مجله مهندسی مکانیک مدرس، خرداد 1394، دوره 15، شماره 3، ص‌ص 208-218

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

بررسی جریان نانوسیال بر روی صفحه گسترش یافته در حضور میدان مغناطیسی با شرایط مرزی سرعت لغزشی و همرفت سطحی

نوید فریدونی مهر[1]، اصغر برادران رحیمی[2*]

1- دانشجوی دکترا، مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد
2- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد
* مشهد، صندوق پستی 9177948974، rahimiab@um.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 29 آبان 1393
پذیرش: 13 دی 1393
ارائه در سایت: 15 بهمن 1393

کلید واژگان:
جریان هیدرودینامیک مغناطیسی
نانوسیال
سرعت لغزشی
شرط مرزی همرفت سطحی
روش آنالیز هموتوپی بهینه

چکیده

هدف از نگارش این مقاله بررسی تحلیلی جریان سیال و انتقال حرارت و جرم در جریان سیال سه بعدی آرام پایا هیدرودینامیک مغناطیسی بر روی یک صفحه گسترش یافته با شرط مرزی همرفت سطحی به کمک روش آنالیز هموتوپی بهینه (OHAM) می‌باشد. در این مسأله، بر خلاف شرط بدون لغزش متداول در سطح، شرط مرزی سرعت لغزشی در نظر گرفته شده است. این مقاله شامل مدل تعادلی غیر همگن چهار معادله ای دو مولفه‌ای است که در آن تأثیرات نانوسیال به صورت تأثیرات همزمان حرکت براونی و انتشار حرارتی در نظر گرفته شده است. معادلات دیفرانسیل جزیی بقایی حاکم (PDE) توسط تبدیلات تشابهی مناسب به معادلات دیفرانسیل معمولی (ODE) غیر خطی جفت شده شامل معادلات ممنتوم، انرژی و غلظت تبدیل خواهد شد. از مقایسه بین نتایج به دست آمده از روش OHAM حاضر و نتایج محققین دیگر مشاهده می‌شود که هم‌خوانی خوبی بین نتایج وجود دارد. همچنین، تأثیر پارامترهای فیزیکی مختلف جریان بر روی مؤلفه‌های سرعت سیال، توزیع دمایی و غلظت و همچنین ضرایب اصطکاک پوسته‌ای در جهات x و y، عدد ناسلت محلی و عدد شروود محلی مورد بررسی قرار گرفته شده است. این مطالعه نشان می‌دهد که نانوذرات در سیال پایه پتانسیل خوبی را در راستای افزایش عملکرد انتقال حرارت همرفتی سیالات مختلفی از خود نشان می‌دهند. نتایج نشان می‌دهد که گرادیان دمای دیواره با افزایش پارامتر انتشار حرارتی و یا کاهش پارامتر حرکت براونی کاهش می‌یابد. بعلاوه، عدد شروود محلی بطور معکوس متناسب با پارامتر انتشار حرارتی و نیز مستقیما متناسب با پارامتر حرکت براونی می‌باشد.

Investigation of MHD nano-fluid flow over a stretching surface with velocity slip and convective surface boundary conditions

Navid Freidoonimehr, Asghar Baradaran Rahimi*

Department of Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran
* P.O.B. 9177948974 Mashhad, Iran, rahimiab@um.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 20 November 2014
Accepted 03 January 2015
Available Online 04 February 2015

Keywords:
MHD
Nano-fluid
Velocity slip
Convective boundary condition
Optimal HA

ABSTRACT

The present article provides an analytical investigation of the fluid flow and heat and mass transfer for the steady laminar MHD three-dimensional nano-fluid flow over a bi-directional stretching sheet with convective surface boundary condition using Optimal Homotopy analysis method (OHAM). In contrast to the conventional no-slip condition at the surface, Navier's slip condition has been applied. This paper contains two-component four-equation nonhomogeneous equilibrium model that incorporates the effects of Brownian diffusion and thermophoresis simultaneously. The governing partial differential equations (PDEs) are transformed into highly nonlinear coupled ordinary differential equations (ODEs) consisting of the momentum, energy and concentration equations via appropriate similarity transformations. The current OHAM solution demonstrates very good correlation with those of the previously published studies in the special cases. The influences of different flow physical parameters on all fluid velocity components, temperature distribution and concentration as well as the skin friction coefficients in x and y directions, local Nusselt number and local Sherwood number are tabulated graphically and discussed in detail. This study indicates that nano particles in the base fluid offer potential in increasing the convective heat transfer performance of various liquids. The results show that wall temperature gradient decreases with an increase in thermophoresis parameter or a decrease in Brownian motion parameter. Further, local Sherwood number is inversely proportional to the thermophoresis parameter and also directly proportional to the Brownian motion parameter.

1- مقدمه

با توسعه‌ی فن‌آوری نانو و ساخت ذرات در اندازه نانو، این امکان فراهم شده است که ذرات با ابعاد بسیار کوچک (در حد نانو) را در سیال مخلوط کنیم.

یکی از مهم‌ترین عوامل مؤثر در انتخاب سیالات نانو، پایداری ذرات موجود در این سیالات در تبادل حرارت می‌باشد. در نهایت اینکه هر چقدر ذرات ریزتر باشند، سطح نسبی انتقال حرارت آن‌ها نیز بیشتر می‌شود. در نتیجه، بازده‌ی

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:
N. Freidoonimehr, A. Baradaran Rahimi, Investigation of MHD nano-fluid flow over a stretching surface with velocity slip and convective surface boundary conditions, *Modares Mechanical Engineering,* Vol. 15, No. 3, pp. 208-218, 2015 (In Persian)

[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.3.42.2]

حرارتی ذرات معلق که تابعی از سطوح انتقال حرارت می‌باشد، با کاهش اندازه‌ی ذرات، افزایش می‌یابد.

چوی و ایستمن[1] اولین کسانی بودند که در آزمایشگاه ملی آرگونه در ایالات متحده، سوسپانسیون حاوی ذرات نانو در سیال پایه را نانوسیال نامیدند و افزایش فوق‌العاده در ضریب انتقال حرارت را نشان دادند. نتایج تجربی نشان‌دهنده‌ی این موضوع می‌باشد که با اضافه کردن 1 تا 5 درصد حجمی ذرات جرمی، رسانایی حرارتی مؤثر مخلوط تا 20 درصد در مقایسه با سیال پایه، می‌تواند افزایش یابد [2,1]. این مقدار افزایش انتقال حرارت را نمی‌توان منحصراً به قابلیت هدایت گرمایی این ذرات نانو نسبت داد. مکانیزم‌های دیگری از جمله تراکم ذرات، درصد حجمی، حرکت براونی، اندازه‌ی نانوذرات، شکل و مساحت سطح ذره در افزایش انتقال حرارت نیز تأثیر مستقیم دارند. بونگیورنو[2] [3] پدیده انتقال همرفت را در نانوسیال مورد بررسی قرار داد و به این نتیجه دست یافت که از میان هفت مکانیزم لغزش تنها مکانیزم‌های حرکت براونی و انتشار حرارتی نانوذرات باعث کمک به افزایش عظیمی در قدر مطلق ضریب هدایت حرارتی سیالات خواهد شد. او همچنین مدلی ریاضی برای جریان نانوسیال که شامل اثرات همزمان مکانیزم‌های حرکت براونی و انتشار حرارتی نانوذرات می‌باشد، ارائه نمود. رشیدی و آبلمان [4] تولید انتروپی را بر روی یک دیسک دوار متخلخل در جریان تراکم ناپذیر نانوسیال مورد بررسی قرار دادند. در مطالعه‌ای دیگر، فریدونی مهر و همکارانش [5] جریان آزاد نانوسیال لایه‌ای ناپایا را در حضور میدان مغناطیسی بر روی صفحه عمودی مورد مطالعه قرار دادند. همچنین، جعفری و فریدونی مهر [6] قانون دوم ترمودینامیک را بر روی صفحه متخلخل گسترش یافته در حضور میدان مغناطیسی عمودی یکنواخت در جریان لغزشی نانوسیال مورد بررسی قرار دادند. مدل‌سازی تحلیلی جریان نانوسیال سه بعدی در یک کانال مدور توسط فریدونی مهر و همکارانش [7] صورت پذیرفته است. نظری و همکارانش [8] انتقال حرارت آب و نانو سیال آلومینا/آب در یک لوله دما ثابت حاوی ماده متخلخل در محدوده رینولدز 700 تا 5000 را به صورت تجربی مورد بررسی قرار دادند. محمدپور فرد [9] رفتار حرارتی و هیدرودینامیکی یک نانوسیال غیرنیوتونی مغناطیس شونده در یک کانال مستطیلی عمودی و در حضور میدانهای مغناطیسی مختلف را به صورت عددی با استفاده از مدل دوفازی مخلوط، مدل قانون توانی و روش حجم محدود مورد بررسی قرار داده است. ضیائی راد و کسایی پور [10] حل تشابهی لایه مرزی برای جریان جابجایی ترکیبی نانوسیال آب- مس عبوری از روی یک صفحه تخت افقی را به صورت عددی به کمک روش اختلاف محدود کلرباکس مورد مطالعه قرار دادند.

جریان لایه-مرزی روی صفحه‌ی پیوسته‌ی متحرک نوع مهمی از جریان است که در تعداد زیادی از فرایندهای مهندسی به کار می‌رود. ریخته‌گری[3] (حدیده کاری) آیرودینامیک صفحات پلاستیکی، خنک‌سازی صفحات فلزی در حمام خنک‌کن[4] (به شکل یک الکترولیت است)، رشد کریستالی، متالورژی، لایه-مرزی در امتداد فیلم مایع در فرایند تقطیر و صفحه‌ی پلیمری که به صورت پیوسته تحت ریخته‌گری تحت فشار قرار گرفته است، کاربردهای عملی از صفحه‌ی متحرک هستند و همچنین مواد ساخته شده در فرایندهای ریخته‌گری و موادی که تحت عملیات گرمایی قرار گرفته که بین غلتک تغذیه[5] (غلتک پیش‌بر) یا روی تسمه نقاله حرکت می‌کنند ویژگی‌های صفحه‌ی متحرک پیوسته را دارند. همچنین باید توجه داشت که مسایل هیدرومغناطیس از اهمیت روز افزونی در کاربردهای صنعتی برخوردار می‌باشند. بسیاری از فرایندهای وابسته به متالورژی شامل خنک‌کاری تار و رشته‌های پیوسته به وسیله‌ی کشیدن آن‌ها از میان یک سیال ساکن صورت می‌گیرد. در طی این فرایند، این تارها و رشته‌ها بعضی اوقات دچار کشیدگی می‌شوند. در تمام موارد، خواص محصول نهایی به مقدار زیادی وابسته به نرخ خنک‌کاری است. با کشیدن این رشته‌ها در یک سیال با قابلیت هدایت الکتریکی در یک میدان مغناطیسی، نرخ خنک‌کاری می‌تواند کنترل شود و محصولی با ویژگی‌های دلخواه به دست آید [11].

