانوسیستم‌ها، تجهیزات مبتنی بر تحریک

[1] MEMS
[2] Accelerometer

Please cite this article using:

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

M. Aghababaie Beni, M. R. Ghazavi Khorasgnai, Gh. Rezazadeh, A study of fluid media and size effect on dynamic response of microplate, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 9, pp. 153-164, 2017 (in Persian)

الکترواستاتیک هستند که با استفاده از تغییر ظرفیت خازنی عمل می‌کنند. این تحریک الکترواستاتیک باعث به‌وجود آمدن خصوصیات غیرخطی و ناپایداری ذاتی در تجهیزات میکرو/نانوالکترومکانیکی می‌گردد. علاوه بر این برهم‌کنش حیطه‌های مختلف نظیر ارتعاشات، فشار فیلم سیال[1]، انتقال حرارت و الکتریسیته باعث تشدید رفتارهای غیرخطی می‌شود. از جمله این اثرات می‌توان به میرایی ناشی از فشار فیلم سیال، کشیدگی صفحه میانی[2]، اثرات رقیق شدگی سیال، نیروی کازیمیر[3] و وان‌دروالس[4] که مربوط به اثرات ابعاد نانو می باشند و اثرات اندازه[5] برای سازه و سیال اشاره کرد.

تحقیقات گسترده‌ای برای بررسی رفتار دینامیکی میکرو/نانوسیستم‌ها صورت پذیرفته است. در تحقیق یونس اثرات ترموالاستیک و میرایی لایه فشرده سیال با استفاده از روش اغتشاشات مورد بررسی قرار گرفته است [1]. علاوه بر آن یونس و نایفه شبیه‌سازی رفتار میکروصفحات مستطیلی با در نظر گرفتن میرایی سیال را ارائه کردند [2]. کریلوف به بررسی ناپایداری دینامیکی میکروتیرها در حضور لایه فشرده سیال پرداخته است [3].

اثرات اندازه[6] در سیستم‌های میکرو/نانو در تحقیقات بسیاری مورد توجه قرار گرفته است. تئوری‌های کوپل تنش اصلاح شده[7] توسط لم و همکاران [4] اثر اندازه در ماده را به یک پارامتر وابسته می‌کرد که تحت عنوان پارامتر مقیاس طول [8] شناخته می‌شود. حاج اسفندیاری و درگوش [5] در تحقیقی به این نتیجه رسیدند که دو پارامتر اثر اندازه در تئوری کوپل تنش[9]، وابسته به یکدیگرند. همچنین نتایج آزمایشگاهی نشان می‌دهد که تئوری میکروپولار[10] که توسط ارینگن در سال 1966 ارائه شده و اثر اندازه و چرخش مولکول‌های سیال را در نظر می‌گیرد تئوری مناسبی برای مدل کردن جریان سیال فشرده در ابعاد میکرو می‌باشد [6]. پندی و پرتاب با در نظر گرفتن معادله رینولدز برای فیلم فشرده سیال به بررسی اثر دمپینگ و فنریت سیال در ارتعاش سه مود اول خمشی یک رزوناتور یک سر گیردار پرداختند [7]. همچنین چاترجی و پوهیت به بررسی رفتار ارتعاشی در سه مود اول خمشی یک رزوناتور تحت اثر فیلم فشرده سیال با فشارهای مختلف پرداختند [8]. در این تحقیق که ولتاژ مستقیم بزرگ و ولتاژ متناوب کوچک به میکرورزوناتور اعمال شده است به بررسی فاکتور کیفیت و بررسی اثر دمپینگ سیال و ولتاژ مستقیم بزرگ در فاکتور کیفیت برای مودهای خمشی مختلف پرداخته شده است و اثر مدل جریان سیال تراکم‌ناپذیر و تراکم‌پذیر در فیلم فشرده سیال نشان داده شده است. در غالب تحقیقات اشاره شده میدان سیال و همین‌طور میدان جامد به صورت کلاسیک مدل شده و برای تطبیق آن‌ها با نتایج آزمایشگاهی سعی بر اعمال ضرایب تصحیح مانند تنش پسماند در سازه شده است.

در این تحقیق با در نظر گرفتن اثر اندازه هم برای سیال و هم برای جامد و همچنین در نظر گرفتن اثرات غیرخطی در تغییر شکل‌های بزرگ سازه شبیه‌سازی رفتار اندرکنش سیال و سازه هرچه بیشتر منطبق با نتایج واقعی باشد. مدل استفاده شده در این تحقیق یک میکروصفحه دوسرگیردار است که توسط نیروی الکترواستاتیک تحریک می‌شود. فضای بین بستر صلب[11] میکروصفحه دوسرگیردار فیلم فشرده سیال در نظر گرفته می‌شود.

[1] Squeeze film
[2] Mid-plane stretching
[3] Casimir
[4] Van der Waals
[5] Size effect
[6] Size effect
[7] Modified Couple Stress Theory(MCST)
[8] Length scale parameter
[9] Couple Stress Theory(CST)
[10] Micropolar
[11] Substrate

معادله حرکت صفحه با استفاده از تئوری مرتبه اول برشی و تئوری کوپل تنش و در نظر گرفتن کرنش‌های غیرخطی ون‌کارمن به‌دست می‌آید. معادله حاکم بر فشار سیال نیز معادله رینولدز غیرخطی و به‌کارگیری تئوری میکروپلار برای لحاظ کردن اثر اندازه در سیال می‌باشد. با استفاده از روش المان محدود معادلات حرکت ورق به فرم معادلات دیفرانسیل معمولی در آمده و با استفاده از روش انتگرال‌گیری مستقیم نیومارک در بازه زمان حل می شود. همزمان و در هر پله از حل معادله رینولدز نیز به روش اختلاف محدود گسسته‌سازی شده وحل می‌شود و از نتایج آن که فشار وارد بر سطح ورق می‌باشد در معادله دیفرانسیل ورق به صورت نیروی اعمالی بر سطح ورق در هر پله از زمان استفاده می‌شود. اثرات اندازه و اثر کشیدگی صفحه‌ی میانی ورق بر رفتار دینامیکی ورق و همچنین تغییرات فاکتور کیفیت نسبت به پارامترهای مختلف به عنوان نتایج این مقاله ارائه می‌شود.

2- معادلات حاکم

2-1- میرایی ناشی از فیلم فشرده سیال

برای مدل کردن این اثر یکی از مناسب‌ترین روش‌ها استفاده از معادله سیال تراکم‌پذیر است که تحت عنوان معادله رینولدز شناخته می‌شود. معادله رینولدز در مختصات دکارتی به‌صورت زیر می‌باشد [9].

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h^3 P\frac{\partial P}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(h^3 P\frac{\partial P}{\partial y}\right)=12\eta\left(h\frac{\partial P}{\partial t}+P\frac{\partial h}{\partial t}\right)$$
$$h=d_0-w \tag{1}$$

اگر سیال پیوسته نباشد استفاده از این معادله مجاز نمی‌باشد. بررسی پیوستگی سیال توسط عدد نودسن[12] انجام می‌شود. این عدد به صورت زیر تعریف می‌شود [9].

$$\mathrm{K_n}=\frac{\lambda}{h} \tag{2}$$

$$\lambda=\frac{P_0\lambda_0}{P_a} \tag{3}$$

برای $\mathrm{K_n}<0.01$ جریان پیوسته می‌باشد. در سیستم‌های میکروالکترو مکانیکی که دارای فواصلی بسیار کوچک هستند و سیال دارای فشار بسیار اندکی می‌باشد, فرض پیوستگی سیال چندان منطقی نمی‌باشد. با این وجود مطالعات اخیر نشان داده است که در این گونه شرایط نیز می‌توان از رابطه رینولدز استفاده کرد, مشروط بر این‌که از ضریب لزجت مؤثر[13] η_{eff} به جای ضریب لزجت η استفاده کرد. افراد بسیاری به بررسی ضریب لزجت مؤثر پرداخته‌اند. یکی از مناسب‌ترین روابط توسط ویجولا[14] برای تصحیح رابطه رینولدز ارائه شده است [10].

$$\eta_{\mathrm{eff}}=\frac{\eta}{1+9.638\mathrm{K_n}^{1.159}} \tag{4}$$

حال در صورت لحاظ کردن اثر اندازه برای سیال و استفاده از تئوری‌های مرتبه بالاتر مانند تئوری میکروپولار معادله رینولدز به‌صورت زیر مورد استفاده قرار می گیرد [11].

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(f(N,l_{\mathrm{fld}},h)P\frac{\partial P}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(f(N,l_{\mathrm{fld}},h)P\frac{\partial P}{\partial y}\right)$$
$$=12\eta_{\mathrm{eff}}\frac{\partial}{\partial t}(Ph)$$
$$f(N,l_{\mathrm{fld}},h)=h^3+12l_{\mathrm{fld}}^2h-6N^2l_{\mathrm{fld}}h^2\coth\left(\frac{Nh}{2l_{\mathrm{fld}}}\right) \tag{5}$$

پارامتر کوپلینگ N وابستگی حرکت خطی و دورانی مولکول‌های سیال ناشی از میکرودوران‌ها را مشخص می‌کند و l_{fld} خصوصیاتی از سیال که

[12] Knudsen
[13] Effective viscosity coefficient
[14] veijola

وابستگی به اندازه مولکول‌های آن دارد را مشخص می‌کند [12]. این دو پارامتر، پارامترهای میکروپلار نامیده می‌شوند. زمانی که پارامتر طول مشخصه سیال و پارامتر کوپلینگ به سمت صفر میل کنند سیال رفتار نیوتنی خواهد داشت.

$$l_{\mathrm{fld}} = \left(\frac{\gamma}{4\eta}\right)^{0.5} \qquad , N = \left(\frac{\mu}{2\eta+\mu}\right)^{0.5} \tag{6}$$

همواره مقادیر $2\eta+\mu$ و μ بزرگتر یا مساوی صفر می باشد و با توجه به محدودیت‌های ترمودینامیکی مقدار پارامتر کوپلینگ $0 < N^2 < 0.5$ است.

