



روش جفت شده ضعیف برای مدل سازی رسوب کف بر اساس روش ریمن تقویت شده

مینا برزگران¹، حسین مهدیزاده^{2*}، سلمان پوراسماعیل³

1- کارشناسی ارشد، مهندسی و مدیریت منابع آب، دانشگاه بیرجند، بیرجند

2- استادیار، مهندسی عمران، دانشگاه بیرجند، بیرجند

3- استادیار، مهندسی عمران، دانشگاه جنتور، جنتور

* بیرجند، صندوق پستی 97175/615، hossein.mahdizadeh@birjand.ac.ir

چکیده

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 26 اردیبهشت 1396

پذیرش: 06 شهریور 1396

ارائه در سایت: 31 شهریور 1396

کلید واژگان:

معادلات آب های کم عمق

روش جفت شده ضعیف

حل کننده ریمن تقویت شده

انتقال رسوب کف

در تحقیق حاضر به منظور مدل سازی انتقال رسوب بستر، از یک روش حجم محدود گودونو استفاده می شود. معادلات به کار گرفته شده در این مدل سازی شامل معادلات آب کم عمق برای شبیه سازی رفتار هیدرو دینامیک و نیز معادله رسوب برای شبیه سازی تغییرات مورفودینامیک می باشند. سپس این دو مجموعه از معادلات توسط روش ریمن تقویت شده بر اساس یک روش جفت شده ضعیف، حل می گردند. در روش جفت شده ضعیف ابتدا معادله رسوب حل می گردد و سپس نتایج به روز شده تغییرات پروفیل رسوب به صورت عبارت منبع در معادلات آب کم عمق با استفاده از یک ساختار ریمن مشابه به کار گرفته می شود. روش عددی مورد نظر ابتدا برای شبیه سازی نمونه آزمایشی انتقال لایه رسوب سهموی، استفاده شد و نتایج به دست آمده با داده های آزمایشگاهی در دسترس صحت سنجی گردید. سپس انتقال یک توده رسوب با شرایط اولیه زیر بحرانی که شرایط برخورد ملایم و شدید بین سطح آب و رسوب کف ایجاد می نماید، در نظر گرفته شد. نتایج حاصل از این پژوهش بیانگر آن است که روش جفت شده ضعیف که بر مبنای روش ریمن تقویت شده، توسعه یافته است، قابلیت مدل سازی تمامی شرایط انتقال رسوب با دقت بالا را دارا می باشد و تطابق بسیار خوبی با حل های مرجع یا تحلیلی در نمونه های آزمایشی برای انواع جریان ها دارد.

A weakly coupled scheme for modelling bedload sediment transport using an augmented Riemann solver

Mina Barzgaran¹, Hossein Mahdizadeh^{1*}, Salman Pouresmaeil²

1- Department of Civil Engineering, University of Birjand, Birjand, Iran

2- Department of Civil Engineering, Bojnourd University, Bojnourd, Iran

* P.O.B. 97175/615 Birjand, Iran, hossein.mahdizadeh@birjand.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper

Received 16 May 2017

Accepted 28 August 2017

Available Online 22 September 2017

Keywords:

Shallow Water Equations

Weakly Coupled Scheme

Augment Riemann Solver

Bedload Sediment Transport

ABSTRACT

In this paper a Godunov-type finite volume method is used for the solution of bedload sediment transport dynamics. The utilised equations for this modelling comprise the shallow water equations used for the hydrodynamic phase and also the Exner equation applied for the morphodynamic variations. These set of equations are then solved using a weakly-coupled scheme based on an augmented Riemann solver. In this approach the morphodynamic equation is first solved and the updated bedload changes with the same Riemann structure are used as a source term within the shallow water equations. The proposed numerical model is first used for the simulation of the parabolic sediment layer and the obtained numerical results are validated with the exact solution. Then, a bedload hump propagation with an initial subcritical condition which is able to create both mild and strong sediment and free-surface interactions is considered and the computed results are compared with the reference solution. These numerical results indicate that the defined weakly coupled method developed based on an augmented Riemann technique is able to be used for modelling bedload sediment transport for all flow regimes and exhibits a very good agreement with analytical or reference solutions for the given test cases.

حفاظت محیط زیست می باشند.

1- مقدمه

تعامل بین جریان آب و انتقال رسوب یک مسئله در مهندسی هیدرولیک است که برای سیستم های رودخانه ای مختلف از قبیل دریاها، رودخانه ها و دلتاها مورد مطالعه واقع گردیده است. مدل های مورفودینامیک قادر به پیش بینی تغییر شکل های بستر دریا و رودخانه و نیز تغییرات سطح آب می باشند. این مدل ها معمولاً بر اساس معادلات آب های کم عمق که هیدرو دینامیک جریان را پیش بینی می کنند، به همراه معادله اکسرن¹، برای

در سال های اخیر مسئله انتقال رسوب به موضوع پراهمیتی در صنعت هیدرولیک تبدیل شده است. شناخت روند حرکت رسوبات بستر رودخانه ها و آبراه ها در زمان سیلاب، جز مهم ترین بخش مدیریت آب کشور به شمار می رود. انتقال رسوب در زمینه های مختلفی از جمله رسوب شناسی، ژئومورفولوژی، مهندسی عمران و محیط زیست مورد توجه است. به کارگیری روش های مطمئن برای پیش بینی جریان آب، انتقال رسوب و تغییرات بستر، قادر به ایجاد راهکارهای کنترلی برای جلوگیری از خسارات مالی و جانی و

¹ Exner

Please cite this article using:

M. Barzgaran, H. Mahdizadeh, S. Pouresmaeil, A weakly coupled scheme for modelling bedload sediment transport using an augmented Riemann solver, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 9, pp. 409-416, 2017 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

تقریب انتقال رسوب، می باشند [2,1].

برای حل این سیستم معادلات از دو روش جدا شده و جفت شده استفاده شده است. روش جدا شده¹ در گام اولیه به حل سیستم معادلات آب های کم عمق با ثابت در نظر گرفتن توپوگرافی می پردازد و سپس در گام دوم توپوگرافی با استفاده از معادله اکسیر به روز رسانی می گردد. به کارگیری این روش آسان است و سبب به حداقل رساندن هزینه و زمان محاسبات می گردد. مهم ترین ایراد این روش، بروز ناپایداری در هنگام استفاده از گام های زمانی مختلف برای هر معادله است. علت بروز این مشکل تقریب نامناسب از مقادیر ویژه واقعی سیستم موجود است. به علاوه این روش تنها قابل اعمال در مواردی است که تعامل بین انتقال رسوب و سطوح امواج آب ضعیف یا متوسط است و تاکنون روشی در مورد تعامل قوی بین رسوب و سطوح موج ارائه نشده است. روش جفت شده² کل سیستم مورفودینامیک را در فرمی از قوانین بقای جرم و مومنتم حل می کند و در نتیجه سبب پایداری بیشتر این روش می گردد [5-3,1]. علاوه بر این هرگونه تعاملات قوی که ممکن است در صورت تقابل شدید جریان سطح آزاد با رسوب کف رخ بدهد، به وسیله این روش تقریب زده می شود و روش مستقل از عدد فرود است. مهم ترین ضعف روش جفت شده نسبت به روش جدا شده آن است که، این روش فقط بر اساس فرمول های غیر بقایی³ توسعه یافته است و تاکنون هیچ گونه راه حل بقایی⁴ برای این روش پیشنهاد نشده است [6,4,3].