یکی از مشکلات اساسی در پیش‌گویی رفتار غیرعادی جریان‌های گاز در میکرو کانال‌ها آن است که معادلات ناویر-استوکس با فرضیات جریان پیوسته، وقتی که ابعاد مشخصه‌ی جریان و طول پویش آزاد مولکولی قابل مقایسه هستند، شروع به از بین رفتن می‌کنند. بنابراین، بایستی این معادلات در محدوده‌ی رژیم لغزشی با اعمال شرایط مرزی سرعت لغزشی و پرش دمایی حل گردند. بسکوک و کارنیاداکیس[6] [12] دریافتند که حل معادلات ناویر-استوکس با شرایط مرزی اصلاح شده، در محدوده‌ی رژیم لغزشی در تطابق خوبی با اطلاعات آزمایشگاهی در مورد جریان در برخی میکرو کانال‌ها می‌باشد. در بسیاری از مطالعات شرط مرزی غیر لغزشی (شرطی که در آن مایع به سطح جامد می‌چسبد) برقرار می‌باشد (عدد نادسن[7] برابر با صفر در نظر گرفته می‌شود)، اما در برخی شرایط مانند محلول‌های امولسیون، سوسپانسیون، کف، و پلیمر [13] شرط مرزی غیر لغزشی کافی نیست. در محدوده‌ی $0.01 < Kn < 0.1$ (جریان لغزشی)، معادلات استاندارد ناویر استوکس و انرژی با در نظر گرفتن شرایط مرزی سرعت لغزشی و پرش دمایی همچنان می‌توانند مورد استفاده قرار گیرند. در سال‌های اخیر، رژیم جریان لغزشی به صورت گسترده مورد مطالعه‌ی پژوهشگران قرار گرفته شده است [16-14].

در سال‌های اخیر با مشخص شدن اهمیت فوق‌العاده حل‌های تحلیلی در مقایسه با حل‌های عددی، روش‌های تحلیلی متفاوتی برای حل معادلات غیرخطی ارائه شده‌است. روش آنالیز هموتوپی، یکی از روش‌های پرکاربرد در حل معادلات غیر خطی است. این روش اولین بار توسط لیایو[8] به عنوان روش تحلیل عمومی برای حل مسائل غیر خطی ارائه شد [17]. امروزه محققان و پژوهشگران زیادی برای حل معادلات غیر خطی مسائل مختلف از این روش استفاده می‌کنند. مصطفی و همکارانش [18] با استفاده از روش آنالیز هموتوپی و با در نظر گرفتن اثر حرکت برآونی، جریان نقطه سکون نانوسیال بر روی یک صفحه گسترش یافته را بررسی کردند. عباس و همکارانش [19] انتقال حررات سیال تراکم‌ناپذیر ماکسول را بر روی سطوح گسترش یافته عمودی به کمک آنالیز هموتوپی بررسی نمودند. رشیدی و همکارانش [20] قوانین اول و دوم ترمودینامیک بر روی یک دیسک دوار در جریان ناپایای هیدرودینامیک مغناطیسی در حضور میدان مغناطیسی یکنواخت به صورت تحلیلی با استفاده از روش آنالیز هموتوپی و شبکه عصبی مصنوعی به منظور به حداقل رسانیدن انتروپی تولید شده را مورد بررسی قرار دادند. همچنین، رشیدی و همکارانش [21] با استفاده از روش آنالیز هموتوپی جریان نانوسیال بر روی یک صفحه گسترش یافته غیر خطی نفوذپذیر با در نظر گرفتن اثرات

1- Choi & Eastman
2- Buongiorno
3- Extrusion
4- Cooling bath
5- Feed roll
6- Beskok & Karniadakis
7- Knudsen number
8- Liao

تزریق/مکش از سطح را مورد مطالعه قرار دادند. در مطالعه‌ای دیگر، رشیدی و همکارانش [22] انتقال حرارت و جرم همرفت آزاد در جریان سیال هیدرودینامیک مغناطیسی بر روی صفحه عمودی گسترش یافته در محیط متخلخل را به کمک روش آنالیز هموتوپی مورد بررسی قرار دادند.

هدف از مطالعه‌ی حاضر مطالعه جریان سیال و انتقال حرارت و جرم در جریان سیال سه بعدی آرام پایا هیدرودینامیک مغناطیسی[1] بر روی یک صفحه گسترش یافته با شرایط مرزی سرعت لغزشی و همرفت سطحی می‌باشد. مطالعه انتقال حرارت در جریان‌های کشیده شده به سبب کاربردهای گسترده در مهندسی شیمی بسیار مورد توجه می‌باشد. فرایندهای بسیاری در مهندسی شیمی از جمله فرایند متالورژی، فرایند اکستروژن پلیمر شامل خنک کردن مایع مذاب در حال کشیده شدن به یک سیستم خنک کننده، تولید کاغذ و فایبر گلاس می‌باشند. در این نوع فرایندها، نرخ خنک‌کاری و کشیده شدن بسیار بر روی کیفیت نهایی محصول تاثیرگذار است. هدف از نگارش مقاله حاضر گسترش کار حیات و همکارانش [23] با بررسی اثرات افزودن نانوسیالات بر جریان سیال و در نظر گرفتن اثرات میدان غلظت و سرعت لغزشی و همچنین گسترش کار خان و همکارانش [24] با بررسی اثرات هیدرودینامیک مغناطیسی در میدان سیال و سرعت لغزشی و به کار گیری یک روش حل تحلیل به منظور حل معادلات حاکم می‌باشد. روش آنالیز هموتوپی بهینه به منظور حل معادلات دیفرانسیل معمولی حاکم و همچنین مطالعه تأثیر پارامترهای مختلف فیزیکی جریان بر روی مولفه‌های سرعت جریان، توزیع دمایی، غلظت و پارامترهای مورد نظر مهندسی حاکم مورد استفاده قرار می‌گیرد.

2- شرح مسئله و معادلات حاکم

جریان آرام سیال پایای غیر قابل تراکم سه بعدی نانوسیال ناشی از یک صفحه گسترش یافته پیوسته واقع در امتداد صفحه xy همراه با شرایط مرزی سرعت لغزشی و همرفت سطحی در نظر گرفته شده است. جریان حوزه‌ی $z > 0$ را اشغال کرده است. صفحه در دو راستای x و y گسترش می‌یابد (مرکز صفحه ثابت نگاه داشته می‌شود). سرعت گسترش صفحه در راستای x و y به ترتیب به صورت $u_w(x) = a\,x$ و $v_w(y) = b\,y$ فرض می‌شود. هندسه فیزیکی و سیستم مختصات مسئله در شکل1 نشان داده شده است. سیال رسانا تحت تاثیر میدان مغناطیسی ثابت B_0 می‌باشد. بعلاوه، از اثرات میدان مغناطیسی القا شده به دلیل کوچک بودن عدد رینولدز مغناطیسی صرف نظر می‌شود. اثرات حرکت براونی و انتشار حرارتی نانوذرات نیز در معادلات انتقال در نظر گرفته شده است و از اتلاف لزج صرف‌نظر می‌شود. همچنین، خواص فیزیکی سیال ثابت در نظر گرفته شده است. معادلات بقایی پیوستگی، اندازه حرکت، انرژی و غلظت برای جریان لایه-مرزی غیرقابل تراکم آرام هیدرودینامیک مغناطیسی برای مساله مورد بررسی بصورت روابط (1) تا (5) در می‌آید [24,23]:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \tag{1}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=\upsilon\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{\sigma B_0^2}{\rho}u \tag{2}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=\upsilon\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}-\frac{\sigma B_0^2}{\rho}v \tag{3}$$

$$u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}+w\frac{\partial T}{\partial z} = \alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)+\tau\,D_B\left\{\left(\frac{\partial C}{\partial z}\frac{\partial T}{\partial z}\right)+\frac{D_T}{T_\infty}\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)^2\right\} \tag{4}$$

$$u\frac{\partial C}{\partial x}+v\frac{\partial C}{\partial y}+w\frac{\partial C}{\partial z}=D_B\left(\frac{\partial^2 C}{\partial z^2}\right)+\frac{D_T}{T_\infty}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) \tag{5}$$

که در آن u، v و w به ترتیب مؤلفه‌های سرعت در جهات x، y و z می‌باشند. همچنین، $\upsilon(=\mu/\rho)$ ویسکوزیته سینماتیکی، σ رسانایی الکتریکی، ρ چگالی سیال، α نفوذ حرارتی، $\tau(=(\rho\,c)_p/(\rho\,c)_f)$ نسبت ظرفیت گرمایی موثر ماده نانوذره به ظرفیت گرمایی موثر سیال پایه، C غلظت نانوذره، D_B ضریب انتشار براونی، و D_T ضریب انتشار حرارتی می‌باشند. شرایط مرزی متناسب با مساله بصورت روابط (6) و (7) در می‌آید [24,6]:

$$\left.\begin{matrix} u=u_w(x)+\gamma_0\dfrac{\partial u}{\partial z} & v=v_w(y)+\gamma_0\dfrac{\partial v}{\partial z} & \\ w=0 & -k\dfrac{\partial T}{\partial z}=h\left(T_f-T\right) & C=C_w \end{matrix}\right\}\quad \text{در}\quad z=0 \tag{6}$$

$$u\to 0 \qquad v\to 0 \qquad T\to T_\infty \qquad C\to\infty \qquad as \qquad z\to\infty \tag{7}$$

که در آن γ_0 طول لغزش به عنوان یک ثابت متناسب با سرعت لغزش، k هدایت حرارتی، h ضریب انتقال حرارت همرفتی، T_f دمای همرفتی سطح، T_∞ دمای محیط، C_w غلظت نانوذرات در صفحه، و C_∞ غلظت محیط می‌باشند. در ادامه، توابع بی‌بعد و متغیرهای تشابهی بصورت رابطه(8) تعریف می‌شوند [23]:

$$\eta=z\sqrt{\frac{a}{\upsilon}},\quad u=a\,x\,f'(\eta),\quad v=a\,y\,g'(\eta),$$
$$w=-\sqrt{\upsilon\,a}\left(f(\eta)+g(\eta)\right),\theta(\eta)=\frac{T-T_\infty}{T_f-T_\infty},\phi(\eta)=\frac{C-C_\infty}{C_w-C_\infty}, \tag{8}$$

با استفاده از معادله‌ی (8)، معادله پیوستگی (1) ارضا خواهد شد و با جایگذاری تبدیلات تشابهی فوق در معادلات (2) تا (5)، سیستم معادلات دیفرانسیل معمولی (9) تا (12) بدست می‌آید:

$$f'''(\eta)+\left(f(\eta)+g(\eta)\right)f''(\eta)-f'(\eta)^2 -M\,f'(\eta)=0 \tag{9}$$

$$g'''(\eta)+\left(f(\eta)+g(\eta)\right)g''(\eta)-g'(\eta)^2 -M\,g'(\eta)=0 \tag{10}$$

$$\theta''(\eta)+\Pr((f(\eta)+g(\eta))\theta'(\eta) +Nb\,\theta'(\eta)\,\phi'(\eta)+Nt(\theta'(\eta))^2)=0 \tag{11}$$

$$\phi''(\eta)+Le\,(f(\eta)+g(\eta))\phi'(\eta)+\frac{Nt}{Nb}\theta''(\eta)=0 \tag{12}$$

