



## طراحی جاذب بهینه تیر تحت اثر نوسانگر متحرک و تأثیر وقوع ترک بر کارایی آن

فیروز بختیاری نژاد<sup>1\*</sup>، البرز میرزابیگی<sup>2</sup>

1- استاد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران  
 2- کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران  
 \* تهران، صندوق پستی 15875-4413، baktiari@aut.ac.ir

### چکیده

در مطالعه حاضر، برای کاهش ارتعاشات یک تیر اویلر-برنولی دارای تکیه‌گاه‌های الاستیک تحت اثر نوسانگر یک درجه آزادی متحرک از یک جاذب استفاده شده است. به این منظور ابتدا پاسخ دینامیکی تیر تحت اثر سرعت‌های مختلف نوسانگرهای دارای پارامترهای متفاوت استخراج شده و سرعت‌های بحرانی عبور بار به دست آمده است، سپس پارامترهای جاذب با استفاده از یک الگوریتم عددی بهینه‌سازی شده‌اند و تأثیر جرم و ثابت میرایی بر کارایی جاذب بررسی شده است. پس از اضافه کردن جاذب به تیر اثر وقوع ترک با دو شدت مختلف بر کارایی آن بررسی شده است. ترک به صورت افزایش در انعطاف‌پذیری مقطعی مدل شده و از فرض ترک باز استفاده شده است. نتایج نشان می‌دهد اگرچه وقوع ترک سبب افزایش خیز دینامیکی تیر دارای جاذب می‌شود، اما همچنان خیز دینامیکی تیر دارای ترک بدون جاذب بیشتر از زمانی است که تیر ترک دار دارای جاذب است. می‌توان گفت جاذب ارتعاشات طراحی شده برای تیر سالم کارایی خود را در کاهش خیز دینامیکی تیر پس از وقوع ترک و تغییر دینامیک سازه همچنان حفظ می‌کند.

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل  
 دریافت: 28 تیر 1392  
 پذیرش: 09 آذر 1392  
 ارائه در سایت: 16 مهر 1393  
 کلید واژگان:  
 تیر اویلر-برنولی  
 تکیه‌گاه‌های الاستیک  
 نوسانگر متحرک  
 جاذب ارتعاشات  
 ترک باز

## Optimum absorber design for beam subjected to a moving oscillator and effect of crack occurrence on absorber performance

Firooz Bakhtiari Nejad<sup>1\*</sup>, Alborz Mirzabeigy<sup>2</sup>

1- Department of Mechanical Engineering, Amirkabir University, Tehran, Iran  
 2- Department of Mechanical Engineering, Amirkabir University, Tehran, Iran  
 \* P.O.B. 15875-4413 Tehran, Iran, baktiari@aut.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
 Received 19 July 2013  
 Accepted 30 November 2013  
 Available Online 08 October 2014

### Keywords:

Euler-Bernoulli Beam  
 Elastic Supports  
 Moving Oscillator  
 Vibration Absorber  
 Open Crack

### ABSTRACT

A vibration absorber is used to reduce vibration of an Euler-Bernoulli beam with elastic supports subjected to a moving oscillator. Dynamic response of the beam under moving harmonic exciter with different moving velocities and different parameters are obtained. The critical velocity of the moving oscillator is determined and absorber parameters are optimized by numerical algorithm and effect of mass and damping on the absorber performance is investigated. When absorber is applied to the beam, effect of crack occurrence on its performance is investigated. Crack is assumed to be open and is modeled by sectional flexibility increase. Two different cases considered for crack severity. In each case, optimal absorber for intact beam is applied and dynamic response of the midpoint of the beam with different velocities of moving exciter is obtained. Results show although crack can increase dynamic deflection of the beam with absorber, dynamic deflection of cracked beam without considering absorber is higher than dynamic deflection of cracked beam with absorber used. It is found that the vibration absorber designed for intact beam keeps its performance in dynamic deflection reduction after crack occurrence and changing in structural dynamic.

### 1- مقدمه

که با استفاده از تیر مدل می‌شوند، همواره تحت اثر تحریکات مختلفی مانند عبور خودروها و نیروی باد قرار دارند. این تحریک‌ها سبب بروز ارتعاشات ناخواسته در پل می‌شوند که ارتعاشات به وجود آمده می‌تواند سبب آسیب رساندن به پل یا حتی تخریب آن شود. از این رو کاهش یا حذف ارتعاشات اجباری در پل‌ها یکی از موارد بسیار مهم در طراحی پل‌ها است. از دیگر مواردی که در رابطه با پل‌ها بسیار رایج است، وقوع عیبی مانند ترک در آن-

تیرها از اجزاء پرکاربرد در مهندسی هستند و در طیف وسیعی از سازه‌ها و ماشین‌ها کاربرد دارند. از سوی دیگر مدل ریاضی که برای تیر استخراج شده است، یک مدل مناسب برای شبیه‌سازی رفتار بسیاری از سازه‌های پیچیده است. برای نمونه، رفتار پل‌ها، ساختمان‌های چند طبقه، جرثقیل‌های سقفی، چرخ‌دنده‌ها و ابزار فرزکاری با استفاده از یک تیر با دقت کافی مدل شده و مورد بررسی و تحلیل قرار گرفته‌اند. پل‌ها به عنوان یک مورد مهم از سازه‌هایی

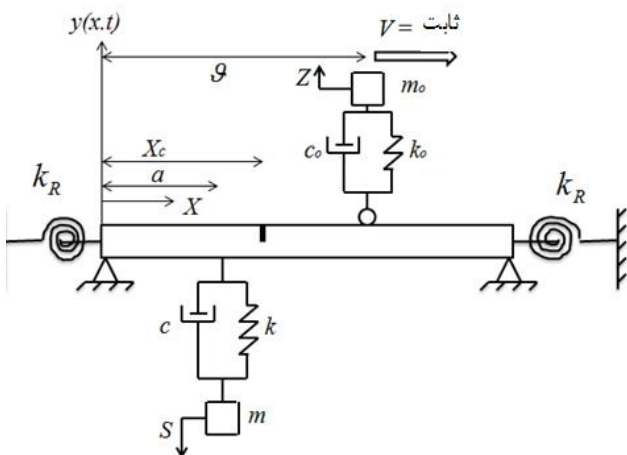
[8]. لای و همکاران [9] شرایط تکیه‌گاهی در یک تیر را با فنرهای پیچشی و انتقالی جایگزین کرده و از یک روش عددی برای استخراج فرکانس‌ها استفاده کردند. این عمل فرکانس‌های طبیعی را نسبت به تکیه‌گاه کلاسیک به‌طور محسوسی تغییر داده و نشان می‌داد برای شناسایی رفتار دقیق تیرها، استفاده از شرایط تکیه‌گاهی الاستیک ضروری می‌نماید.

در تحقیق حاضر، یک تیر اوپلر- برنولی دارای شرایط تکیه‌گاهی الاستیک متقارن در نظر گرفته شده است. پاسخ دینامیکی تیر تحت اثر حرکت یک نوسانگر یک درجه آزادی با سرعت ثابت استخراج شده و سپس تأثیر افزودن جاذب بر کاهش دامنه ارتعاشات بررسی شده و برای تعیین پارامترهای بهینه جاذب از یک الگوریتم عددی جستجوی پارامترها استفاده شده است. سپس تأثیر وقوع ترک بر پاسخ دینامیکی تیر دارای جاذب بهینه تحت اثر نوسانگر متحرک بررسی شده است. ارتعاشات آزاد تیر ترک‌دار دارای تکیه‌گاه الاستیک و همچنین پاسخ دینامیکی تیر (با و یا بدون ترک) دارای تکیه‌های الاستیک تحت اثر نوسانگر متحرک تاکنون بررسی نشده است. بررسی تغییر ساختار تیر ناشی از وقوع ترک بر عملکرد جاذب نیز موضوع جدیدی است که تاکنون مورد توجه محققین قرار نگرفته و در این مقاله برای نخستین بار به آن پرداخته شده است.

