



## طراحی کنترل گر بازخورد خروجی پویای غیر متمرکز جهت تحقق توافق جمعی در سامانه‌ی چندعاملی شامل منیپولاتورهای تک بازو با مفصل انعطاف پذیر

امیر امینی<sup>1</sup>، مهدی سجودی<sup>2\*</sup>، سجّاد ازگلی<sup>2</sup>

1- کارشناس ارشد، مهندسی برق، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

2- استادیار، مهندسی برق، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

\* تهران، صندوق پستی 194-14115، sojoodi@modares.ac.ir

### چکیده

در این نوشتار جهت حل مسئله‌ی توافق جمعی در یک سامانه‌ی چندعاملی متشکل از منیپولاتورهای تک بازو با مفصل انعطاف پذیر، روشی نوین ارائه شده است. این روش مبتنی بر نامساوی‌های ماتریسی خطی می‌باشد و هدف آن طراحی کنترل گر بازخورد خروجی پویا از مرتبه‌ی ثابت است که با استفاده از خواص ماتریس لاپلاسی شبکه‌ی منیپولاتورها، توافق جمعی را محقق سازد. مدل در نظر گرفته شده برای هر منیپولاتور تک بازو، مدل دقیق است که در آن جمله‌ای غیرخطی به فرم لیشیتز وجود دارد. در شبکه‌ی مفروض، هر منیپولاتور به عنوان یک عامل، تنها اطلاعات مربوط به خروجی همسایه‌های خود را دریافت می‌کند و لذا طراحی کنترل گر غیر متمرکز است. جهت تضمین توافق جمعی ابتدا سامانه‌ی چندعاملی، به قالب سامانه‌ای واحد با ابعاد بزرگ تبدیل می‌شود. سپس با استفاده از شروط لازم، دینامیک غیر خطی منیپولاتورها به فرم مناسب تبدیل می‌گردد. پس از حلقه بسته کردن سامانه، به منظور تعیین ضرایب مجهول کنترل گر از تئوری پایداری لیاپانوف استفاده می‌شود. همچنین با فرض شرطی خاص برای ماتریس مثبت معین و متقارن استفاده شده در قضیه‌ی لیاپانوف، می‌توان نامساوی حاصل را به قالب نامساوی‌های ماتریسی خطی تبدیل کرد و به این ترتیب از روش‌های تکرارشونده با دقت کمتر برای حل نامساوی‌های ماتریسی غیر خطی اجتناب کرد. در نهایت نتایج این طراحی، برای مدل آزمایشگاهی منیپولاتور تک بازو با مفصل انعطاف پذیر شبیه سازی و با روش‌های مشابه پیشین، مقایسه شده است.

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل  
دریافت: 15 تیر 1393  
پذیرش: 15 شهریور 1393  
ارائه در سایت: 28 مهر 1393  
کلید واژگان:

بازخورد خروجی پویای غیر متمرکز  
توافق جمعی  
ریات‌های تک بازو با مفصل انعطاف پذیر  
سامانه‌های چندعاملی  
نامساوی‌های ماتریسی خطی

## Decentralized Dynamic Output Feedback Controller Design for Consensus in Multi-agent system of Single Link Manipulators with Flexible Joint

Amir Amini<sup>1</sup>, Mahdi Sojoodi<sup>2\*</sup>, Sadjaad Ozgoli<sup>2</sup>

1- Department of Electrical Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran.

2- Department of Electrical Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran.

\* P.O.B. 14115-194 Tehran, Iran, sojoodi@modares.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 06 July 2014  
Accepted 06 September 2014  
Available Online 20 October 2014

**Keywords:**  
Decentralized Dynamic Output Feedback  
Consensus  
Single Link Manipulators with Flexible Joint  
Multi-agent Systems  
Linear Matrix Inequalities

### ABSTRACT

In this paper, a novel method for solving consensus problem in a multi agent system consisting of single link manipulators with flexible joint is presented. This method is based on linear matrix inequalities and the objective is to design a dynamic fixed order controller that can fulfill consensus by using output feedback information and Laplacian Matrix of the network of manipulators. The exact model of a single Link manipulator is assumed thus a nonlinear Lipchitz term emerges. Each manipulator as an agent in the corresponding network obtains only its neighbors output information, therefore the controller is decentralized. To guarantee consensus in this method, first the multi agent system should become one augmented system. Then, based on considered conditions on nonlinear terms, using appropriate structure conversion is necessary. The unknown controller coefficients of the closed loop system can be achieved by using Lyapunov stability theorem. Applying special conditions on symmetric positive definite matrix in Lyapunov quadratic function results in an LMI form, thus iterative methods of solving nonlinear matrix inequalities with less accuracy is prevented. Finally, to demonstrate the effectiveness of this algorithm and compare with similar earlier researches, a numerical example on a multi agent system consisting of three single link flexible manipulators is investigated.