که در روابط فوق، $M=\sigma B_0^2/a\,\rho$ پارامتر مغناطیسی، $Pr=\upsilon/\alpha$ عدد پرانتل، $Nb=\tau\,D_B(C_w-C_\infty)/\upsilon$ پارامتر حرکت براونی، $Le=\upsilon/D_B$ عدد لوئیس، و $Nt=\tau\,D_T(T_f-T_\infty)/\upsilon\,T_\infty$ پارامتر حرارتی می‌باشند. همچنین، شرایط مرزی تبدیل یافته بصورت (13) و (14) در می‌آیند:

$$f(0)=g(0)=0, f'(0)=1+\gamma\,f''(0)$$
$$g'(0)=\lambda+\gamma\,g''(0)$$
$$\theta'(0)=-Bi(1-\theta(0)),\phi(0)=1 \tag{13}$$

$$f'(\infty)\to 0, g'(\infty)\to 0, \theta(\infty)\to 0, \phi(\infty)\to 0 \tag{14}$$

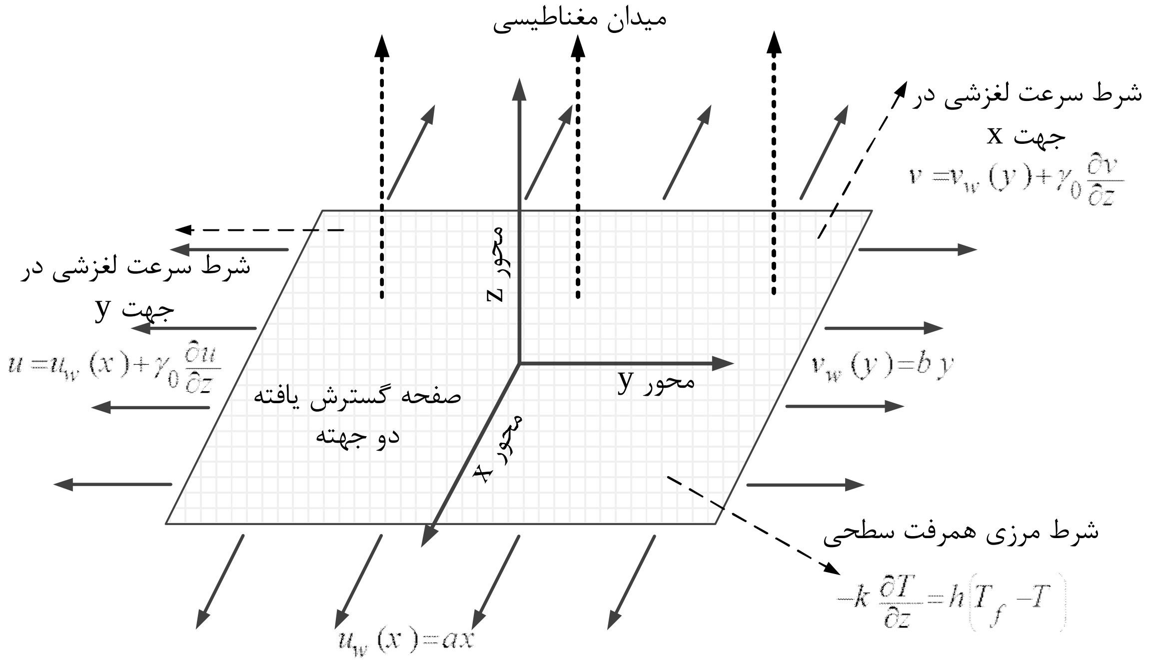
که در آن $\gamma=\gamma_0(a/\upsilon)^{1/2}$ پارامتر سرعت لغزشی، $\lambda=b/a$ نسبت نرخ کشش و $Bi=\frac{h}{k}\sqrt{\upsilon/a}$ عدد بیوت می‌باشند.

3- پارامترهای فیزیکی مهندسی

به جرأت می‌توان هدف اصلی تمامی مسائل انتقال حرارت را بدست آوردن ضریب اصطکاک سطحی C_f و همچنین عدد ناسلت محلی Nu_x، به عنوان دو پارامتر مهندسی مهم، دانست. پارامترهای فیزیکی حاکم در این مساله ضریب اصطکاک سطحی در جهات x و y، عدد ناسلت محلی (Nu_x) و عدد شروود محلی (Sh_x) می‌باشند که به صورت زیر قابل محاسبه می‌باشند:

1- Magnetohydrodynamics (MHD)

[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.3.42.2]



شکل 1 پیکربندی جریان نانوسیال بر روی صفحه گسترش یافته و مختصات هندسی مسئله

$$C_{fx} = \frac{\tau_{wx}}{\rho\, u_w^2}, \qquad C_{fy} = \frac{\tau_{wy}}{\rho\, u_w^2},$$
$$Nu_x = \frac{x\, q_w}{k(T_f - T_\infty)}, \qquad Sh_x = \frac{x\, q_m}{D_B(C_w - C_\infty)}, \tag{15}$$

که در روابط (15)، τ_{wx} ضریب اصطکاک سطحی در جهت x، τ_{wy} ضریب اصطکاک سطحی در جهت y، q_w و q_m به ترتیب شار حرارتی سطحی و شار جرمی سطحی می‌باشند که طبق رابطه (16) عبارتند از:

$$\tau_{wx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z=0}, \qquad \tau_{wy} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_{z=0},$$
$$q_w = -k\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_{z=0}, \qquad q_m = -D_B\left(\frac{\partial C}{\partial z}\right)_{z=0}, \tag{16}$$

با جایگذاری پارامترهای مذکور در روابط فوق و با کمک متغیرهای تشابهی، به شکل نهایی روابط فیزیکی حاکم بصورت (17) خواهیم رسید:

$$C_{fx}Re_x^{1/2} = f''(0), \qquad C_{fy}Re_x^{1/2} = g''(0),$$
$$Nu_x/Re_x^{1/2} = -\theta'(0), Sh_x/Re_x^{1/2} = -\phi'(0), \tag{17}$$

که در آن $Re_x = u_w x/\upsilon$ عدد رینولدز محلی بر مبنای سرعت کششی ($u_w(x)$) می‌باشد.

4- روش آنالیز هموتوپی

در روش آنالیز هموتوپی، همگرایی سری جواب را می‌توان با استفاده از یک پارامتر کمکی و گاهی یک تابع کمکی تنظیم و کنترل نمود، بنابراین، میزان غیرخطی بودن مسئله تأثیر چندانی بر صحت نتایج این روش ندارد. با استفاده از روش آنالیز هموتوپی بسیاری از معادلات موجود در علوم مهندسی توسط پژوهشگران مختلف با دقت قابل قبولی در مقایسه با روش‌های عددی حل شده‌اند. مزیت اصلی استفاده از روش آنالیز هموتوپی بهینه در مقایسه با روش آنالیز هموتوپی معمولی، قابلیت کنترل نرخ همگرایی روش انالیز هموتوپی با استفاده از مشخص نمودن مقادیر بهینه پارامترهای کمکی بر مبنای خطای باقی‌مانده مربع متوسط می‌باشد.

4-1- حل بر مبنای روش انالیز هموتوپی بهینه

بر اساس تئوری HAM، توابع $f(\eta)$، $g(\eta)$، $\theta(\eta)$، و $\phi(\eta)$ می‌توانند بر حسب مجموعه‌ای از توابع پایه $\{\eta^k \exp(-n\eta), \quad k \geq 0, \quad n \geq 0\}$ بصورت زیر بیان شوند (به منظور مطالعه بیشتر مراحل روش آنالیز هموتوپی، به مراجع [25,17] مراجعه شود.):

$$f_m(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_{m,n}^k \eta^k \exp(-n\eta), \tag{18}$$

$$g_m(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} b_{m,n}^k \eta^k \exp(-n\eta), \tag{19}$$

$$\theta_m(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} c_{m,n}^k \eta^k \exp(-n\eta), \tag{20}$$

$$\phi_m(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} d_{m,n}^k \eta^k \exp(-n\eta) \tag{21}$$

که در روابط فوق، $a_{m,n}^k$، $b_{m,n}^k$، $c_{m,n}^k$، و $d_{m,n}^k$ ضرایبی هستند که بایستی مشخص شوند. تقریب‌های اولیه و اپراتورهای خطی کمکی به کمک روابط (22) و (23) انتخاب می‌شوند:

$$f_0(\eta) = \frac{1 - e^{-\eta}}{\gamma + 1}, \qquad g_0(\eta) = \frac{\lambda(1 - e^{-\eta})}{\gamma + 1},$$
$$\theta_0(\eta) = \frac{Bi \cdot e^{-\eta}}{Bi + 1}, \qquad \phi_0(\eta) = e^{-\eta}, \tag{22}$$

$$\mathcal{L}_f = \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} - \frac{\partial f}{\partial \eta}, \qquad \mathcal{L}_g = \frac{\partial^3 g}{\partial \eta^3} - \frac{\partial g}{\partial \eta},$$
$$\mathcal{L}_\theta = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} - \theta, \qquad \mathcal{L}_\phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} - \phi, \tag{23}$$

اپراتورهای خطی کمکی فوق خواص (24) را دارا می‌باشند:

$$\mathcal{L}_f(C_1 + C_2 e^{\eta} + C_3 e^{-\eta}) = 0$$
$$\mathcal{L}_g(C_4 + C_5 e^{\eta} + C_6 e^{-\eta}) = 0$$
$$\mathcal{L}_\theta(C_7 e^{\eta} + C_8 e^{-\eta}) = 0$$
$$\mathcal{L}_\phi(C_9 e^{\eta} + C_{10} e^{-\eta}) = 0 \tag{24}$$

که در آن $C_i(i = 1 - 10)$ ثوابت اختیاری می‌باشند. مسائل تغییر شکل مرتبه صفرم[1] را می‌توان بصورت (25) تا (32) در آورد:

$$(1 - q)\mathcal{L}_f\left[\hat{f}(\eta; q) - f_0(\eta)\right] =$$
$$q\hbar_f \mathcal{N}_f\left[\hat{f}(\eta; q), \hat{g}(\eta; q)\right] \tag{25}$$