## 2- معادلات حاکم بر سیستم

سامانه تیر، تحریک‌کننده و جاذب در شکل 1 نشان داده شده است. در این شکل یک تیر به طول  $L$  دارای تکیه‌گاه‌های الاستیک تحت تأثیر نوسانگر متحرک به جرم  $m_o$  قرار دارد که با سرعت ثابت  $V$  روی تیر حرکت می‌کند. یک جاذب ارتعاشات در مکان  $x = a$  روی تیر قرار گرفته است و همچنین در مکان  $x = x_c$  یک ترک در تیر قرار دارد. با توجه به وقوع ترک در تیر، تیر در محل ترک به دو قسمت تقسیم می‌شود. با استفاده از فرض تیر اوپلر- برنولی معادلات حرکت در هر قسمت از تیر به‌صورت رابطه (1) به‌دست می‌آید:

$$EI \frac{\partial^4 y_j(x,t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y_j(x,t)}{\partial t^2} = [k_o(z - y_j(\vartheta, t)) + c_o(\dot{z} - \dot{y}_j(\vartheta, t)) - m_o g] \delta(x - \vartheta) H(L - \vartheta), j = 1, 2 \quad (1)$$



شکل 1 تیر دارای تکیه‌گاه‌های الاستیک، ترک و جاذب ارتعاشات تحت اثر نوسانگر متحرک یک درجه آزادی

ها. ترک چنانچه در مراحل ابتدایی پیدایش شناسایی نشود و اقدامات لازم برای رفع آن صورت نپذیرد می‌تواند سبب تخریب پل شود.

در رابطه با کنترل و حذف ارتعاشات ناخواسته در تیرها تحقیقات متنوعی انجام شده است. روش‌های کنترلی به‌کار رفته در دو دسته کلی غیرفعال و فعال قرار می‌گیرند. در روش کنترل غیرفعال، از جاذب‌های تشکیل‌شده از جرم، فنر و دمپر استفاده می‌شود. این جاذب‌ها چنانچه به‌طور بهینه طراحی و استفاده شوند، می‌توانند به میزان قابل توجهی از دامنه ارتعاشات سیستم بکاهد. این جاذب‌ها به دلیل هزینه کم در ساخت و تعمیر و نگهداری می‌توانند به‌صورت مؤثر مورد استفاده قرار گیرند. یکی از عیوب جاذب‌های ارتعاشی این است که با تغییر در تحریک وارد بر سیستم اگر جاذب توانایی تطبیق خود با این تغییر را نداشته باشد نه تنها ممکن است جاذب کارایی خود را از دست دهد، حتی امکان دارد سبب افزایش ارتعاشات نیز شود. در روش کنترل فعال، سیستم برای تنظیم پارامترهای خود نیاز به یک منبع پیوسته انرژی دارد. از معایب این روش می‌توان به مصرف بالای انرژی، هزینه‌های بالای تجهیزات و تعمیرات و نگهداری آن‌ها و پیچیدگی تجهیزات اشاره کرد. در رابطه با استفاده و طراحی بهینه جاذب ارتعاشات تیرها تحقیقات مختلفی انجام گرفته است. وانگ و همکاران [1] استفاده از جاذب را در پل راه‌آهن تایوان تحت تأثیر قطارهای سرعت بالا مورد بررسی قرار دادند، نتایج تحقیق آن‌ها حاکی از کارایی مناسب جاذب در کاهش ارتعاشات عمودی پل در سرعت بحرانی حرکت قطارها بود. مرادی و همکاران [2] ابزار بورینگ<sup>1</sup> در ماشین‌کاری را با استفاده از یک تیر مدل کرده و نشان دادند استفاده از جاذب بهینه، ارتعاشات خود تحریک را کاهش داده و حد پایداری را افزایش می‌دهد. عیسی [3] با استفاده از روش‌های برازش ریاضی یک رابطه تحلیلی تقریبی برای مقادیر بهینه پارامترهای جاذب ارتعاشات یک تیر دو سر مفصل تحت تأثیر بار متحرک دارای دامنه ثابت استخراج کرد.

وقوع ترک در تیرها از موارد غیرقابل اجتناب است که معمولاً در اثر اعمال بارهای تناوبی به‌وجود می‌آید. شبیه‌سازی رفتار ترک در حین ارتعاش تیر به‌صورت انجام می‌پذیرد، در دیدگاه نخست ترک همواره به‌صورت باز باقی می‌ماند و در دیدگاه دوم ترک در زمان ارتعاش تیر به‌صورت تناوبی باز و بسته می‌شود [4]. یکی از روش‌های مرسوم در مدل‌سازی ترک باز در تیرها استفاده از افزایش انعطاف‌پذیری موضعی در محل ترک است که با یک فنر بدون جرم در محل ترک شبیه‌سازی می‌شود. سفتی این فنر با استفاده از روابط مکانیک شکست تعیین می‌شود [5]. این مدل ترک، در لوله‌های جدار ضخیم ترک‌دار حاوی سیال [6] و تیرهای ترک‌دار دورانی با سطح مقطع متغیر [7] با موفقیت کار رفته است. عمده تحقیقاتی که در زمینه ارتعاشات تیر دارای ترک انجام شده است، برای استفاده از نتایج آنالیز ارتعاشی در تعیین و شدت محل ترک انجام شده، زیرا رفتار دینامیکی تیر پیش و پس از وقوع ترک متفاوت است.

در سال‌های اخیر بررسی ارتعاشات تیرهای دارای شرایط تکیه‌گاهی غیر- کلاسیک مورد توجه زیادی قرار گرفته است. در شرایط تکیه‌گاهی کلاسیک در هر تکیه‌گاه مقدار دو پارامتر از پارامترهای جابه‌جایی، شیب، ممان خمشی و نیروی برشی برابر صفر در نظر گرفته می‌شود. محققان معتقدند که شرایط تکیه‌گاهی کلاسیک در عمل قابل پیاده‌سازی نیست و هیچ‌گاه نمی‌توان مقادیر شیب یا جابه‌جایی را در یک تکیه‌گاه به صفر مطلق رساند و همواره مقداری شیب یا جابه‌جایی هر چند کوچک در تکیه‌گاه‌ها وجود دارد

1- boring

برای بی‌بعدسازی متغیرهای مکانی، متغیرهای زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\tilde{y}_j = \frac{y_j}{L}, \quad \tilde{x} = \frac{x}{L} \quad (8)$$

همچنین برای تبدیل معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی در رابطه (7) به معادله دیفرانسیل معمولی از جداسازی متغیرها به صورت رابطه (9) استفاده می‌کنیم:

$$\tilde{y}_j(\tilde{x}, t) = \tilde{y}_j(\tilde{x}) \exp(i\omega t) \quad (9)$$

در نهایت معادله ارتعاشات آزاد با استفاده از روابط (8) و (9) به صورت رابطه (10) نوشته می‌شود:

$$\frac{d^4 \tilde{y}_1}{d\tilde{x}^4} - \frac{\rho AL^4 \omega^2}{EI} \tilde{y}_1 = 0, \quad 0 < \tilde{x} < \tilde{x}_c$$

$$\frac{d^4 \tilde{y}_2}{d\tilde{x}^4} - \frac{\rho AL^4 \omega^2}{EI} \tilde{y}_2 = 0, \quad \tilde{x}_c < \tilde{x} < 1 \quad (10)$$