کاسترو و همکاران [1] به منظور حل سیستم معادلات آب های کم عمق به همراه معادله اکسیر روش جفت شده را با شارهای غیر بقایی⁵ استفاده نموده اند. کوردیر و همکاران [7]، دو روش جدا شده و جفت شده را برای مدل سازی انتقال رسوب به همراه معادلات آب های کم عمق در نظر گرفتند. سعیدی [8] برای شناخت کامل از اتصال فیزیکی فازهای آب و رسوب در جریان های آبرفتی، دو روش جفت شده و جدا شده را در مدل سازی جریان های آبرفتی مقایسه نمود. مهدیزاده و شریفی [9] مدل سازی انتقال رسوب بستر توسط یک روش انتشار موج اصلاح شده نوع گودونو با هر دو روش جدا شده و جفت شده را ارائه نموده اند.

برای حل سیستم معادلات مورفودینامیکی روش های عددی متعددی توسعه یافته اند که در این بین، روش های حجم محدود در دهه های اخیر به طور گسترده ای به کار گرفته شده است. این روش ها بر اساس دو چارچوب متفاوت از روش های حجم محدود گسسته سازی می شوند. گروه اول، روش بالادست است که توسط گودونو ارائه شده است و در حل مسائل دینامیک گازها مورد استفاده گسترده است. در مورد مسائل یک بعدی، روش بالادست با موفقیت در موردی از انتقال رسوب با دقت بالا توسط روش های و فراکارولو به کار گرفته شده است [10].

گروه دوم، روش حجم محدود مرکزی می باشند که طرح های مرکزی مانند لاکس- فردریچ یا لاکس- وندروف را به کار می گیرند. اخیراً روش های مرکزی غیر بقایی برای مسائل انتقال رسوب به کار گرفته شده است. کانستریلی و همکاران یک روش حجم محدود با دقت بالا برای معادلات آب های کم عمق به همراه بستر متحرک بر روی شبکه های بدون ساختار ارائه نمود [4].

معمولاً بیشتر حل های عددی برای معادلات آب های کم عمق در حالت

غیرخطی، بر اساس روش حجم محدود گسترش یافته اند. روش حجم محدود روش گسسته سازی بر مبنای فرم انتگرالی قانون بقا است، بنابراین خاصیت بقای جرم و اندازه حرکت در آن به خوبی حفظ می گردد. در این مقاله نوعی از روش حجم محدود گودونو، به نام الگوریتم پخش موج گودونو⁶ برای تقریب معادلات مورفودینامیک استفاده می گردد. در روش پخش موج شارها به صورت عبارات نوسانی راست رونده و چپ رونده لحاظ شده که این شارها توسط یک روش ریمن تقویت شده قابل محاسبه هستند.

هدف اصلی در مقاله حاضر مدل سازی برهم کنش های شدید جریان سیال با رسوب بستر می باشد که در حالت کلی با روش های جدا شده که در ابتدای این قسمت بیان گردیده اند، ممکن نمی باشد. در واقع روش عددی ارائه شده در این پژوهش با به کارگیری حل کننده ریمن تقویت شده به صورت جفت شده ضعیف با معادله رسوب قادر به شبیه سازی برخوردهای شدید جریان سطح آزاد با رسوب بستر می باشد. روش ریمن تقویت شده در ابتدا در سال 2008 توسط جورج [11] برای حل معادلات آب های کم عمق معرفی گردید. در این روش از یک حل کننده شامل چهار موج استفاده شده که شامل یک بردار تقویت شده عمق، مومنتم، شار مومنتم و تراز بستر است. این روش یک روش متوازن شده بوده و قابلیت توسعه بر روی سطوح خشک را دارا است. بر اساس اطلاعات نویسندگان تاکنون هیچ توسعه ای از روش ریمن تقویت شده برای حل معادلات رسوب بستر ارائه نگردیده است. در این پژوهش ابتدا پیش زمینه ای در ارتباط با معادلات حاکم بر سیستم یک بعدی مورفودینامیک همراه با فرمول های تجربی انتقال رسوب مختلف ارائه می شود. سپس توضیحی مختصر از الگوریتم پخش موج به همراه حل کننده ریمن تقویت شده برای یک سیستم جفت شده ضعیف، معرفی می گردد. در نهایت به منظور صحت سنجی روش ارائه شده، نتایج حاصل از اجرای روش مدنظر با حل های تحلیلی و مرجع دو نمونه آزمایشی، مقایسه می گردد و نتایج حاصل از یافته ها بررسی می گردند.

2- معادلات حاکم و روش عددی

2-1- معادلات حاکم

معادلات حاکم برای تقریب معادلات رسوب کف، به صورت ترکیبی از معادلات آب های کم عمق و معادله اکسیر است. برای نمایش تغییرات بستر لازم است که معادلات آب کم عمق در کنار معادله انتقال رسوب کف به صورت هم زمان حل شوند. در حالت کلی سیستم مورفودینامیک شامل معادلات آب کم عمق و معادله انتقال رسوب به صورت رابطه (1) می باشند [12]:

$$U_t + F(U)_x = S \quad (1)$$

$$B_t + vq_b = 0$$

در این رابطه U_t برداری از متغیرهای بقا یافته، $(U)_x$ گرادیان شارها در جهت x برداری از عبارات های منبع، B تراز ارتفاع بستر (m) و q_b دبی انتقال رسوب (m^2/s) می باشند که به صورت روابط (2) در معادلات مربوطه اعمال می گردند:

$$U = \begin{bmatrix} u \\ hu \end{bmatrix}$$

$$F(U) = \begin{bmatrix} hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 0 \\ -gh \frac{\partial B}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$v = \frac{1}{1 - \varepsilon} \quad (2)$$

⁶ Godunov-type Wave Propagation Algorithm

¹ Splitting

² Coupled

³ Non-Conservative Formulations

⁴ Conservative Solution

⁵ Non-Conservative Fluxes

در روابط ذکر شده، ε تخلخل مواد بستر، h میزان عمق آب (m) ، u مؤلفه سرعت در جهت محور x (m^2/s) و g شتاب گرانش (m/s^2) می باشد. روابط تحلیلی بسیاری برای پیش بینی و تعیین دبی انتقال رسوب استخراج شده اند که شامل هر دو رسوب جامد و معلق بستر می شوند. به عنوان مثال، یکی از ساده ترین روابط برای تعیین دبی انتقال رسوب توسط گرس معرفی شده است که دبی انتقال رسوب را به عنوان تابعی از سرعت عمق متوسط و یک ثابت به نام A_g به صورت رابطه (3) معرفی نمود [13]:

$$q_b = A_g u^{m_g} \quad (3)$$

مقدار ثابت A_g به خواص خاک وابسته است و بر اساس داده های تجربی تعیین می شود و m_g معمولاً در بازه $1 \leq m_g \leq 4$ انتخاب می گردد.