1- zeroth- order deformation problems

$$(1-q)\mathcal{L}_g[\hat{g}(\eta;\, q)-g_0(\eta)] = q\hbar_g\, \mathcal{N}_g[\hat{f}(\eta;\, q), \hat{g}(\eta;\, q)] \tag{26}$$

$$(1-q)\mathcal{L}_\theta[\hat{\theta}(\eta;\, q)-\theta_0(\eta)] = q\hbar_\theta\, \mathcal{N}_\theta[\hat{f}(\eta;\, q), \hat{g}(\eta;\, q), \hat{\theta}(\eta;\, q), \hat{\phi}(\eta;\, q)] \tag{27}$$

$$(1-q)\mathcal{L}_\phi[\hat{\phi}(\eta;\, q)-\phi_0(\eta)] = q\hbar_\phi\, \mathcal{N}_\phi[\hat{f}(\eta;\, q), \hat{g}(\eta;\, q), \hat{\theta}(\eta;\, q), \hat{\phi}(\eta;\, q)] \tag{28}$$

$$\mathcal{N}_f[\hat{f}(\eta;\, q), \hat{g}(\eta;\, q)] = \frac{\partial^3\hat{f}(\eta;q)}{\partial\eta^3} + \hat{f}(\eta;\, q)\frac{\partial^2\hat{f}(\eta;q)}{\partial\eta^2} + \hat{g}(\eta;\, q)\frac{\partial^2\hat{f}(\eta;q)}{\partial\eta^2} - \left(\frac{\partial\hat{f}(\eta;q)}{\partial\eta}\right)^2 - M\frac{\partial\hat{f}(\eta;q)}{\partial\eta} \tag{29}$$

$$\mathcal{N}_g[\hat{f}(\eta;\, q), \hat{g}(\eta;\, q)] = \frac{\partial^3\hat{g}(\eta;q)}{\partial\eta^3} + \hat{f}(\eta;\, q)\frac{\partial^2\hat{g}(\eta;q)}{\partial\eta^2} + \hat{g}(\eta;\, q)\frac{\partial^2\hat{g}(\eta;q)}{\partial\eta^2} - \left(\frac{\partial\hat{g}(\eta;q)}{\partial\eta}\right)^2 - M\frac{\partial\hat{g}(\eta;q)}{\partial\eta} \tag{30}$$

$$\mathcal{N}_\theta[\hat{f}(\eta;\, q), \hat{g}(\eta;\, q), \hat{\theta}(\eta;\, q), \hat{\phi}(\eta;\, q)] = \frac{1}{Pr}\frac{\partial^2\hat{\theta}(\eta;\, q)}{\partial\eta^2} + \hat{f}(\eta;\, q)\frac{\partial\hat{\theta}(\eta;\, q)}{\partial\eta} + \hat{g}(\eta;\, q)\frac{\partial\hat{\theta}(\eta;\, q)}{\partial\eta} + Nb\frac{\partial\hat{\theta}(\eta;\, q)}{\partial\eta}\frac{\partial\hat{\phi}(\eta;\, q)}{\partial\eta} + Nt\left(\frac{\partial\hat{\theta}(\eta;\, q)}{\partial\eta}\right)^2 \tag{31}$$

$$\mathcal{N}_\phi[\hat{f}(\eta;\, q), \hat{g}(\eta;\, q), \hat{\theta}(\eta;\, q), \hat{\phi}(\eta;\, q)] = \frac{\partial^2\hat{\phi}(\eta;\, q)}{\partial\eta^2} + Le\left(\hat{f}(\eta;\, q)\frac{\partial\hat{\phi}(\eta;\, q)}{\partial\eta} + \hat{g}(\eta;\, q)\frac{\partial\hat{\phi}(\eta;\, q)}{\partial\eta}\right) + \frac{Nt}{Nb}\frac{\partial^2\hat{\theta}(\eta;\, q)}{\partial\eta^2} \tag{32}$$

که در آن q پارامتر جاسازی[1]، $\hbar_f$، $\hbar_g$، $\hbar_\theta$ و $\hbar_\phi$ پارامترهای کمکی غیر صفر و $\mathcal{N}_f$، $\mathcal{N}_g$، $\mathcal{N}_\theta$ و $\mathcal{N}_\phi$ اپراتورهای غیر خطی می‌باشند. برای $q=0$ و $q=1$ داریم:

$$\begin{aligned} &\hat{f}(\eta;\, 0) = f_0(\eta), &&\hat{f}(\eta;\, 1) = f(\eta)\\ &\hat{g}(\eta;\, 0) = g_0(\eta), &&\hat{g}(\eta;\, 1) = g(\eta)\\ &\hat{\theta}(\eta;\, 0) = \theta_0(\eta), &&\hat{\theta}(\eta;\, 1) = \theta(\eta)\\ &\hat{\phi}(\eta;\, 0) = \phi_0(\eta), &&\hat{\phi}(\eta;\, 1) = \phi(\eta) \end{aligned} \tag{33}$$

بعبارت دیگر، با تغییر q از صفر تا یک، توابع $\hat{f}(\eta;\, q)$، $\hat{g}(\eta;\, q)$، $\hat{\theta}(\eta;\, q)$ و $\hat{\phi}(\eta;\, q)$ از $f_0(\eta)$، $g_0(\eta)$، $\theta_0(\eta)$ و $\phi_0(\eta)$ تا $f(\eta)$، $g(\eta)$، $\theta(\eta)$ و $\phi(\eta)$ تغییر پیدا خواهند نمود. بسط سری تیلور منجر به روابط (34) تا (37) می‌شود:

$$f(\eta;q) = f_0(\eta) + \sum_{m=1}^{\infty} f_m(\eta)\, q^m \tag{34}$$

$$g(\eta;q) = g_0(\eta) + \sum_{m=1}^{\infty} g_m(\eta)\, q^m \tag{35}$$

$$\theta(\eta;\, q) = \theta_0(\eta) + \sum_{m=1}^{\infty} \theta_m(\eta)\, q^m \tag{36}$$

$$\phi(\eta;\, q) = \phi_0(\eta) + \sum_{m=1}^{\infty} \phi_m(\eta)\, q^m \tag{37}$$

که در آن

$$\begin{aligned} f_m(\eta) &= \frac{1}{m!}\frac{\partial^m f(\eta;\, q)}{\partial\eta^m}\Big|_{q=0}\\ g_m(\eta) &= \frac{1}{m!}\frac{\partial^m g(\eta;\, q)}{\partial\eta^m}\Big|_{q=0}\\ \theta_m(\eta) &= \frac{1}{m!}\frac{\partial^m \theta(\eta;\, q)}{\partial\eta^m}\Big|_{q=0}\\ \phi_m(\eta) &= \frac{1}{m!}\frac{\partial^m \phi(\eta;\, q)}{\partial\eta^m}\Big|_{q=0} \end{aligned} \tag{38}$$

لازم به ذکر است که همگرایی سری‌های فوق به شدت به مقادیر $\hbar_f$، $\hbar_g$، $\hbar_\theta$ و $\hbar_\phi$ بستگی دارد. پارامترهای کمکی غیر صفر فوق به نحوی انتخاب می‌شوند که معادلات (34)-(37) در $q=1$ همگرا شوند. همچنین داریم:

$$\begin{aligned} f(\eta) &= f_0(\eta) + \sum_{m=1}^{\infty} f_m(\eta)\\ g(\eta) &= g_0(\eta) + \sum_{m=1}^{\infty} g_m(\eta)\\ \theta(\eta) &= \theta_0(\eta) + \sum_{m=1}^{\infty} \theta_m(\eta)\\ \phi(\eta) &= \phi_0(\eta) + \sum_{m=1}^{\infty} \phi_m(\eta) \end{aligned} \tag{39}$$

مسائل مرتبه m متناظر بصورت روابط(40) تا (43) ارائه می‌شوند:

$$\mathcal{L}_f[f_m(\eta) - \chi_m\; f_{m-1}(\eta)] = \hbar_f\, R_{f,\,m}(\eta), \tag{40}$$

$$\mathcal{L}_g[g_m(\eta) - \chi_m\; g_{m-1}(\eta)] = \hbar_g\, R_{g,\,m}(\eta), \tag{41}$$

$$\mathcal{L}_\theta[\theta_m(\eta) - \chi_m\; \theta_{m-1}(\eta)] = \hbar_\theta\, R_{\theta,\,m}(\eta), \tag{42}$$

$$\mathcal{L}_\phi[\phi_m(\eta) - \chi_m\; \phi_{m-1}(\eta)] = \hbar_\phi\, R_{\phi,\,m}(\eta), \tag{43}$$

که در آن

$$\begin{aligned} &f_m(0) = f'_m(0) - \gamma f''_m(0) = f'_m(\infty) = 0,\\ &g_m(0) = g'_m(0) - \gamma g''_m(0) = g'_m(\infty) = 0,\\ &\theta'_m(0) - Bi\,\theta_m(0) = \theta_m(\infty) = 0,\\ &\phi_m(0) = \phi_m(\infty) = 0, \end{aligned} \tag{44}$$

$$R_{f,m}(\eta) = \frac{\partial^3 f_{m-1}(\eta)}{\partial\eta^3} - M\frac{\partial f_{m-1}(\eta)}{\partial\eta} + \sum_{j=0}^{m-1}\left(\begin{aligned} f_j(\eta)\frac{\partial^2 f_{m-j-1}(\eta)}{\partial\eta^2} + g_j(\eta)\frac{\partial^2 f_{m-j-1}(\eta)}{\partial\eta^2}\\ -\frac{\partial f_j(\eta)}{\partial\eta}\frac{\partial f_{m-j-1}(\eta)}{\partial\eta} \end{aligned}\right), \tag{45}$$

$$R_{g,m}(\eta) = \frac{\partial^3 g_{m-1}(\eta)}{\partial\eta^3} - M\frac{\partial g_{m-1}(\eta)}{\partial\eta} + \sum_{j=0}^{m-1}\left(\begin{aligned} f_j(\eta)\frac{\partial^2 g_{m-j-1}(\eta)}{\partial\eta^2} + g_j(\eta)\frac{\partial^2 g_{m-j-1}(\eta)}{\partial\eta^2}\\ \frac{\partial g_j(\eta)}{\partial\eta}\frac{\partial g_{m-j-1}(\eta)}{\partial\eta} \end{aligned}\right), \tag{46}$$

$$R_{\theta,m}(\eta) = \frac{\partial^2\theta_{m-1}(\eta)}{\partial\eta^2} + Pr\sum_{j=0}^{m-1}\left(\begin{aligned} f_j(\eta)\frac{\partial\theta_{m-j-1}(\eta)}{\partial\eta} + g_j(\eta)\frac{\partial\theta_{m-j-1}(\eta)}{\partial\eta}\\ +Nb\frac{\partial\theta_j(\eta)}{\partial\eta}\frac{\partial\phi_{m-j-1}(\eta)}{\partial\eta}\\ +Nt\frac{\partial\theta_n(\eta)}{\partial\eta}\frac{\partial\theta_{m-j-1}(\eta)}{\partial\eta} \end{aligned}\right), \tag{47}$$

$$R_{\phi,m}(\eta) = \frac{\partial^2\phi_{m-1}(\eta)}{\partial\eta^2} + Le\sum_{j=0}^{m-1}\left(f_j(\eta)\frac{\partial\phi_{m-1-j}(\eta)}{\partial\eta} + g_j(\eta)\frac{\partial\phi_{m-1-j}(\eta)}{\partial\eta}\right) + \frac{Nt}{Nb}\frac{\partial^2\theta_{m-1}(\eta)}{\partial\eta^2}, \tag{48}$$

و

$$\chi_m = \begin{cases} 0 & m \le 1\\ 1 & m > 1 \end{cases} \tag{49}$$

نهایتا، جواب کلی بصورت روابط(50) تا (53) نوشته می‌شود:

$$f_m(\eta) = f_m^*(\eta) + C_1 + C_2\, e^{\eta} + C_3\, e^{-\eta}, \tag{50}$$

$$g_m(\eta) = g_m^*(\eta) + C_4 + C_5\, e^{\eta} + C_6\, e^{-\eta}, \tag{51}$$

$$\theta_m(\eta) = \theta_m^*(\eta) + C_7\, e^{\eta} + C_8\, e^{-\eta}, \tag{52}$$

$$\phi_m(\eta) = \phi_m^*(\eta) + C_9\, e^{\eta} + C_{10}\, e^{-\eta}, \tag{53}$$

که در روابط فوق، $f_m^*(\eta)$، $g_m^*(\eta)$، $\theta_m^*(\eta)$ و $\phi_m^*(\eta)$ جواب‌های خصوصی می‌باشند.