با استفاده از متغیرهای بدون بعد ارائه شده در رابطه (8) شرایط تکیه‌گاهی تیر به صورت رابطه (11) در می‌آیند:

$$\tilde{y}_1(0) = \tilde{y}_2(1) = 0$$

$$\frac{d^2 \tilde{y}_1}{d\tilde{x}^2}(0) - K \frac{d\tilde{y}_1}{d\tilde{x}}(0) = 0$$

$$\frac{d^2 \tilde{y}_2}{d\tilde{x}^2}(1) + K \frac{d\tilde{y}_2}{d\tilde{x}}(1) = 0 \quad (11)$$

$$K = \frac{k_R L}{EI} \quad (12)$$

همچنین با استفاده از متغیرهای رابطه (8) شرایط سازگاری در محل ترک به صورت رابطه (13) نوشته می‌شوند:

$$y_1(\tilde{x}_c) = y_2(\tilde{x}_c),$$

$$y_1''(\tilde{x}_c) = y_2''(\tilde{x}_c),$$

$$y_1'''(\tilde{x}_c) = y_2'''(\tilde{x}_c),$$

$$y_2'(\tilde{x}_c) - y_1'(\tilde{x}_c) = \frac{h}{L} f(\alpha) y_2''(\tilde{x}_c) \quad (13)$$

معادلات (10) دارای حل به صورت روابط (14-15) است:

$$\tilde{y}_j = A_j \cos(\lambda \tilde{x}) + B_j \sin(\lambda \tilde{x})$$

$$+ C_j \cosh(\lambda \tilde{x}) + D_j \sinh(\lambda \tilde{x}) \quad (14)$$

$$\lambda^4 = \frac{\rho A \omega^2 L^4}{EI} \quad (15)$$

برای تعیین 9 پارامتر مجهول  $A_1, A_2, \dots$  و  $\lambda$  به جای هر مقدار  $K$ ، از چهار معادله مربوط به شرایط تکیه‌گاهی در رابطه (11)، چهار معادله مربوط به شرایط سازگاری در محل ترک در رابطه (13) و همچنین از معادله (16) برای نرمال‌سازی شکل مودها استفاده می‌کنیم [11]:

$$\int_0^1 \tilde{y}_N(\tilde{x}) \tilde{y}_M(\tilde{x}) d\tilde{x} = \begin{cases} 1 & N = M \\ 0 & N \neq M \end{cases} \quad (16)$$

زمانی که ترک در تیر وجود ندارد، معادله (17) برای تعیین  $\lambda$  به دست می‌آید که از حل آن به جای مقادیر مختلف  $K$  مقادیر ویژه استخراج می‌شوند:

در  $0 < x < x_c$  اندیس  $j = 1$  انتخاب می‌شود و در محدوده مختصات طولی  $x_c < x < L$  اندیس  $j = 2$  در نظر گرفته می‌شود. در رابطه (1)  $E, I, \rho, A, y$  و  $Z$  به ترتیب مدول الاستیسیته، ممان اینرسی مقطع، چگالی، سطح مقطع، خیز تیر و مختصات مستقل برای جابه‌جایی جرم نوسانگر است. تابع دلتای دیراک برای نشان دادن موقعیت نوسانگر در هر لحظه از زمان روی تیر و تابع پله واحد برای نشان دادن مدت زمان اثر نوسانگر بر تیر به کار رفته‌اند.

پارامتر  $\mathcal{G}$  که برای بیان موقعیت نوسانگر به کار رفته است، با رابطه (2) با سرعت نوسانگر و زمان ارتباط دارد.

$$\mathcal{G} = Vt \quad (2)$$

با توجه به تأثیر جاذب در دینامیک سیستم باید اثر آن را نیز در معادلات وارد کرد. با توجه به تقسیم شدن تیر در اثر وجود ترک در هر ناحیه‌ای که جاذب قرار می‌گیرد باید عبارت (3) را به سمت راست رابطه در آن ناحیه اضافه کرد.

$$[k(s - y_j(x, t)) + c(\dot{s} - \dot{y}_j(x, t))] \delta(x - a) \quad (3)$$

در رابطه (3)،  $s$  مختصات مستقل برای جابه‌جایی جرم جاذب است. برای تیر نشان داده شده در شکل 1 شرایط مرزی به صورت رابطه (4) است.

$$y_1(0, t) = y_2(L, t) = 0$$

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2}(0, t) - \frac{k_R}{EI} \frac{\partial y_1}{\partial x}(0, t) = 0$$

$$\frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2}(L, t) + \frac{k_R}{EI} \frac{\partial y_2}{\partial x}(L, t) = 0 \quad (4)$$

که  $k_R$  ثابت فنرهای پیچشی تکیه‌گاه است. همچنین در محل ترک که تیر به دو بخش تقسیم می‌شود، روابط سازگاری به صورت رابطه (5) نوشته می‌شوند:

$$y_1(x_c, t) = y_2(x_c, t)$$

$$y_1''(x_c, t) = y_2''(x_c, t)$$

$$y_1'''(x_c, t) = y_2'''(x_c, t)$$

$$y_2'(x_c, t) - y_1'(x_c, t) = hf(\alpha) y_2''(x_c, t) \quad (5)$$

در رابطه (5)،  $f(\alpha)$  انعطاف‌پذیری مقطعی بی‌بعد در محل ترک و  $h$  ارتفاع تیر است.  $f(\alpha)$  با استفاده از روابط مکانیک شکست به صورت رابطه (6) به دست می‌آید [10]:

$$f(\alpha) = 2 \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^2 (5.93 - 19.69\alpha)$$

$$+ 37.14\alpha^2 - 35.64\alpha^3 + 13.12\alpha^4 \quad (6)$$

$\alpha$  به صورت نسبت عمق ترک به ارتفاع تیر تعریف می‌شود.

### 3- ارتعاشات آزاد

برای تعیین فرکانس‌های طبیعی و توابع شکل مود تیر مورد بررسی نیروهای خارجی مؤثر به تیر نظیر تحریک نوسانگر و اثر جاذب برابر با صفر قرار داده می‌شوند. در نتیجه معادلات حاکم به صورت رابطه (7) در می‌آیند:

$$j = 1, 2 \quad EI \frac{\partial^4 y_j(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y_j(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (7)$$

$$m_o \ddot{z} + c_o (\dot{z} - \sum_r \phi_r(\vartheta) \dot{q}_r) + k_o (z - \sum_r \phi_r(\vartheta) q_r) = 0, \quad (25)$$

$$m \ddot{s} + c (\dot{s} - \sum_r \phi_r(a) \dot{q}_r) + k (s - \sum_r \phi_r(a) q_r) = 0 \quad (26)$$

