مجله مهندسی مکانیک مدرس، آذر 1396، دوره 17، شماره 9، ص‌ص 309-318

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

ارتعاشات القائی ناشی از سیال در تیرهای ویسکوالاستیک با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها

غلامرضا زارع‌پور[1*]، ایلقار جوانشیر[2]

1- استایار مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان، رشت

2- دانشجوی دکتری مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان، رشت

*رشت، صندوق پستی 315-51665، zarepour@guilan.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 27 اردیبهشت 1395

پذیرش: 20 مرداد 1395

ارائه در سایت: 17 شهریور 1396

کلید واژگان:

ارتعاشات القائی ناشی از سیال

تیر ویسکوالاستیک

ناحیه قفل‌شدگی

روش نیمه تحلیلی

چکیده

در مقاله حاضر رفتار ارتعاشی تیرهای ویسکوالاستک با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها تحت تأثیر ارتعاشات القائی ناشی از سیال با ارائه روش نیمه تحلیلی مورد مطالعه قرار گرفته است. با در نظر گرفتن فرم کلی رفتار ویسکوالاستیک و با استفاده از مدل کوپل‌شدگی جابجایی به منظور مدل‌سازی اندرکنش سازه و سیال، معادلات دیفرانسیل حاکم بر حرکت با اعمال مستقیم قانون دوم نیوتن استخراج شده است. برای اعمال تأثیر گردابه‌ها در ارتعاشات سیستم از معادله ون در پل غیرخطی استفاده شده است. سپس با استفاده از روش گالرکین، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی گسسته‌سازی و دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی با استفاده از روش رانگ- کوتا حل شده است. در نهایت، پاسخ سیستم، منحنی‌های فازی و تغییرات حداکثر دامنه بر حسب سرعت سیال به ازای پارامترهای مختلف استخراج و نتایج مورد بحث و بررسی قرار گرفته است. نتایج نشان می‌دهد که رفتار ویسکوالاستیک تأثیر قابل ملاحظه‌ای بر مشخصه‌های دینامیکی سیستم دارد و باعث جابجا شدن محدوده قفل‌شدگی نسبت به سیستم الاستیک متناظر می‌شود. به عنوان مثال به ازای $E_2=10E_1$ علاوه بر جابجا شدن موقعیت ناحیه قفل‌شدگی، حداکثر دامنه به جود آمده در تیر 45 درصد افزایش می‌شود. با توجه به اینکه عملکرد سیستم در محدوده قفل شدگی می‌تواند باعث بروز خسارات فاجعه‌باری شود بنابراین، با استفاده از مواد ویسکوالاستیک علاوه بر کاهش حداکثر دامنه سیستم می‌توان محدوده قفل‌شدگی را تغییر داد. بنابراین، با توجه به تأثیرگذاری قابل ملاحظه رفتار ویسکوالاستیک بر مشخصه‌های دینامیکی سیستم، باید در مدل ریاضی سیستم‌ها رفتار ویسکوالاستیک در نظر گرفته شود.

Vortex Induced Vibration of Simply Supported Viscoelastic Beam

Gholamreza Zarepour*, Ilghar Javanshir

Department of Mechanical Engineering, Guilan University, Rasht, Iran
* P.O.B.51665-315, Rasht, Iran, zarepour@guilan.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 17 May 2017
Accepted 11 August 2017
Available Online 08 September 2017

Keywords:
Fluid Induced Vibration
Viscoelastic beam
Locking area
Semi-analytical methods

ABSTRACT

In this paper, vortex induced vibration of simply supported viscoelastic beam was investigated using semi-analytical method. By applying the general form of the viscoelastic model, the nonlinear partial differential equations of motion based on the Euler Bernoulli beam's theory and displacement coupling fluid-structure interaction model were obtained via the Newton's second law. A classical nonlinear van der Pol equation was taken as the governing equation for one component of the vortex shedding force on the beam. Employing the Galerkin discretization method, the equations of motion are reduced to a set of nonlinear ordinary differential equations with coupled terms which are then solved numerically by Runge-Kutta method. Finally, the effect of system parameters on the time response, phase plane and maximum amplitude of the beam are investigated. The results indicate that the viscoelastic behavior has a significant influence on the dynamic characteristics of the system and causes change the Lock-in phenomenon with respect to corresponding elastic system. For example, for $E_2=10E_1$ the viscoelastic behavior can change the position of the locking area, and the maximum amplitude of the beam is increased by 45%. Lock-in from of vortex-induced vibrations was considered as a possible source of increased fatigue and damage. Therefore, by using viscoelastic materials the maximum amplitude of the system is reduced and the Lock-in condition can be changed. Additionally, based on the significant influence of viscoelastic behavior on the dynamic characteristics of the system, viscoelastic behavior should be considered in the mathematical model of the systems.

1- مقدمه

ارتعاشات القائی ناشی از سیال که پدیده‌ای غیرخطی و خود محرک می‌باشد در بسیار از کاربردهای مهندسی مانند بال و بدنه هواپیما، لوله‌های حامل نفت و گاز و رایزرهای دریایی [1-3]، اعضای سازه‌های دریایی و سکوهای نفتی [4]، ساختمآن‌های مرتفع [5]، برج‌های خنک کننده نیروگاه‌ها، سیستم‌های برداشت انرژی و غیره اتفاق می‌افتد. در بسیاری از این موارد، این نوع ارتعاشات می‌تواند باعث شکست سازه‌ها و بروز صدمات فاجعه‌باری گردد [6-8]. به عنوان نمونه، خستگی سازه‌ای ناشی از ارتعاشات القائی سیال از مواردی است که همواره مخاطراتی را برای پرواز هواپیماها در برداشته است. از این جهت مطالعه ارتعاشات القائی در سازه‌ها به‌صورت تئوری و تجربی مورد توجه

Please cite this article using:

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Gh. Zarepour, I. Javanshir, Vortex Induced Vibration of Simply Supported Viscoelastic Beam, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 9, pp. 309-318, 2017 (in Persian)

بسیاری از محققان قرار گرفته است [9-13].

مطالعات نشان می‌دهد که اگر سرعت سیال در محدوده‌ای باشد که فرکانس تشکیل گردابه‌ها در حوالی فرکانس طبیعی سازه باشد، نوسانات شدید در سازه ایجاد می‌شود. این پدیده که به عنوان قفل‌شدگی شناخته می‌شود باعث ایجاد نوسانات با دامنه بزرگ در سازه می‌شود که اگر کنترل نشوند می‌تواند سبب آسیب رساندن به سازه و یا حتی تخریب آن بشود. وو و همکاران [14] به بررسی مطالعات انجام شده در زمینه ارتعاشات القائی ناشی از سیال در سازه‌ها پرداخته‌اند. گریفین و رامبرگ [15] به بررسی رفتار ارتعاشی سیلندر در رینولدزهای بین 144 تا 190 پرداختند. نتایج تحقیق آن‌ها نشان می‌دهد که دامنه نوسانات بر هندسه تشکیل گردابه تأثیر زیادی دارد. با افزایش نوسانات، طول گردابه‌ها و فاصله عرضی بین آن‌ها کاهش می‌یابد و فاصله طولی بین گردابه‌ها به طور معکوس با فرکانس ارتعاشات تغییر می‌کند. بورگوئیت و همکاران [16-18] به بررسی پدیده قفل‌شدگی و ارتعاشات القائی ناشی از گردابه در تیرهای بلند پرداختند. نتایج مطالعات آن‌ها نشان می‌دهد که در تیرهای بلند ناحیه قفل شدگی به عدد رینولدز بسیار وابسته است. دانیلس و همکاران [19] با استفاده از روش عددی به بررسی ارتعاشات ناشی از سیال در سیلندرهای سطح مقطع مستطیلی پرداختند. همچنین آن‌ها در نواحی جریان اغتشاشی رفتار سیستم را مورد مطالعه قرار دادند. مارا و همکاران [20] با استفاده از تست‌های تجربی به اندازه‌گیری و بهبود دادن مدل تحلیلی ارتعاشات القائی ناشی از سیال در استوانه‌های با سطح مقطع مستطیلی پرداختند.

با گسترش روز افزون علم و پیشرفت مواد مهندسی و استفاده از مواد پلیمری در صنعت، نیاز به در نظر گرفتن همه جانبه خواص این مواد در علوم مهندسی ضروری به نظر می‌رسد. یکی از خواص اغلب پلیمرها خاصیت ویسکوالاستیک این مواد است که باعث می‌شود رفتار مکانیکی مواد تابعی از زمان باشد و عدم در نظر گرفتن این رفتار در محاسبات می‌تواند منجر به پاسخ‌های نادرست و ایجاد خطای زیاد شود. نتایج مطالعات تجربی انجام شده نشان می‌دهد که خاصیت ویسکوالاستیسیته علاوه بر پلیمرها در مواد فلزی پرکاربرد صنعتی مثل فولاد و آلومینیوم [21-24] بویژه در دماهای بالا نیز دیده می‌شود. بر این اساس، می‌توان بیان نمود که طیف بسیار وسیعی از مواد پیرامون ما در حوزه ویسکوالاستیک قرار دارد. از این‌رو شناخت رفتار مکانیکی این مواد به دلیل رفتار متفاوت آن‌ها نسبت به مواد الاستیک، از اهمیت فراوانی برخوردار است و گستردگی انواع روش‌های ارائه شده برای منظور نمودن اثرات خاصیت ویسکوالاستیسیته در تحقیقات علمی محققان نشان از اهمیت این موضوع دارد. بر این اساس در تحقیق حاضر به بررسی پاسخ دینامیکی تیرهای در معرض جریان سیال با استفاده از مدل ویسکوالاستیک پرداخته و نتایج با حالت الاستیک مقایسه شده است.