4-2- پارامترهای کنترل همگرایی بهینه

حل سری‌های (40)تا (43) شامل پارامترهای کمکی غیر صفر $\hbar_f$، $\hbar_g$، $\hbar_\theta$ و

1- embedding parameter

$\hbar_\phi$ می‌باشند که ناحیه همگرایی و همچنین نرخ همگرایی حل سری‌های هموتوپی را مشخص می‌کنند. به منظور دست‌یابی به مقادیر بهینه $\hbar_f$، $\hbar_g$، $\hbar_\theta$ و $\hbar_\phi$ متوسط خطای مانده [26] بصورت (54) تا (57) تعریف می‌شود:

$$\varepsilon_m^f = \frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k}\left[\mathcal{N}_f\left(\sum_{i=0}^{m}\hat{f}(\eta),\sum_{i=0}^{m}\hat{g}(\eta)\right)_{\eta=j\,\delta\eta}\right]^2 d\eta, \tag{54}$$

$$\varepsilon_m^g = \frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k}\left[\mathcal{N}_g\left(\sum_{i=0}^{m}\hat{f}(\eta),\sum_{i=0}^{m}\hat{g}(\eta)\right)_{\eta=j\,\delta\eta}\right]^2 d\eta, \tag{55}$$

$$\varepsilon_m^\theta = \frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k}\left[\mathcal{N}_\theta\left(\begin{matrix}\sum_{i=0}^{m}\hat{f}(\eta),\sum_{i=0}^{m}\hat{g}(\eta),\\ \sum_{i=0}^{m}\hat{\theta}(\eta),\sum_{i=0}^{m}\hat{\phi}(\eta)\end{matrix}\right)_{\eta=j\,\delta\eta}\right]^2 d\eta, \tag{56}$$

$$\varepsilon_m^\phi = \frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k}\left[\mathcal{N}_\phi\left(\begin{matrix}\sum_{i=0}^{m}\hat{f}(\eta),\sum_{i=0}^{m}\hat{g}(\eta),\\ \sum_{i=0}^{m}\hat{\theta}(\eta),\sum_{i=0}^{m}\hat{\phi}(\eta)\end{matrix}\right)_{\eta=j\,\delta\eta}\right]^2 d\eta, \tag{57}$$

بر طبق لیائو [26] داریم:

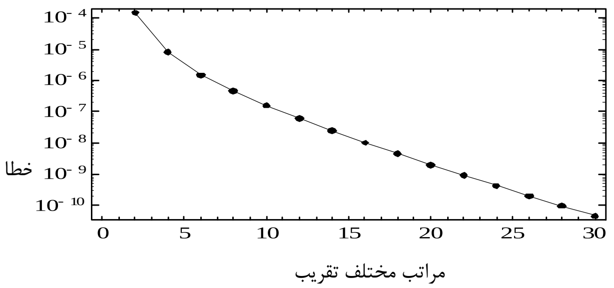
$$\varepsilon_m^t = \varepsilon_m^f + \varepsilon_m^g + \varepsilon_m^\theta + \varepsilon_m^\phi, \tag{58}$$

در رابطه فوق ε_m^t مجموع مربع خطای مانده، $\delta\eta = 0.5$ و $k = 20$ می‌باشند. بمنظور دستیابی به مقدار حداقل مجموع مربع خطای مانده و محاسبه مقادیر بهینه پارامترهای کنترل همگرایی از بسته BVPh2.0 [27] نرم افزار متمتیکا[1] استفاده می‌شود. برای مثال حالتی در نظر گرفته می‌شود که در آن $M = 1$، $Nb = Nt = 0.1$، $Pr = 0.71$، $Le = 2$، $\gamma = 0.25$، $\lambda = 0.5$ و $Bi = 0.1$ می‌باشند. در جدول1 مقادیر بهینه پارامترهای کنترل همگرایی و همچنین مقادیر حداقل مجموع مربع خطای مانده متوسط به ازای تقریب‌های مختلف به کار رفته نشان داده شده است. همچنین، شکل2 حداکثر مربع خطای مانده متوسط به ازای تقریب‌های مختلف را نمایش می‌دهد. مشاهده می‌شود که مربع خطای مانده متوسط و مربع خطای مانده متوسط کلی با افزایش تقریب‌های حل کاهش پیدا می‌کند. از این رو، روش آنالیز هموتوپی بهینه آزادی عمل انتخاب هر یک از پارامترهای کنترل همگرایی بمنظور دست‌یابی به نتایج همگرا را می‌دهد. مقایسه نتایج $-f''(0)$ و $-g''(0)$ بین حل روش آنالیز هموتوپی بهینه و نتایج مطالعات چاپ شده‌ی پیشین [23, 28,29] برای مقادیر مختلف پارامتر نسبت نرخ کشش و پارامتر مغناطیسی در جداول 2-4 نشان داده شده است. نتایج مقایسه فوق نشان دهنده‌ی اعتبار روش مورد مطالعه می‌باشد.

جدول 1 مقادیر بهینه پارامترهای کنترل همگرایی به ازای تقریب‌های مختلف

مرتبه تقریب‌ها	$\hbar_f$	$\hbar_g$	$\hbar_\theta$	$\hbar_\phi$	ε_m^t
2	-0/715	-0/751	-1/127	-0/782	$1/15 \times 10^{-4}$
3	-0/705	-0/791	-1/751	-0/689	$1/89 \times 10^{-5}$
4	-0/731	-0/796	-1/570	-0/738	$7/61 \times 10^{-6}$
5	-0/728	-0/832	-1/583	-0/797	$3/32 \times 10^{-6}$
6	-0/742	-0/831	-1/641	-0/800	$1/47 \times 10^{-6}$

1- Mathematica



شکل 2 حداکثر مربع خطای مانده متوسط به ازای تقریب‌های مختلف

جدول 2 مقایسه نتایج $-f''(0)$ و $-g''(0)$ برای مقادیر مختلف پارامتر نسبت نرخ کشش (λ) و پارامتر مغناطیسی (M) در $\gamma = 0$

λ	M	$-f''(0)$ حیات و همکارانش [23]	$-f''(0)$ مطالعه حاضر	$-g''(0)$ حیات و همکارانش [23]	$-g''(0)$ مطالعه حاضر
0	0	1/000000	1/000000	0	0
	1	1/414214	1/414213	0	0
0/5	0	1/093095	1/093095	0/465205	0/465205
	1	1/476771	1/4767701	0/679809	0/679809
1/0	0	1/173722	1/173721	1/173722	1/173721
	1	-	1/535710	-	1/535710

جدول 3 مقایسه نتایج $-f''(0)$ برای مقادیر مختلف پارامتر نسبت نرخ کشش (λ) در $M = \gamma = 0$

λ	وانگ [28]	حیات و همکارانش [29]	مطالعه حاضر
0/0	1/000000	1/00000	1/000000
0/25	1/048813	1/04881	1/048812
0/50	1/093097	1/09309	1/093095
0/75	1/134485	1/134450	1/134485
1/0	1/173720	1/17372	1/173721

جدول 4 مقایسه نتایج $-g''(0)$ برای مقادیر مختلف پارامتر نسبت نرخ کشش (λ) در $M = \gamma = 0$

λ	وانگ [28]	حیات و همکارانش [29]	مطالعه حاضر
0/0	0	0	0
0/25	0/194564	0/19457	0/194564
0/50	0/465205	0/46522	0/465205
0/75	0/794622	0/79462	0/794620
1/0	1/173720	1/17372	1/173721

5- بحث و نتایج

معادلات دیفرانسیل غیرخطی معمولی (9) تا (12) با توجه به شرایط مرزی (13) و (14) به صورت تحلیلی با استفاده از روش آنالیز هموتوپی بهینه به کمک بسته BVPh2.0 نرم افزار متمتیکا برای مقادیر مختلف پارامترهای مغناطیسی، عدد پرانتل، حرکت براونی، انتشار حرارتی، عدد لوئیس، سرعت لغزشی، نسبت نرخ کشش، و عدد بیوت حل شده است.

شکل3 نشان‌دهنده‌ی تأثیر پارامتر مغناطیسی بر تمامی مؤلفه‌های سرعت ($f'(\eta)$، $g'(\eta)$)، منحنی توزیع دما ($\theta(\eta)$) و همچنین منحنی غلظت ($\phi(\eta)$) می‌باشد. نیرویی درگ مانند، که نیروی لورنتز[2] نامیده می‌شود، به سبب اعمال میدان مغناطیسی عمودی به سیال با قابلیت رسانایی

2- Lorentz force

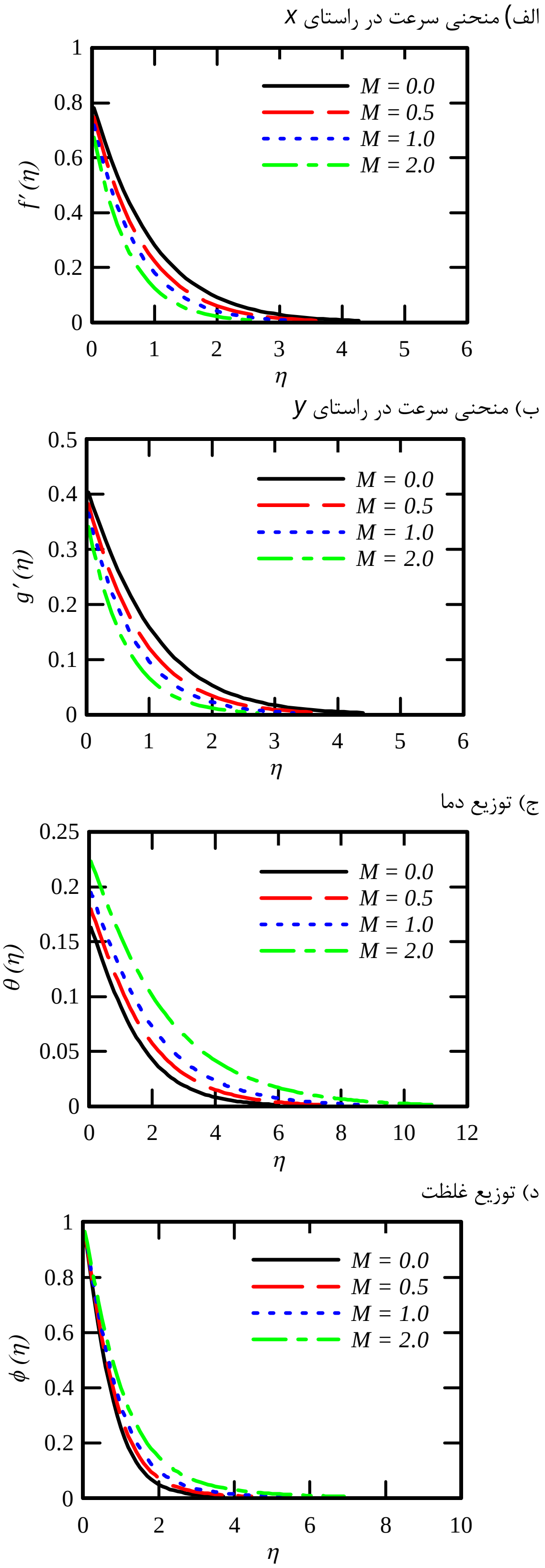
الکتریکی به وجود می‌آید. این نیرو تمایل به کاهش سرعت جریان نزدیک صفحه را دارد. بنابراین، مقدار سرعت در جهات x و y با افزایش پارامتر مغناطیسی کاهش می‌یابد. همانطور که توضیح داده شد، پارامتر مغناطیسی به نیروی لورنتز بستگی دارد و نیروی لورنتز عاملی است که در برابر جریان مقاومت می‌کند. بنابراین با افزایش پارامتر مغناطیسی نیروی لورنتز افزایش می‌یابد و در نتیجه سرعت سیال در تمامی جهات کاهش پیدا می‌کند. بعلاوه، توزیع دما و ضخامت لایه مرزی حرارتی و همچنین توزیع غلظت و ضخامت لایه مرزی غلظت با افزایش پارامتر مغناطیسی به آرامی افزایش می‌یابد. لازم به ذکر است که مقاومت بزرگی بر روی ذرات سیال که موجب تولید گرما در سیال می‌شود، با افزایش پارامتر مغناطیسی به وجود می‌آید.