از دستگاه معادلات دیفرانسیل بالا مشاهده می‌شود که معادلات به یکدیگر وابسته بوده و همچنین به دلیل وابستگی مکان نوسانگر به زمان معادلات دیفرانسیل دارای ضرایب متغیر با زمان نیز است. حل این دستگاه معادلات دیفرانسیل از طریق تحلیلی میسر نیست و باید از روش‌های عددی برای استخراج پاسخ استفاده شود. برای استفاده از روش‌های عددی معادلات باید کاهش مرتبه داده شوند که این مسئله مستلزم انتقال معادلات دیفرانسیل به معادلات فضای حالت است. زمانی که  $n$  شکل مود از ارتعاشات تیر را در نظر می‌گیریم، معادلات منجر به  $n + 2$  معادله مرتبه دو وابسته به یکدیگر می‌شوند که در تبدیل به معادلات فضای حالت به  $2n + 4$  معادله درجه یک افزایش داده می‌شوند که حل عددی این  $2n + 4$  معادله را می‌توان با استفاده از نرم‌افزارهای موجود نظیر متلب به دست آورد. زمانی که ترک در تیر رخ می‌دهد، معادلات کماکان قابل استفاده هستند با این تفاوت که باید از فرکانس‌های طبیعی، توابع شکل مود و جرم عمومی تیر دارای ترک استفاده کنیم. با توجه به این که توابع شکل مود تیر دارای ترک در نواحی که به وسیله ترک جدا شده‌اند متفاوت هستند، برای استخراج پاسخ دینامیکی تیر دارای ترک باید توابع شکل مود را نیز به صورت متغیر با زمان در معادلات وارد کنیم. به این صورت که با توجه به محل اثر نوسانگر از توابع شکل مود همان قسمت استفاده می‌کنیم. برای بی‌بعد سازی پاسخ دینامیکی نقطه میانی تیر، فرض می‌کنیم جرم نوسانگر به صورت استاتیکی به نقطه میانی تیر اعمال شود و خیز استاتیکی معادل را به دست می‌آوریم، سپس از تقسیم خیز دینامیکی در هر لحظه بر خیز استاتیکی محاسبه شده، پاسخ را به صورت نرمال شده خواهیم داشت [12].

#### 5- بهینه‌سازی پارامترهای جاذب

یکی از موارد مهم در استفاده از جاذب‌های ارتعاشات طراحی بهینه پارامترهای آن است. چنانچه پارامترهای جاذب نامناسب باشند، وجود جاذب می‌تواند حتی می‌تواند سبب افزایش دامنه ارتعاشات شود. معیار مرسوم که در طراحی جاذب ارتعاشات برای تیرها مورد استفاده قرار می‌گیرد به کمترین رساندن دامنه ارتعاشات نقطه میانی تیر است. در این تحقیق با استفاده از جستجوی مستقیم پارامترها به تعیین مقادیر بهینه می‌پردازیم. مشابه این روش از پیش برای تعیین مقادیر بهینه پارامترهای جاذب‌های ارتعاشات از جمله جاذب غیرخطی متصل به یک سازه یک درجه آزادی [13] و تعیین پارامترهایی جاذب خطی متصل به تیر تحت اثر بار متحرک ثابت [3] به کار رفته است. جاذب ارتعاشات تیر دارای چهار پارامتر جرم، سفتی فنر، ثابت میرایی دمپر و همچنین محل قرارگیری است. در طراحی جاذب‌ها، جرم جاذب پارامتری است که مقادیر سفتی فنر و ثابت میرایی دمپر براساس آن تعیین می‌شود. جرم جاذب نباید نسبت به جرم سازه اصلی خیلی کوچک باشد، زیرا در این صورت جاذب تأثیری در کاهش دامنه ارتعاشات ندارد، همچنین اگر جرم جاذب خیلی زیاد باشد سبب خیز استاتیکی زیادی در

$$\begin{aligned} & -4\lambda^2 \sin(\lambda) \sinh(\lambda) + 4K\lambda \cos(\lambda) \sinh(\lambda) \\ & -4K\lambda \sin(\lambda) \cosh(\lambda) + 2K^2 \cos(\lambda) \cosh(\lambda) \\ & -2K^2 = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

#### 4- پاسخ دینامیکی

برای استخراج پاسخ دینامیکی تیر تحت اثر نوسانگر متحرک و دارای جاذب ارتعاشات از تئوری گسترش مودال استفاده می‌شود. زمانی که یک تیر تحت اثر ارتعاشات اجباری قرار می‌گیرد، با معلوم بودن توابع شکل مدهای نرمال  $(\phi_i)$  و فرکانس‌های طبیعی آن، می‌توان پاسخ دینامیکی هر نقطه از تیر را در هر لحظه با استفاده از رابطه (18) تعیین کرد [2]:

$$y(x, t) = \sum_i q_i(t) \phi_i(x), \quad (18)$$

در رابطه (18)،  $i$  بیانگر شماره شکل مود است و  $q_i$  مختصات عمومی حرکت نامیده می‌شود که از رابطه (19) به دست می‌آید:

$$\ddot{q}_i(t) + \omega_i^2 q(t) = \frac{1}{M_i} \int_0^L F(x, t) \phi_i(x) dx \quad (19)$$

در رابطه (19)،  $M_i$  جرم عمومی سیستم است که با استفاده از رابطه (20) تعیین می‌شود:

$$M_i = \int_0^L m(x) \phi_i^2(x) dx \quad (20)$$

همچنین  $F(x, t)$  بیانگر نیروهای خارجی وارد بر سیستم است. در تیر مورد بررسی یک نیرو ناشی از نوسانگر متحرک و دیگری ناشی از وجود جاذب است. این نیروها در روابط (3.1) آمده‌اند. از جای‌گذاری این نیروها در معادله (19) رابطه (21) به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_i(t) + \omega_i^2 q(t) = & \frac{1}{M_i} [[k_o(z - y(\vartheta, t)) \\ & + c_o(\dot{z} - \dot{y}(\vartheta, t)) - m_o g] H(L - \vartheta) \phi_i(\vartheta) + \\ & k(s - y(a, t)) \phi_i(a) + c(\dot{s} - \dot{y}(a, t)) \phi_i(a)] \end{aligned} \quad (21)$$

در زمان استخراج پاسخ دینامیکی دو معادله دیگر وجود دارند که باید از آن‌ها استفاده شود. اولین معادله مربوط به جابه‌جایی جرم نوسانگر به صورت (22) است:

$$m_o \ddot{z} + c_o (\dot{z} - \dot{y}(\vartheta, t)) + k_o (z - y(\vartheta, t)) = 0 \quad (22)$$

دومین معادله هم مربوط به جابه‌جایی جرم جاذب به صورت (23) است:

$$m \ddot{s} + c (\dot{s} - \dot{y}(a, t)) + k (s - y(a, t)) = 0 \quad (23)$$

از جای‌گذاری رابطه (18) در روابط (21-23)، روابط (24-26) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_i(t) + \omega_i^2 q(t) = & \frac{1}{M_i} [[k_o(z - \sum_r \phi_r(\vartheta) q_r) \\ & + c_o(\dot{z} - \sum_r \phi_r(\vartheta) \dot{q}_r) - m_o g] H(L - \vartheta) \phi_i(\vartheta) \\ & + k(s - \sum_r \phi_r(a) q_r) \phi_i(a) \\ & + c(\dot{s} - \sum_r \phi_r(a) \dot{q}_r) \phi_i(a)] \end{aligned} \quad (24)$$

## 6- نتایج عددی

نخست برای بررسی صحت رابطه (17) در تعیین مقادیر ویژه ارتعاشات آزاد تیر سالم دارای تکیه‌گاه‌های الاستیک مشابه شکل 1، مقایسه‌ای بین نتایج حاصل از حل عددی این معادله با حل به‌دست آمده از روش تجزیه ادومین [9] در جدول 1 ارائه شده است که صحت نتایج را تأیید می‌کند.

برای بررسی صحت روابط در تعیین فرکانس‌های بی‌بعد ارتعاشات آزاد تیر دارای ترک، از فرکانس‌های تیر دو سر مفصل استفاده می‌کنیم. باید در معادلات شرایط مرزی  $K$  را برابر با صفر قرار دهیم. در جدول 2 نسبت فرکانس تیر ترک‌دار به تیر سالم در مودهای اول و سوم برای عمق‌های مختلف ترک زمانی که که ترک در وسط تیر قرار دارد، با نتایج سایر محققین مقایسه شده است. در استخراج نتایج برای این قسمت مشابه مراجعی که برای صحت‌سنجی استفاده شده‌اند نسبت طول تیر به ارتفاع تیر برابر با  $36/22$  فرض شده است.