2-2- معادلات حرکت میکرو صفحه

برای مدل کردن میکروصفحه انعطاف‌پذیر از تئوری‌های مختلفی می‌توان استفاده کرد که مهمترین آن‌ها عبارتند از: تئوری کلاسیک صفحات[1]، تئوری مرتبه اول و تئوری‌های مراتب بالاتر[2]. یک میکرو صفحه با تحریک الکتریکی، یک سیستم شامل دو ورق موازی است که یکی از ورق‌ها ثابت و صلب, و ورق دیگر الاستیک درنظر گرفته می‌شود که دارای تکیه‌گاه دوسر درگیر است. طول ورق برابر L و عرض ورق برابر b می‌باشد. "شکل 1" نمایی از میکروصفحه دارای شرایط مرزی دو سردرگیر نمایش می دهد.

میدان جابجایی با استفاده از تئوری مرتبه اول تنش برشی به صورت زیر است [13]:

$$\begin{Bmatrix} u(x,y,z,t) \\ v(x,y,z,t) \\ w(x,y,z,t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0(x,y,z,t) \\ v_0(x,y,z,t) \\ w_0(x,y,z,t) \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \phi_x(x,y,z,t) \\ \phi_y(x,y,z,t) \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{7}$$

با توجه به رابطه جابجایی ارائه شد، مولفه‌های کرنش به‌صورت زیر خلاصه می‌شود [13]:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2 \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial y} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{8}$$

ترم‌های $(1/2)\cdot(\partial w_0/\partial x)^2$ و $(1/2)\cdot(\partial w_0/\partial y)^2$ و $(\partial w_0/\partial x)\cdot(\partial w_0/\partial y)$ کرنش‌های غیرخطی ون کارمن هستند که به منظور در نظر گرفتن تغییر شکل‌های زیاد در نظر گرفته می شوند.

بردارهای دوران ناشی از میدان جابجایی به صورت زیر است[5]:

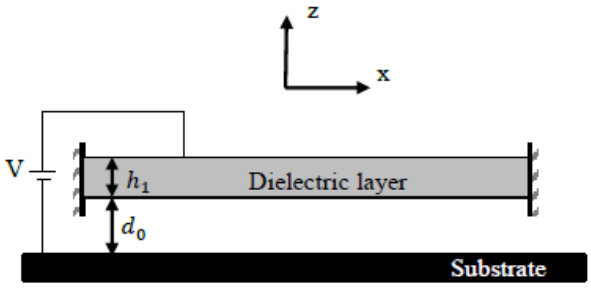

Fig. 1 schematics of clamped-clamped microplate

شکل 1 نمایش میکروصفحه دارای شرایط مرزی دو سر درگیر

[1] Classical plate theory(CPT)
[2] Higher-order shear deformation theory

$$\begin{Bmatrix} \omega_1(x,y,z,t) = \omega_x \\ \omega_2(x,y,z,t) = \omega_y \\ \omega_3(x,y,z,t) = \omega_z \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial y} - \phi_y \\ \phi_x - \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y} + z\left(\frac{\partial \phi_y}{\partial x} - \frac{\partial \phi_x}{\partial y}\right) \end{Bmatrix} \tag{9}$$

بردارهای انحناء حاصله از بردارهای دوران به صورت زیر است[5]:

$$\begin{Bmatrix} \kappa_x = \kappa_{zy} \\ \kappa_y = \kappa_{xz} \\ \kappa_z = \kappa_{yx} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} \frac{\partial \omega_z}{\partial y} - \frac{\partial \omega_y}{\partial z} \\ \frac{\partial \omega_x}{\partial z} - \frac{\partial \omega_z}{\partial x} \\ \frac{\partial \omega_y}{\partial x} - \frac{\partial \omega_x}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \phi_y}{\partial y} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}) \end{Bmatrix}$$

$$+\frac{1}{4}z\begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{10}$$

مقادیر معادل با مولفه‌های بردار انحنا که با دو اندیس نشان داده شده‌اند، κ_{ij}، معرف مولفه‌های تانسور شبه متقارن انحنا هستند.

با استفاده از نسخه دینامیکی اصل جابجایی‌های مجازی[3] نهایتاً معادلات حاکم بر صفحه به صورت زیر به دست می‌آید [13]:

$$\delta u_0: \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 \tilde{N}_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \tilde{N}_x}{\partial x \partial y}\right) - I_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = 0$$

$$\delta v_0: \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 \tilde{N}_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \tilde{N}_x}{\partial x^2}\right) - I_0 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} = 0$$

$$\delta w_0: \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 \tilde{N}_{xy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{N}_{xy}}{\partial y^2}\right) + \tilde{N} + q$$
$$-(P - P_0) - I_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} = 0$$

$$\delta \phi_x: \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 \tilde{M}_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \tilde{M}_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \tilde{N}_{xy}}{\partial x}\right)$$
$$-I_2 \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} = 0$$

$$\delta \phi_x: \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 \tilde{M}_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \tilde{M}_x}{\partial x^2} - \frac{\partial \tilde{N}_{xy}}{\partial y}\right)$$
$$-I_2 \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2} = 0$$

$$\tilde{N} = \frac{\partial}{\partial x}\left(N_{xx}\frac{\partial w_0}{\partial x} + N_{xy}\frac{\partial w_0}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(N_{yy}\frac{\partial w_0}{\partial y} + N_{xy}\frac{\partial w_0}{\partial x}\right) \tag{11}$$

که فشاردینامیک سیال $(P - P_0)$ و نیروی واحد سطح حاصل از نیروی الکترواستاتیک $q = -V^2/2(d_0 - w_0(x,y,t))^2$ است و در حل همزمان معادله (11) و (5) در هر مرحله زمانی به‌دست خواهد آمد. روابط سازگاری و تنش‌ها و کرنش‌ها در پیوست الف آمده است.

شرایط مرزی ساختاری وارد بر معادلات فوق به صورت زیر است:

$$x = 0, l: u_0 = v_0 = w_0 = \phi_x = \phi_y = 0$$

$$y = 0, b: N_{yy} - \frac{1}{4}\frac{\partial \tilde{N}_y}{\partial x} = N_{xy} + \frac{1}{4}\frac{\partial \tilde{N}_y}{\partial y} = 0$$

[3] The principle of virtual displacements

$$Q_y + N_{yy}\frac{\partial w_0}{\partial y} + N_{xy}\frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{1}{4}\frac{\partial \hat{N}_{xy}}{\partial y} = 0$$
$$M_{yy} - \frac{1}{4}\frac{\partial \hat{M}_y}{\partial x} + \frac{1}{4}\hat{N}_{xy} = M_{xy} + \frac{1}{4}\frac{\partial \hat{M}_y}{\partial y} - \frac{1}{4}\frac{\partial \hat{M}_x}{\partial x} = 0 \quad (12)$$

شرایط مرزی برای معادله رینولدز به صورت زیر است:

$$x = 0, l: \quad \frac{\partial P}{\partial x} = 0$$
$$y = 0, b: \quad P = P_0 \quad (13)$$

برای حل معادلات فوق روش‌های مختلفی وجود دارد. با توجه به این‌که معادلات دارای پارامترهای زیاد و شکل پیچیده‌ای است می‌توان ادعا کرد که روش المان محدود مناسب‌ترین روش برای حل می‌باشد. با استفاده از روش گلرکین و انتگرال‌گیری جزء به جزء می‌توان مدل المان محدود معادلات را که درحالت کلی به شکل معادله (14) است به‌دست آورد [13].

$$[M]\{\ddot{W}\} + ([K] + [G])\{W\} = \{F\} \quad (14)$$

ماتریس‌های $\{F\}$، $\{W\}$، $[G]$، $[K]$ و $[M]$ به ترتیب ماتریس‌های نیرو، خیز، نیروی درون صفحه‌ای، سختی و جرم نامیده می‌شوند. در مدل المان محدود ارائه شده ماتریس سختی و بردار نیرو به بردار تغییر شکل وابستگی دارد که برای بیان این مطلب رابطه فوق به صورت زیر بازنویسی می‌شود.

$$[M]^{(k)}\{\ddot{W}\}^{(k+1)} + ([K(W)] + [G])^{(k)}\{W\}^{(k+1)} = \{F(W)\}^{(k)} \quad (15)$$

با توجه به ماهیت غیرخطی و کوپل بودن معادلات باید از روش‌های تکرار برای همگرایی و حل معادلات استفاده شود. ماتریس‌های جرم و سختی مربوط به صفحه می باشند که در بسیاری از مقالات ارائه شده اند. در پیوست ب عناصر داخلی این ماتریس‌ها بر مبنای تئوری مرتبه اول غیرخطی و در نظر گرفتن اثر اندازه بیان شده است.