تأثیر عدد پرانتل بر منحنی توزیع دما و همچنین عدد لوئیس بر منحنی غلظت در شکل‌های 4و 5 نشان داده شده است. به عنوان یک خاصیت مهم فیزیکی-حرارتی سیال، عدد پرانتل به صورت نسبت نفوذ ممنتوم به نفوذ حرارتی تعریف می‌شود. مشاهده می‌شود که دمای بی‌بعد در نزدیکی سطح بیشترین مقدار خود را دارا می‌باشد. همچنین، منحنی دما با سرعت بیشتری به مقدار مجانبی خود برای مقادیر بزرگتر عدد پرانتل میل خواهد نمود. به عبارت دیگر، با افزایش عدد پرانتل ضخامت لایه مرزی حرارتی کاهش پیدا می‌کند. به طور فیزیکی، جریان با عدد پرانتل بالا مانع از گسترش حرارت در سیال می‌شود. عدد لوئیس بیان کننده‌ی نسبت نفوذ گرمایی به نفوذ مولکولی می‌باشد. مشخص است که عدد لوئیس بطور معکوس متناسب با ضریب انتشار می‌باشد. لذا، افزایش عدد لوئیس منجر به کاهش نفوذ مولکولی خواهد شد که در نهایت منجر به کاهش غلظت نانوذرات خواهد شد. بعبارت دیگر، ضخامت لایه مرزی غلظتی و به تبع آن منحنی توزیع غلظت با افزایش عدد لوئیس کاهش پیدا می‌کند.

شکل6 بیانگر اثر همزمان پارامتر حرکت براونی (Nb) و پارامتر انتشار حرارتی (Nt) بر منحنی‌های توزیع دما و غلظت می‌باشد. افزایش پارامتر حرکت براونی سبب افزایش دما در سراسر رژیم خواهد شد. بنابراین، توزیع نانوذرات در رژیم جریان بر روی صفحه گسترش یافته می‌تواند به کمک مکانیزم حرکت براونی کنترل شود و همچنین سرمایش رژیم جریان با کاهش مقادیر Nb محقق خواهد شد. علاوه بر این، ضخامت لایه مرزی حرارتی بزرگتر با مقادیر بیشتر Nb بدست خواهد آمد. در حالی که افزایش ضخامت لایه مرزی غلظت با مقادیر کوچکتر Nb محقق خواهد شد. ضخامت لایه مرزی حرارتی و غلظت هر دو با افزایش پارامتر انتشار حرارتی افزایش خواهد یافت.

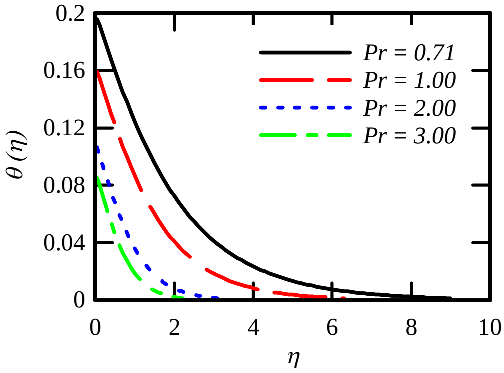
شکل7 نشان‌دهنده‌ی تأثیر پارامتر سرعت لغزشی بر روی تمامی مؤلفه‌های منحنی سرعت، منحنی توزیع دما و همچنین توزیع غلظت می‌باشند. سرعت لغزشی به کمک شرط مرزی سرعت دیواره معادله (13) شبیه سازی می‌شود. پارامتر سرعت لغزشی بین صفر تا یک تغییر خواهد نمود که $\gamma = 0$ بیانگر شرایط بدون لغزش متداول می‌باشد. با افزایش مقدار پارامتر سرعت لغزشی، مؤلفه‌های سرعت جریان کاهش و همچنین توزیع دما و غلظت افزایش می‌یابند. به عبارت دیگر، مقدار کمتری از جریان در تمامی جهات سرعت در حضور جریان لغزشی، به حرکت در می‌آیند. افزایش سرعت لغزشی منجر به کاهش نفوذ سطح ثابت از طریق لایه مرزی در جهات x و y خواهد شد.

تأثیر پارامتر نسبت نرخ کشش (λ) بر تمامی مولفه‌های سرعت، توزیع دما و توزیع غلظت در شکل8 نمایش داده شده است. با توجه به تعریف پارامتر نسبت نرخ کشش ($\lambda = b/a$)، $\lambda = 0$ نشان دهنده‌ی حالت صفحه‌ی غیر کششی دو جهته می‌باشد. از این رو، $g'(\eta)$ صفر می‌شود. بعلاوه، $\lambda = 1$ به حالتی اشاره می‌کند که در آن نرخ کشش در دو جهت x و y یکسان می‌شود.

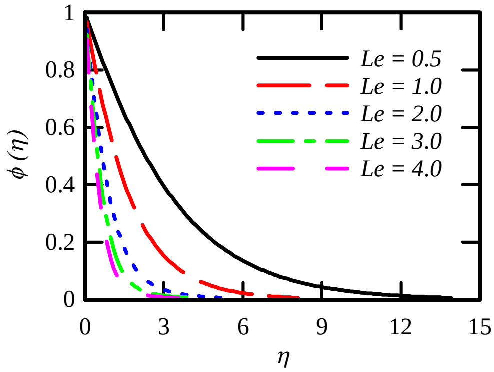


شکل 3 تأثیر پارامتر مغناطیسی به ازای $Nb = Nt = 0.1$، $Pr = 0.71$، $Le = 2$، $\gamma = 0.25$، $\lambda = 0.5$ و $Bi = 0.1$

[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.3.42.2]

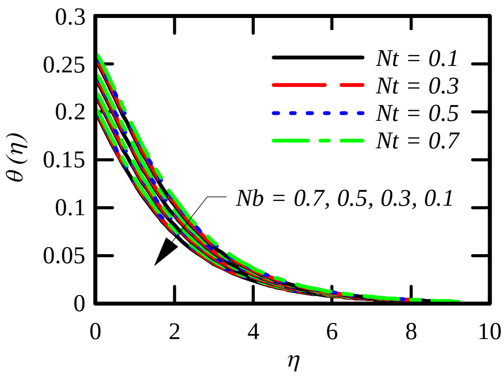


شکل 4 تأثیر عدد پرانتل بر توزیع دما به ازای $M = 1$، $Nb = Nt = 0.1$، $Le = 2$، $\gamma = 0.25$، $\lambda = 0.5$ و $Bi = 0.1$

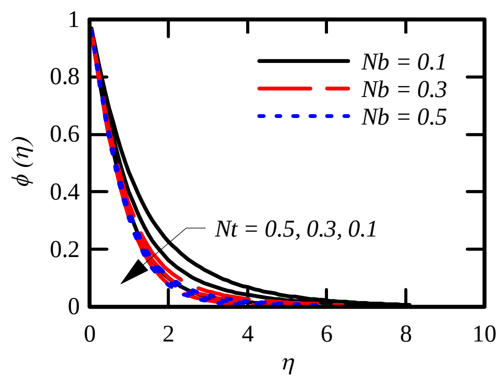


شکل 5 تأثیر عدد لوئیس بر توزیع غلظت به ازای $M = 1$، $Nb = Nt = 0.1$، $Pr = 0.71$، $\gamma = 0.25$، $\lambda = 0.5$ و $Bi = 0.1$

الف) توزیع دما

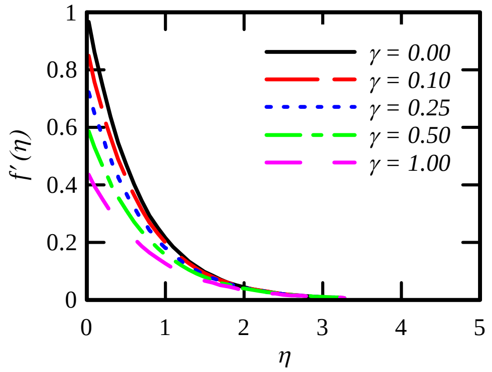


ب) توزیع غلظت

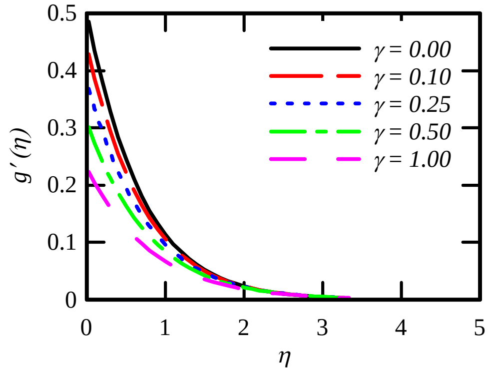


شکل 6 تأثیر پارامتر حرکت براونی و پارامتر انتشار حرارتی به ازای $M = 1$، $Pr = 0.71$، $Le = 2$، $\gamma = 0.25$، $\lambda = 0.5$ و $Bi = 0.1$

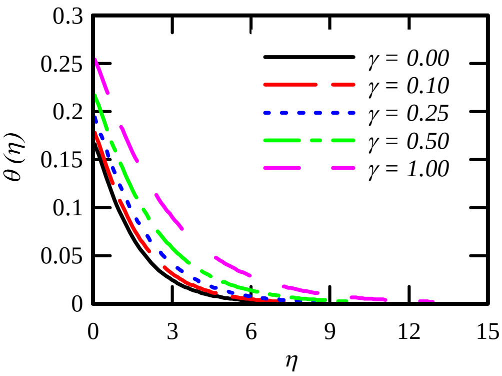
الف) منحنی سرعت در راستای x



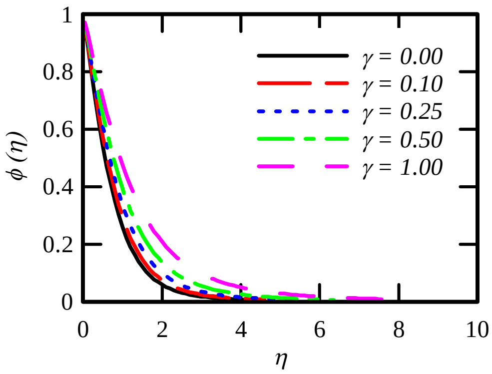
ب) منحنی سرعت در راستای y



ج) توزیع دما



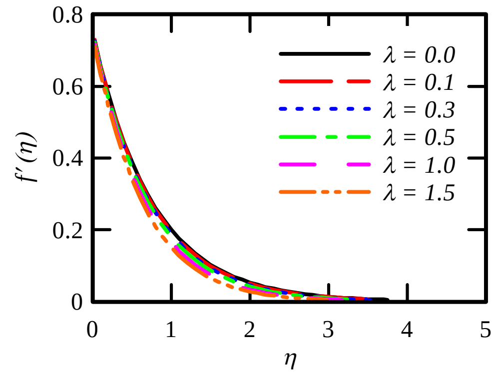
د) توزیع غلظت



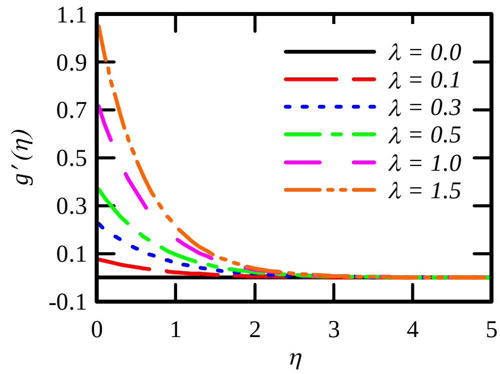
شکل 7 تأثیر پارامتر سرعت لغزشی به ازای $M = 1$، $Nb = Nt = 0.1$، $Pr = 0.71$، $Le = 2$، $\lambda = 0.5$ و $Bi = 0.1$