بررسی مطالعات انجام شده در این زمینه نشان می‌دهد که تاکنون مطالعه‌ای در زمینه بررسی رفتار ارتعاشات القائی ناشی از سیال در تیرهای ویسکوالاستیک صورت نگرفته است. بر این اساس، در ادامه مطالعات انجام شده در مراجع [19] و [20]، در تحقیق حاضر با استفاده از روش نیمه تحلیلی و با در نظر گرفتن مدل کوپل‌شدگی غیرخطی با معادله دیفرانسیل غیرخطی ون در پل، به مطالعه رفتار ارتعاشات القائی ناشی از سیال در تیرهای ویسکوالاستیک با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها پرداخته شده است. پس از گسسته‌سازی معادلات دیفرانسیل غیرخطی حاکم با استفاده از روش گالرکین و در نظر گرفتن چهار شکل مود ارتعاشی اول، معادلات با استفاده از روش عددی رانگ- کوتا حل شده و نتایج استخراج شده است. در نهایت با استفاده از نمودارهای مناسبی به بررسی تأثیر پارامترهای مختلف بر رفتار دینامیکی سیستم پرداخته شده است.

2- فرمول‌بندی تئوری و استخراج نتایج

در تحقیق حاضر، مطابق "شکل 1" تیر اویلر- برنولی با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها و تحت تأثیر جریان سیال خارجی با سرعت ثابت U_e مورد بررسی قرار گرفته می‌شود. برای استخراج معادله حرکت حاکم بر سیستم، مطابق "شکل 1-ب" دیاگرام نیرویی المانی از تیر به طول dx در نظر گرفته می‌شود که در آن $M(x,t)$ گشتاور خمشی، $V(x,t)$ نیروی برشی، $F(x,t)$ نیروی خارجی و نیروی اندرکنش بین تیر و جریان سیال خارجی است.

برای به دست آوردن معادله حرکت از قانون دوم نیوتن استفاده می‌شود. با توجه به این‌که نیروی اینرسی اعمال شده به المان تیر به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dx \tag{1}$$

بنابراین با نوشتن معادله تعادل در راستای محور قائم و همچنین گشتاور حول نقطه دلخواه روابط زیر به دست می‌آیند:

$$-(V+dV)+f(x,t)dx+V=\rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}dx \qquad \text{(2-الف)}$$

$$(M+dM)-(V+dV)dx+f(x,t)dx\frac{dx}{2}-M=0 \qquad \text{(2-ب)}$$

با ساده‌سازی دو رابطه اخیر و با توجه به اینکه $dV=\partial V/\partial x\ dx$ و $dM=\partial M/\partial x\ dx$ می‌باشد، با استفاده از رابطه بین گشتاور خمشی و تنش، خواهیم داشت [25]:

$$-\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}+f(x,t)=\rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{3}$$

$$M=\int \sigma z dA \tag{4}$$

حرکت اعمال می‌شود. با استفاده از مدل جامد استاندارد خطی، ویژگی‌های ویسکوالاستیک را می‌توان با استفاده از رابطه تنش- کرنش زیر بیان کرد [26]:

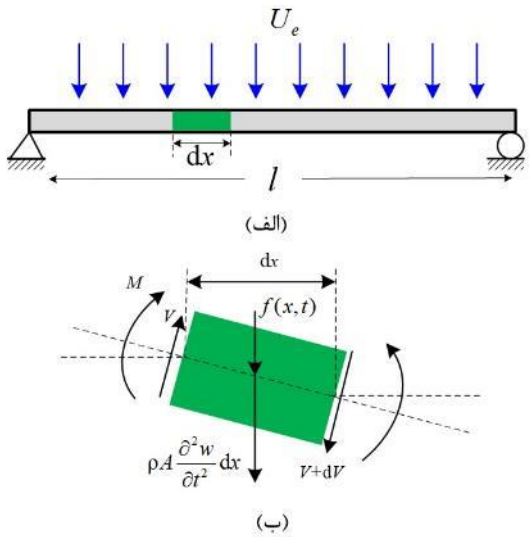


Fig. 1 (a) simply supported viscoelastic beam under the influence of external fluid and (b) an element of the beam

شکل 1 الف) تیر ویسکوالاستیک با تکیه‌گاه‌های الاستیک در دو انتها تحت تأثیر سیال خارجی و (ب) المانی از تیر

$$\sigma + \frac{\eta}{E_1 + E_2}\dot{\sigma} = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2}\varepsilon + \frac{\eta E_1}{E_1 + E_2}\dot{\varepsilon} \qquad \text{(5- الف)}$$

به منظور اختصار و جهت استخراج معادله حرکت حاکم بر رفتار ارتعاشات عرضی تیر ویسکوالاستیک با مدل جامد خطی استاندارد، رابطه بین تنش و کرنش به صورت $\Gamma\sigma = \Xi\varepsilon$ تعریف می‌شود که در آن $\Gamma = a_0 + a_1\,\partial/\partial t$ و $\Xi = b_0 + b_1\partial\,/\,\partial t$ اپراتورهای مدل ویسکوالاستیسیته می‌باشند. با اعمال اپراتورهای مدل ویسکوالاستیک به طرفین روابط (3) و (4) و ادغام معادلات حاصل شده خواهیم داشت:

$$I\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\Xi\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + \rho A\Gamma\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(x,t) \qquad \text{(5- ب)}$$

با بسط رابطه اخیر معادله دیفرانسیل حاکم بر رفتار ارتعاشات عرضی تیرهای ویسکوالاستیک با مدل جامد استاندارد خطی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$Ib_1\frac{\partial^5 w(x,t)}{\partial x^4\partial t} + Ib_0\frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \rho A a_0\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + \rho A a_1\frac{\partial^3 w}{\partial t^3} = f(x,t) \qquad (6)$$

2-2- مدل سازی اثر جریان سیال

ارتعاشات القایی پدیده‌ای است که در آن یک جسم با جریان سیال تأثیر متقابل دارد. به عبارتی، ارتعاشات القایی ناشی از جریان سیال در اطراف یک جسم می‌باشد که پدیده‌ای غیرخطی، خود محرک و چند درجه آزادی است. مطالعه این پدیده با روش‌های تجربی، نیمه تجربی و عددی صورت می‌پذیرد. در روش‌های تجربی تأثیر یک یا دو پارامتر بطور همزمان مورد بررسی قرار می‌گیرد و دیگر پارامترها ثابت فرض می‌شوند. در روش عددی نیز معادلات ناویراستوکس را با کمک روش‌های عددی مورد بررسی قرار می‌دهند. در این میان بدست آوردن مدل ریاضی که بر پایه نتایج آزمایشگاهی بتواند رفتار سیستم را مدل‌سازی نماید، دارای اهمیت می‌باشد. به‌طور کلی شبیه‌سازی سه بعدی ارتعاشات القائی از لحاظ قدرت و زمان محاسبات بسیار پیچیده و زمان‌بر می‌باشد. بنابراین، به‌منظور پیش‌بینی ساده و دقیق پدیده‌های ارتعاشات القائی و پاسخ دینامیکی سازه‌ها، مدل‌های نیمه تجربی از این پدیده توسط محققان مختلفی ارائه و مورد مطالعه قرار گرفته است. براساس مطالعه مروری انجام شده توسط سارچکایا [27] مدل‌های تحلیلی ارائه شده برای پدیده ارتعاشات القائی به سه دسته کلی تقسیم‌بندی می‌شود. اخیراً پایدوسیس و همکاران [28] با دسته‌بندی مطالعات انجام شده در این زمینه دسته‌بندی جامع و کاملی را از مدل‌های تئوری موجود پدیده ارتعاشات القائی ارائه کرده‌اند. دسته اول مدل‌های اجباری سیستم[1] نامیده می‌شوند. دسته دوم مدل‌های سیستم سیال- الاستیک[2] و دسته سوم مدل‌های کوپل جریان- سازه می‌باشند. براساس نتایج ارائه شده پایدوسیس و همکاران [28] مشاهده می‌شود که مدل‌های اول و دوم از دقت مناسبی برخوردار نبوده و تنها مدل‌های سوم با دقت مناسبی پدیده‌های موجود در ارتعاشات القائی را پیش‌بینی می‌کنند. این نوع مدل برای اولین بار توسط بیشوپ و حسن ارائه شد و سپس توسط حارتلن و کوری [29] بهبود و توسعه یافتند. در نهایت مدل کامل و جامعی از نوع مدل توسط فاچینتی و همکاران [30] ارائه شده است که یکی از دقیق‌ترین مدل‌های موجود در این زمینه به شمار می‌آید. بر این اساس، در تحقیق حاضر مدل توسعه داده شده توسط فاچینتی و همکاران [30] به‌منظور بررسی رفتار ارتعاشات القائی تیرهای ویسکوالاستیک مورد استفاده قرار می‌گیرد. با توجه به این مدل، از معادله ون در پل غیرخطی برای شبیه‌سازی نوسانگر سیال استفاده می‌شود که رابطه آن به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{\partial^2\bar{q}(x,t)}{\partial t^2} + \delta\omega_s[\bar{q}(x,t)^2 - 1]\frac{\partial\bar{q}(x,t)}{\partial t} + \omega_s^2\bar{q}(x,t) = F_d \qquad (7)$$

که در آن F_d نیروی اعمالی ناشی از طرف سیال بر روی سازه و δ ضریب دمپینگ جریان سیال اضافه شده است که وابسته به ضریب درگ متوسط بوده و مقدار آن معمولاً برابر 0.3 می‌باشد [30]. متغیر $\bar{q}(x,t)$ نشان دهنده تأثیر ارتعاشات ناشی از گردابه است. ω_s فرکانس گردابه‌ها[3] می‌باشد که با رابطه زیر به سرعت سیال و عددی بی‌بعد استروهال وابسته می‌باشد:

$$\omega_s = 2\pi S_t\frac{U_e}{D} \qquad (8)$$

که در آن S_t عدد بی‌بعد استروهال می‌باشد و مقدار آن با توجه به هندسه سطح مقطع جسم تعیین می‌شود [31]. U_e و D به ترتیب نشان دهنده سرعت جریان سیال و قطر معادل تیر می‌باشند. در این مدل، اندرکنش بین سیال و سازه با استفاده از مؤلفه نیرو اعمال می‌شود. با توجه به تئوری ارائه شده توسط فاچینتی و همکاران [30] بهترین رابطه‌ای که معرف این نیروهاست و با نتایج تجربی نیز سازگاری قابل قبولی دارد به صورت زیر می‌باشد:

$$F_d = \frac{P}{D}\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \qquad (9)$$

که پس از برازش داده‌های تجربی $P = 12$ به دست می‌آید.