عملاً تخمین نرخ رسوب انتقالی عمدتاً بر اساس تنش برشی کف τ_b (N/m^2) می باشد که در جریانات لایه ای رابطه تنش برشی کف به صورت رابطه (4) می باشد [7]:

$$\tau_b = \rho g h S_f \quad (4)$$

که در رابطه فوق ρ چگالی آب (kg/m^3) می باشد و S_f عبارت اصطلاحی است که توسط قوانین تجربی مانند رابطه مانینگ قابل محاسبه است [7]:

$$S_f = \frac{n^2 u^2}{h^{4/3}} \quad (5)$$

در رابطه (5)، n ضریب مانینگ می باشد. محاسبات نرخ انتقال رسوب عمدتاً توسط پارامتری به نام ψ که در رابطه (6) ارائه شده است، بیان می شود [7]:

$$q_b = \psi \sqrt{(G_s - 1) g d_m^3} \quad (6)$$

که در این رابطه G_s چگالی نسبی است که به صورت $G_s = \rho_s / \rho$ محاسبه می شود. به منظور محاسبه ψ ، روابط تجربی مختلفی ارائه شده است. خلاصه برخی از این روابط در جدول 1 ارائه شده است [14-17]:

تنش برشی بستر معمولاً در فرم بی بعد استفاده می شود که با τ_b^* نشان داده می شود و نیز پارامتر شیلدز نامیده می گردد. این پارامتر در عباراتی از نیروهای پسا و وزن غوطه وری به صورت رابطه (7) تعریف می شود [7]:

$$\tau_b^* = \frac{\tau_b}{(\rho_s - \rho) g d_m} \quad (7)$$

که در این رابطه ρ_s چگالی رسوب (kg/m^3) و d_m قطر متوسط ذرات رسوب (mm) می باشند. لازم به ذکر است که حرکت رسوب زمانی رخ می دهد که τ_b^* مقدار τ_{cr}^* بیشتر گردد. میزان آستانه τ_{cr}^* به خواص فیزیکی رسوب وابسته است و معمولاً به طور تجربی محاسبه می شود. در صورتی که میزان τ_{cr}^* برابر با صفر گردد، روابط تجربی جدول 1 به اندازه رسوب وابسته نخواهند بود و می توان با کمک معادله گرس بیان شده در رابطه (3) با مقادیر اصلاح شده A_g و m_g مطابق جدول 2 محاسبه کردند.

جدول 1 روابط تجربی مختلف برای تعیین پارامتر ψ

نام فرمول	پارامتر ψ
مایر- پیتر [14]	$\psi = 8(\tau_b^* - \tau_{cr}^*)^{1.5}$
فرناندز لوکو- ون بیک [15]	$\psi = 5.7(\tau_b^* - \tau_{cr}^*)^{1.5}$
نیلسن [16]	$\psi = \sqrt{\tau_b^*}(\tau_b^* - \tau_{cr}^*)^{1.5}$
کمن- لارسون [17]	$\psi = 12\tau_b^* \exp\left(\frac{-4.5\tau_{cr}^*}{\tau_b^*}\right)$

جدول 2 فرمول های تجربی مختلف انتقال رسوب در قالب فرمول گرس
Table 2 Different empirical sediment transport formulations written in the Grass-type form

نام فرمول	A_g	m_g
مایر- پیتر [14]	$\frac{8n^3 g^{0.5}}{h^{0.5}(G_s - 1)}$	3
فرناندز لوکو- ون بیک [15]	$\frac{5.7n^3 g^{0.5}}{h^{0.5}(G_s - 1)}$	3
کمن- لارسون [17]	$\frac{12n^3 g^{0.5}}{h^{0.5}(G_s - 1)}$	3

2-2- الگوریتم پخش موج

روش ارائه شده در این مقاله نوعی از روش حجم محدود گودونو به نام الگوریتم پخش موج گودونو است که برای تقریب معادلات مورفودینامیک استفاده می گردد. این روش که برای اولین بار توسط لوک بیان گردید، می تواند به صورت رابطه (8) ارائه گردد [18]:

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(A^+ \Delta U_{i-\frac{1}{2}} + A^- \Delta U_{i+\frac{1}{2}} \right) - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\bar{F}_{i-\frac{1}{2}}^n - \bar{F}_{i+\frac{1}{2}}^n \right) \quad (8)$$

در رابطه (8) U_i^n تقریب متوسط بردار مجهولات در زمان $n \Delta t$ و Δx به ترتیب گام زمانی و گام مکانی، n سطح زمانی، $A^+ \Delta U_{i-\frac{1}{2}}$ و $A^- \Delta U_{i+\frac{1}{2}}$ به ترتیب نوسانات راست رونده و چپ رونده و $\bar{F}_{i\pm\frac{1}{2}}^n$ عبارت های اصلاحی مرتبه دوم مورد نیاز برای رسیدن به حل با دقت بالا می باشند. با استفاده از محدودکننده های مختلف قابل محاسبه می باشند. در صورتی که $\bar{F}_{i\pm\frac{1}{2}}^n = 0$ آنگاه معادله فوق معادله گودونو مرتبه اول است. $A^\pm \Delta U_{i\pm\frac{1}{2}}$ نمادهای مستقلی می باشند که توسط حل مسئله ریمن در هر سطح برخورد بین دو سلول، به دست می آیند و به صورت رابطه (9) محاسبه می شوند [11]:

$$A^+ \Delta U_{i-\frac{1}{2}} = \sum_{k: S_{k,i-\frac{1}{2}} > 0} S_{k,i-\frac{1}{2}} W_{k,i-\frac{1}{2}} \\ A^- \Delta U_{i-\frac{1}{2}} = \sum_{k: S_{k,i-\frac{1}{2}} \leq 0} S_{k,i-\frac{1}{2}} W_{k,i-\frac{1}{2}} \quad (9)$$

که در رابطه فوق $W_{k,i-\frac{1}{2}}$ که موج ریمن نامیده می شود، با کمک ضرب یک ضریب خاص به نام $\alpha_{k,i-\frac{1}{2}}$ در بردار ویژه مربوطه به صورت $W_{k,i-\frac{1}{2}} = \alpha_{k,i-\frac{1}{2}} n_{k,i-\frac{1}{2}}$ به دست می آید که این امواج با سرعت $S_{k,i-\frac{1}{2}}$ منتشر می شوند.