برای تحلیل عددی از المان نه گره ای سهموی لاگرانژی استفاده می شود و طریقه نامگذاری گره‌ها در هر المان در "شکل 2" نشان داده شده است. رابطه (16) توابع درونیابی المان نه گره ای سهموی لاگرانژی را نشان می‌دهد.

$$\begin{Bmatrix} \psi_1^e \\ \psi_2^e \\ \psi_3^e \\ \psi_4^e \\ \psi_5^e \\ \psi_6^e \\ \psi_7^e \\ \psi_8^e \\ \psi_9^e \end{Bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{Bmatrix} (1-\xi)(1-\beta)(-\beta-\xi-1) + (1-\xi^2)(1-\beta^2) \\ 2(1-\xi^2)(1-\beta) - (1-\xi^2)(1-\beta^2) \\ (1+\xi)(1-\beta)(-\beta+\xi-1) + (1-\xi^2)(1-\beta^2) \\ 2(1-\xi)(1-\beta^2) - (1-\xi^2)(1-\beta^2) \\ 4(1-\xi^2)(1-\beta^2) \\ 2(1+\xi)(1-\beta^2) - (1-\xi^2)(1-\beta^2) \\ (1-\xi)(1+\beta)(\beta-\xi-1) + (1-\xi^2)(1-\beta^2) \\ 2(1-\xi^2)(1+\beta) - (1-\xi^2)(1-\beta^2) \\ (1+\xi)(1+\beta)(\beta+\xi-1) + (1-\xi^2)(1-\beta^2) \end{Bmatrix} \quad (16)$$

2-3- بدست آوردن توزیع فشار لایه سیال بر روی میکروصفحه

یکی از دقیق‌ترین روش‌ها، استفاده از معادله رینولدز می‌باشد که در

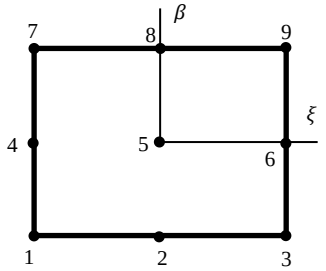

Fig. 2 Nine node lagrangian element

شکل 2 طریقه نامگذاری گره‌ها در یک المان نه گرهی

جابجایی‌های اندک میکروصفحه استفاده از مدل خطی کفایت می‌کند ولی در تغییر شکل‌های بزرگ ناگزیر به استفاده از مدل غیرخطی معادله رینولدز هستیم. فرم غیرخطی معادله رینولدز در رابطه (1) نشان داده شده است. برای درنظر گرفتن اثر رقت سیال از η_{eff} استفاده شده که با توجه به رابطه ویجولا به صورت زیر می‌باشد.

$$\eta_{\text{eff}} = \frac{\eta}{1 + 9.638{K_n}^{1.159}} = \frac{\eta}{1 + 9.638\left(\frac{P_0\lambda_0}{P_a(d_0 - w_0(x,y,t))}\right)^{1.159}} \quad (17)$$

برای حل معادله فشارسیال و معادله حرکت میکروصفحه از روش ترکیب المان محدود و اختلاف محدود استفاده می شود، به این صورت که ابتدا در هر گام زمانی معادله حرکت میکروصفحه به روش المان محدود حل شده و سپس با استفاده از خیز محاسبه شده در مرحله قبل و استفاده از روش تفاضل محدود برای معادله رینولدز مقادیر فشار سیال بدست می‌آید که مجدداً برای گام زمانی بعدی از این فشار بدست آمده خیز تیر به روش المان محدود از معادله حرکت بدست می‌آید.

با استفاده از معادله (1) معادله رینولدز غیرخطی را به صورت زیر بازنویسی می کنیم:

$$h^3\left(\frac{\partial^2(P^2)}{\partial x^2}\right) + 3h^2\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial(P^2)}{\partial x} + h^3\left(\frac{\partial^2(P^2)}{\partial y^2}\right) + 3h^2\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial(P^2)}{\partial y} = 24\eta_{\text{eff}}\left(h\frac{\partial P}{\partial t} - P\frac{\partial w_0}{\partial t}\right) \quad (18)$$

استفاده از این شکل معادله رینولدز در واقع برای کمک به همگرایی بهتر مدل تفاضل محدود می باشد. برای همین منظور به این شکل بازنویسی شده است تا احتمال همگرایی افزایش یابد. متاسفانه برای مدل‌های غیر خطی در روش تفاضل محدود همانند آنچه در مدل‌های خطی معیار پایداری ارائه می شود معیاری وجود ندارد. با این وجود از معیار پایداری ون نیومن[1] برای اطمینان از حل مناسب مسئله استفاده می شود[14].

$$\frac{P_0{d_0}^2\Delta t\left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}\right)}{6\eta_{\text{eff}}} < 1 \quad (19)$$

در صورت عدم برقراری معیار بالا احتمال همگرایی پاسخ بسیار ضعیف می‌باشد. شکل گسسته معادله رینولدز غیر خطی برای بدست آوردن فشار در زمان $t+1$ به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} P_{i,j}^{t+1} &= P_{i,j}^t + \frac{P_{i,j}^t(w_{i,j}^{t+1} - w_{i,j}^t)}{(d_0 - w_{i,j}^t)} \\ &+ \frac{\Delta t(d_0 - w_{i,j}^t)^2}{24\eta_{\text{eff}}}\left(\frac{(P_{i+1,j}^t)^2 + (P_{i-1,j}^t)^2 - 2(P_{i,j}^t)^2}{\Delta x^2}\right) \\ &+ \frac{\Delta t(d_0 - w_{i,j}^t)^2}{24\eta_{\text{eff}}}\left(\frac{(P_{i,j+1}^t)^2 + (P_{i,j-1}^t)^2 - 2(P_{i,j}^t)^2}{\Delta y^2}\right) \\ &- \frac{\Delta t(d_0 - w_{i,j}^t)}{8\eta_{\text{eff}}}\frac{(w_{i+1,j}^t - w_{i-1,j}^t)\left((P_{i+1,j}^t)^2 - (P_{i-1,j}^t)^2\right)}{4\Delta x^2} \\ &- \frac{\Delta t(d_0 - w_{i,j}^t)}{8\eta_{\text{eff}}}\frac{(w_{i,j+1}^t - w_{i,j-1}^t)\left((P_{i,j+1}^t)^2 - (P_{i,j-1}^t)^2\right)}{4\Delta y^2} \end{aligned} \quad (20)$$

برای تعیین فشار سیال در هر گام زمانی، ابتدا شرط مرزی فشار ثابت را بر روی لبه‌های آزاد میکروصفحه در نظر گرفته و سپس از معادله فوق برای تعیین فشار نقاط داخلی استفاده می‌شود. در نهایت شرط مرزی گرادیان فشار را در لبه‌های گیردار اعمال می‌شود. به این صورت توزیع فشار در تمامی نقاط سطح میکروصفحه بدست خواهد آمد. در میکروصفحه دوسرگیردار مورد

[1] Von Newman

بررسی در دو سمت گیردار شار فشار صفر و در دو سمت دیگر فشار ثابت و برابر فشار محیط است.

شکل معادله تفاضل محدود برای بدست آوردن توزیع فشار لایه سیال با لحاظ کردن اثر اندازه در سیال به صورت زیر می باشد.

$$P_{i,j}^{t+1} = P_{i,j}^{t} + \frac{P_{i,j}^{t}(w_{i,j}^{t+1} - w_{i,j}^{t})}{(d_0 - w_{i,j}^{t})} + \frac{\Delta t}{24\eta_{\text{eff}}(d_0 - w_{i,j}^{t})} \cdot \left(\frac{(P_{i+1,j}^{t})^2 + (P_{i-1,j}^{t})^2 - 2(P_{i,j}^{t})^2}{\Delta x^2} + \frac{(P_{i,j+1}^{t})^2 + (P_{i,j-1}^{t})^2 - 2(P_{i,j}^{t})^2}{\Delta y^2} \right) \cdot \Pi 1 - \frac{\Delta t}{24\eta_{\text{eff}}(d_0 - w_{i,j}^{t})} \cdot \left(\frac{(w_{i+1,j}^{t} - w_{i-1,j}^{t})\left((P_{i+1,j}^{t})^2 - (P_{i-1,j}^{t})^2\right)}{4\Delta x^2} + \frac{(w_{i,j+1}^{t} - w_{i,j-1}^{t})\left((P_{i,j+1}^{t})^2 - (P_{i,j-1}^{t})^2\right)}{4\Delta y^2} \right) \cdot \Pi 2$$

$$\Pi 1 = (d_0 - w_{i,j}^{t})^3 - 6N^2 l_{\text{fld}} (d_0 - w_{i,j}^{t})^2 \cdot \coth\left(\frac{Nh}{2l_{\text{fld}}}(d_0 - w_{i,j}^{t})\right) + 12 l_{\text{fld}}^2 (d_0 - w_{i,j}^{t})$$

$$\Pi 2 = 3(d_0 - w_{i,j}^{t})^2 - 12N^2 l_{\text{fld}} (d_0 - w_{i,j}^{t}) \cdot \coth\left(\frac{Nh}{2l_{\text{fld}}}(d_0 - w_{i,j}^{t})\right) - 3N^3 (d_0 - w_{i,j}^{t})^2 \cdot \left(1 - \coth^2\left(\frac{Nh}{2l_{\text{fld}}}(d_0 - w_{i,j}^{t})\right)\right) + 12 l_{\text{fld}}^2 \quad (21)$$

3- الگوریتم حل رفتار دینامیکی

عوامل موثری بسیاری وجود دارند که بر پاسخ دینامیکی میکروصفحه تاثیر می‌گذارند. فشار سیال درون محفظه، ابعاد میکروصفحه، شرایط تحریک الکترواستاتیک و شرایط مرزی سازه از آن جمله‌اند. معادله حاکم بر رفتار دینامیکی در شکل کلی به صورت معادله (22) است.

$$[M]\{\ddot{W}\} + [C]\{\dot{W}\} + ([K] + [G])\{W\} = \{F\} \quad (22)$$

روش‌های متفاوتی برای حل این معادله وجود دارد. از روش‌های معمول حل، روش انتگرال‌گیری مستقیم نیومارک است که در آن معادله رفتار دینامیکی بصورت عددی و به شیوه گام به گام حل می شود. در این روش، بردارهای تغییر مکان، سرعت و شتاب اولیه (مربوط به زمان صفر) معلوم فرض شده و با توجه به روش عددی در نظر گرفته شده، بردارهای تغییر مکان، سرعت و شتاب در گام‌های زمانی بعدی محاسبه می گردد. در تحلیل دینامیکی علاوه بر اینکه اثر اینرسی لحاظ می‌شود، اثرات فشار سیال و اثرات اندازه هم لحاظ می‌شود. در این روش حل هم می‌توان اثرات تغییر فرکانس تحریک در رفتار میکروصفحه را مشاهده کرد و هم می توان ولتاژ بحرانی دینامیکی را برای ولتاژهای اعمالی به صورت پله و برای ولتاژهای نوسانی در فرکانس‌های مختلف مشاهده کرد.

بررسی رفتار ناپایداری با استفاده از رسم دیاگرام فاز و همچنین تغییرات میزان فرکانس طبیعی سیستم انجام می‌شود.