برای استخراج پاسخ دینامیکی مشخصات تیر را به‌صورت جدول 3 در نظر می‌گیریم. پنج فرکانس طبیعی اول تیر مورد بررسی با استفاده از مطالب بخش ارتعاشات آزاد به‌صورت جدول 4 به‌دست می‌آیند.

جدول 1 مقایسه بین مقادیر ویژه به‌دست آمده با استفاده از معادله (17) و روش تجزیه ادومین [9].

$K$	مود اول	مود دوم
معادله (17)	3/1726	6/2989
[9]	3/1726	6/2987
معادله (17)	4/1556	7/0682
[9]	4/1556	7/0677
معادله (17)	4/7206	7/8376
[9]	4/7206	7/8367

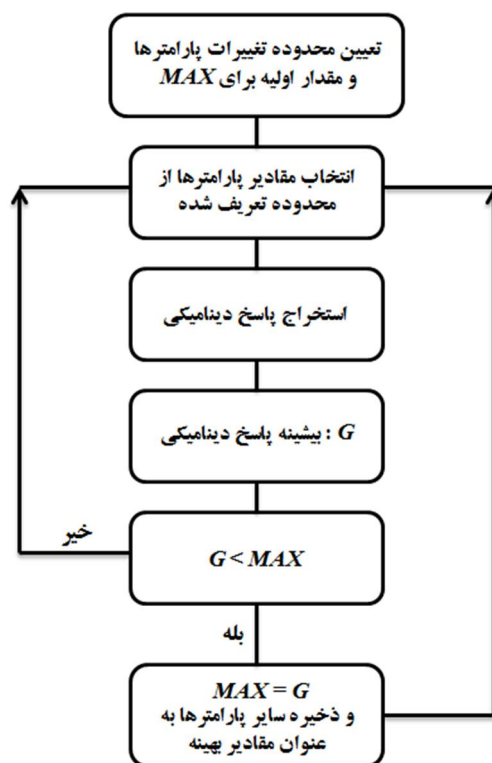
جدول 2 مقایسه نسبت فرکانس تیر ترک‌دار به تیر سالم با نتایج سایر محققین در شرایط تکیه‌گاهی دو سر مفصل

نسبت عمق ترک به ارتفاع تیر	شماره مود	تحقیق حاضر	نسبت عمق ترک به ارتفاع تیر	
			[14]	[15]
0/25	اول	0/983	0/984	0/986
	سوم	0/984	0/984	0/986
0/4	اول	0/953	0/953	0/954
	سوم	0/957	0/957	0/957

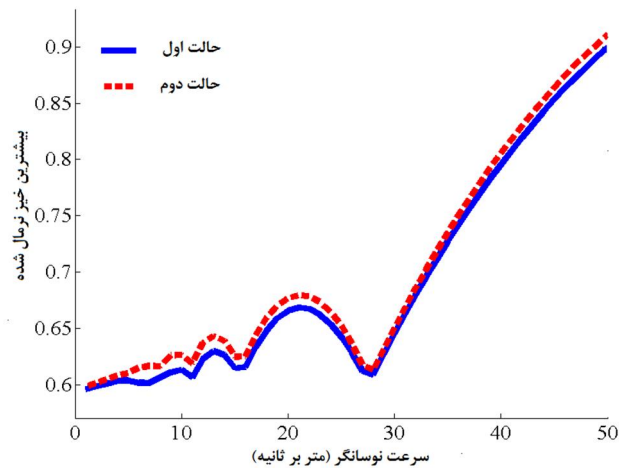
جدول 3 مشخصات تیر مورد بررسی.

کمیت	مقدار
طول	30 متر
ارتفاع	0/8 متر
ضخامت	0/2 متر
چگالی	7800 کیلوگرم بر مترمکعب
مدول الاستیسیته	150 گیگا پاسکال
ضریب پواسون	0/3
ثابت فنرهای پیچشی تکیه‌گاه	100 مگا نیوتن متر بر رادیان

سازه می‌شود و ممکن است سازه شکل مطلوب خود را از دست دهد به‌علاوه جرم خیلی زیاد ممکن است سبب تمرکز تنش بحرانی و ایجاد شکست در سازه شود. مروری بر تحقیقات صورت گرفته که در آن‌ها کنترل غیرفعال ارتعاشات با استفاده از جاذب خطی صورت پذیرفته است نشان می‌دهد جرم جاذب به‌کار رفته در حدود  $0/01$  تا  $0/07$  جرم سازه اصلی است [3]. جرم جاذب به‌صورتی که محدوده مجاز جرم را رعایت کند، پیش از فرایند بهینه‌سازی تعیین می‌شود. روند تعیین مقادیر بهینه در شکل 2 آمده است. متغیرها شامل سفتی فنر، ثابت میرایی دمپر و همچنین محل قرارگیری جاذب است. تابع هدف دامنه ارتعاشات نقطه میانی تیر است که باید به کمترین مقدار ممکن برسد. ابتدا محدوده‌ای از مقادیر برای هر کدام از پارامترها در نظر گرفته می‌شود. این محدوده برای فنر به‌صورتی در نظر گرفته می‌شود که فرکانس طبیعی جاذب به‌صورت یک سیستم مجزا در محدوده پنج فرکانس طبیعی اول تیر باشد و برای دمپر به‌صورتی در نظر گرفته می‌شود که نسبت میرایی از یک کوچک‌تر باشد. پارامتری هم به نام مکس تعریف می‌شود که دارای یک مقدار اولیه است. این مقدار اولیه باید از مقدار دامنه ارتعاشات تیر زمانی که جاذب ارتعاشات وجود ندارد، بزرگ‌تر باشد. سپس برای هر پارامتر از محدوده تعریف شده یک عدد انتخاب می‌شود. با استفاده از پارامترهای انتخاب شده، پاسخ دینامیکی استخراج شده و مقدار بیشینه آن تعیین می‌شود. این مقدار بیشینه با پارامتر مکس مقایسه می‌شود، اگر مقدار بیشینه از پارامتر مکس کمتر باشد، این مقدار بیشینه به‌جای پارامتر مکس قرار داده می‌شود و همچنین مقادیر سایر پارامترها به‌عنوان مقادیر بهینه ذخیره می‌شوند. این روند برای تمام مقادیر در محدوده تعریف شده هر پارامتر و به‌صورت هم‌زمان برای پارامترهای مختلف انجام می‌شود تا در نهایت مقادیر بهینه به‌دست آیند.



شکل 2 روند الگوریتم بهینه‌سازی پارامترهای جاذب



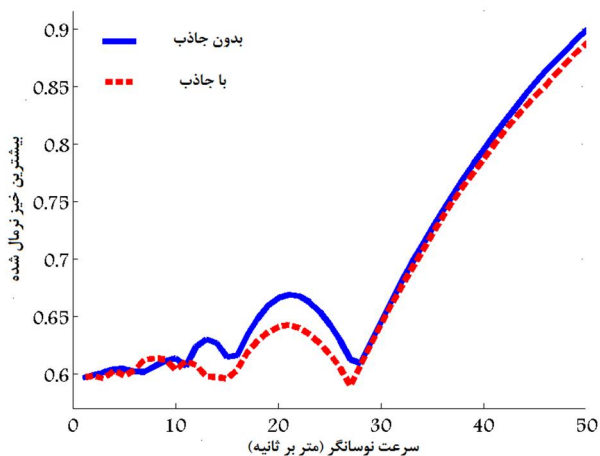
شکل 3 بیشترین خیز دینامیکی نرمال شده نقطه میانی تیر تحت نوسانگرهای مختلف

در شکل 4 اثر اضافه شدن جاذب بر بیشترین خیز دینامیکی نرمال شده نقطه میانی تیر آمده است. همان طور که از شکل دیده می شود در بیشتر سرعتها افزودن جاذب سبب کاهش خیز دینامیکی شده است.