2-3- حل کننده ریمن تقویت شده با استفاده از روش جفت شده ضعیف

2-3-1- معادلات آب کم عمق

معادلات آب کم عمق که بیانگر بقای جرم آب و رابطه بقای اندازه حرکت هستند، یک سیستم از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی برای عمق و مومنتم می باشند که به شکل رابطه (10) نوشته می شوند [11]:

$$h_t + (hu)_x = 0 \\ (hu)_t + \left(hu^2 + \frac{1}{2} gh^2 \right)_x = -ghB_x \quad (10)$$

روش ریمن تقویت شده اولین بار توسط جورج در سال 2008 به منظور حل معادلات آب کم عمق معرفی گردید. از مزایای حل کننده ریمن تقویت شده این است که این روش به طور هم زمان دارای ویژگی های مطلوب از حل کننده رو [19]، انواع حل کننده های HLL2² و روش شار موج³ و نیز عدم ایجاد ضعف های هر یک از این روش ها است. این روش دارای خاصیت حفظ عمق

¹ ROE

² Harten, Lax, van Leer and Einfeldt

³ Flux-wave

$$r_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ s_\varepsilon^3 \\ (s_\varepsilon^3)^2 \\ 0 \end{bmatrix}, r_4 = \begin{bmatrix} S_-^+(q_l, q_r) \\ -\lambda_1 \lambda_3(q_l, q_r) \\ 0 \\ S_-^+(q_l, q_r) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

بردار ویژه های فوق در الگوریتم پخش موج استفاده خواهند شد. میانگین های $S_-^+(q_l, q_r)$ و $\lambda_1 \lambda_3(q_l, q_r)$ طبق فرمول (20) قابل محاسبه می باشند [11]:

$$S_-^+(q_l, q_r) = -\frac{g}{2}(h_l + h_r) \frac{\lambda_1 \lambda_3(q_l, q_r)}{\lambda_1 \lambda_3(q_l, q_r)} \quad (20)$$

$$\lambda_1 \lambda_3(q_l, q_r) = -(-u_l u_r + g(\frac{h_l + h_r}{2}))$$

$$\lambda_1 \lambda_3(q_l, q_r) = -(-(\frac{u_l + u_r}{2})^2 + g(\frac{h_l + h_r}{2}))$$

بر این اساس امواج با سرعت های ارائه شده طبق روابط (21) منتشر می شوند [11]:

$$s^1 = s_\varepsilon^1, \quad s^2 = \frac{1}{2}(s_\varepsilon^1 + s_\varepsilon^3) \quad (21)$$

$$s^3 = s_\varepsilon^3, \quad s^4 = 0$$

S_ε نشان دهنده سرعت های اینفلت¹ می باشد که به صورت روابط (22) بیان می شوند [21]:

$$s_\varepsilon^1 = \min(\lambda_{k,i-1}, \lambda_k) \quad (22)$$

$$s_\varepsilon^3 = \min(\lambda_{k,i}, \lambda_k)$$

در رابطه فوق $\lambda_{k,i}$ امین مقدار ویژه برای ماتریس ژاکوبین و λ_k نشان دهنده k امین مقدار ویژه برای ماتریس رو می باشد. فرایند ارائه شده در این بخش، نشان دهنده یک حل کننده ریمن تقریبی تقویت شده برای حل معادلات آب کم عمق می باشد.

2-3-2- معادله اکسنر

در حل کننده جفت شده ضعیف، ابتدا فرمول انتقال رسوب برای هر گام زمانی حل می شود. سپس پروفیل بستر به دست آمده از این معادله، به عنوان عبارت منبع در معادلات آب کم عمق جایگزین می شود. معادلات آب کم عمق به روش ریمن تقویت شده حل می گردند.

به منظور تقریب معادله انتقال رسوب، از روش جدیدی برای تجزیه امواج و شارهای موج استفاده می شود که اولین بار توسط بیل و همکاران [22] در حل مسائل دینامیک گاز به صورت رابطه (23) استفاده شده است:

$$\begin{bmatrix} U_i - U_{i-1} \\ F(U_i) - F(U_{i-1}) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{2m} \begin{bmatrix} W_{k,i-\frac{1}{2}} \\ \xi_{k,i-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \quad (23)$$

این رابطه شامل امواج و تفاضل شارها می باشد که در نهایت منجر به ایجاد یک موج منحصربه فرد می شود. در الگوریتم پخش موج هر موج از طریق رابطه (24) به شار موج مرتبط می گردد [23]:

$$\xi_{i-\frac{1}{2}} = s_{i-\frac{1}{2}} W_{i-\frac{1}{2}} \quad (24)$$

برای حل معادله انتقال رسوب، رابطه (23) به شکل رابطه (25) بازنویسی می شود:

$$\begin{bmatrix} B_i - B_{i-1} \\ q_{bi} - q_{b(i-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{i-\frac{1}{2}} \\ \xi_{i-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \quad (25)$$

بنابراین برای تقریب امواج میان سطوح برخورد بین سلول های محاسباتی حجم محدود، تنها تفاضل میان سلول های مجاور رسوب بستر مورد نیاز خواهد بود. میزان شار موج، $\xi_{k,i-1/2}$ ، با رابطه (26) به دست می آید [23]:

$$F(U_i) - F(U_{i-1}) = v(q_{bi} - q_{b(i-1)}) = \xi_{i-\frac{1}{2}} \quad (26)$$

مثبت نزدیک به سطح خشک و نیز دارای یک ثابت آنتروپی طبیعی است و تخمین دقیق تری را برای مسائل با امواج انبساطی بزرگ فراهم می کند. این روش یک روش متوازن شده است [20].