در رابطه (6)، $f(x,t)$ برآیند نیروهای خارجی اعمالی از طرف سیال بر تیر می‌باشد که در حالت کلی می‌توان به دو نیروی لیفت، $f_L(x,t)$ و نیروی میرایی ناشی از گردابه‌ها، $f_D(x,t)$، تقسیم‌بندی کرد. با توجه به مطالعات انجام شده توسط فاچینتی و همکاران [30] و کبر و ویرچیگورچی [32] این مؤلفه نیروها به صورت زیر قابل بیان است:

$$f_D(x,t) = -\frac{1}{2}C_D\rho_f D U_e\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \qquad \text{(10 - الف)}$$

$$f_L(x,t) = \frac{1}{4}C_L\rho_f D U_e^2\bar{q}(x,t) \qquad \text{(10- ب)}$$

که در آن C_L ضریب لیفت و ρ_f چگالی سیال می‌باشد. C_D ضریب میرایی می‌باشد که به منظور تطابق نتایج تئوری و تجربی توسط فاچینتی و همکاران [30] تعریف شده است و در تحقیق حاضر، براساس نتایج آن‌ها مقدار این ضریب برابر 2.0 در نظر گرفته می‌شود.

در نهایت، با جایگذاری روابط (9) و (10) در روابط (6) و (7)، معادلات دیفرانسیل غیرخطی حاکم بر مسأله به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\frac{\partial^2\bar{q}(x,t)}{\partial t^2} + \delta\omega_s[\bar{q}(x,t)^2 - 1]\frac{\partial\bar{q}(x,t)}{\partial t} + \omega_s^2\bar{q}(x,t) = \frac{P}{D}\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \qquad \text{(11- الف)}$$

$$Ib_1\frac{\partial^5 w(x,t)}{\partial x^4\partial t} + Ib_0\frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \rho A a_0\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + \rho A a_0\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + \rho A a_1\frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial t^3} = \frac{1}{4}C_l\rho_f D U_e^2\bar{q}(x,t) - \frac{1}{2}C_d\rho_f D U_e\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \qquad \text{(11- ب)}$$

3-2- بی‌بعدسازی معادلات حاکم

در ادامه به منظور فراهم آوردن امکان بررسی پارامتریک، فرم بی‌بعد معادلات

[1] Forced System Models
[2] Fluid-Elastic System Models
[3] Vortex Shedding

مورد بررسی قرار داده می‌شوند. بدین منظور با تعریف متغیرهای بی‌بعد به صورت زیر

$$\bar{\eta} = \frac{w}{D}\,,\ \xi = \frac{x}{l}\,,\ \tau = \frac{1}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}\,t\,,\ u = U_e l\sqrt{\frac{m}{EI}}\ ,$$
$$\lambda = \delta\sqrt{\frac{\rho A l^4}{EI}}\ ,\ \ \Omega_s = \omega_s\sqrt{\frac{\rho A l^4}{EI}} = \Omega_{0s}u\ ,\ \ \Omega_{0s} = \frac{2\pi l S_t}{D}\ ,$$
$$\alpha_0 = \frac{C_L\rho_f E l^2}{4\rho A b_0},\ \ c_0 = \frac{C_D\rho_f D l}{2 I b_0}\frac{EI}{m}\,,\ \alpha = \frac{b_1}{b_0}\sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}}\,,\ \beta = \frac{E a_0}{b_0}\,,$$
$$\gamma = \frac{a_1}{b_0}\frac{E}{\rho A}\sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}} \qquad (12)$$

معادلات حرکت (11) برحسب متغیرهای بی‌بعد به‌صورت زیر مطرح می‌شوند:

$$\frac{\partial^4\bar{\eta}}{\partial\xi^4} + \alpha\frac{\partial^5\bar{\eta}}{\partial\xi^4\partial\tau} + \gamma\frac{\partial^3\bar{\eta}}{\partial\tau^3} + \beta\frac{\partial^2\bar{\eta}}{\partial\tau^2} = \alpha_0 u^2 q - c_0 u\frac{\partial\bar{\eta}}{\partial\tau} \qquad \text{(13- الف)}$$

$$\frac{\partial^2\bar{q}}{\partial\tau^2} + \lambda\Omega_{0s}u(\bar{q}^2 - 1)\frac{\partial\bar{q}}{\partial\tau} + \Omega_{0s}^2 u^2\bar{q} = P\frac{\partial^2\bar{\eta}}{\partial\tau^2} \qquad \text{(13- ب)}$$

4-2 -حل معادلات با استفاده از روش گالرکین

به منظور استخراج پاسخ معادلات دیفرانسیل کوپل و غیرخطی (13) ابتدا با استفاده از روش گالرکین معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی به دستگاه معادلات دیفرانسیل با مشتقات معمولی تبدیل می‌شود. بر این اساس پاسخ سیستم به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\bar{\eta}(\xi,\tau) = \sum_{n=1}^{N}\phi_n(\xi)\eta_n(\tau) \qquad (14)$$

$$\bar{q}(\xi,\tau) = \sum_{n=1}^{N}\phi_n(\xi)q_n(\tau) \qquad (15)$$

که در روابط اخیر $\eta_n(\tau)$ و $q_n(\tau)$ مختصه‌های تعمیم یافته متناظر با مود nاُم می‌باشند و $\phi_n(\xi)$ توابع مقایسه‌ای می‌باشند. جهت استفاده از روش گالرکین توابع مقایسه‌ای مورد استفاده، توابع شکل مودها ارتعاشی تیر الاستیک با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها استفاده می‌شوند که به صورت زیر می‌باشند:

$$\phi_n(\xi) = \sqrt{2}\sin(n\pi\xi), n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (16)$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\bar{\eta}(\xi,\tau) = \sqrt{2}\sum_{n=1}^{N}\sin(n\pi\xi)\eta_n(\tau) \qquad (17)$$

$$\bar{q}(\xi,\tau) = \sqrt{2}\sum_{n=1}^{N}\sin(n\pi\xi)\,q_n(\tau) \qquad (18)$$

به منظور استخراج پاسخ سیستم، در تحقیق حاضر تأثیر چهار شکل مود ارتعاشی اول مد نظر قرار داده می‌شود. بنابراین با در نظر گرفتن $N = 4$ و با جایگذاری روابط (14) و (15) در روابط (13)، و ضرب طرفین تساوی در $\phi_n(\xi)$ و انتگرال‌گیری در بازه 0 تا 1، و استفاده از خاصیت تعامد شکل مودهای ارتعاشی، هشت معادله دیفرانسیل با مشتقات معمولی به‌دست آمده در پیوست 1 ارائه شده است. در ادامه معادلات دیفرانسیل با مشتقات معمولی به دست آمده به صورت حل عددی تحلیل شده و نتایج برحسب پارامترهای مختلف استخراج و مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

3- نتایج

در تحقیق حاضر تأثیر پارامترهای سیستم بر رفتار ارتعاشی تیر ویسکوالاستیک تحت تأثیر ارتعاشات القایی ناشی از سیال مورد مطالعه قرار می‌گیرد. بنابراین، نتایج ارائه شده در این قسمت به ازای مقادیر عددی ارائه شده در جدول 1 استخراج و مورد بررسی قرار گرفته‌اند. مقادیر ضرایب C_D ، C_L و S_t از مرجع [33] و ضرایب نوسانات گردابه δ و P از مقادیر ارائه شده در مرجع [33] مورد استفاده قرار گرفته‌اند. معادلات دیفرانسیل با مشتقات معمولی به‌دست آمده در روابط (19) تا (26) با استفاده روش رانگ-کوتا حل شده‌اند. در استخراج نتایج فرض شده است که لوله تحت تأثیر شرایط اولیه جابجایی خالص $q_i = \eta_i = 0.001, i = 1,2,3,4$ و $\dot{q}_i = \dot{\eta}_i =$ ارتعاش می‌نماید.