سرعت 21 متر بر ثانیه نوسانگر یک مقدار بحرانی برای سرعت است، چون در این سرعت بیشترین خیز دینامیکی نرمال شده نقطه میانی تیر دارای بیشینه محلی است. در این سرعت اثر اضافه شدن دمپر به جاذب در شکل 5 بررسی شده است. همان طور که دیده می شود با اضافه شدن ثابت میرایی جاذب خیز دینامیکی افزایش می یابد و کمترین مقدار خیز دینامیکی زمانی رخ می دهد که جاذب بدون دمپر باشد.

همچنین در شکل 6 اثر اضافه شدن جرم جاذب در سرعت 21 متر بر ثانیه بررسی شده است. برای هر جرم جاذب با استفاده از الگوریتم بهینه سازی پارامترهای بهینه جاذب استخراج شده اند و سپس بیشترین خیز دینامیکی نرمال شده نقطه میانی تیر با استفاده از مقادیر بهینه برای هر جرم رسم شده است. همان طور که دیده می شود با افزایش جرم جاذب بیشترین خیز دینامیکی نرمال شده نقطه میانی تیر کاهش می یابد.

اکنون می توانیم به بررسی اثر وقوع ترک در تیر تحت اثر نوسانگر متحرک دارای جاذب ارتعاشات بهینه پردازیم. دو حالت برای وقوع ترک در نظر گرفته شده است. محل وقوع و عمق ترک در این دو حالت در جدول 7 آمده است.



شکل 4 تأثیر جاذب بر بیشترین خیز دینامیکی نرمال شده نقطه میانی تیر در سرعت های مختلف

جدول 4 پنج فرکانس طبیعی اول تیر مورد بررسی.

مود اول	مود دوم	مود سوم	مود چهارم	مود پنجم
14/7994	48/7647	104/5856	182/4814	282/5306

معیاری که برای طراحی بهینه جاذب در نظر گرفته می شود کاهش دامنه ارتعاشات نقطه میانی تیر است. ابتدا پاسخ نقطه میانی تیر بدون جاذب را برای سرعت های مختلف نوسانگر به دست می آوریم. برای پارامترهای نوسانگر دو حالت در نظر می گیریم و برای استخراج پاسخ دینامیکی پنج شکل مود اول تیر را در نظر می گیریم. در حالت اول یا  $A$  فرض می کنیم فرکانس طبیعی نوسانگر به صورت یک سیستم مجزا نزدیک به فرکانس طبیعی اول تیر مورد بررسی باشد و در حالت دوم یا  $B$  فرض می کنیم فرکانس طبیعی نوسانگر به صورت یک سیستم مجزا نزدیک به فرکانس طبیعی سوم تیر مورد بررسی باشد. دلیل این که فرکانس نوسانگر نزدیک به فرکانس های فرد تیر در نظر گرفته شد، معیار بررسی ارتعاشات نقطه میانی تیر است، زیرا در اثر تحریک با فرکانس نزدیک به فرکانس زوج تیر، در نقطه میانی گره تشکیل می شود. پارامترهای مربوط به نوسانگر برای دو حالت براساس جدول 5 است که برای هر دو حالت جرم نوسانگر و نسبت میرایی یکسان در نظر گرفته شده است.

در شکل 3 بیشترین مقدار خیز نرمال شده نقطه میانی تیر برای سرعت های مختلف نوسانگر آمده است. همان طور که مشاهده می شود هر چند در حالی که پارامترهای نوسانگر مشابه حالت  $B$  است، خیز نرمال شده نقطه میانی تیر اندکی بیشتر است، ولی نقاط بیشینه و کمینه محلی در سرعت های یکسانی رخ می دهند و می توان گفت مقادیر سرعت های بحرانی مستقل از پارامترهای نوسانگر است. همچنین برای سرعت های بیشتر از 28 متر بر ثانیه با افزایش سرعت به بیشترین مقدار خیز نرمال شده نقطه میانی تیر افزوده می شود، در حالی که در سرعت های کمتر از 28 متر بر ثانیه روند مشخصی برای تغییرات وجود ندارد. برای طراحی جاذب مشخصات نوسانگر را مشابه حالت اول یا  $A$  در نظر می گیریم. همان طور که گفته شد پارامتر اساسی در طراحی جاذب ارتعاشات جرم آن است، با توجه به این که جرم تیر بررسی شده 37440 کیلوگرم است، چنان چه جرم جاذب را 500 کیلوگرم در نظر بگیریم نسبت جرم جاذب به جرم تیر برابر با 0/013 است که در محدوده مناسب طراحی جرم جاذب قرار دارد. با توجه به مقادیر تعریف شده برای پارامترها، با استفاده از الگوریتم عددی بیان شده بهینه سازی پارامترهای جاذب می پردازیم. مقادیر بهینه پارامترهای جاذب حاصل از اجرای الگوریتم بهینه سازی در جدول 6 آمده اند.

جدول 5 پارامترهای مربوط به نوسانگر

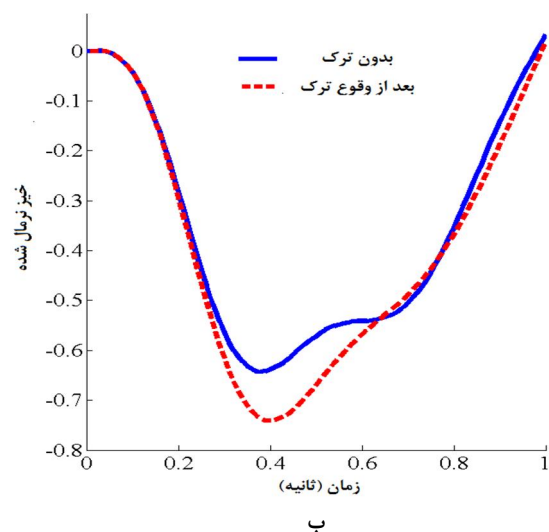
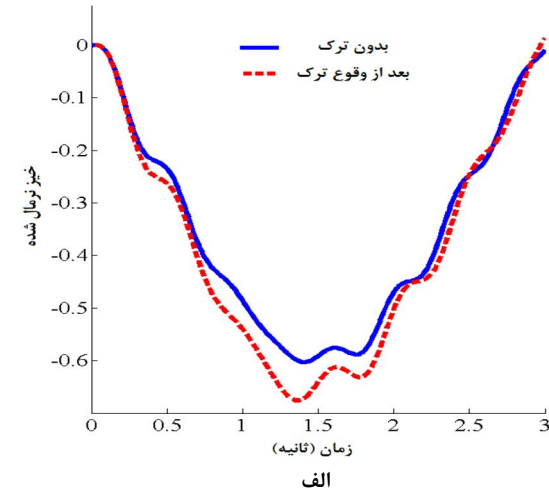
کمیت	حالت اول یا A	حالت دوم یا B
جرم نوسانگر (kg)	500	500
ثابت فنر (MN/m)	98	4050
ثابت میرایی (Ns/m)	155/4	1000
نسبت میرایی	0/0111	0/0111