در سیستم تقویت شده، با حذف عبارت منبع و اضافه کردن متغیر اضافی تراز بستر در کمیت های بقائی، چهار موج در نظر گرفته می شود؛ بنابراین در سیستم تقویت شده معادلات آب کم عمق رابطه (10)، به صورت رابطه (11) نوشته می شود [11]:

$$q_t + W(q)q_x = 0 \quad (11)$$

در رابطه فوق q بردار شامل کمیت های بقائی و $W(q)$ ماتریس ژاکوبین شارهای متناظر با این کمیت ها می باشد که بردار q به صورت رابطه (12) تعریف می گردد [11]:

$$q = (h, hu, \varphi, B)^T \quad (12)$$

بردار q شامل عمق (h) ، مومنت (hu) ، شار مومنت $(\varphi = (hu^2 + \frac{1}{2}gh^2))$ و تراز بستر می باشد. ماتریس ژاکوبین شارهای متناظر با این کمیت ها به صورت رابطه (13) است [11]:

$$W(q) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -u^2 + gh & 2u & 0 & gh \\ 0 & -u^2 + gh & 2u & 2ugh \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس $W(q)$ مطابق با روابط (14) می باشند [11]:

$$\{r_1, \lambda_1\} = \{(1, \lambda_1, (\lambda_1)^2, 0)^T, u - \sqrt{gh}\}$$

$$\{r_2, \lambda_2\} = \{(0, 0, 1, 0)^T, 2u\}$$

$$\{r_3, \lambda_3\} = \{(1, \lambda_3, (\lambda_3)^2, 0)^T, u + \sqrt{gh}\}$$

$$\{r_4, \lambda_4\} = \{(\frac{gh}{\lambda_1 \lambda_3}, 0, -gh, 1)^T, 0\} \quad (14)$$

بردارهای r_1 و r_3 متناظر با ناحیه های غیرخطی اختصاص یافته شده به معادلات آب کم عمق استاندارد می باشند. ناحیه اختصاص یافته به r_4 ، مربوط به ناحیه خطی حالت پایدار است. بردار r_3 تنها دارای یک مؤلفه غیر صفر در راستای φ است [11].

رابطه (15) یک مسئله ریمن برای سیستم تقویت شده (11) است [11]:

$$q_t + A(q)q_x = 0 \quad (15)$$

با داده اولیه ثابت قطعه ای [11]:

$$q(x, 0) = \begin{cases} q_l, & x < 0 \\ q_r, & x > 0 \end{cases} \quad (16)$$

که در آن:

$$q_l = \begin{bmatrix} h_l \\ (hu)_l \\ \varphi_l \\ b_l \end{bmatrix}, \quad q_r = \begin{bmatrix} h_r \\ (hu)_r \\ \varphi_r \\ b_r \end{bmatrix} \quad (17)$$

برای حل تقریبی معادله (15) با استفاده از گسسته سازی، رابطه (18) قابل نگارش است [11]:

$$\Delta q = q_r - q_l = \sum_{p=1}^4 \alpha_p r_p = W_p \quad (18)$$

که در آن، r_p تقریبات محلی بردار ویژه های ماتریس A می باشند که به صورت روابط (19) بیان می شوند [11]:

$$r_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ s_\varepsilon^1 \\ (s_\varepsilon^1)^2 \\ 0 \end{bmatrix}, r_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

¹ Einfeldt

شکل 2 با همان داده های قبلی و با تفاوت در $B=5$ و زمان $t=5339s$ به دست آمده است.

مطابق شکل های 1 و 2 تطابق خوبی بین روش موردنظر با حل دقیق مسئله برای هر دو مقدار B به خصوص در قسمت فوقانی توده رسوب متحرک، برخلاف اختلاف زیاد مشاهده شده در روش های عددی توسعه یافته بر اساس شارهای غیر بقائی [1]، مشاهده می شود.

شکل های 3 و 4 تفاوت بین روش ریمن تقویت شده جفت شده ضعیف مرتبه اول و مرتبه دوم به ترتیب با $B=5$ و $B=1$ را نشان می دهد. همان طور که در این شکل مشاهده می شود الگوریتم مرتبه اول نتایج با پخشیدگی بیشتری را از خود نشان می دهد درحالی که روش مرتبه دوم کاملاً بر حل تحلیلی منطبق می باشد.

2-3- انتشار توده رسوب با جریان زیربحرانی اولیه

این نمونه آزمایشی توسط کوردیر و همکاران [7] ارائه شده است و توانایی حل کننده عددی را در مدل سازی انتشار توده رسوب با مقادیر مختلف برای

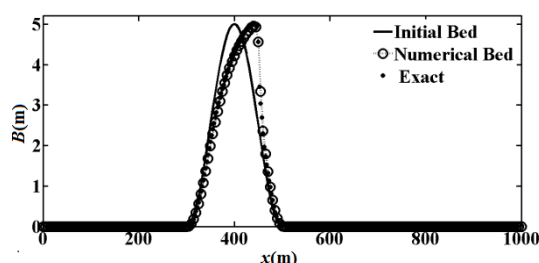


Fig. 2 Comparison of numerical results with the exact solution for the parabolic sediment propagation test case at $t=5339s$ and $B=5$

شکل 2 مقایسه نتایج عددی با حل دقیق نمونه آزمایشی انتقال رسوب سهموی در زمان $t=5339s$ و $B=5$

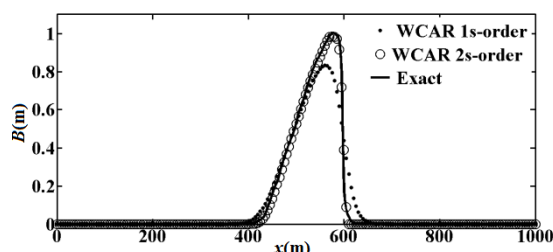


Fig. 3 Comparison between first and second-order weakly coupled scheme using augmented Riemann solver with $B=1$

شکل 3 مقایسه بین روش ریمن تقویت شده بر اساس روش جفت شده ضعیف مرتبه اول و مرتبه دوم با $B=1$

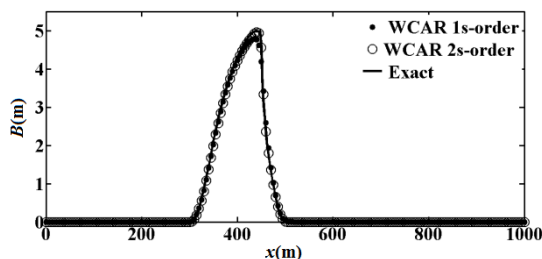


Fig. 4 Comparison between first and second-order weakly coupled scheme using augmented Riemann solver with $B=5$

شکل 4 مقایسه بین روش ریمن تقویت شده بر اساس روش جفت شده ضعیف مرتبه اول و مرتبه دوم با $B=5$

طبق رابطه (24) سرعت امواج در سطح برخورد بین دو سلول با رابطه (27) قابل محاسبه است:

$$S_{i-\frac{1}{2}} = \frac{\xi_{i-\frac{1}{2}}}{W_{i-\frac{1}{2}}} \quad (27)$$

بنابراین تغییرات به روز شده بستر برای گام زمانی بعد توسط رابطه (28) محاسبه می شود:

$$B_i^{n+1} = B_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(A^+ \Delta U_{i-\frac{1}{2}} + A^- \Delta U_{i+\frac{1}{2}} \right) - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\bar{F}_{i-\frac{1}{2}}^n - \bar{F}_{i+\frac{1}{2}}^n \right) \quad (28)$$

2-4- شرط پایداری

برای دستیابی به پایداری حل عددی، بایستی شرط پایداری کورانت اعمال گردد که به صورت رابطه (29) است [18]:

$$CFL = \frac{\max(\lambda) \Delta t}{\Delta x} \quad (29)$$

که در آن $\lambda = \max[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]^T$ است.