3-1- تحلیل دینامیکی میکروصفحه با استفاده روش المان محدود-اختلاف محدود

برای بررسی رفتار دینامیکی برای یافتن خیز در هر گام زمانی ابتدا معادله رینولدز را به روش تفاضل محدود حل کرده و فشار سیال را بدست می آوریم. با استفاده از فشار سیال و خیز میکروصفحه و فشار مرحله قبل، خیز در مرحله جدید به روش المان محدود بدست می‌آید. برای بررسی رفتار دینامیکی توسط کد محاسباتی ابتدا از همگرایی مساله اطمینان حاصل می-کنیم. میکرروصفحه به طول 210 میکرومتر که توسط تیلمان و همکاران[15] مورد آزمایش قرار گرفته را برای تعداد المان‌ها و گام‌های زمانی مختلف مورد تحریک دینامیکی 6 ولت به صورت پله با فشار محفظه 50 میلی بار قرار داده و نمودارهای آنها ترسیم شده است تعداد المان‌های عرضی میکروصفحه 5 در نظر گرفته شده است. سایر مشخصات میکروصفحه در جدول 1 آمده است. لازم به ذکر است از معادله رینولدز غیرخطی و تصحیح اثر لزجت سیال ویژولا استفاده شده است.

نتایج در "شکل‌های 3 و 4" نشان داده شده است. نتایج نشان می دهد که برای $n > 30$ و $\Delta t < 1 \times 10^{-8}$ همگرایی حاصل شده است. وجود دمپینگ سیال باعث از بین رفتن قسمت اعظم نوسانات سیستم پس از 20 میکروثانیه می شود.

برای بررسی صحت عملکرد کد المان محدود نتایج ارائه شده توسط کریلوف برای یک سیستم میرا را می‌توان ملاک صحه سنجی قرار داد [16]. این میکرو سیستم دوسردرگیر می باشد که دارای فاصله هوایی 2 میکرومتر است. به دلیل فاصله هوایی قابل توجه در ولتاژهای بالا تاثیر کشیدگی میکروسیستم بر رفتار دینامیکی قابل مشاهده است. نتایج بدست آمده با استفاده از تئوری مرتبه اول خطی و غیرخطی با نتایج موجود در مقاله کریلف مقایسه شده است. نتیجه مقایسه نشان می‌دهد که در تئوری غیرخطی به دلیل منظور شدن اثر کشیدگی، به ازای ولتاژی مشخص مقدار خیز کمتر از حالت مربوط به تئوری خطی بدست می آید و در نتیجه ولتاژ بحرانی افزایش می‌یابد. نتایج تئوری مرتبه اول غیرخطی بسیار منطبق با نتایج کریلف می‌باشد. مشخصات میکرو صفحه در جدول 2 آمده و "شکل 5 و 6" مقایسه بین نتایج این پژوهش با نتایج کریلف"شکل 7" می‌باشد.

حال پس از بررسی اعتبار کد محاسباتی، بررسی پارامترهای دیگر که در این مقاله موردنظر نگارنده بوده با بررسی اثر اندازه در پاسخ دینامیکی

جدول 1 مشخصات تیر مورد استفاده برای بررسی همگرایی کد محاسباتی

Table 1 Microbeam characteristics used for code convergence

طول (μm)	ضخامت (μm)	فاصله هوایی (μm)	عرض (μm)	نیروی درون صفحه (N)	مدول یانگ (GPa)
210	1.5	1.18	100	0.0009	166

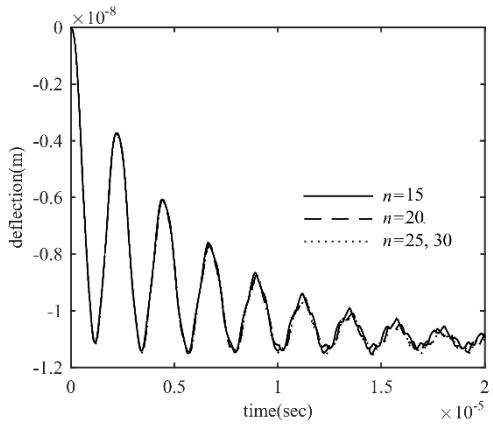

Fig. 3 Dynamic response of microplate to the step voltage of 6V and different longitudinal elements with nonlinear FSDT method

شکل 3 رفتار دینامیکی میکروصفحه به ازای ولتاژ پله 6 ولت و تعداد المان‌های طولی مختلف با استفاده از مدل FSDT غیرخطی

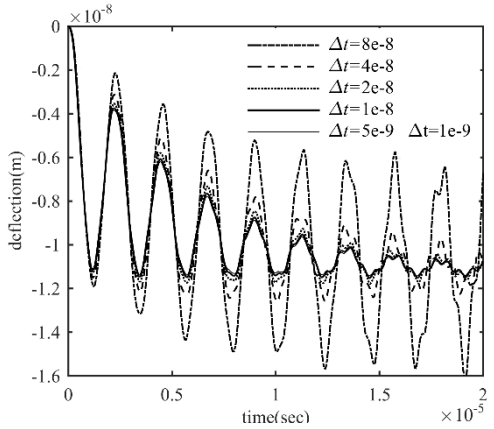

Fig. 4 Dynamic response of microplate to the step voltage of 6V and different time step with nonlinear FSDT method

شکل 4 رفتار دینامیکی میکروصفحه به ازای ولتاژ پله 6 ولت و گام‌های زمانی مختلف با استفاده از مدل FSDT غیرخطی

سیستم پیگیری می‌شود. برای این منظور ابتدا پارامتر مقیاس طول برای برخی مواد رایج در ساخت میکروسیستم‌ها در جدول 3 برای تک کریستال‌ها[1] مشاهده می‌شود. مقدار این پارامتر مستقیماً به جهت‌گیری کریستال‌ها در ساختار ماده و اندازه دانه[2]های بستگی دارد [17] مقادیر پارامتر مقیاس طول کمتر مربوط به جهت (1 0 0) و بیشترین مربوط به جهت (1 1 0) می‌باشد.

در تحقیقی دیگر بر روی فلز طلا رابطه بین پارامتر مقیاس طول و ضخامت میکروسیستم مورد بررسی قرار گرفته است [18]. مقدار پارامتر مقیاس طول برای ضخامت دو میکرومتر با مقادیر جدول 3 هم‌خوانی دارد. مقادیر در جدول 4 آمده است.

طلا و نقره و نیکل و آلومینیوم کاربرد فراوانی در صنعت ساخت ابزارهای

جدول 2 مشخصات تیر مورد استفاده توسط کریلف[16]

Table 2 Microbeam characteristics used with krylov [16]

طول(μm)	ضخامت(μm)	عرض(μm)	فاصله هوایی(μm)	ضریب پواسون	مدول یانگ(GPa)
300	2	20	2	0.28	166

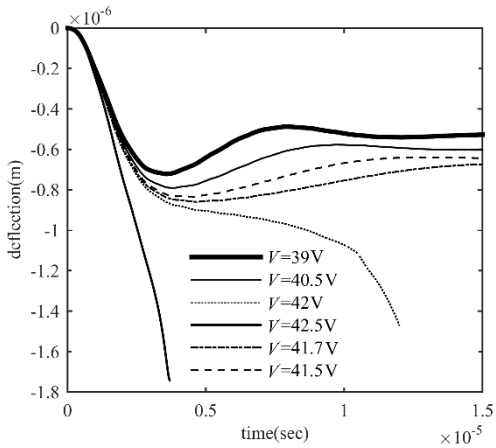

Fig. 5 Dynamic response of middle node of microplate with linear FSDT theory

شکل 5 خیز دینامیکی نقطه میانی با استفاده از تئوریی FSDT خطی

[1] Single crystals
[2] Grain size

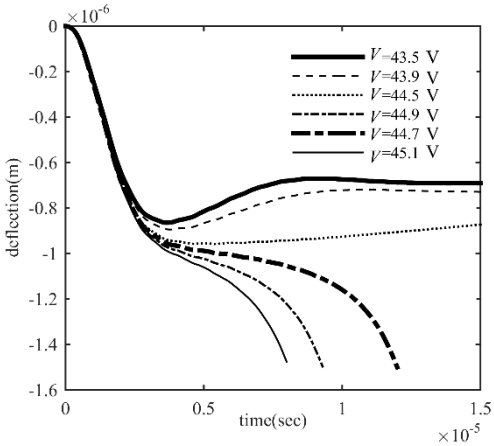

Fig. 6 Dynamic response of middle node of microplate with nonlinear FSDT theory

شکل 6 خیز دینامیکی نقطه میانی با استفاده از تئوریی FSDT غیرخطی

جدول 3 پارامتر مقیاس طول برای برخی مواد رایج در صنعت ساخت ابزار MEMS

Table 3 length scale parameter for some materials used in MEMS device

ماده	نیکل			نقره			طلا		
جهت کریستال	(111)	(011)	(001)	(111)	(011)	(001)	(111)	(011)	(001)
پارامتر مقیاس طول (μm)	8.42	11.32	6.51	1.21	4.52	2.91	2.75	3.57	1.15

جدول 4 پارامتر مقیاس طول برای طلا و آلومینیوم براساس ضخامت میکروسازه

Table 4 length scale parameter for Al and Au based on microstructure thickness

	آلومینیوم [19]				طلا [18]		
ضخامت (μm)	0.485	0.2	0.15	0.1	2	1	0.5
پارامتر قیاس طول (μm)	5	4	0.5	0	1.05	0.73	0.47

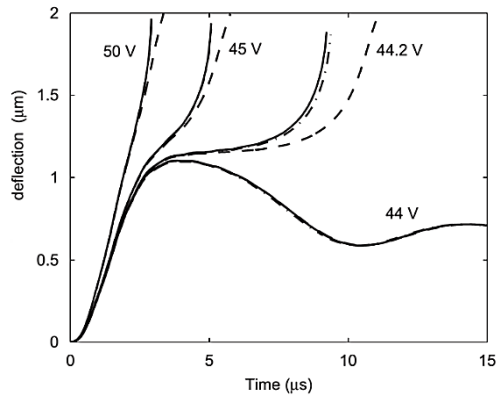

Fig. 7 Result presented by krylov[16]