جدول 6 مقادیر بهینه پارامترهای جاذب

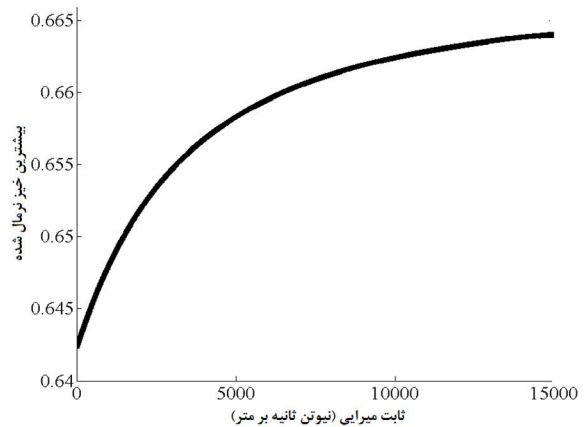
محل قرار گیری جاذب	سفتی فنر	ثابت میرایی
وسط تیر ( $x=15m$ )	112300 نیوتن بر متر	صفر

در شکل 8 اثر وقوع ترک حالت اول و در شکل 9 اثر وقوع ترک حالت دوم بر بیشترین خیز دینامیکی نرمال شده نقطه میانی تیر دارای جاذب بهینه برای سرعت‌های مختلف عبور نوسانگر آمده است. همان‌طور که دیده می‌شود در تمام سرعت‌ها بیشترین خیز دینامیکی نرمال شده نقطه میانی تیر افزایش یافته است. در ترک حالت اول با توجه به کمتر بودن عمق ترک، این افزایش چندان زیاد نیست در حالی که در حالت دوم افزایش بسیار بیشتر است. همچنین در حالت دوم مقادیر سرعت‌هایی که نمودار در آن‌ها دارای کمینه و بیشینه است به‌طور محسوسی تغییر یافته‌اند.

همان‌طور که در شکل‌های 8-9 مشاهده می‌شود وقوع ترک حالت دوم نسبت به ترک حالت اول تأثیر بسیاری بر از دست رفتن کارایی جاذب دارد و در تمام سرعت‌ها خیز دینامیکی نرمال شده نقطه میانی تیر به مقدار بسیار زیادی افزایش یافته است. در شکل 10 مقایسه‌ای بین خیز دینامیکی نرمال شده نقطه میانی تیر زمانی که ترک حالت دوم در آن رخ داده و جاذب بر تیر قرار ندارد و همچنین زمانی که جاذب بهینه شده برای تیر سالم بر آن قرار داده، انجام شده است. هنگامی که در تیر دارای ترک حالت دوم جاذب بهینه شده برای تیر سالم قرار داده می‌شود در بیشتر سرعت‌های تحریک نوسانگر خیز دینامیکی نرمال شده نقطه میانی تیر کاهش یافته است.

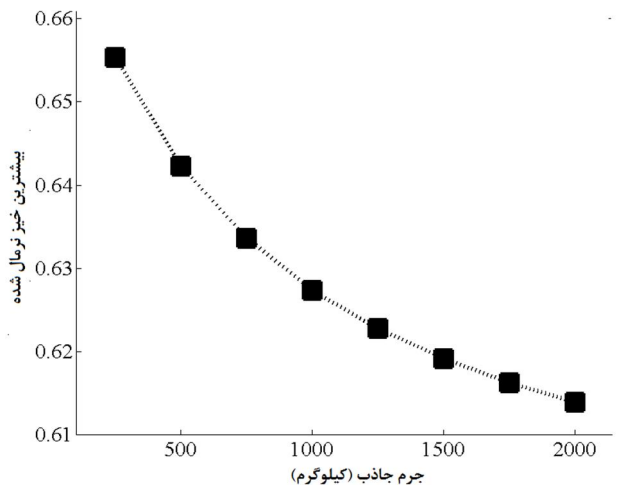


شکل 7 اثر وقوع ترک حالت دوم بر خیز نرمال شده نقطه میانی تیر، برای سرعت نوسانگر الف- 10 متر بر ثانیه، ب- 30 متر بر ثانیه



شکل 5 اثر اضافه شدن دمپر به جاذب بهینه بر بیشترین خیز دینامیکی نرمال شده نقطه میانی تیر در سرعت 21 متر بر ثانیه

پنج فرکانس طبیعی اول تیر مورد بررسی بدون جاذب دارای ترک با مشخصات جدول 7 در جدول 8 آمده است. زمانی که ترک در تیر رخ می‌دهد، بعد از عبور نوسانگر از روی تیر پاسخ دینامیکی نسبت به قبل از وقوع ترک کاملاً متفاوت خواهد بود. در شکل 7 خیز دینامیکی نرمال شده نقطه میانی تیر دارای جاذب بهینه قبل و بعد از وقوع ترک حالت دوم برای دو سرعت مختلف عبور نوسانگر آمده است.



شکل 6 اثر جرم جاذب بهینه بر بیشترین خیز دینامیکی نرمال شده نقطه میانی تیر در سرعت 21 متر بر ثانیه

جدول 7 پارامترهای ترک

محل وقوع ترک نسبت به تکیه گاه سمت چپ	نسبت عمق ترک به ارتفاع تیر	
24 متر	0/25	ترک حالت اول
12 متر	0/45	ترک حالت دوم

جدول 8 پنج فرکانس طبیعی اول تیر مورد بررسی بعد از وقوع ترک مطابق جدول 7

حالت اول	حالت دوم	
14/7741	14/2024	مود اول
48/1718	47/7629	مود دوم
103/1188	102/6241	مود سوم
181/4121	173/9048	مود چهارم
282/5241	282/5277	مود پنجم

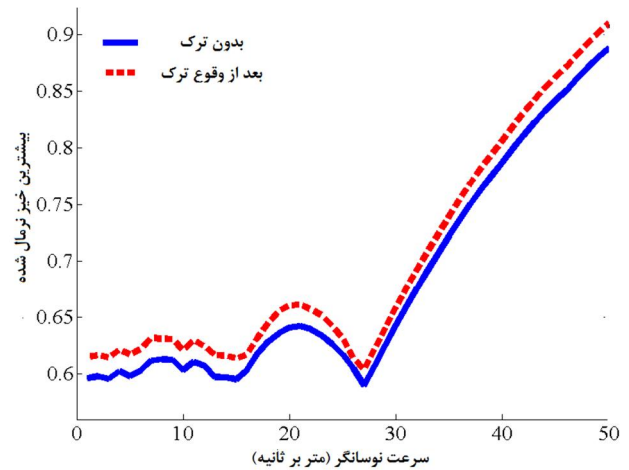
الاستیک به صورت مفصل - فنر پیچشی مورد بررسی قرار گرفت و یک معادله تحلیلی برای استخراج فرکانس‌های بی‌بعد به دست آمد، سپس پاسخ دینامیکی نقطه میانی تیر تحت سرعت‌های مختلف نوسانگر به دست آمد. نتایج نشان می‌دهند هنگامی که فرکانس ارتعاشی نوسانگر یک درجه آزادی به عنوان یک سیستم ارتعاشی مستقل نزدیک به یکی از فرکانس‌های طبیعی فرد تیر باشد، سرعت‌های بحرانی عبور بار مستقل از پارامترهای نوسانگر بوده و همواره دارای مقادیر ثابتی است.

برای طراحی جاذب بهینه از یک الگوریتم عددی مبتنی بر جستجوی مستقیم برای تعیین پارامترهای جاذب استفاده شد. نتایج نشان می‌دهد که جاذب بهینه بدون میرایی است و افزودن میرایی به جاذب کارایی آن را می‌کاهد، همچنین اثر جرم جاذب مورد بررسی قرار گرفت که نتایج نشان می‌دهد جاذب با پارامترهای بهینه دارای جرم بیشتر کارایی بیشتری در کاهش خیز دینامیکی از خود نشان می‌دهند.