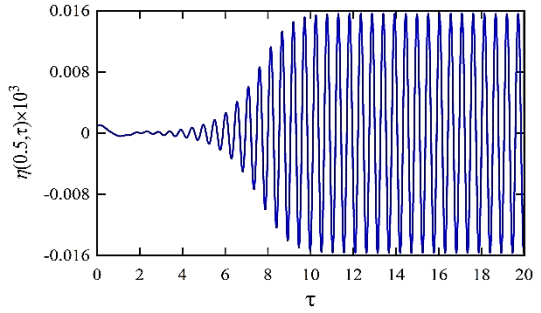
قبل از استخراج نتایج ابتدا به بررسی تأثیر تعداد جملات مورد استفاده در روش گالرکین بر همگرایی نتایج پرداخته می‌شود. در "شکل 2" پاسخ نقطه میانی تیر ویسکوالاستیک به ازای $E_2 = 10\,E_1$ و سرعت سیال خارجی و $u = 0.2$ با مدنظر قرار دادن یک، سه و چهار مود ارتعاشی در روش گالرکین مورد مقایسه قرار داده شده است. همان‌طور که از نتایج مشاهده می‌شود تقریب مود اول تنها اثر مود اول را در پاسخ در نظر گرفته و پاسخ دارای یک فرکانس بوده و خطای پاسخ زیاد می‌باشد. با افزایش تعداد جملات پاسخ تقریبی همگرا شده و پاسخ سه و چهار جمله تقریباً یکسان می‌باشند. بنابراین می‌توان بیان داشت که در نظر گرفتن چهار جمله با دقت مناسبی رفتار سیستم را در اختیار می‌گذارد. در ادامه نتایج با در نظر قرار دادن چهار جمله ارائه و مورد بررسی قرار خواهند گرفت.

در ادامه به منظور بررسی صحت مدل و نتایج ارائه شده در تحقیق حاضر از نتایج تحقیق یاماموتو و همکاران [34] استفاده می‌شود. آن‌ها با استفاده از روش عددی به بررسی رفتار ارتعاشات القائی ناشی از سیال در استوانه با سطح مقطع دایروی تحت تأثیر جریان سیال خارجی پرداختند. به منظور

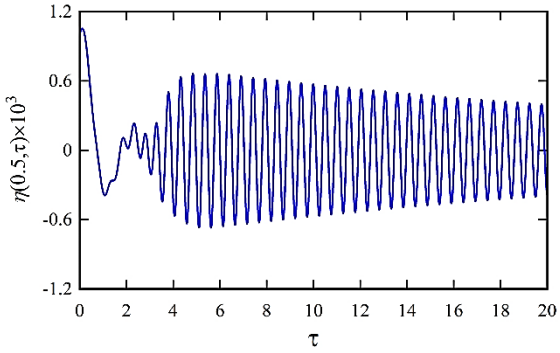
جدول 1 مقادیر عددی پارامترهای مورد استفاده

Table 1. The numerical values of the parameters

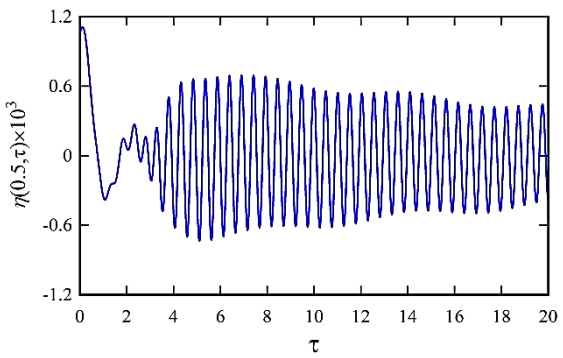
پارامتر	مقدار	پارامتر	مقدار
ضریب C_D	2.0	طول، l	10 m
ضریب C_L	0.3	مدول یانگ، E	210 GPa
عدد S_t	0.2	چگالی تیر، ρ	7850 kg m^{-3}
ضریب P	12	چگالی سیال، ρ_f	1020 kg m^{-3}



(الف)



(ب)



(ج)

Fig 2. Response of midpoint of the viscoelastic simply supported beam for $E_2 = 10\,E_1$ and $u = 0.2$ (a) single mode expansion, (b) three mode expansion, and (c) four mode expansion

شکل 2 پاسخ ارتعاشات نقطه میانی تیر ویسکوالاستیک با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها به ازای $E_2 = 10\,E_1$ و $u = 0.2$ (الف) با در نظر گرفتن مود اول، (ب) سه مود ارتعاشی اول و (ج) چهار مود ارتعاشی اول

فرام آوردن امکان مقایسه بین نتایج تحقیق حاضر و نتایج مرجع [34]، شرایط مرزی و مشخصات هندسی مورد استفاده مشابه مشخصات ارائه شده در مرجع مزکور در نظر گرفته شده و در "شکل 3" منحنی تغییرات حداکثر دامنه برحسب سرعت سیال نشان داده شده است. همان‌طور که نتایج نشان می‌دهد روش ارائه با دقت بسیار مناسبی رفتار ارتعاشی تیرها تحت تأثیر جریان سیال خارجی را پیش‌بینی می‌کند.

در "شکل 4" پاسخ نقطه میانی و منحنی‌های فازی برای تیر الاستیک با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها به ازای سرعت‌های بی‌بعد مختلف سیال خارجی $u = 0.0$، $u = 0.01$، $u = 0.026$ و $u = 0.26$ نشان داده شده است. با توجه به "شکل 4- الف" مشاهده می‌شود که در غیاب جریان سیال خارجی پاسخ سیستم به صورت نوسانی با دامنه بی‌بعد ثابت و 2.2×10^{-3} می‌باشد. در این حالت تنها اثر جرم افزوده ناشی از سیال تأثیر گذاشته که این امر باعث کاهش فرکانس طبیعی تیر می‌شود. در این حالت اثرات اینرسی سیال ناچیز و قابل صرف‌نظر است. با افزایش سرعت سیال و در سرعت‌های پایین سیال که متناظر با اعداد رینولدز و اشتروهال بسیار کوچک می‌باشد، جریان سیال اطراف تیر از نوع بسیار آهسته و یا خزشی می‌باشد. با جریان پیدا کردن سیال اطراف تیر، گردابه‌های ون‌کارمن بر اثر فشار منفی در پشت تیر به صورت متقارن ایجاد شده و سبب وارد کردن نیروهای لیفت و درگ بر تیر شده و در نتیجه باعث ارتعاشات تیر می‌شوند. همان‌طور که در "شکل 4- ب"

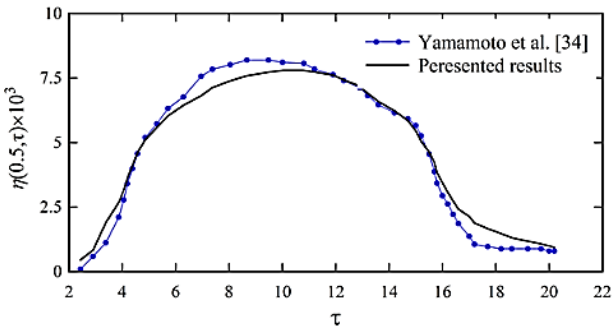


Fig 3. Comparison of obtained maximum amplitude and experimental results obtained by Yamamoto et al. [34]

شکل 3 مقایسه منحنی تغییرات حداکثر دامنه برحسب سرعت سیال به دست آمده از نتایج تحقیق حاضر و نتایج مرجع [34]

نشان داده شده است در سرعت‌های پایین سیال جریان سیال اطراف تیر باعث می‌شود که دامنه نوسانات با گذشت زمان کاهش یافته و در سرعت $u = 0.026$ دامنه نوسانات بی‌بعد به مقدار 2.2×10^{-3} همگرا شده و پاسخ سیستم به صورت نوسانی می‌باشد. نیروی مقاوم سیال ترکیبی از نیروهای برشی و فشاری است. با افزایش سرعت جریان و در نتیجه عدد رینولدز، ناحیه گردابه‌ای پشت تیر گسترده شده و نیروی درگ اثر غالب در نیروی مقاوم کل و ارتعاشات تیر دارد. بدین جهت در نواحی سرعت‌های پایین این نیرو باعث میرا شدن دامنه ارتعاشات می‌شود.

با افزایش بیشتر سرعت سیال، نیروهای اینرسی سیال بزرگتر شده و دیگر قابل صرف‌نظر کردن نمی‌باشند. این امر باعث می‌شود تا در سرعت‌های بالاتر دامنه ارتعاشات سیستم به صورت ناگهانی افزایش یافته و دوباره نوسانات سیستم پایدار شود. در "شکل4-ج" پاسخ سیستم به ازای $u = 0.026$ نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود در این حالت دامنه بی‌بعد نوسانات پایدار برابر 2.5×10^{-3} می‌باشد که بیشتر از حالت ارتعاشات آزاد می‌باشد. این محدوده از سرعت سیال، ناحیه قفل‌شدگی نامیده می‌شود. در ناحیه بعد از ناحیه قفل‌شدگی، افزایش بیشتر سرعت سیال باعث کاهش دامنه نوسانات شده و دامنه حالت پایدار سیستم بر خلاف حالت‌های قبل به صفر می‌رسد. در این محدوده نیروهای مقاوم ناشی از سیال بر نیروهای اینرسی و بازگرداننده تیر غالب شده و باعث ساکن شدن تیر می‌شود. همانطور که از نتایج مشاهده می‌شود دامنه ارتعاشات حالت پایدار برای ناحیه قفل‌شدگی بیشتر از دو ناحیه دیگر است.

به منظور بررسی تأثیر رفتار ویسکوالاستیک بر مشخصه‌های دینامیکی تیر تحت تأثیر سیال خارجی، در "شکل 5" پاسخ نقطه میانی و منحنی‌های فازی برای تیر ویسکوالاستیک با $E_1 = 10\,E_2$ و به ازای سرعت‌های بی‌بعد مختلف سیال خارجی نشان داده شده است. با مقایسه این نتایج با سرعت‌های متناظر برای لوله الاستیک که در "شکل 4" نشان داده شده است، مشاهده می‌شود که در نظر گرفتن رفتار ویسکوالاستیک برای ماده‌ها تأثیر قابل ملاحظه‌ای بر رفتار سیستم‌ها دارد.