[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.3.42.2]

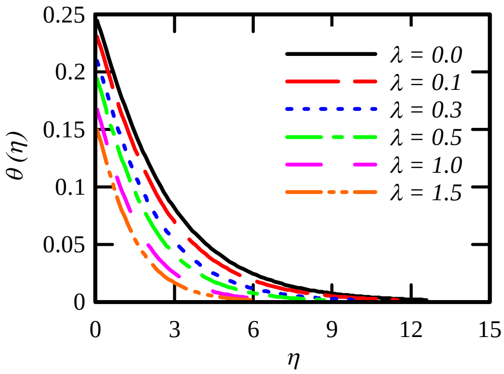
الف) منحنی سرعت در راستای x



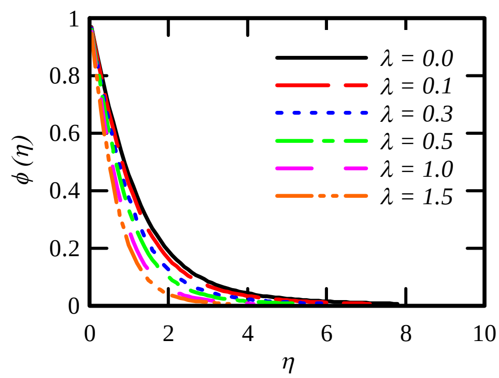
ب) منحنی سرعت در راستای y



ج) توزیع دما



د) توزیع غلظت



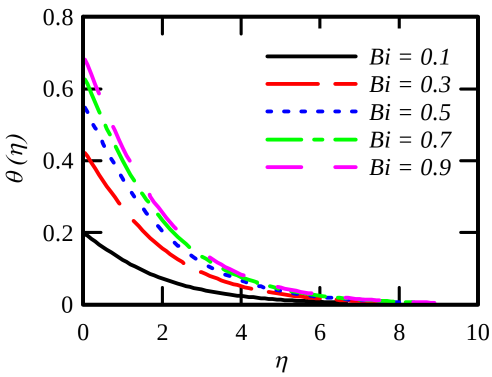
شکل 8 تأثیر پارامتر نسبت نرخ کشش به ازای $M = 1$، $Nb = Nt = 0.1$، $Pr = 0.71$، $Le = 2$، $\gamma = 0.25$ و $Bi = 0.1$

مشخص است که افزایش در λ دلالت بر افزایش سرعت صفحه در جهت y ($g'(\eta)$) و یا کاهش آن در جهت x ($f'(\eta)$) دارد. با افزایش مقادیر پارامتر نسبت کشش از صفر، سطح جانبی شروع به حرکت در راستای y خواهد نمود. بعلاوه، افزایش مقدار پارامتر نسبت نرخ کشش ضخامت لایه مرزی حرارتی را کاهش می‌دهد و همچنین باعث کاهش ضخامت لایه مرزی غلظت خواهد شد.

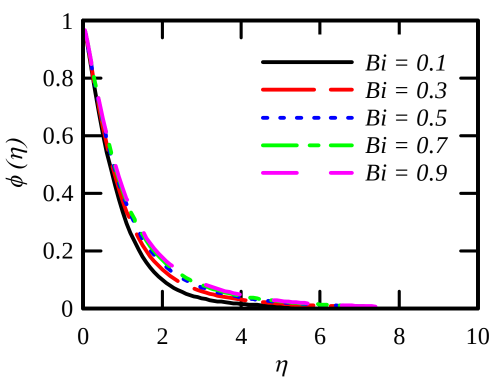
شکل 9 بیانگر تاثیر عدد بیوت (Bi) بر توزیع بی بعد دما و غلظت می‌باشد. مشخص است که حالت دمای دیواره ثابت ($\theta(0) = 1$) با در نظر گرفتن مقادیر بزرگ عدد بیوت، میل کردن عدد بیوت به سمت بی‌نهایت، بدست می‌آید. مقادیر بزرگ عدد بیوت منجر به افزایش ضریب انتقال حرارت خواهد شد. این افزایش ضریب انتقال حرارت منجر به افزایش دما خواهد شد. بعبارتی دیگر، انتقال حرارت همرفت سطحی باعث افزایش پخش حرارتی خواهد شد. دلیل این پدیده این است که عدد بیوت بطور مستقیم متناسب با ضریب انتقال حرارت مرتبط با سیال گرم h (با توجه با رابطه تعریف عدد بیوت، $Bi = \frac{h}{k}\sqrt{\upsilon/a}$) می‌باشد. مقاومت گرمایی در سمت سیال گرم به طور معکوس متناسب با h می‌باشد. لذا، با افزایش عدد بیوت، مقاومت انتقال حرارت همرفت سمت سیال گرم کاهش می‌یابد و در نتیجه، دمای سطح ($\theta(0)$) افزایش می‌یابد. همچنین، توزیع غلظت ($\phi(\eta)$) با افزایش عدد بیوت افزایش خواهد یافت.

ضرایب اصطکاک پوسته‌ای در جهات x و y ($C_{fx}Re_x^{1/2}$, $C_{fy}Re_x^{1/2}$)، عدد ناسلت محلی ($Nu_x/Re_x^{1/2}$) و عدد شروود محلی ($Sh_x/Re_x^{1/2}$) برای

الف) توزیع دما



ب) توزیع غلظت



شکل 9 تأثیر عدد بیوت به ازای $M = 1$، $Nb = Nt = 0.1$، $Pr = 0.71$، $Le = 2$، $\gamma = 0.25$ و $\lambda = 0.5$

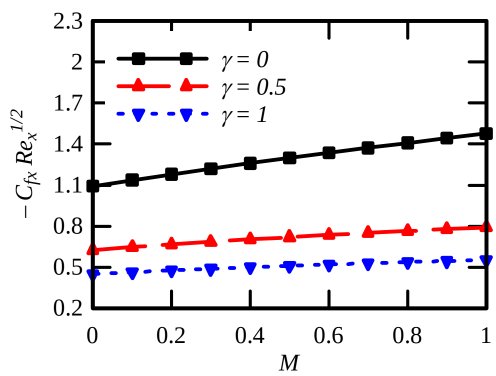
[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.3.42.2]

گستره‌ی وسیعی از پارامتر مغناطیسی، پارامتر سرعت لغزشی، پارامتر حرکت براونی، پارامتر انتشار حرارتی، و عدد بیوت در شکل‌های10-12 نشان داده شده است. همانطور که در شکل10 نشان داده شده است، قدر مطلق ضرایب اصطکاک پوسته‌ای در جهات x و y تابعی افزایشی بر حسب پارامتر مغناطیسی و همچنین تابعی کاهشی بر حسب پارامتر سرعت لغزشی می‌باشد. اعداد ناسلت و شروود محلی برحسب پارامتر سرعت لغزشی برای مقادیر مختلف پارامترهای حرکت براونی و انتشار حرارتی در شکل11 نشان داده شده است. نتایج نشان می‌دهد که گرادیان دمایی دیواره با کاهش پارامتر حرکت براونی یا پارامتر انتشار حرارتی کاهش می‌یابد. بعلاوه، مشخص است که عدد شروود محلی بطور معکوس متناسب با عدد Nt و همچنین بطور مستقیم متناسب با عدد Nb می‌باشد. تغییرات عدد شروود محلی بر حسب پارامتر سرعت لغزشی در مقایسه با تغییرات عدد ناسلت محلی بیشتر قابل توجه می‌باشند. منحنی گرادیان‌های دما و غلظت دیواره بر حسب پارامتر مغناطیسی برای مقادیر مختلف عدد بیوت در شکل12 نشان داده شده است. کاهش در ضخامت لایه مرزی حرارتی و غلظت با افزایش پارامتر مغناطیسی نزدیک صفحه کاهش می‌یابد. علاوه بر این، همان‌گونه که مشاهده می‌شود، افزایش عدد بیوت منجر به افزایش عدد ناسلت محلی و همچنین کاهش عدد شروود محلی خواهد شد.

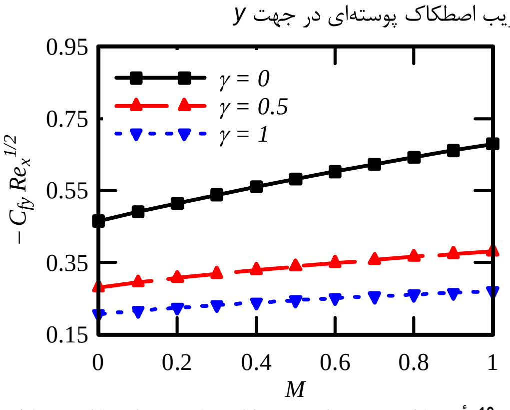
6- نتیجه گیری

در مطالعه‌ی حاضر، جریان سیال و انتقال حرارت و جرم در جریان سیال سه بعدی آرام پایا هیدرودینامیک مغناطیسی بر روی یک صفحه گسترش یافته دو جهته با شرایط مرزی سرعت لغزشی و همرفت سطحی مورد بررسی قرار گرفته شده است. روش آنالیز هموتوپی بهینه به منظور حل سیستم معادلات

الف) ضریب اصطکاک پوسته‌ای در جهت x

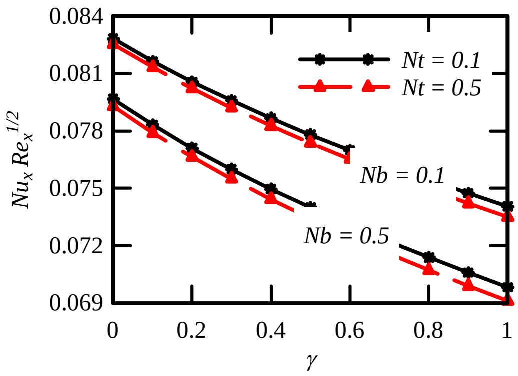


ب) ضریب اصطکاک پوسته‌ای در جهت y

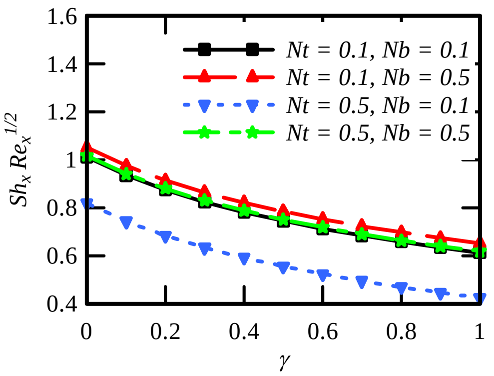


شکل 10 تأثیر پارامتر سرعت لغزشی به ازای مقادیر مختلف پارامتر مغناطیسی و $Nb = Nt = 0.1$، $Pr = 0.71$، $Le = 2$، $\lambda = 0.5$ و $Bi = 0.1$