3- تعریف مسئله و اعتبار سنجی

به منظور ارزیابی و اعتبار سنجی حل کننده عددی ارائه شده فوق، دو نمونه آزمایشی مورد مطالعه قرار گرفته است. در نمونه اول مدل عددی برای شبیه سازی انتقال لایه رسوب سهموی استفاده می شود. در نمونه دوم انتشار یک توده رسوب با شرط اولیه جریان زیربحرانی در نظر گرفته شده است. مدل عددی موردنظر با استفاده از کد نویسی در فرترن و بر روی پردازنده 7 هسته ای اینتل با حافظه داخلی 8 گیگابایت حل شده است.

3-1- انتقال لایه رسوب سهموی

هدف از این نمونه آزمایشی، مقایسه حل کننده ریمن تقویت شده با حل دقیق ارائه شده توسط هادسون و همکاران [3] با استفاده از مدل گرس است. عمق آب برابر با 10 متر، طول کانال موردنظر 1000 متر و دبی ثابت $Q=10 m^3/s$ است. شرط اولیه برای پروفیل لایه رسوب به صورت رابطه (30) تعریف می گردد [12]:

$$B(x, 0) = \begin{cases} B \sin^2 \left(\frac{\pi(x-300)}{200} \right), & 300 \leq x \leq 500 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (30)$$

حل دقیق برای این نمونه آزمایشی با فرض ثابت ماندن عمق آب و دبی رسوب برای تمام محدوده محاسباتی، تعیین می شود. با تنظیم مقادیر $\varepsilon = 0.4$ ، $m_g = 3$ ، $A_g = 0.001$ و $B=1$ زمان $t=238079s$ به دست می آید [12]. شکل 1 نتایج عددی به دست آمده با روش ریمن تقویت شده را به طور همزمان با حل دقیق و پروفیل اولیه بستر نشان می دهد. نتایج محاسبه شده در زمان $t=238079s$ و با 200 سلول محاسباتی و عدد $CFL = 0.95$ است.

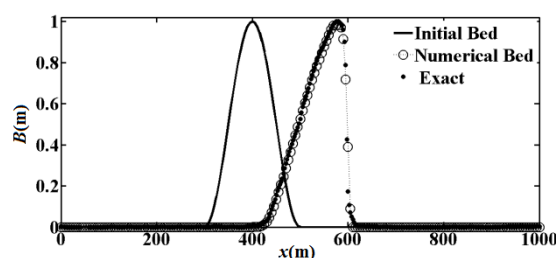


Fig. 1 Comparison of numerical results with the exact solution for the parabolic sediment propagation test case at $t=238079s$ and $B=1$

شکل 1 مقایسه نتایج عددی با حل دقیق نمونه آزمایشی انتقال رسوب سهموی در زمان $t=238079s$ و $B=1$

خوبی را برای شبیه سازی راه حل ارائه می دهد.

برای بررسی کارآمدی مدل عددی مطرح شده در به کارگیری مقدار متغیر A_g ، فرمول مایر-پیتر برای تقریب رابطه انتقال رسوب بستر استفاده می شود. بدین منظور شرایط اولیه به صورت رابطه (31) و نیز $hu(x=0, t) = 0.8$ در نظر گرفته می شود. شکل 8 نتایج عددی با مقادیر $CFL=0.95$ ، $\rho_s = 2612 \text{ kg/m}^3$ ، $n=0.095$ و A_g به دست آمده با استفاده از فرمول مایر-پیتر را نشان می دهد.

همان طور که در شکل 8 مشاهده می شود، روش عددی ارائه شده در این پژوهش قادر به مدل سازی مناسب امواج ایستا ایجاد شده برای رسوب کف و جریان سطح آزاد بدون ایجاد هرگونه نوسانات عددی، حتی برای مقادیر متغیر A_g و فرمول مایر-پیتر می باشد.

به منظور درک بهتر عملکرد روش پیشنهادی در مقایسه با سایر روش های عددی در دسترس، مقایسه ای بین نتایج روش ریمن تقویت شده بر اساس روش جفت شده ضعیف (WCAR) و روش روش جدانشده بر اساس روش شار موج اصلاح شده (MSFW) که توسط مهدیزاده و شریفی [9] ارائه شده است، انجام گردید. در جدول 3 در شرایط $A_g = 0.005$ و زمان $t=10 \text{ s}$ ، مقادیر نرم اقلیدسی محاسبه شده بین روش WCAR و روش MSFW با نتایج حل مرجع به دست آمده با 10000 سلول محاسباتی، ارائه گردیده است. همچنین در جدول 4 مقایسه مشابهی در شرایط $A_g = 0.07$ و زمان $t=2.1 \text{ s}$ ، انجام پذیرفته است.

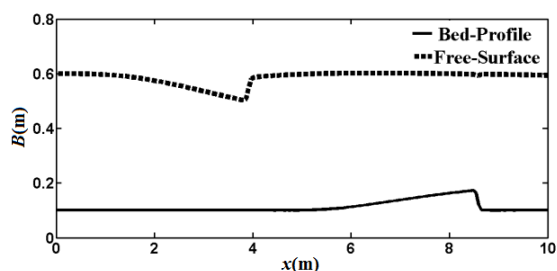


Fig. 8 Sediment hump propagation in a subcritical regime using Meyer-Peter formula $t=2.1 \text{ s}$

شکل 8 انتشار توده رسوب در جریان زیربحرانی با استفاده از فرمول مایر-پیتر در زمان $t=2.1 \text{ s}$

جدول 3 مقایسه تفاوت نرم های اقلیدسی محاسبه شده بین WCAR و MSFW با $A_g = 0.005$ در زمان $t=10 \text{ s}$ و حل مرجع به دست آمده با 10000 سلول محاسباتی

Table 3 Comparison between the Euclidean norms of the difference solution between WCAR and MSFW simulations and the reference solution achieved with 10000 numerical cells at time $t=10 \text{ s}$ and $A_g = 0.005$