از آن‌جایی که در عمل تمام مواد دارای خاصیت ویسکوالاستیک می‌باشند بنابراین در مدل‌سازی و شبیه‌سازی این سیستم‌ها به منظور مطالعه رفتار دینامیکی آن‌ها و شناسایی پارامترهای سیستم حتماً باید رفتار ویسکوالاستیک در مدل‌های ریاضی مورد استفاده قرار گیرند. منحنی تغییرات حداکثر دامنه نقطه میانی تیر با فرض رفتار الاستیک و رفتار ویسکوالاستیک به ازای $E_1 = 10\,E_2$ برحسب سرعت جریان سیال خارجی در "شکل 6" نشان داده شده است. همان‌طور که از این شکل به وضوح مشخص است رفتار ویسکوالاستیک علاوه بر جابجا شدن موقعیت ناحیه قفل‌شدگی، باعث افزایش 45 درصدی حداکثر دامنه به وجود آمده در تیر می‌شود. این امر باعث می‌شود که سازه تحت ارتعاشات اجباری ناشی از سیال در اثر پدیده خستگی سریع‌تر وارد ناحیه شکست شده و از این‌رو در نظر گرفتن شرایط ویسکوالاستیک باعث واقع بینانه‌تر بودن نتایج خواهد بود. با توجه به نتایج "شکل 6" مشاهده می‌شود در سیستم تحت بررسی ناحیه قفل‌شدگی در ناحیه $0.12 \le u \lesssim 0.2$ اتفاق می‌افتد که در آن دامنه نوسانات تیر ناگهان به شدت افزایش می‌یابد، اما در ناحیه قبل و بعد از آن، دامنه نوسانات تیر بسیار ناچیز می‌باشد. ایجاد پدیده قفل‌شدگی علاوه بر فرکانس ارتعاشات جسم، به دامنه ارتعاشات نیز بستگی دارد. بنابراین همانطور که در شکل مشاهده می‌شود احتمال وقوع قفل‌شدگی به جای یک نقطه در محدوده وسیع‌تری از سرعت سیال اتفاق خواهد افتاد. در "شکل 7" منحنی پاسخ سیستم در مود

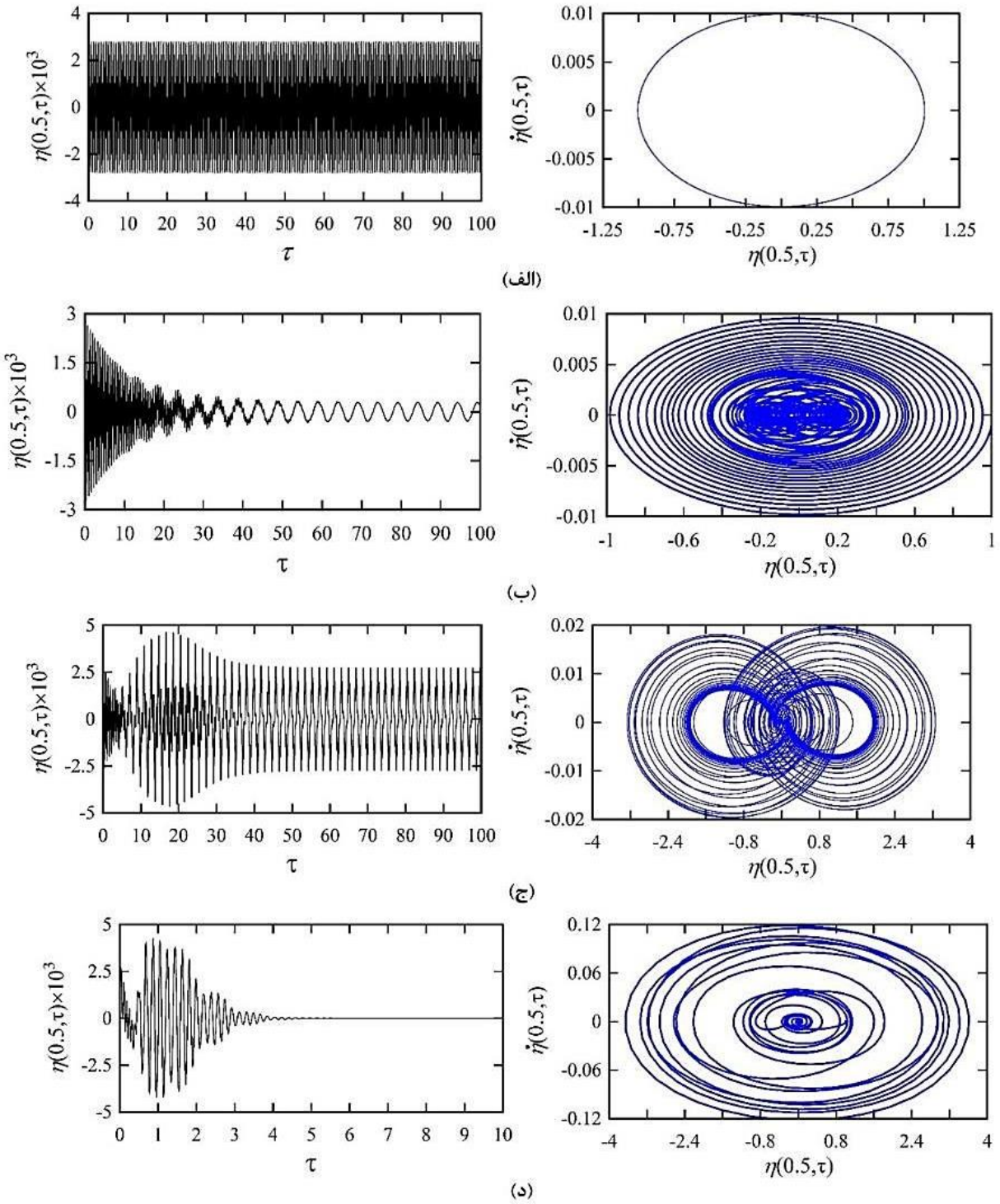


Fig. 4 The effect of external fluid velocity on time response and phase plane of the elastic simply supported beam for (a) $u = 0$, (b) $u = 0.01$, (c) $u = 0.026$ and (d) $u = 0.26$

شکل4 تأثیر سرعت جریان سیال خارجی بر پاسخ نقطه میانی و منحنی‌های فازی تیر الاستیک با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها به ازای (الف) $u = 0$، (ب) $u = 0.01$، (ج) $u = 0.026$ و (د) $u = 0.26$

اول به همراه منحنی q در سرعت‌های مختلف سیال خارجی نشان داده شده است. با بررسی منحنی‌های پاسخ سیستم و پارامتر q که معرف نیروی سیال است مشاهده می‌شود با افزایش دامنه نوسانات، ضریب لیفت افزایش می‌یابد. همچنین در نواحی قبل و بعد از ناحیه قفل شدگی، حرکت جسم و ضریب درگ دارای اختلاف فاز 180 درجه هستند و این امر باعث می‌شود تا نیروی درگ در مقابل حرکت تیر مقاومت کرده و دامنه نوسانات تیر کاهش یابد. این پدیده در ناحیه قفل‌شدگی بر عکس می‌باشد، یعنی ضریب درگ و جابجایی هم فاز بوده و در نتیجه نیروهای حاصله اثر تقویتی داشته و باعث افزایش بیش از حد دامنه نوسانات می‌شوند. همچنین در ناحیه قفل‌شدگی اندازه ضریب لیفت بسیار بزرگتر از سایر نواحی می‌باشد و با توجه به اثر تقویتی آن با نیروهای اینرسی تیر باعث رشد سریع دامنه نوسانات می‌گردد.