شکل 7 نتایج ارائه شده توسط کریلف [16]

میکرو دارند. در ساخت میکروسوییچ‌ها و میکرو رزوناتورها از این مواد به عنوان رسانا در کنار ماده ی پرکاربرد این صنعت یعنی سیلیکون استفاده

می‌شود. پارامتر مقیاس طول برای این ماده با توجه به کریستال‌های کوچک آن (اندازه دانه‌ها در سیلیکون بین 10 نانومتر تا یک میکرومتر با توجه به نوع کریستال‌ها و نحوه ی قرارگیر آنها گزارش شده است) اعداد کوچکی می باشد . مقدار مشخصی برای پارامتر مقیاس طول برای سیلیکون بیان نشده است اما انچه روشن است در سیلیکون خصوصیات الاستیک ماده برای ابعاد کوچکتر از 150 نانومتر تغییر می کند که نتایج آزمایشگاهی این مطلب را تایید می‌کند. البته نتایج حاصل از شبیه سازی به روش دینامیک مولکولی تغییر در خواص الاستیک سیلیکون را برای ابعاد کمتر از 10 نانومتر نشان می‌دهد [20]. برای پارامتر مقیاس طول ماده سیلیکون اعداد مشخصی توسط نگارنده یافت نشد اما به نظر می رسد با توجه به اندازه ی دانه‌ها در این ماده و تغییر خصوصیات الاستیک برای طول مشخصه کمتر از 150 نانومتر، بتوان عدد 150 نانومتر را به‌عنوان عدد مبنا در شبیه‌سازی مواد سیلیکونی به عنوان پارامتر مقیاس طول استفاده کرد.

در مواقعی که پارامتر مقیاس طول در مقایسه با طول مشخصه[1] سازه قابل توجه است دیگر نمی‌توان از تئوری‌های کلاسیک استفاده کرد و باید از تئوری‌های مرتبه بالاتر مانند تئوری کوپل تنش یا تئوری گرادیان کرنش استفاده کرد. عدم استفاده از این تئوری‌ها باعث ایجاد اختلاف بین نتایج شبیه‌سازی و نتایج آزمایشات می شود که در گذشته این اختلاف با استفاده از تنش پسماند درون سازه توجیه می شد.

3-2- نتایج شبیه سازی رفتار دینامیکی

برای صحه‌سنجی استفاده از روش کوپل تنش در کد محاسباتی نتایج شبیه‌سازی برای میکروسازه‌ی طلایی را با نتایج به‌دست آمده از کار فتحعلی لو و همکاران و همچنین نتایج ازمایشگاهی مقایسه می شود.

مشخصات میکروسازه مورد استفاده در مرجع [21] در جدول 5 آمده است.

جدول 6 مقادیر ولتاژ ناپایداری استاتیک برای میکروسازه جدول 5 را نشان می‌دهد.

همان‌گونه که در "شکل‌های 8 و 10" مشاهده می‌شود ولتاژ ناپایداری دینامیکی برای دو حالت تئوری کلاسیک و تئوری کوپل تنش به ترتیب 27.35 و 51.95 می‌باشد که به ترتیب معادل با 92.7 و 92.2 درصد مقدار

جدول 5 مشخصات تیر مورد استفاده توسط فتحعلی‌لو[2]

Table 5 Microbeam characteristics used with Fathalilou [21]

طول(μm)	ضخامت(μm)	فاصله هوایی(μm)	عرض(μm)	ضریب پواسون	مدول یانگ(GPa)	چگالی (g/cm^3)
541.8	2.68	2.83	32.2	0.44	98.5	19.3

جدول 6 ولتاژ ناپایداری استاتیک برای طلا-$l = 1.12$ µm - برحسب تئوری‌های مختلف

Table 6 Static pull-in voltage for Au- $l = 1.12$ µm - based on different theories

مقدار آزمایشگاهی	تئوری کوپل تنش	تئوری گرادیان کرنش[21]	تئوری تنش کوپل بهبودیافته[21]	تئوری کلاسیک
57	56.3	49.5	34.5	29.5

[1] Characteristic length

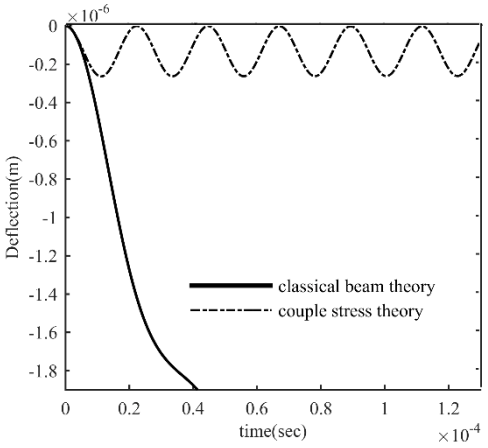

Fig. 8 Dynamic response of Au microsystem to the voltage of 27.35 V

شکل 8 پاسخ دینامیکی میکروسیستم طلا برای ولتاژ 27.35 ولت

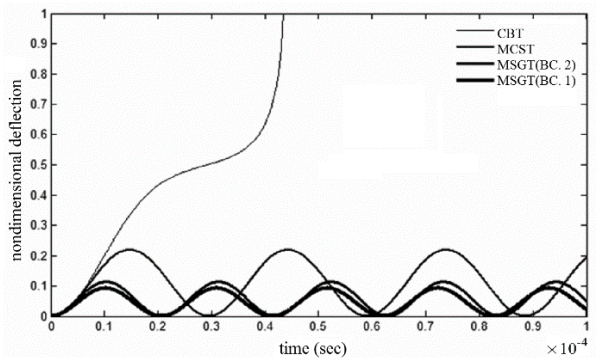

Fig. 9 Dynamic response of Au microsystem to the voltage of 26.35V[21]

شکل 9 پاسخ دینامیکی میکروسیستم طلا برای ولتاژ 26.35 ولت[21]

ناپایداری استاتیک آن‌ها می‌باشد. "شکل 9" نتایج ارائه شده توسط فتحعلی لو وهمکاران برای میکروسیستم مشابه می‌باشد [21].

پیش از این‌که به بررسی رفتار دینامیکی میکروصفحه تحت اثر اندازه پرداخته شود اهمیت استفاده از تئوری مرتبه اول غیرخطی در تغییر شکل‌های بزرگ نشان داده می شود. همان‌گونه که در "شکل 11" نشان داده شده تغییر شکل نقطه وسط صفحه نسبت به زمان برای ولتاژهای مختلف نشان داده شده است. مشخصات صفحه در جدول 7 آمده است و فشار محیط

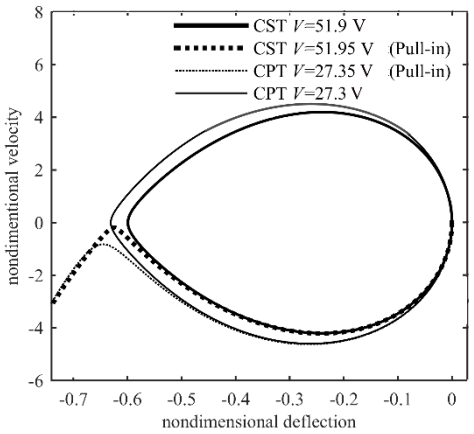

Fig. 10 Phase diagram for Au microsystem based on classical plate theory(CPT) and couple stress theory(CST)

شکل 10 نمودار صفحه فاز برای میکروسیستم طلا بر اساس تئوری کلاسیک و تئوری کوپل تنش

0.2 بار می‌باشد. برای ولتاژ 40 ولت که خیز نقطه میانی اندک می‌باشد تفاوتی در دو تئوری خطی و غیرخطی مشاهده نمی‌شود. ولی با افزایش ولتاژ به 50 و سپس به 60 ولت مشاهده می‌شود که تفاوت این دو تئوری آشکارتر می‌شود. این تفاوت بر این مطلب صحه می‌گذارد که با افزایش ولتاژ اثر کشیدگی صفحه میانی بر رفتار دینامیکی سیستم و سخت‌تر شدن آن به شدت تاثیر می‌گذارد.

بررسی اثر تئوری کوپل تنش در میکروصفحه فوق الذکر با استفاده از تئوری غیرخطی مرتبه اول موردنظر است. صفحه مورد شبیه‌سازی همان صفحه جدول 7 و فشار محیط نیز 0.2 بار می‌باشد. نتایج در "شکل 12" قابل مشاهده است. با توجه به این‌که در تئوری کوپل تنش پارامتر مقیاس طول در صورتی که با کوچکترین بعد سازه در یک مرتبه باشد اثر سخت شوندگی در سازه به‌وضوح قابل مشاهده است می‌توان انتظار داشت که در کلیه ولتاژها وجود اثر اندازه مشاهده شود و این اثر هرچه پارامتر مقیاس طول بزرگتر باشد اثر بیشتری بر سخت شوندگی سیستم می‌گذارد.

کمیت دیگری که بر رفتار دینامیکی میکروسیستم تاثیر قابل توجهی دارد فشار سیال است. در این قسمت با استفاده از روش ارائه شده کوپل المان محدود/اختلاف محدود، میکروسیستم که تحت تاثیر فشار سیال و اثر اندازه قرار دارد مورد مطالعه قرار می‌گیرد. "شکل 13" اثر فشار سیال نیوتنی بر رفتار دینامیکی میکروسیستم (مطابق جدول 7) تحت اثر ولتاژ 60 ولت را نشان می‌دهد. رفتار دینامیکی سیستم تحت اثر ولتاژ 60 ولت برای فشارهای محفظه متفاوت بررسی شده است.