تعداد سلول محاسباتی					
800	400	200	100	50	
نرم اقلیدسی به روش WCAR					
0.00448	0.01486	0.03101	0.05217	0.08554	عمق
0.00137	0.00277	0.00518	0.00792	0.01227	مومنتم
0.00327	0.01107	0.02209	0.03536	0.05818	تراز ارتفاع بستر
نرم اقلیدسی به روش MSFW					
0.00297	0.01049	0.04519	0.06556	0.09312	عمق
0.00692	0.00153	0.00691	0.01050	0.01553	مومنتم
0.00182	0.00586	0.03570	0.05478	0.08036	تراز ارتفاع بستر

A_g که سبب ایجاد رژیم های تعاملی بین تراز آب و رسوب می شود، بررسی می کند. شرایط اولیه برای پروفیل بستر، دبی و سرعت متوسط عمق در رابطه (31) ارائه گردیده است [7]:

$$\begin{cases} hu(x, 0) = 0.5 \\ B(x, 0) = 0.1 + 0.1 \exp^{-(x-5)^2} \\ \frac{u^2}{2} + g(h + B) = 6.386 \end{cases} \quad (31)$$

شکل 5 نشان دهنده شرط اولیه برای تراز سطح آب و پروفیل بستر است. برای ایجاد تعامل متوسط برای شرایط اولیه فوق ابتدا فرمول گرس با $A_g = 0.005$ استفاده گردید. نتایج عددی به دست آمده در $t=10 \text{ s}$ با کمک 200 سلول محاسباتی و $CFL = 0.95$ در شکل 6 قابل مشاهده است.

مطابق شکل 6، مدل ارائه شده به خوبی قادر به شبیه سازی امواج شوک ایجاد شده ناشی از حرکت لایه رسوب می باشد. شکل 7 نشان دهنده نتایج برای مدل عددی با عدد $CFL = 0.95$ ، $t=2.1 \text{ s}$ و مقدار متفاوت $A_g = 0.07$ است.

قابل ذکر است که مقدار $A_g = 0.07$ باعث ایجاد تعامل قوی تری بین رسوب بستر و سطح آزاد جریان می شود که منجر به نتایج غیر فیزیکی می گردد [7]، اما در روش ارائه شده این مشکل ایجاد نمی شود و نتایج عددی تقریبی بسیار

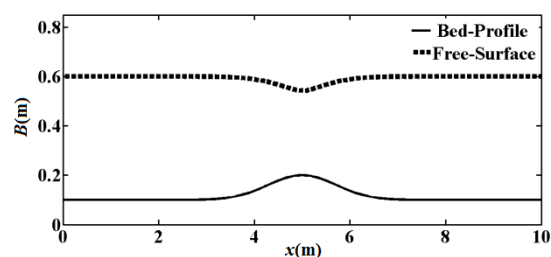


Fig. 5 Initial condition for the second test-case defined in Eq(31)

شکل 5 شرط اولیه برای نمونه آزمایشی دوم طبق معادله (31)

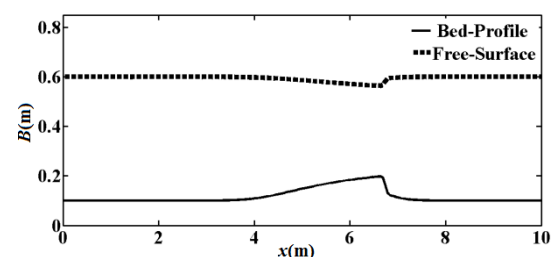


Fig. 6 Sediment hump propagation in a subcritical regime with $A_g=0.005$ at $t=10 \text{ s}$

شکل 6 انتشار توده رسوب در جریان زیربحرانی با $A_g=0.005$ در $t=10 \text{ s}$

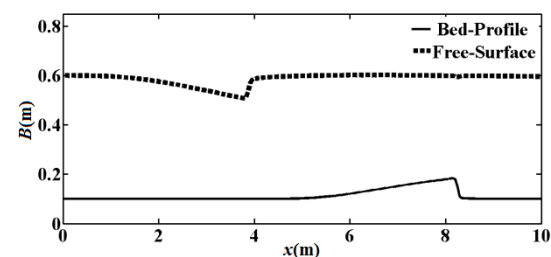


Fig. 7 Sediment hump propagation in a subcritical regime with $A_g=0.07$ at $t=2.1 \text{ s}$

شکل 7 انتشار توده رسوب در جریان زیربحرانی با $A_g=0.07$ در $t=2.1 \text{ s}$

جدول 4 مقایسه تفاوت نرم های اقلیدسی محاسبه شده بین WCAR و MSFW با $A_g=0.07$ در زمان $t=2.1$ s و حل مرجع به دست آمده با 10000 سلول محاسباتی

Table 4 Comparison between the Euclidean norms of the difference WCAR and MSFW simulations and the reference solution achieved with 10000 numerical cells at time $t=2.1$ s and $A_g=0.07$

تعداد سلول محاسباتی	800	400	200	100	50
نرم اقلیدسی به روش WCAR					
عمق	0.01390	0.02474	0.03977	0.05930	0.09034
مومنتم	0.01547	0.02560	0.03989	0.05809	0.08826
تراز ارتفاع بستر	0.01636	0.02578	0.03367	0.03999	0.06482
نرم اقلیدسی به روش MSFW					
عمق	0.01915	0.02597	0.02127	0.03593	0.06300
مومنتم	0.01092	0.01082	0.02096	0.04789	0.09559
تراز ارتفاع بستر	0.01046	0.01283	0.02230	0.04365	0.08185

4- نتیجه گیری

در این پژوهش یک روش عددی به منظور حل سیستم مورفودینامیک یک بعدی با استفاده از یک حل کننده ریمن تقویت شده بر اساس روش جفت شده ضعیف، ارائه گردید. اعتبارسنجی حل کننده عددی ارائه شده، توسط مقایسه نتایج عددی با حل دقیق و شبیه سازی نمونه های آزمایشی بررسی گردید. در نمونه آزمایشی اول، شبیه سازی انتقال لایه رسوب سهموی با روش ریمن تقویت شده صورت گرفت. نتایج به دست آمده حاکی از تطابق بسیار خوب رویکرد مورد نظر با حل دقیق در تمام توده رسوب می باشند. همچنین مشاهده شد که اعمال عبارات اصلاحی مرتبه دوم به معادلات مربوطه سبب افزایش دقت شبیه سازی گردید.

در نمونه آزمایشی دوم، حرکت یک توده رسوب با شرایط اولیه زیر بحرانی جریان مدل سازی شد. مشاهده گردید که روش عددی ارائه شده با مقادیر متفاوت A_g که حتی منجر به یک برخورد شدید بین جریان سطحی و رسوب کف می شود، قادر به شبیه سازی دقیق حرکت رسوب می باشد. همان طور که در جداول 3 و 4 قابل مشاهده است، میزان تفاوت در نرم محاسبه شده نشان دهنده دقت بالای روش ریمن تقویت شده بر اساس روش جفت شده ضعیف (WCAR) نسبت به روش شار موج اصلاح شده بر اساس روش جداد شده (MSFW) می باشد.