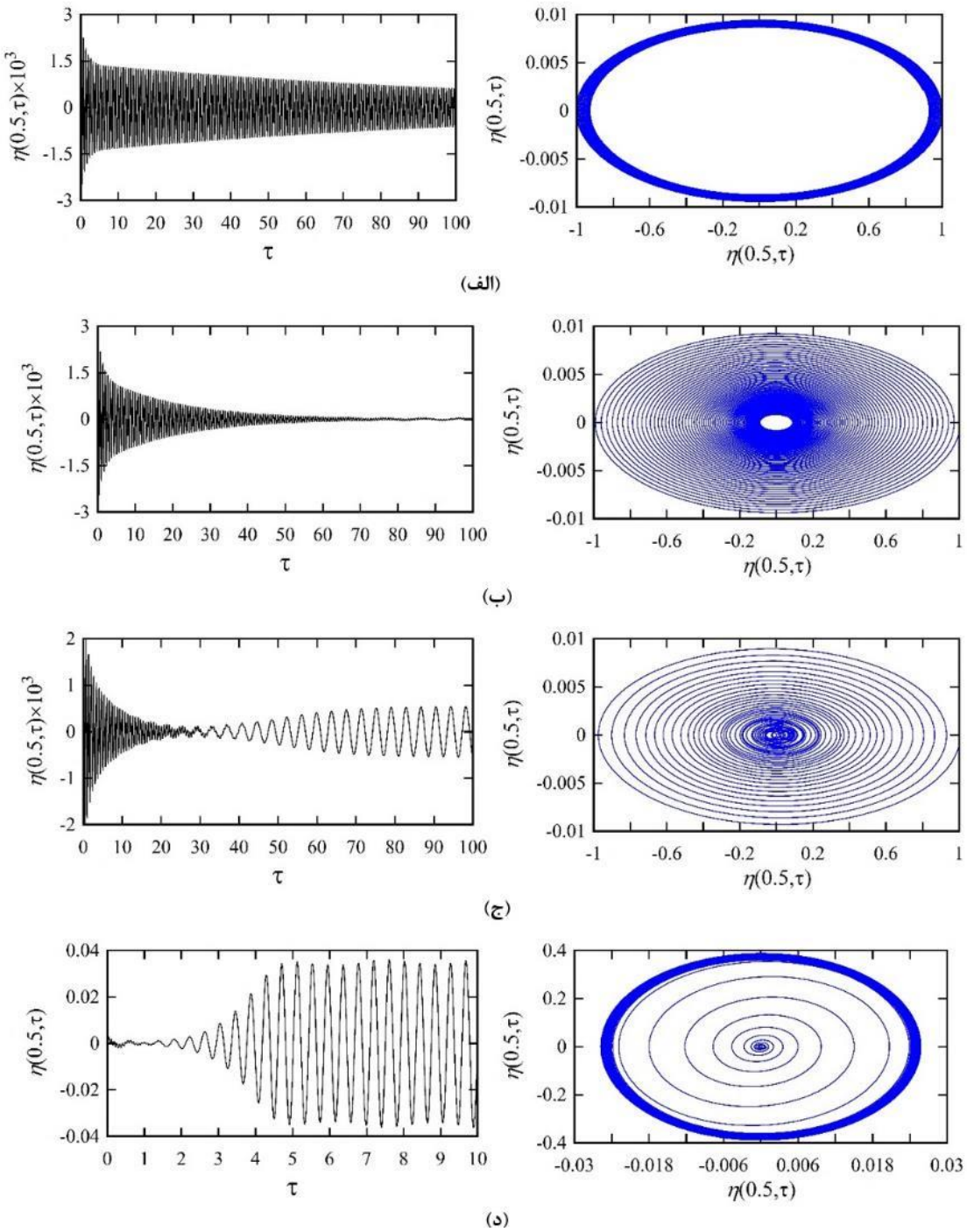


Fig. 5 The effect of external fluid velocity on time response and phase plane of the viscoelastic simply supported beam with $E_2 = 10E_1$ for (a) $u = 0$, (b) $u = 0.01$, (c) $u = 0.026$ and (d) $u = 0.26$

شکل 5 تأثیر سرعت جریان سیال خارجی بر پاسخ نقطه میانی و منحنی‌های فازی تیر ویسکوالاستیک با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها به ازای $E_2 = 10E_1$ و (الف) $u = 0$، (ب) $u = 0.01$، (ج) $u = 0.026$ و (د) $u = 0.2$

به منظور بررسی تأثیر پارامترهای مختلف بر رفتار سیستم، در "شکل 8" تأثیر پارامترهای P و λ بر منحنی حداکثر دامنه نوسانات برحسب سرعت سیال نشان داده شده است. در "شکل 7- الف" نتایج به ازای سه مقدار مختلف $\lambda = 0.2$، $\lambda = 0.3$ و $\lambda = 0.4$ ارائه شده است. همان‌طور که از نتایج مشاهده می‌شود با افزایش پارامتر λ دامنه نوسانات تیر کاهش می‌یابد ولی هیچ تغییری سرعت سیال متناظر با حداکثر دامنه ایجاد نمی‌شود. همچنین با توجه به "شکل 8-ب" مشاهده می‌شود افزایش مقدار P باعث بیشتر شدن دامنه نوسانات می‌شود و موقعیت متناظر با حداکثر دامنه در سرعت‌های بالاتری اتفاق می‌افتد.

در "شکل 9" تأثیر مشخصه‌های ویسکوالاستیک بر دامنه نوسانات تیر نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود مشخصه‌های ویسکوالاستیک تأثیر قابل ملاحظه‌ای بر رفتار سیستم دارد. با کاهش نسبت

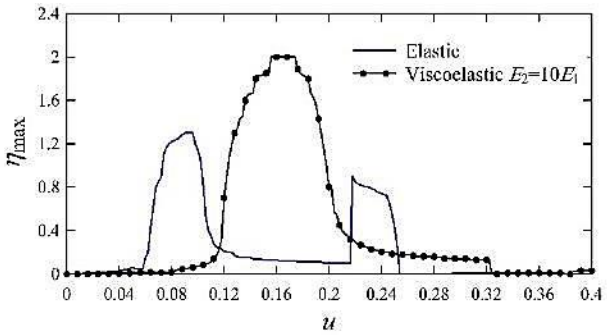
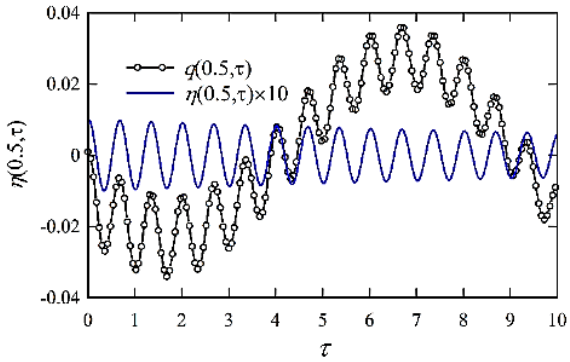
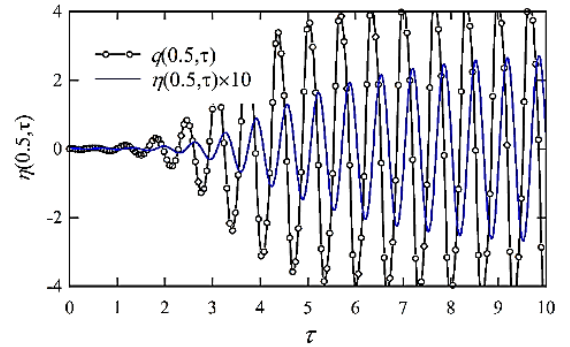


Fig. 6 The effect of external fluid velocity on the maximum vibration amplitude of the elastic and viscoelastic simply supported beam

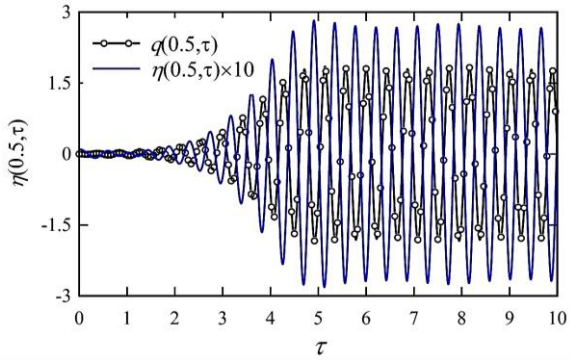
شکل 6 تأثیر سرعت سیال خارجی بر حداکثر دامنه نوسانات تیر با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها برای تیر الاستیک و ویسکوالاستیک



(الف)



(ب)



(ج)

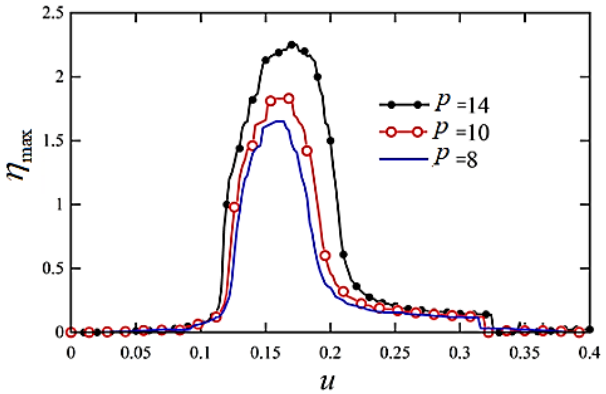
Fig. 7 The effect of the external fluid velocity on the time response and vortex induced parameter ($\bar{q}$) of the simply supported viscoelastic beam for (a) $u = 0.01$, (b) $u = 0.16$ and (c) $u = 0.26$

شکل 7 تأثیر سرعت جریان سیال خارجی بر پاسخ تیر ویسکولاستیک با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها ارتعاشات القائی ناشی از سیال به ازای (الف) $u = 0.01$، (ب) $u = 0.16$، (ج) $u = 0.26$

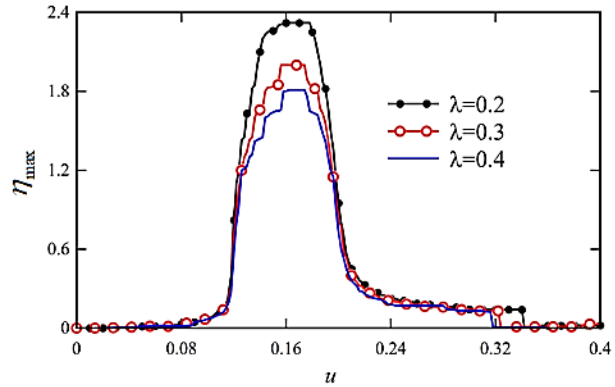
E_2/E_1 علاوه بر کمتر شدن حداکثر دامنه نوسانات، محدوده قفل‌شدگی نیز در سرعت‌های پایین سیال اتفاق می‌افتد. بر این اساس با توجه به نوع ماده بکار برده شده در سازه‌های تحت تأثیر ارتعاشات القائی ناشی از سیال، بایستی مدل مناسب برای رفتار ویسکوالاستیک در مدل ریاضی سیستم اعمال شود و براساس آن طراحی سیستم‌ها در برابر بارهای خستگی ناشی از گردابه‌های ایجاد شده صورت پذیرد، چرا که عدم در نظر گرفتن رفتار ویسکوالاستیک نتایج غیر واقع‌بینانه‌ای را در اختیار می‌گذارد که براساس نتایج ارائه شده در تحقیق حاضر با نتایج سازه واقعی که به صورت ویسکوالاستیک است، بسیار متفاوت می‌باشد.