در این شکل مشخص است که افزایش فشار محفظه ، اثر زیادی بر روی نوسانات میکروصفحه داشته به نحوی که با افزایش فشار محفظه نوسانات

جدول 7 مشخصات صفحه مورد استفاده در شبیه سازی اثر کشیدگی صفحه میانی

Table 7 Microplate characteristics used for simulation of mid-plane stretching effect

طول (μm)	ضخامت (μm)	فاصله هوایی (μm)	عرض (μm)	ضریب پواسون	مدول یانگ (GPa)	چگالی (g/cm^3)
250	2	2	50	0.22	1.69	2.33

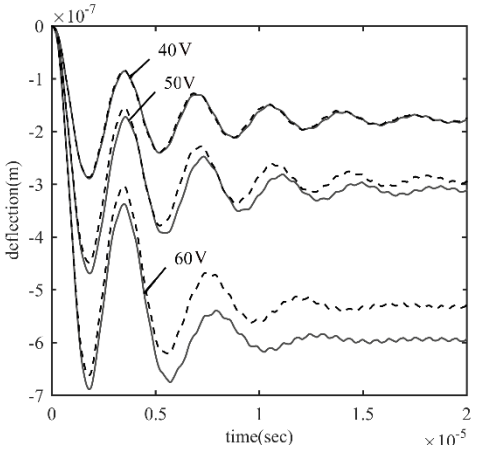

Fig. 11 Dynamic response of middle node with respect to different voltage (---nonlinear FSDT theory and ____ linear FSDT theory)_

شکل 11 خیز دینامیکی نقطه میانی تحت اثر ولتاژهای مختلف با استفاده از تئوری مرتبه اول خطی و غیرخطی (--- غیر خطی و _____ خطی)

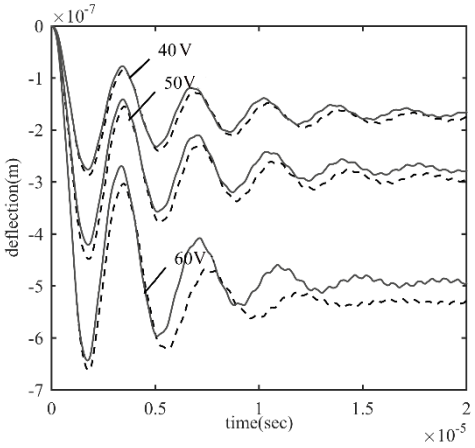

Fig. 12 Dynamic response of middle node with respect to different voltage using nonlinear FSDT(--- $l = 0$ and ____ $l = 150\ nm$)

شکل 12 خیز دینامیکی نقطه میانی تحت اثر ولتاژهای مختلف با استفاده از تئوری مرتبه اول غیرخطی (--- $l = 0$ و _____ $l = 150$ nm)

گذرای سیستم کاهش یافته و ناپایداری دینامیکی آن به تاخیر می‌افتد. اما با گذشت زمان خیز میکروصفحه نهایتاً به سمت یک مقدار حدی همگرا می‌شود و این مساله نشان می‌دهد که فشارهای مختلف محفظه، تنها بر روی پاسخ حالت گذرا موثر است. با توجه به این‌که در این مساله از معادله رینولدز غیرخطی رابطه (1) استفاده شده است برای اطمینان از رسیدن به پاسخ صحیح باید نسبت به همگرایی روابط تفاضل محدود اطمینان حاصل شود. معیار ون نیومن تنها برای مساله رینولدز خطی صادق است، پس صرفاً شرط لازم برای همگرایی رینولدز غیرخطی می‌باشد. با این حال معمولاً در مسایل غیرخطی، گام زمانی نصف گام زمانی پیشنهاد شده توسط معیار ون نیومن به همگرایی مساله کمک می‌کند.

همان‌گونه که در رابطه رینولدز (5) مشاهده می‌شود پارامتر مقیاس طول برای سیال، که در اندرکنش با سازه می‌باشد، نیز متصور است. تا به این مرحله اثرات اندازه در سیال لحاظ نشده است ولی در این قسمت بررسی پارامتریک اثر اندازه سیال در رفتار دینامیک میکروصفحه پرداخته خواهد شد. دو پارامتر طول مشخصه سیال l_{fld} (در بررسی پارامتریک نسبت به فاصله هوایی بی‌بعد شده است l_{fld}/d_0) و پارامتر کوپلینگ N که پارامترهای میکروپلار هستند. پارامتر کوپلینگ برای سیال هوا بین صفر تا 0.4 [22] و

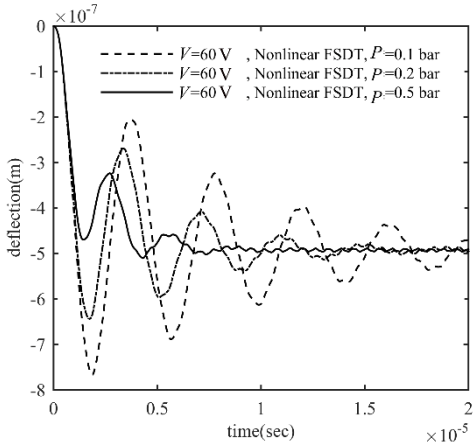

Fig. 13 Dynamic deflection of middle node under the effect of 60 V excitation and different pressure

شکل 13 خیز دینامیکی نقطه میانی تحت اثر ولتاژ 60 ولت و فشارهای مختلف

پارامتر مشخصه طول هم در همین بازه لحاظ می‌شود. "شکل‌های 14و 15 و 16" اثرات پارامتر کوپلینگ بر رفتار دینامیکی میکروسیستم (مطابق جدول 7) تحت اثر ولتاژ 60 ولت و فشار محفظه 0.2 بار را نشان می‌دهد. در مقادیر متفاوت پارامتر مشخصه سیال را نشان می‌دهد. افزایش پارامتر کوپلینگ باعث افزایش فرکانس اول میکروصفحه به ازای تمامی مقادیر پارامتر مقیاس طول سیال می‌شود. این مفهوم به طور واضح تر در "شکل 17" نشان داده شده است.

"شکل‌های 18 و 19 و 20" اثرات پارامتر مشخصه سیال بر رفتار نوسانی میکروصفحه در مقادیر متفاوت پارامتر کوپلینگ را نشان می‌دهد. در این اشکال نیز به وضوح مشخص است که با افزایش پارامتر مشخصه سیال فرکانس اول میکروصفحه کاهش می‌یابد و این کاهش برای مقادیر کوچکتر پارامتر کوپلینگ شدیدتر است. این نتایج به صورت جداگانه در "شکل 21" نشان داده شده است. نتیجه حاصله دیگر از این شبیه‌سازی که در "شکل 22" آمده این است که با افزایش پارامتر مشخصه سیال در ولتاژ و فشار محفظه ثابت فاکتور کیفیت کاهش می‌یابد که این مساله برای تمامی مقادیر پارامتر کوپلینگ صادق است. روش‌های مختلف محاسبه فاکتور کیفیت در مرجع [1] آمده است.

4- نتیجه گیری

در پایان، نکاتی مهم در خصوص مطالب ارائه شده جمع بندی شده است:

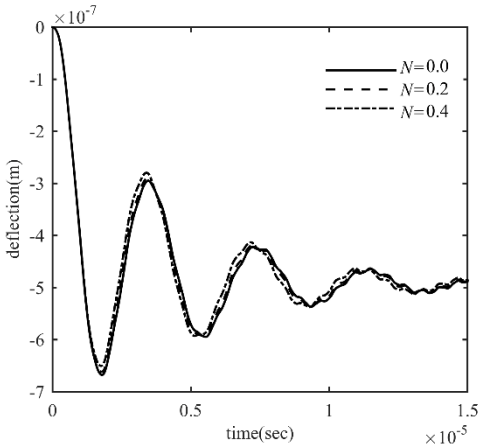

Fig. 14 Dynamic deflection of middle node with $l_{\mathrm{fld}}/d_0 = 0.1$

شکل 14 خیز دینامیکی نقطه میانی برای پارامتر مقیاس طول بدون بعد 0.1

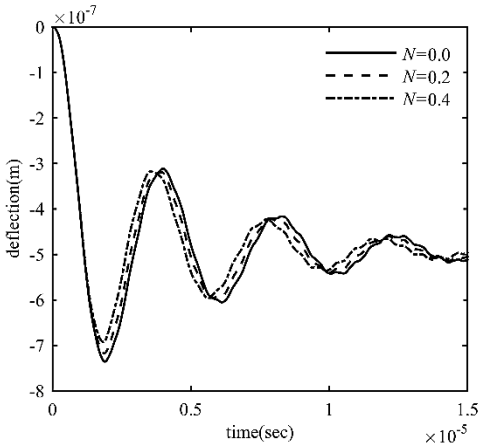

Fig. 15 Dynamic deflection of middle node with $l_{\mathrm{fld}}/d_0 = 0.2$

شکل 15 خیز دینامیکی نقطه میانی برای پارامتر مقیاس طول بدون بعد 0.2

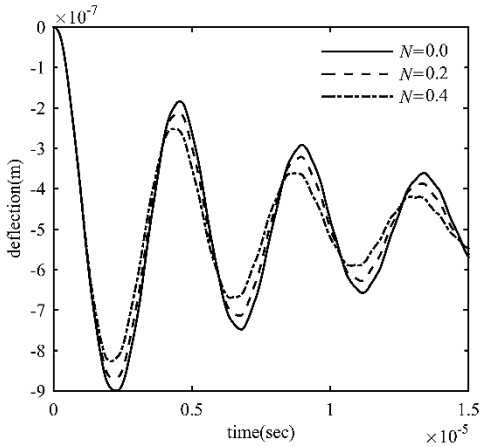

Fig. 16 Dynamic deflection of middle node with $l_{\mathrm{fld}}/d_0 = 0.4$

شکل 16 خیز دینامیکی نقطه میانی برای پارامتر مقیاس طول بدون بعد 0.4

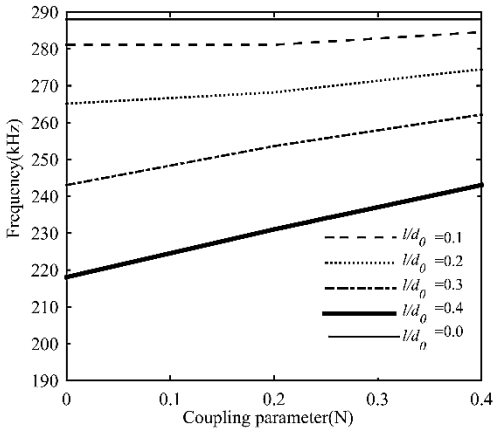

Fig. 17 The effect of non-Newtonian liquid coupling parameter on first natural frequency of microsystem for different l_{fld}/d_0

شکل 17 تاثیر پارامتر کوپلینگ سیال غیرنیوتنی بر فرکانس طبیعی اول میکروسیستم به ازای پارامتر مقیاس طول متفاوت

ولتاژ بحرانی دینامیک چیزی در حدود ده درصد (یا کمتر) از میزان ولتاژ بحرانی استاتیک کوچکتر است. با افزایش قابل توجه میرایی، حداکثر خیز دینامیکی در محدوده‌ی خیز استاتیک قرار خواهد گرفت و باکاهش زیاد اثر میرایی، خیز دینامیکی تا حدود دوبرابر خیز استاتیکی سیستم خواهد شد. در ولتاژ کمتر از ولتاژ بحرانی درنهایت خیز صفحه به سمت خیز استاتیک خواهد رفت.