الف) عدد ناسلت کاهش یافته

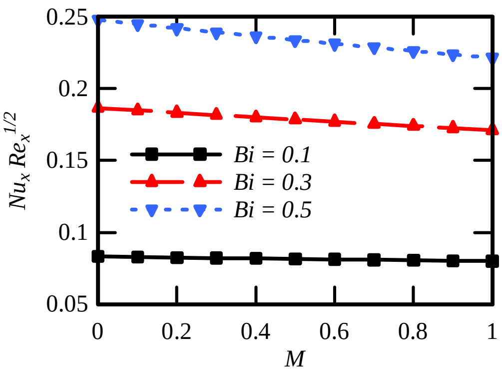


ب) گرادیان غلظت دیواره

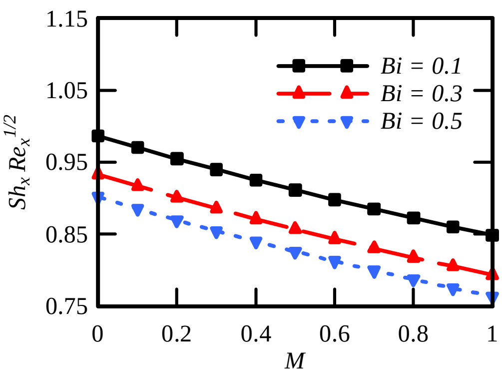


شکل 11 تأثیر پارامترهای حرکت براونی و انتشار حرارتی به ازای مقادیر مختلف پارامتر سرعت لغزشی و $M = 1$، $Pr = 0.71$، $Le = 2$، $\lambda = 0.5$ و $Bi = 0.1$

الف) عدد ناسلت کاهش یافته



ب) گرادیان غلظت دیواره



شکل 12 تأثیر عدد بیوت به ازای مقادیر مختلف پارامتر مغناطیسی و $Nb = Nt = 0.1$، $Pr = 0.71$، $Le = 2$، $\gamma = 0.25$ و $\lambda = 0.5$

دیفرانسیل معمولی حاکم مورد استفاده قرار گرفته شده است. همچنین، روش حل آنالیز هموتوپی برای میدان‌های سرعت، دما و غلظت توسعه و بسط داده شده است. نتایج نشان می‌دهند که افزایش پارامترهای مغناطیسی و سرعت لغزشی منجر به کاهش مقادیر تمامی منحنی‌های سرعت سیال خواهد شد. کاهش پارامترهای مغناطیسی، حرکت براونی، انتشار حرارتی، سرعت لغزشی، و عدد بیوت و یا افزایش عدد پرانتل و پارامتر نسبت نرخ کشش منجر به کاهش ضخامت لایه مرزی حرارتی خواهد شد. همچنین، کاهش پارامترهای مغناطیسی، انتشار حرارتی، سرعت لغزشی، و عدد بیوت و یا افزایش عدد لوئیس، پارامتر حرکت براونی و نسبت نرخ کشش منجر به کاهش ضخامت لایه مرزی غلظت خواهد شد. بعلاوه، قدر مطلق ضرایب اصطکاک پوسته‌ای در جهات x و y تابعی افزایشی بر حسب پارامتر مغناطیسی و همچنین تابعی کاهشی بر حسب پارامتر سرعت لغزشی می‌باشد. نتایج نشان می‌دهد که گرادیان دمای دیواره، عدد ناسلت محلی، با کاهش پارامترهای مغناطیسی، سرعت لغزشی، انتشار حرارتی، و حرکت براونی و یا افزایش عدد بیوت افزایش می‌یابد. بعلاوه، عدد شروود محلی مستقیما متناسب با پارامترهای انتشار حرارتی و حرکت براونی و نیز بطور معکوس متناسب با پارامترهای مغناطیسی، سرعت لغزشی و عدد بیوت می‌باشد.

7- مراجع

[1] J. A. Eastman, U. S. Choi, S. Li, G. Soyez, L. J. Thompson, R. J. DiMelfi, Novel thermal properties of nanostructured materials, *Materials Science Forum,* Vol. 312-314, pp. 629-634, 1999.

[2] Y. Xuan, W. Roetzel, Conceptions for heat transfer correlation of nanofluids, *International Journal of Heat and Mass Transfer,* Vol. 43, No. 19, pp. 3701-3707, 10/1/, 2000.

[3] J. Buongiorno, Convective Transport in Nanofluids, *Journal of Heat Transfer,* Vol. 128, No. 3, pp. 240-250, 2005.

[4] M. M. Rashidi, S. Abelman, N. Freidoonimehr, Entropy generation in steady MHD flow due to a rotating porous disk in a nanofluid, *International Journal of Heat and Mass Transfer,* Vol. 62, No. 0, pp. 515-525, 7//, 2013.

[5] N. Freidoonimehr, M. M. Rashidi, S. Mahmud, Unsteady MHD free convective flow past a permeable stretching vertical surface in a nano-fluid, *International Journal of Thermal Sciences,* Vol. 87, No. 0, pp. 136-145, 1//, 2015.

[6] S. Jafari, N. Freidoonimehr, Second law of thermodynamics analysis of hydro-magnetic nano-fluid slip flow over a stretching permeable surface, *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering,* pp. 1-12, 2014/09/28, 2014. English

[7] N. Freidoonimehr, B. Rostami, M. M. Rashidi, E. Momoniat, Analytical Modelling of Three-Dimensional Squeezing Nanofluid Flow in a Rotating Channel on a Lower Stretching Porous Wall, *Mathematical Problems in Engineering,* Vol. 2014, pp. 14, 2014.

[8] M. Nazari, M. Ashouri, M. H. Kayhani, Experimental investigation of forced convection of nanofluids in a horizontal tube filled with porous medium, *Modares Mechanical Engineering,* Vol. 14, No. 7, pp. 109-116, 2014. (In Persian)

[9] M. Mohammadpourfard, Numerical study of magnetic fields effects on the electrical conducting non-Newtonian ferrofluid flow through a vertical channel, *Modares Mechanical Engineering,* Vol. 15, No. 1, pp. 379-389, 2015. (In Persian)

[10] M. Ziaei-Rad, A. Kasaeipoor, A Numerical study of similarity solution for mixed-convection copper-water nanofluid boundary layer flow over a horizontal plate, *Modares Mechanical Engineering,* Vol. 14, No. 14, pp. 190-198, 2015. (In Persian)

[11] K. Vajravelu, J. Nayfeh, Convective heat transfer at a stretching sheet, *Acta Mechanica,* Vol. 96, No. 1-4, pp. 47-54, 1993/03/01, 1993. English

[12] A. Beskok, G. E. Karniadakis, Report: a model for flows in channels, pipes, and ducts at micro and nano scales, *Microscale Thermophysical Engineering,* Vol. 3, No. 1, pp. 43-77, 1999.

[13] C. Y. Wang, Flow due to a stretching boundary with partial slip—an exact solution of the Navier–Stokes equations, *Chemical Engineering Science,* Vol. 57, No. 17, pp. 3745-3747, 9//, 2002.

[14] M. Turkyilmazoglu, P. Senel, Heat and mass transfer of the flow due to a rotating rough and porous disk, *International Journal of Thermal Sciences,* Vol. 63, No. 0, pp. 146-158, 1//, 2013.

[15] M. M. Rashidi, N. Kavyani, S. Abelman, Investigation of entropy generation in MHD and slip flow over a rotating porous disk with variable properties, *International Journal of Heat and Mass Transfer,* Vol. 70, pp. 892–917, 2014.

[16] T. Fang, J. Zhang, S. Yao, Slip MHD viscous flow over a stretching sheet – An exact solution, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation,* Vol. 14, No. 11, pp. 3731-3737, 2009.

[17] S. J. Liao, *Beyond perturbation: introduction to the homotopy analysis method*: Chapman & Hall/CRC, 2004.

[18] M. Mustafa, T. Hayat, I. Pop, S. Asghar, S. Obaidat, Stagnation-point flow of a nanofluid towards a stretching sheet, *International Journal of Heat and Mass Transfer,* Vol. 54, No. 25–26, pp. 5588-5594, 2011.

[19] Z. Abbas, Y. Wang, T. Hayat, M. Oberlack, Mixed convection in the stagnation-point flow of a Maxwell fluid towards a vertical stretching surface, *Nonlinear Analysis: Real World Applications,* Vol. 11, No. 4, pp. 3218-3228, 2010.

[20] M. M. Rashidi, M. Ali, N. Freidoonimehr, F. Nazari, Parametric analysis and optimization of entropy generation in unsteady MHD flow over a stretching rotating disk using artificial neural network and particle swarm optimization algorithm, *Energy,* Vol. 55, No. 0, pp. 497-510, 6/15/, 2013.

[21] M. M. Rashidi, N. Freidoonimehr, A. Hosseini, O. A. Bég, T. K. Hung, Homotopy simulation of nanofluid dynamics from a non-linearly stretching isothermal permeable sheet with transpiration, *Meccanica,* Vol. 49, No. 2, pp. 469-482, 2014/02/01, 2014. English

[22] M. M. Rashidi, B. Rostami, N. Freidoonimehr, S. Abbasbandy, Free convective heat and mass transfer for MHD fluid flow over a permeable vertical stretching sheet in the presence of the radiation and buoyancy effects, *Ain Shams Engineering Journal,* Vol. 5, No. 3, pp. 901–912, 2014.

[23] T. Hayat, S. A. Shehzad, M. Qasim, S. Asghar, Three-dimensional stretched flow via convective boundary condition and heat generation/absorption, *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow,* Vol. 24, No. 2, pp. 342 - 358, 2014.

[24] J. A. Khan, M. Mustafa, T. Hayat, M. A. Farooq, A. Alsaedi, S. J. Liao, On model for three-dimensional flow of nanofluid: An application to solar energy, *Journal of Molecular Liquids,* Vol. 194, No. 0, pp. 41-47, 6//, 2014.

[25] S. Liao, *Advances in the Homotopy Analysis Method,* Shanghai Jiao Tong University, China: World Scientific Publishing Company, 2014.

[26] S. J. Liao, An optimal homotopy-analysis approach for strongly nonlinear differential equations, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation,* Vol. 15, No. 8, pp. 2003-2016, August, 2010.

[27] Y. Zhao. Accessed 30 Aug, 2014; http://numericaltank.sjtu.edu.cn/BVPh2_0.htm.

[28] C. Y. Wang, The three-dimensional flow due to a stretching sheet, *Physics of Fluids,* Vol. 27, No. 8, pp. 1915–1917, 1984.

[29] T. Hayat, S. Shehzad, A. Alsaedi, Three-Dimensional Flow of Jeffrey Fluid over a Bidirectional Stretching Surface with Heat Source/Sink, *Journal of Aerospace Engineering,* Vol. 27, No. 4, pp. 04014007, 2014.

[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.3.42.2]