4- نتیجه‌گیری

در تحقیق حاضر، پدیده ارتعاشات ناشی از گردابه‌ها بر روی تیر ویسکوالاستیک با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها به صورت نیمه تحلیلی انجام مورد مطالعه قرار گرفت. معادلات حرکت با استفاده مستقیم از قانون دوم نیوتن و با مدنظر قرار دادن فرم کلی رفتار ویسکوالاستیک استخراج و با استفاده از روش گالرکین گسسته‌سازی شدند. درنهایت با استفاده از روش رانگ-کوتا معادلات دیفرانسیل به دست آمده حل و تأثیر پارامترهای مختلف بر رفتار سیستم مورد بررسی قرار گرفت. نتایج نشان می‌دهد که در ناحیه بعد از ناحیه قفل‌شدگی، افزایش بیشتر سرعت سیال باعث کاهش دامنه نوسانات شده و دامنه حالت پایدار سیستم بر خلاف حالت‌های قبل به صفر می‌رسد. همچنین، دامنه ارتعاشات حالت پایدار برای ناحیه قفل‌شدگی بیشتر از دو



(الف)



(ب)

Fig. 8 The effect of P and λ parameters on the maximum vibration amplitude of the simply supported viscoelastic beam

شکل 8 تأثیر پارامترهای (الف) P و (ب) λ بر منحنی نسبت حداکثر دامنه نوسانات تیر ویسکوالاستیک با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها

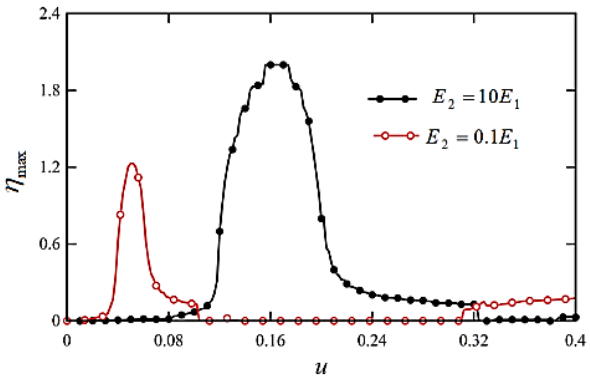


Fig. 9 The Effect of viscoelastic parameters on the maximum vibration amplitude of the simply supported viscoelastic beam with respect to non-dimensional external fluid flow velocity

شکل 9 تأثیر مشخصه‌های رفتار ویسوالاستیک بر منحنی تغییرات نسبت حداکثر دامنه نوسانات تیر ویسکوالاستیک با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها برحسب سرعت بی‌بعد جریان سیال خارجی

ناحیه دیگر است. با توجه به مقایسه انجام شده بین سیستم الاستیک و سسیتم با در نظر گرفتن رفتار ویسکوالاستیک مشاهده می‌شود که رفتار ویسکوالاستیک تأثیر قابل ملاحظه‌ای بر رفتار دینامیکی سیستم دارند. همان‌طور که نتایج نشان می‌دهد رفتار ویسکوالاستیک علاوه به تعویق انداختن موقعیت ناحیه قفل‌شدگی، باعث افزایش 45 درصدی حداکثر دامنه به جود آمده در تیر می‌شود. این امر باعث می‌شود که سازه تحت ارتعاشات اجباری ناشی از سیال در اثر پدیده خستگی سریع‌تر وارد ناحیه شکست شده و از این‌رو در نظر گرفتن شرایط ویسکوالاستیک باعث واقع‌بینانه‌تر بودن نتایج خواهد بود.

5- فهرست علائم

A	مساحت سطح مقطع
a_0, a_1, b_0, b_1	ثوابت رئولوژیکی
c_0	ثابت بی‌بعد
C_D	ضریب لیفت
C_L	ضریب میرایی
D	قطر
E_1, E_2	ثوابت رئولوژیکی
$F(x,t)$	نیروی عرضی
F_d	نیروی القائی ناشی از سیال
$f_D(x,t)$	نیروی میرایی ناشی از گردابه‌ها
$f_L(x,t)$	نیروی لیفت
I	ممان اینرسی
L	طول
$M(x,t)$	گشتاور خمشی
N	عدد صحیح
P	ثابت گردابه
$q_n(\tau)$	مختصه تعمیم یافته
$\bar{q}(x,t)$	نیروی ناشی از ارتعاشات القائی
S_t	عدد بی‌بعد استروهال
t	زمان
U_e, u	سرعت جریان سیال خارجی، سرعت بی‌بعد
$V(x,t)$	نیروی برشی
$w(x,t)$	جابجایی عرضی تیر

علایم یونانی

α	پارامتر بی‌بعد ویسکوالاستیک
α_0	پارامتر بی‌بعد نیروی لیفت
β	پارامتر بی‌بعد مدول یانگ
Γ	عملگر ویسکوالاستیک
γ	پارامتر بی‌بعد ویسکوالاستیک
δ	ضریب دمپینگ جریان سیال اضافه
$\eta_n(\tau)$	مختصه تعمیم یافته
$\bar{\eta}(\xi,\tau)$	جابجایی بی‌بعد عرضی تیر
λ	پارامتر بی‌بعد جریان سیال
Ξ	عملگر ویسکوالاستیک
ξ	متغییر بی‌بعد مکانی
ρ	چگالی تیر
ρ_f	چگالی سیال
σ	تنش محوری
ε	کرنش محوری
τ	زمان بی‌بعد
$\phi_n(\xi)$	تابع شکل مود ارتعاشی
ω_s	فرکانس گردابه‌ها
Ω_s	فرکانس بی‌بعد گردابه‌ها
Ω_{0s}	فرکانس بی‌بعد ثابت

6- پیوست

با در نظر گرفتن چهار شکل مود ارتعاشی در روش گالرکین ($N = 4$) و با استفاده از خاصیت تعامد شکل مودهای ارتعاشی ، هشت معادله دیفرانسیل با مشتقات معمولی به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$\gamma\dddot{\eta}_1 + \beta\ddot{\eta}_1 + (\alpha R_1 + c_0 u)\dot{\eta}_1 + R_1\eta_1 = \alpha_0 u^2 q_1 \quad (1)$$
$$\gamma\dddot{\eta}_2 + \beta\ddot{\eta}_2 + (\alpha R_2 + c_0 u)\dot{\eta}_2 + R_2\eta_2 = \alpha_0 u^2 q_2 \quad (2)$$
$$\gamma\dddot{\eta}_3 + \beta\ddot{\eta}_3 + (\alpha R_3 + c_0 u)\dot{\eta}_3 + R_3\eta_3 = \alpha_0 u^2 q_3 \quad (3)$$
$$\gamma\dddot{\eta}_4 + \beta\ddot{\eta}_4 + (\alpha R_4 + c_0 u)\dot{\eta}_4 + R_4\eta_4 = \alpha_0 u^2 q_4 \quad (4)$$

$$\begin{aligned}\ddot{q}_1 + \Omega_{0s}^2 u^2 q_1 = {} & \lambda\Omega_{0s} u\dot{q}_1 \\ & - \lambda\Omega_{0s} u\Big(q_3 q_4\dot{q}_2 + q_2 q_4\dot{q}_3 + q_2 q_3\dot{q}_4 \\ & + q_2 q_3\dot{q}_2 - q_2 q_4\dot{q}_1 - q_1 q_4\dot{q}_2 - q_1 q_3\dot{q}_1 \\ & - q_1 q_2\dot{q}_4 + 2q_1 q_2\dot{q}_2 + 2q_1 q_3\dot{q}_3 \\ & + 2q_1 q_4\dot{q}_4 + \frac{3}{2q_1^2\dot{q}_1} + q_2^2\dot{q}_1 + \frac{1}{2q_2^2\dot{q}_3} \\ & - \frac{1}{2q_1^2\dot{q}_3} + q_3^2\dot{q}_1 + q_4^2\dot{q}_1\Big) + P\ddot{\eta}_1\end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned}\ddot{q}_2 + \Omega_{0s}^2 u^2 q_2 = {} & \lambda\Omega_{0s} u\dot{q}_2 \\ & - \lambda\Omega_{0s} u\Big(q_1 q_4\dot{q}_3 + q_2 q_3\dot{q}_1 + q_3 q_4\dot{q}_1 \\ & + q_4 q_3\dot{q}_3 + q_1 q_3\dot{q}_4 + q_1 q_3\dot{q}_2 + q_1 q_2\dot{q}_3 \\ & - q_1 q_4\dot{q}_1 + 2q_4 q_2\dot{q}_4 + 2q_2 q_1\dot{q}_1 \\ & + 2q_2 q_3\dot{q}_3 + \frac{3}{2q_2^2\dot{q}_2} + q_3^2\dot{q}_2 + \frac{1}{2q_3^2\dot{q}_4} \\ & - \frac{1}{2q_1^2\dot{q}_4} + q_1^2\dot{q}_2 + q_4^2\dot{q}_2\Big) + P\ddot{\eta}_2\end{aligned} \quad (6)$$