در ولتاژهای کمتر از ولتاژ بحرانی دینامیک، مقدار فشار درون محفظه پس از نوسانات و رسیدن به حالت پایدار باید به فشار ابتدایی محفظه میل کند. در صورت عدم این همگرایی نشان از عدم همگرایی شبیه‌سازی دارد.

تغییر ولتاژ تحریک میکروسیستم تاثیری بر همگرایی مسئله ندارد، اما افزایش فشار محفظه باعث سخت تر شدن همگرایی می‌گردد و برای همگرایی باید گام‌های زمانی را کاهش داد.

استفاده از تئوری کوپل تنش نتایج بسیار دقیق‌تری نسبت به تئوری کوپل تنش بهبودیافته در شبیه‌سازی رفتار دینامیک و استاتیک میکروسازه خواهد داشت. این موضوع در مقایسه نتایج با نتایج آزمایشگاهی قابل توجیه است و استفاده از این تئوری (کوپل تنش) دلیل مناسبی برای توضیح اختلاف نتایج آزمایشگاهی با نتایج تئوری کلاسیک می‌باشد.

با افزایش پارامتر کوپلینگ سیال غیرنیوتنی، فرکانس طبیعی میکروسازه

افزایش و فاکتور کیفیت میکروسیستم کاهش می‌یابد و همچنین با افزایش پارامتر مقیاس طول سیال، فرکانس طبیعی میکروسازه کاهش می‌یابد.

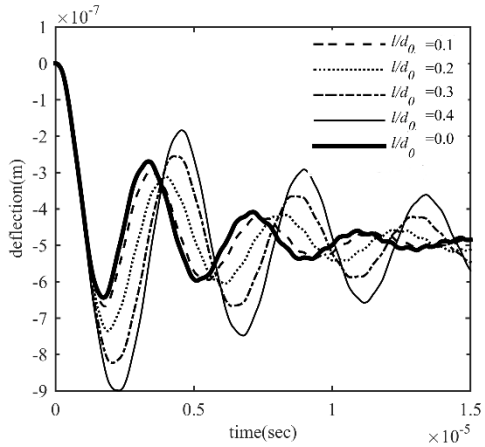

Fig. 18 Dynamic deflection of middle node with coupling parameter of zero

شکل 18 خیز دینامیکی نقطه میانی برای پارامتر کوپلینگ صفر

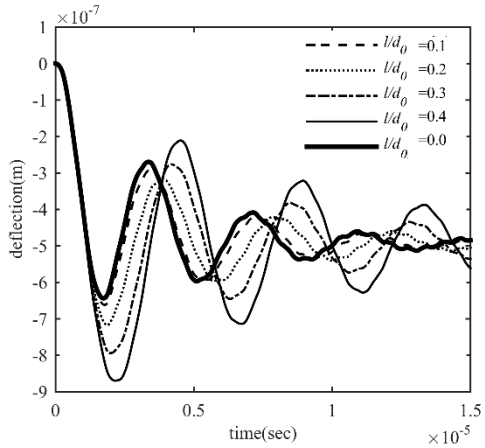

Fig. 19 Dynamic deflection of middle node with coupling parameter of 0.2

شکل 19 خیز دینامیکی نقطه میانی برای پارامتر کوپلینگ 0.2

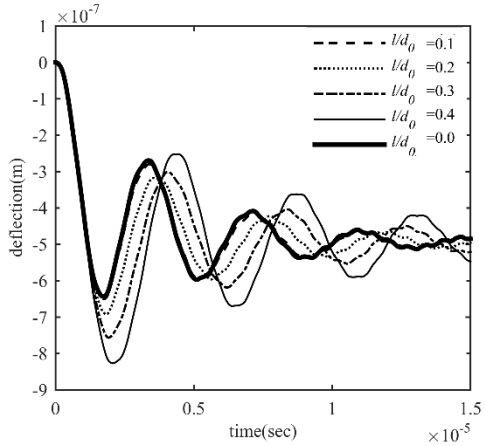

Fig. 20 Dynamic deflection of middle node with coupling parameter of 0.4

شکل 20 خیز دینامیکی نقطه میانی برای پارامتر کوپلینگ 0.4

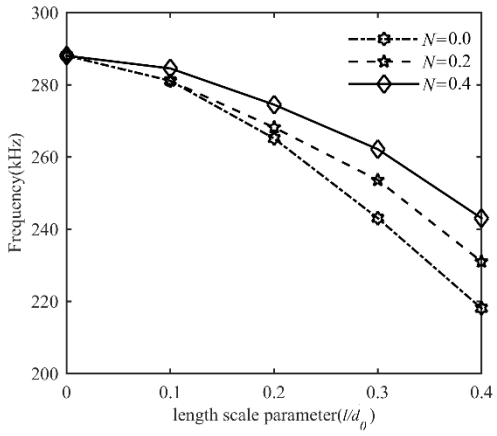

Fig. 21 The effect of length scale parameter in non-Newtonian liquid on first natural frequency of microsystem for different coupling parameter

شکل 21 تاثیر پارامتر مقیاس طول در سیال غیرنیوتنی بر فرکانس طبیعی اول میکروسیستم به ازای پارامتر کوپلینگ متفاوت

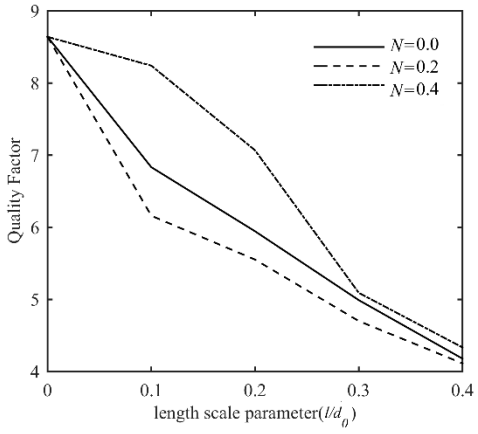

Fig. 22 The effect of non-Newtonian liquid coupling parameter on quality factor of microsystem for different coupling parameter

شکل 22 تاثیر پارامتر کوپلینگ در سیال غیرنیوتنی بر فاکتور کیفیت میکروسیستم به ازای پارامتر کوپلینگ متفاوت

5- پیوست‌ها

پیوست الف: روابط سازگاری صفحات در تئوری مرتبه اول

با فرض حالت تنش صفحه‌ای, رابطه تنش- کرنش در مختصات اصلی [13]:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16}\\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26}\\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66}\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\epsilon_{xx}\\ \epsilon_{yy}\\ \epsilon_{xy}\end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{yz}\\ \sigma_{xz}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45}\\ \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55}\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\epsilon_{yz}\\ \epsilon_{xz}\end{Bmatrix}$$

$$\mu_{ij}=-8\eta_{cs}\kappa_{ij}\ ,\ \ \eta_{cs}=Gl^2 \qquad \text{(الف-1)}$$

ثابت η_{cs} برای در نظر گرفتن اثر کوپل تنش در مواد ایزوتروپیک لحاظ می‌شود. کمیات $\bar{Q}_{ij}$ سفتی‌های ماده ای[1] در مختصات کلی و σ_{ij} تنش‌ها و μ_{ij} کوپل تنش[5] می‌باشند. با انتگرال‌گیری از مقادیر تنش بر روی ضخامت ورق:

$$\begin{Bmatrix}N_{xx}\\ N_{yy}\\ N_{xy}\\ Q_x\\ Q_y\end{Bmatrix}=\int_{z=-\frac{h}{2}}^{z=\frac{h}{2}}\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{xy}\\ K\sigma_{xz}\\ K\sigma_{yz}\end{Bmatrix}dz\ ,\begin{Bmatrix}M_{xx}\\ M_{yy}\\ M_{xy}\end{Bmatrix}=\int_{z=-\frac{h}{2}}^{z=\frac{h}{2}}\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{xy}\end{Bmatrix}z\,dz$$

[1] Material stiffness

$$\begin{Bmatrix}\widehat{N}_x\\ \widehat{N}_y\\ \widehat{N}_{xy}\end{Bmatrix}=\int_{z=-\frac{h}{2}}^{z=\frac{h}{2}}\begin{Bmatrix}\mu_{zx}\\ \mu_{yz}\\ \mu_{xy}\end{Bmatrix}dz\,,\ \begin{Bmatrix}\widehat{M}_x\\ \widehat{M}_y\\ \widehat{M}_{xy}\end{Bmatrix}=\int_{z=-\frac{h}{2}}^{z=\frac{h}{2}}\begin{Bmatrix}\mu_{zx}\\ \mu_{yz}\\ \mu_{xy}\end{Bmatrix}z\,dz \qquad \text{(الف-2)}$$

کمیات M_{ji} ، N_{ij} و Q_i و $\widehat{N}_i$ و $\widehat{M}_i$ به ترتیب برآیندهای گشتاور[1]، برآیندهای نیرو[2] و برآیندهای نیروی عرضی[3] و برآیندهای کوپل نیرو و برآیندهای گشتاور کوپل نیرو نامیده می‌شوند و K ضریب تصحیح تئوری مرتبه اول تنش برشی است.