5- فهرست علائم

A_g	ثابت ابعادی گرس (s^2m^{-1})
B	تراز ارتفاع بستر (m)
d_m	قطر متوسط ذرات رسوب (mm)
$\bar{F}$	عبارت اصلاحی مرتبه دوم
g	شتاب گرانش (m^2s^{-1})
G_s	چگالی نسبی
h	عمق آب (m)
n	ضریب زبری مانینگ
q	بردار شامل کمیت های بقائی
q_b	دبی انتقال رسوب (m^2s^{-1})
r_p	امین بردار ویژه
s	سرعت موج
S_f	ضریب اصطکاک بستر

علائم یونانی

t	زمان (s)
U	تقریب متوسط بردار مجهولات
u	مؤلفه سرعت در جهت محور x (ms^{-1})
W	موج ریمن
α	ضریب موج
γ	وزن مخصوص آب (Nm^{-3})
γ_s	وزن مخصوص رسوب (Nm^{-3})
ε	تخلخل لایه رسوب
λ_p	امین مقدار ویژه
ξ	موج شار
ρ	چگالی آب (kgm^{-3})
ρ_s	چگالی رسوب (kgm^{-3})
τ_b	تنش برشی لایه رسوب (Nm^{-2})
τ_b^*	عدد شیلدز
τ_{cr}^*	تنش برشی بحرانی
φ	شار مومنتم (m^3s^{-2})
ψ	دبی انتقال رسوب بی بعد
Δt	گام زمانی (s)
Δx	اندازه گره ها (m)

بالانویس ها

n سطح زمانی

زیرنویس ها

i	شماره سلول محاسباتی
ε	نماد سرعت های اینفلت

6- مراجع

- [1] M. J. Castro Díaz, E. D. Fernández-Nieto, A. M. Ferreiro, Sediment transport models in Shallow Water equations and numerical approach by high order finite volume methods, *Journal of Computers & Fluids*, Vol. 37, No. 3, pp. 299-316, 2008.
- [2] M. J. Castro Díaz, E. D. Fernández-Nieto, A. M. Ferreiro, C. Parés, Two-dimensional sediment transport models in shallow water equations. A second order finite volume approach on unstructured meshes, *Journal of Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 198, No. 33-3, pp. 2520-2538, 2009.
- [3] J. Hudson, P. K. Sweby, A high-resolution scheme for the equations governing 2D bed-load sediment transport, *Journal of Numerical Methods in Fluids*, Vol. 47, No. 10-11, pp. 1085-1091, 2005.
- [4] A. Canestrelli, M. Dumbser, A. Siviglia, E. F. Toro, Well-balanced high-order centered schemes on unstructured meshes for shallow water equations with fixed and mobile bed, *Journal of Advances in Water Resources*, Vol. 33, No. 3, pp. 291-303, 2010.
- [5] F. Benkhaldoun, M. Seaid, Combined characteristics and finite volume methods for sediment transport and bed morphology in surface water flows, *Journal of Mathematics and Computers in Simulation*, Vol. 81, No. 10, pp. 2073-2086, 2011.
- [6] A. Siviglia, G. Nobile, M. Colombini, Quasi-conservative formulation of the one-dimensional saint-venant-exner model, *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 134, No. 10, pp. 1521-1526, 2008.
- [7] S. Cordier, M. H. Le, T. Morales de Luna, Bedload transport in shallow water models: Why splitting (may) fail, how hyperbolicity (can) help, *Journal of Advances in Water Resources*, Vol. 34, No. 8, pp. 980-989, 2011.
- [8] S. Saiedi, coupled modeling of alluvial flows, *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 123, pp. 440-446, 1997.
- [9] H. Mahdizadeh, S. Sharifi, efficient fully-coupled and splitting techniques based on a modified wave propagation algorithm for modelling bedload sediment transport, *Journal of Applied Mathematical Modelling*, to be published.
- [10] G. Rosati, L. Fraccarollo, A well-balanced approach for flows over mobile-bed with high sediment-transport, *Journal of Computational Physics*, Vol. 220, No. 1, pp. 312-338, 2006.
- [11] D. L. George, Augmented Riemann solvers for the shallow water equations over variable topography with steady states and inundation, *Journal of*

- Computational Physics*, Vol. 146, No. 1, pp. 346-365, 1998.
- [19] P. L. Roe, Approximate Riemann solvers, parameter vectors and difference schemes, *Journal of Computational Physics*, Vol. 43, No. 2, pp. 357-372, 1981.
- [20] D. L. George, *Finite Volume Methods and Adaptive Refinement for Tsunami Propagation and Inundation*, PhD Thesis, Department of Applied Mathematics, University of Washington, Washington, 2006.
- [21] R. J. LeVeque, D. L. George, High-resolution finite volume methods for the shallow water equations with bathymetry and dry states, *Proceedings of The Long-Wave workshop*, Catalina, pp. 43-73, 2008.
- [22] D. S. Bale, R. J. LeVeque, S. Mitran, J. A. Rossmannith, A wave propagation method for conservation laws and balance laws with spatially varying flux functions, *Journal on Scientific Computing*, Vol. 24, No. 3, pp. 955-978, 2003.
- [23] R. J. LeVeque, *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*, pp. 333-335, Cambridge, Cambridge University Press, 2002.
- Computational Physics*, Vol. 227, No. 6, pp. 3089-3113, 2008.
- [12] J. Hudson, *Numerical Techniques for Morphodynamic Modelling*, Thesis, PhD Thesis, Department of Mathematics, University of Reading, Reading, 2001.
- [13] A. J. Grass, *Sediment Transport by Waves and Currents*, pp. 10-32, London, University College, 1981.
- [14] E. Meyer-Peter, R. Mueller, *Formulas for Bed-Load Transport*, Sweden, pp. 39-64, 1948.
- [15] R. Fernandez Luque, R. Van Beek, erosion and transport of bed-load sediment, *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 14, No. 2, pp. 127-144, 1976.
- [16] P. Nielsen, *Coastal Bottom Boundary Layers and Sediment Transport*, pp. 103-125, Singapore: World Scientific, 1992.
- [17] B. Camenen, M. Larson, A general formula for non-cohesive bed load sediment transport, *Journal of Estuarine, Coastal and Shelf Science*, Vol. 63, No. 1-2, pp. 249-260, 2005.
- [18] R. J. LeVeque, balancing source terms and flux gradients in high-resolution godunov methods: the quasi-steady wave-propagation algorithm, *Journal of*