$$\ddot{q}_3 + \Omega_{0s}^2 u^2 q_3 = \lambda\Omega_{0s} u \dot{q}_3 - \lambda\Omega_{0s} u \Big(q_2 q_4 \dot{q}_3 + q_2 q_3 \dot{q}_4 + q_2 q_1 \dot{q}_2 + q_1 q_3 \dot{q}_4 + q_1 q_4 \dot{q}_2 + q_2 q_4 \dot{q}_1 + q_4 q_3 \dot{q}_2 + 2 q_2 q_2 \dot{q}_2 + 2 q_1 q_3 \dot{q}_1 + 2 q_3 q_4 \dot{q}_4 + \frac{3}{2 q_3^2 \dot{q}_3} + q_1^2 \dot{q}_3 + \frac{1}{2 q_2^2 \dot{q}_1} - \frac{1}{2 q_1^2 \dot{q}_1} + q_4^2 \dot{q}_3 + q_2^2 \dot{q}_3 \Big) + P \ddot{\eta}_3 \tag{7}$$

$$\ddot{q}_4 + \Omega_{0s}^2 u^2 q_4 = \lambda\Omega_{0s} u \dot{q}_4 - \lambda\Omega_{0s} u \Big(q_3 q_1 \dot{q}_2 - q_2 q_1 \dot{q}_1 + q_2 q_3 \dot{q}_3 + q_2 q_3 \dot{q}_1 + q_2 q_1 \dot{q}_3 + 2 q_3 q_4 \dot{q}_3 + 2 q_1 q_4 \dot{q}_1 + 2 q_2 q_4 \dot{q}_2 + \frac{3}{2 q_4^2 \dot{q}_4} + q_3^2 \dot{q}_4 + \frac{1}{2 q_3^2 \dot{q}_2} - \frac{1}{2 q_1^2 \dot{q}_2} + q_2^2 \dot{q}_4 + q_1^2 \dot{q}_4 \Big) + P \ddot{\eta}_4 \tag{8}$$

7- مراجع

[1] M. Liangjie, L. Qingyou, Z. Shouwei, W. Jiang, L. Zhengli, P. Tao, Vortex-induced vibration mechanism of drilling riser under shear flow, *Petroleum Exploration and Development*, Vol. 42, No. 1, pp. 112-118, 2015.

[2] N. M. R. Shaharuddin, I. Z. M. Darus, Fuzzy-PID control of transverse vibrating pipe due to vortex induced vibration, *Computer Modelling and Simulation (UKSim), UKSim 15th International Conference on IEEE*, 10-12 April, pp. 21-26, 2013.

[3] L. Song, S. Fu, J. Cao, L. Ma, J. Wu, An investigation into the hydrodynamics of a flexible riser undergoing vortex-induced vibration, *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 63, No. 1, pp. 325-350, 2016.

[4] M. Sharif, N. Sudharsan, Analysis of vortex induced vibration on an offshore structure using a coupled FSI solver, *Computer Modelling and Simulation*, Vol. 56, No. 2, pp. 80-84, 2016.

[5] S. Nakamura, T. Okumatsu, T. Nishikawa, T. Okabayashi, Fatigue damage of a diagonal member in a steel truss bridge due to wind-induced vibration, *Developments in International Bridge Engineering*, Eds., pp. 211-220: Springer, 2016.

[6] G. Eslami, V. A. Maleki, M. Rezaee, Effect of open crack on vibration behavior of a fluid-conveying pipe embedded in a visco-elastic medium, *Latin American Journal of Solids and Structures*, Vol. 13, No. 1, pp. 136-154, 2016.

[7] M. L. Ge, J. Kannala, D. Cain, E. B. Kebadze, S. Sundararaman, C. Krapf, Z. Li, A practical drilling riser and wellhead vortex induced vibration fatigue comparison between analysis and field measured data, *Proceeding of American Society of Mechanical Engineers*, pp. 12-32, 2014.

[8] J. Zhang, Y. Tang, Fatigue analysis of deep-water risers under vortex-induced vibration considering parametric excitations, *Journal of Coastal Research*, Vol. 73, No. 1, pp. 652-659, 2015.

[9] M. R. Sarker, A. Mohamed, R. Mohamed, Cantilever beam vibration from fluid interactions with triangular shape blunt body for energy harvesting application, *Research and Development (SCOReD), 2015 IEEE Student Conference on, IEEE*, 2015.

[10] M. Song, D. Cao, W. Zhu, Vortex-Induced vibration of a cable-stayed bridge, *Shock and Vibration*, Vol. 2016, No. 2, pp. 4-12, 2016.

[11] M. S. Triantafyllou, R. Bourguet, J. Dahl, Y. Modarres-Sadeghi, Vortex-Induced vibrations, *Springer Handbook of Ocean Engineering*, Eds., pp. 819-850: Springer, 2016.

[12] J. Wang, S. Fu, R. Baarholm, J. Wu, C. M. Larsen, Fatigue damage induced by vortex-induced vibrations in oscillatory flow, *Marine Structures*, Vol. 40, No. 1, pp. 73-91, 2015.

[13] Z. Zhou, Q. Zhan, Y. Ge, Experimental and numerical study on generation and mitigation of vortex-induced vibration of open-cross-section composite beam, *Wind and Structures*, Vol. 23, No. 1, pp. 45-57, 2016.

[14] X. Wu, F. Ge, Y. Hong, A review of recent studies on vortex-induced vibrations of long slender cylinders, *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 28, No. 3, pp. 292-308, 2012.

[15] O. M. Griffin, S. E. Ramberg, The vortex-street wakes of vibrating cylinders, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 66, No. 3, pp. 553-576, 1974.

[16] R. Bourguet, G. E. Karniadakis, M. S. Triantafyllou, Lock-in of the vortex-induced vibrations of a long tensioned beam in shear flow, *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 27, No. 5–6, pp. 838-847, 2011.

[17] R. Bourguet, G. E. Karniadakis, M. S. Triantafyllou, Multi-frequency vortex-induced vibrations of a long tensioned beam in linear and exponential shear flows, *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 41, No. 2, pp. 33-42, 2013.

[18] R. Bourguet, G. E. Karniadakis, M. S. Triantafyllou, Phasing mechanisms between the in-line and cross-flow vortex-induced vibrations of a long tensioned beam in shear flow, *Computers & Structures*, Vol. 122, No. 2, pp. 155-163, 2013.

[19] S. J. Daniels, I. P. Castro, Z.-T. Xie, Numerical analysis of freestream turbulence effects on the vortex-induced vibrations of a rectangular cylinder, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, Vol. 153, No. 3, pp. 13-25, 2016.

[20] A. M. Marra, C. Mannini, G. Bartoli, Measurements and improved model of vortex-induced vibration for an elongated rectangular cylinder, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, Vol. 147, No. 1, pp. 358-367, 2015.

[21] C. Chindam, K. C. Venkata, K. Balasubramaniam, R. V. Prakash, Thermomechanical response of metals: Maxwell vs. Kelvin–Voigt models, *Materials Science and Engineering: A*, Vol. 560, No. 4, pp. 54-61, 2013.

[22] S. Hyun, T. K. Hooghan, W. L. Brown, R. P. Vinci, Linear viscoelasticity in aluminum thin films, *Applied Physics Letters*, Vol. 87, No. 6, pp. 061902, 2005.

[23] R. S. Lakes, *Viscoelastic Solids*, pp. 29-73, New York, CRC press, 1998.

[24] J. I. Rojas, D. Crespo, Modeling of the effect of temperature, frequency, and phase transformations on the viscoelastic properties of AA 7075-T6 and AA 2024-T3 aluminum alloys, *Metallurgical and Materials Transactions A*, Vol. 43, No. 12, pp. 4633-4646, 2012.

[25] S. S. Rao, *Vibration of Continuous Systems*, pp. 56-93, New York, John Wiley & Sons, 2007.

[26] L. Wang, Z. Hu, Z. Zhong, J. Ju, Dynamic analysis of an axially translating viscoelastic beam with an arbitrarily varying length, *Acta Mechanica*, Vol. 214, No. 3, pp. 225-244, 2010.

[27] T. Sarpkaya, A critical review of the intrinsic nature of vortex-induced vibrations, *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 19, No. 4, pp. 389-447, 2004.

[28] M. P. Païdoussis, S. J. Price, E. De Langre, *Fluid-Structure Interactions: Cross-Flow-Induced Instabilities*, pp. 111-184, Cambridge, Cambridge University Press, 2010.

[29] R. T. Hartlen, I. G. Currie, Lift-oscillator model of vortex-induced vibration, *Journal of the Engineering Mechanics Division*, Vol. 96, No. 5, pp. 577-591, 1970.

[30] M. L. Facchinetti, E. De Langre, F. Biolley, Coupling of structure and wake oscillators in vortex-induced vibrations, *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 19, No. 2, pp. 123-140, 2004.

[31] E. Ciappi, S. De Rosa, F. Franco, J. L. Guyader, S. A. Hambric, *Flinovia-Flow Induced Noise and Vibration Issues and Aspects*, pp.67-115, New York, Springer, 2015.

[32] M. Keber, M. Wiercigroch, Dynamics of a vertical riser with weak structural nonlinearity excited by wakes, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 315, No. 3, pp. 685-699, 2008.

[33] R. D. Blevins, *Flow-Induced Vibration*, pp. 12-75, New York, Van Nostrand Reinhold Co., 1990.

[34] C. Yamamoto, J. Meneghini, F. Saltara, R. Fregonesi, J. Ferrari, Numerical simulations of vortex-induced vibration on flexible cylinders, *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 19, No. 4, pp. 467-489, 2004.