پیوست ب: مدل اجزای محدود صفحه مرتبه اول غیرخطی

$$[M]=\begin{Bmatrix} I_0\{M^{11}\} & \{0\} & \{0\} & I_1\{M^{14}\} & \{0\}\\ \{0\} & I_0\{M^{22}\} & \{0\} & \{0\} & I_1\{M^{25}\}\\ \{0\} & \{0\} & I_0\{M^{33}\} & \{0\} & \{0\}\\ I_1\{M^{41}\} & \{0\} & \{0\} & I_2\{M^{44}\} & \{0\}\\ \{0\} & I_1\{M^{52}\} & \{0\} & \{0\} & I_2\{M^{55}\}\end{Bmatrix}$$

$$[K]=\begin{Bmatrix} \{K^{11}\} & \{K^{12}\} & \{K^{13}\} & \{K^{14}\} & \{K^{15}\}\\ \{K^{21}\} & \{K^{22}\} & \{K^{23}\} & \{K^{24}\} & \{K^{25}\}\\ \{K^{31}\} & \{K^{32}\} & \{K^{33}\} & \{K^{34}\} & \{K^{35}\}\\ \{K^{41}\} & \{K^{42}\} & \{K^{43}\} & \{K^{44}\} & \{K^{45}\}\\ \{K^{51}\} & \{K^{52}\} & \{K^{53}\} & \{K^{54}\} & \{K^{55}\}\end{Bmatrix}$$

$$[G]=\begin{Bmatrix} \{0\} & \{0\} & \{0\} & \{0\} & \{0\}\\ \{0\} & \{0\} & \{0\} & \{0\} & \{0\}\\ \{0\} & \{0\} & \{G\} & \{0\} & \{0\}\\ \{0\} & \{0\} & \{0\} & \{0\} & \{0\}\\ \{0\} & \{0\} & \{0\} & \{0\} & \{0\}\end{Bmatrix}$$

$$\{F\}=\begin{Bmatrix}\{F^1\}\\ \{F^2\}\\ \{F^3\}\\ \{F^4\}\\ \{F^5\}\end{Bmatrix}\ ,\qquad \{W\}=\begin{Bmatrix}\{u\}\\ \{v\}\\ \{w\}\\ \{S^1\}\\ \{S^2\}\end{Bmatrix} \qquad \text{(ب-1)}$$

برای ضراب ماتریس درونی $\{K^{\alpha\beta}\}$ $(\alpha,\beta=1,2\ldots5)$ به مرجع [13] مراجعه شود. ضرایب ماتریس درونی $\{M^{\alpha\beta}\}$ برابرست با $(\alpha,\beta=1,2\ldots5)$:

$$M_{ij}=\int_{\Omega_e}\psi_i^e\,\psi_j^e\,dxdy \qquad \text{(ب-2)}$$

ضرایب ماتریس درونی$\{G\}$ برابرست با $(\alpha,\beta=1,2\ldots5)$:

$$G_{ij}=\int_{\Omega_e}\left(\frac{\partial\psi_i^e}{\partial x}\frac{\partial\psi_j^e}{\partial x}\widehat{N}_{xx}+\left(\frac{\partial\psi_i^e}{\partial x}\frac{\partial\psi_j^e}{\partial y}+\frac{\partial\psi_i^e}{\partial y}\frac{\partial\psi_j^e}{\partial x}\right)\widehat{N}_{xy}+\frac{\partial\psi_i^e}{\partial y}\frac{\partial\psi_j^e}{\partial y}\widehat{N}_{yy}\right)dxdy \qquad \text{(ب-3)}$$

که $\widehat{N}_{xx}$ مقادیر نیروهای درون صفحه‌ای می‌باشد.

6- فهرست علایم

d_0	فاصله اولیه بین دو صفحه
G	مدول برشی
h	فاصله بین صفحات در زمان t (μm)
h_1	ضخامت صفحه‌ی تحریک شده (μm)
l	پارامتر مقیاس طول سیال
N	پارامتر کوپلینگ سیال
P	فشار کل (bar)
P_0	فشار محیط(bar)
P_a	فشار محلی (bar)
q	نیروی الکترواستاتیک
t	زمان (sec)
V	ولتاژ تحریک الکترواستاتیک (V)
$u\,,v\,,w$	جابجایی به‌ترتیب در راستای z ،y و x
x و y	مختصات درون صفحه

علایم یونانی

η	لزجت سیال نیوتنی ($kgm^{-1}s^{-1}$)
η_{cs}	ثابت کوپل تنش
λ	فاصله آزاد میانگین مولکولی گاز
λ_0	فاصله آزاد میانگین گاز در محیط
ϕ_x و ϕ_y	دوران خطوط عمود بر صفحه میانی حول y و x
γ و μ	ضرایب لزجت سیال غیر نیوتنی
ξ و β	مختصات محلی المان لاگرانژی
K_n	عدد نودسن

زیرنویس‌ها

0	جابجایی نقاط صفحه‌ی میانی
fld	سیال

7- مراجع

[1] M. I. Younis, *Modeling and Simulation of Microelectromechanical Systems in Multi-Physics Fields*, PhD Thesis, Virginia Polytechnic Institute and state University, Blacksburg Virginia, 2004.
[2] M. I. Younis, A. H. Nayfeh, Simulation of squeeze-film damping of microplates actuated by large electrostatic load, *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, Vol. 2, No. 3, pp. 232-241, 2007.
[3] S. Krylov, Lyapunov exponents as a criterion for the dynamic pull-in instability of electrostatically actuated microstructures, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 42, No. 4, pp. 626-642, 2007.
[4] D. C. C. Lam, F. Yang, A. C. M. Chong, J. Wang, P. Tong, Experiments and theory in strain gradient, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 51, No. 8, pp. 1477-1508, 2003.
[5] A. R. Hadjesfandiari, G. F. Dargush, Couple stress theory for solids, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 48, No. 18, pp. 2496–2510, 2011.
[6] I. Papautsky, J. Brazzle, T. Ameel, A. B. Frazier, Laminar fluid behavior in micro channels using Micropolar fluid theory, *Sensors and Actuators*: *A*,Vol. 73, No. 2, pp. 101-108, 1999.
[7] A. K. Pandey, R. Pratap, Effect of flexural modes on squeeze film damping in MEMS cantilever resonators, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, Vol. 17, No. 12, pp. 2475-2484, 2007.
[8] S. Chaterjee, G. Pohit, Squeeze-film damping characteristics of cantilever microresonators for higher modes of flexural vibration, *International Journal of Engineering, Science and Technology*, Vol. 2, No. 4, pp. 187-199, 2010.
[9] M. I. Younis, *MEMS Linear and Nonlinear Statics and Dynamics*, pp. 122-125, New York, Springer, 2011.
[10] T. Veijola, H. Kuisma, J. Lahdenpera, T. Ryhanen, Equivalent-circuit model of the squeezed gas film in a silicon accelerometer, *Sensors and Actuators A*, Vol. 48, No. 3, pp. 239-248, 1995.
[11] P. Sinha, C. Singh, Micropolar squeeze films between rough rectangular plates, *Applied Scientific Research*, Vol. 39, No. 3, pp. 167-179, 1982.
[12] N. B. Naduvinamani, A. K. Kadadi, Effect of viscosity variation on the micropolar fluid squeeze film lubrication of a short journal bearing, *Advances in Tribology*, Article ID 743987, 2013.
[13] J. N. Reddy, *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*, Second Edition, pp. 575-586, Boca Raton, CRC Press, 2004.
[14]K. A. Hoffmann, S. T. Chiang, *Computational Fluid Dynamics for Engineers*, Fourth Edition, Vol. 1, pp. 124-137, Wichita, Engineering Education System, 1993.
[15] H. A. C. Tilmans, R. Legtenberg, Electrostatically driven vacuum-encapsulated polysilicon resonators part ii. Theory and performance, *Sensors and Actuators A: physical*, Vol. 45, No. 1, pp. 67-84,1994.
[16] S. Krylov, Lyapunov exponents as a criterion for the dynamic pull-in instability of electrostatically actuated microstructures, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 42, No. 4, pp. 626-642, 2007.

[1] Moment resultants
[2] Force resultants
[3] Transverse force resultants

[17] Z. Zong, W. Soboyejo, Indentation size effects in face centered cubic single crystal thin films, *Materials Science and Engineering: A*, Vol. 404, No. 1-2, pp. 281-290, 2005.
[18] Y. Cao, D. D. Nankivil, S. Allameh, W. O. Soboyejo, Mechanical properties of au films on silicon substrates, *Materials and Manufacturing Processes*, Vol. 22, No. 2, pp. 187-194, DOI: 10.1080/10426910601062271, 2007.
[19] M. A. Haque, M. T. A. Saif, Strain gradient effect in nanoscale thin films, *Acta Materialia*, Vol. 51, No. 11, pp. 3053–3061, 2003.
[20]H. Sadeghian, C. K. Yang, J. F. L. Goosen, E. Van der Drift, A. Bossche, P. J. French, F. Van Keulen, Characterizing size-dependent effective elastic modulus of silicon nanocantilevers using electrostatic pull-in instability, *Applied Physics Letters*, Vol. 94, No. 22, 221903, doi: http://dx.doi.org/10.1063/1.3148774, 2009.
[21] M. Fathalilou, M. Sadeghi, Gh. Rezazadeh, Nonlinear behavior of capacitive micro-beams based on strain gradient theory, *Journal of Mechanical Science and Technology*, Vol. 28, No. 4, pp. 1141-1151, 2014.
[22] M. Ghanbari, S. Hossainpour, Gh. Rezazadeh, Effect of fluid media on vibration of a microbeam resonator using micropolar theory, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 10, pp. 205-210, 2014. (In Persian فارسی)