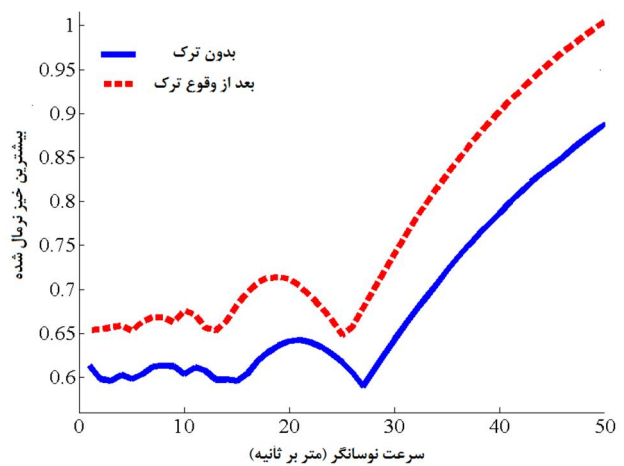
برای بررسی اثر ترک، فرکانس‌های طبیعی ارتعاشات تیر ترک‌دار دارای تکیه‌گاه‌های الاستیک به دست آمد و اثر وقوع ترک با دو شدت مختلف بر فرکانس‌های طبیعی بررسی شد. سپس در هر یک از دو حالت، ترک در تیر دارای جاذب بهینه اعمال شد و پاسخ دینامیکی نقطه میانی تحت اثر سرعت‌های مختلف نوسانگر به دست آمد. نتایج نشان می‌دهد با وقوع ترک خیز دینامیکی در تمام سرعت‌ها افزایش یافته و مقدار افزایش بسته به نوع ترک متفاوت است و جاذب کارایی خود را نسبت به پیش از وقوع ترک از دست می‌دهد. مقایسه‌ای میان پاسخ دینامیکی در یکی از حالات وقوع ترک، در حالی که جاذب روی تیر قرار ندارد و زمانی که جاذب بهینه‌شده برای تیر سالم روی آن قرار داده می‌شود، نشان می‌دهد جاذب در بیشتر سرعت‌ها سبب کاهش خیز دینامیکی نقطه میانی تیر شده است. بنابراین می‌توان بیان داشت جاذب بهینه‌شده برای تیر سالم پس از وقوع ترک و تغییر رفتار سازه، اگرچه نمی‌تواند مانع افزایش خیز دینامیکی در سرعت‌های مختلف شود ولی در بیشتر سرعت‌ها نسبت به زمانی که جاذب را از تیر دارای ترک حذف کنیم، سبب کاهش خیز دینامیکی می‌شود.

## 8- مراجع

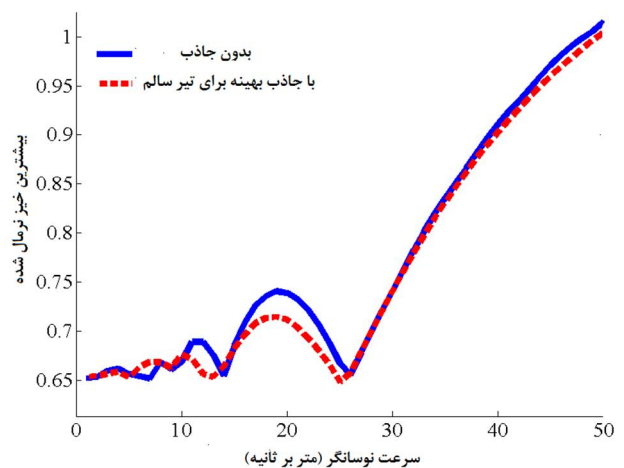
- [1] J. F. Wang, C. C. Lin, B. L. Chen, Vibration suppression for high-speed railway bridges using tuned mass damper, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 40, No. 2, pp. 465-491, 2013.
- [2] H. Moradi, F. Bakhtiari-Nejad, M. R. Movahhedy, Tuneable vibration absorber design to suppress vibrations: an application in boring manufacturing process, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 318, No. 2, pp. 93-108, 2008.
- [3] J. S. Issa, Vibration absorber for simply supported beams subjected to constant moving loads, *Journal of Multi-Body Dynamics*, Vol. 226, No. 4, pp. 398-404, 2012.
- [4] M. Rezaee, R. Hassannejad, Free vibration analysis of simply supported beam with breathing crack using perturbation method, *Acta Mechanica Solida Sinica*, Vol. 29, No. 5, pp. 459-470, 2010.
- [5] A. D. Dimarogonas, Vibration of cracked structure: a state of the art review, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 55, No. 5, pp. 831-857, 1996.
- [6] M. Rezaee, V. A. Maleki, Vibration analysis of a cracked pipe conveying fluid, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 12, No. 1, pp. 66-76, 2012. (In Persian)
- [7] S. Talebi, A. Ariaei, Vibration analysis of rotating tapered cantilever beams and their crack detection using genetic algorithm, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 13, No. 8, pp. 1-13, 2013. (In Persian)
- [8] C. K. Rao, S. Mirza, A note on vibration of generally restrained beams, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 130, No. 3, pp. 453-465, 1989.
- [9] H. Y. Lai, J. C. Hsu, C. K. Chen, An innovative eigenvalue problem solver for free vibration of Euler-Bernoulli beam by using the Adomian decomposition method, *Computers and Mathematics with Applications*, Vol. 56, No. 12, pp. 3204-3220, 2008.
- [10] H. Tada, P. Paris, G. Irwin, *The Stress Analysis of Cracks Handbook*, Second Ed., Missouri, 1985.



شکل 8 اثر وقوع ترک حالت اول بر بیشترین خیز دینامیکی نرمال شده نقطه میانی تیر در سرعت‌های مختلف



شکل 9 اثر وقوع ترک حالت دوم بر بیشترین خیز دینامیکی نرمال شده نقطه میانی تیر در سرعت‌های مختلف



شکل 10 اثر افزودن جاذب بهینه‌شده برای تیر سالم به تیر دارای ترک حالت دوم در سرعت‌های مختلف

## 7- نتیجه گیری

در تحقیق حاضر جاذب بهینه برای تیر اوپلر- برنولی دارای تکیه‌گاه‌های الاستیک تحت اثر نوسانگر متحرک طراحی شده و اثر ترک بر کارایی آن بررسی شد. برای این منظور ابتدا ارتعاشات آزاد تیر دارای تکیه‌گاه‌های



- [13] J. H. Koo, A. Shukla, M. Ahmadian, Dynamic performance analysis of non-linear tuned vibration absorber, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 13, No. 9, pp. 1929-1937, 2008.
- [14] Y. Narkis, Identification of crack location in vibrating simply supported beams, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 172, No. 4, pp. 549-558, 1994.
- [15] X. Q. Zhu, S. S. Law, Wavelet-based crack identification of bridge beam from operational deflection time history, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 43, No. 8, pp. 2299-2317, 2006.
- [11] A. Khorram, F. Bakhtiari-Nejad, M. Rezaeian, Comparison studies between two wavelet based crack detection methods of a beam subjected to a moving load, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 51, pp. 204-215, 2012.
- [12] M. H. Kargarnovin, M. T. Ahmadian, R. A. Jafari, Dynamic analysis of delaminated Timoshenko beam under one degree of freedom oscillator, in *the First International Conference on Acoustics and Vibration*, Tehran, Iran, 2011. (In Persian)