موضوعات مورد علاقه‌ی پژوهشگران در سال‌های اخیر به شمار می‌رود. از بین تعاریف مختلف عامل در منابع گوناگون، می‌توان هر شی که با استفاده از حسگر محیط را درک می‌کند و به وسیله‌ی محرک روی آن تأثیر می‌گذارد را یک عامل دانست [1]. رباتی هوشمند مجهز به یک دوربین به عنوان

### 1- مقدمه

تحلیل و کنترل رفتارهای هماهنگ در سامانه‌های چندعاملی<sup>1</sup> رباتیکی، از

1- Multi-agent

Please cite this article using:

A. Amini, M. Sojoodi, S. Ozgoli, Decentralized Dynamic Output Feedback Controller Design for Consensus in Multi-agent system of Single Link Manipulators with Flexible Joint, Modares Mechanical Engineering, Vol. 14, No. 15, pp. 75-84, 2015 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

پایه بیان شده است. اثر انعطاف پذیری در مفاصل وقتی که ربات با سرعت و شتاب بالا حرکت و یا بار سنگینی را حمل می‌کند، نمود بیشتری دارد. با توجه به طراحی و نوع کاربرد، یک منیپولاتور می‌تواند دینامیک صلب یا انعطاف پذیر داشته باشد. اگر در یک کاربرد، منیپولاتور بنا به مقتضیات حمل و نقل سبک ساخته شود و در دامنه‌ی کوچک و با شتاب بالا کار کند، دینامیک آن منعطف خواهد بود. اما یک منیپولاتور صنعتی در ابعاد بزرگ، که در آن دقت موقعیت کارگیر اهمیت زیادی دارد و با بارهای سنگین کار می‌کند صلب ساخته می‌شود [7].

در سامانه‌های چندعاملی گاه لازم است، عامل‌ها در کمیتی خاص که به حالت‌هایشان بستگی دارد به توافق برسند و در نهایت حالات متناظر عامل‌ها به برداری یکسان همگرا شوند. برای مثال در صنعت، بلند کردن یک شی یا بارگیری یک قطعه کار بزرگ ایجاب می‌کند که منیپولاتورها موقعیت یکسانی داشته باشند. این مسئله در سامانه‌های چندعاملی با عنوان توافق جمعی<sup>7</sup> شناخته شده است. در این حالت راهبری وجود ندارد و خود عامل‌ها در مورد مقدار نهایی حالات خود به توافق می‌رسند اما در وضعیتی دیگر نیز، یک عامل به عنوان راهبر وجود دارد و عامل‌های دیگر خود را پیرو آن می‌سازند. وضعیت دوم هنگامی کاربرد دارد که چند منیپولاتور دور از هم با یکدیگر شبکه هستند و هنگامی که اپراتور یکی از ربات‌ها را تنظیم می‌کند، ربات‌های دورتر نیز از موقعیت و حالات آن پیروی کنند [8]. از جمله کاربردهای دیگر توافق جمعی در سامانه‌های چندعاملی می‌توان به کنترل آرایش سامانه‌های رباتیکی و آرایش حرکت ماهواره‌ها اشاره کرد. مسئله‌ی توافق جمعی برای هر سامانه‌ی چندعاملی که پیاده شود، نیاز به مدل‌سازی عامل‌ها و شبکه‌ی ارتباطی آن‌ها و استفاده از قانون کنترلی مناسبی دارد. این قانون بر اساس ویژگی‌های خاص عامل‌ها و اهداف کنترلی و یا محدودیت‌هایی که محیط سامانه ایجاد می‌کند اتخاذ می‌شود. در غالب این شیوه‌ها قیود مسئله در طراحی، به صورت نامعادلات ماتریسی ظاهر می‌شوند و چگونگی حل آن‌ها در تعیین مقادیر کنترل گر، نقش مهمی ایفا می‌کند.

استخراج معادلات حرکت ربات‌ها به منظور شبیه سازی دینامیکی و طراحی کنترل گر امری اجتناب ناپذیر است. این امر در منیپولاتورها با تعداد محدود بازو، معمولاً به صورت دستی انجام می‌گیرد [9]. در مرجع [10] مدل‌سازی و کنترل انواع منیپولاتورها با درجات آزادی مختلف آمده است. منیپولاتور تک بازو با مفصل انعطاف پذیر مدلی غیر خطی اما به فرم لیبیشیتز<sup>8</sup> دارد. پیرامون کنترل تنظیمی و حل مسئله‌ی توافق جمعی برای سامانه‌های لیبیشیتز مقالات متعددی وجود دارد. از جمله روش‌هایی که برای توافق جمعی عامل‌های غیر خطی پیشنهاد شده است می‌توان به مرجع [11] اشاره کرد. در مرجع [11] با فرض برقراری شرط لیبیشیتز برای جمله‌ی غیر خطی هر عامل و با استفاده از قضیه‌ی پایداری لیاپانوف کنترل گر ایستای بازخورد حالت جهت تضمین توافق جمعی بدون راهبر، طراحی شده است. نامساوی نهایی نیز به فرم نامساوی‌های ماتریسی خطی<sup>9</sup> می‌باشد. در همین مقاله طراحی عملکرد  $H_{\infty}$  در حضور نویز در محیط نیز بررسی شده است. در مرجع [12] شیوه‌ی پیشنهاد شده در مرجع [11] به وضعیتی که توپولوژی شبکه‌ی عامل‌ها متغیر با زمان است، تعمیم یافته و الگوریتمی جهت توافق جمعی با راهبر<sup>10</sup> برای منیپولاتور تک لینک و به طور کلی سامانه‌های غیر خطی لیبیشیتز ارائه شده است. در مرجع [13] توافق جمعی

حس گر و چرخ‌های حرکتی به عنوان محرک، یا یک منیپولاتور<sup>1</sup> که بر روی یک قطعه کار، عملیات خاصی را انجام می‌دهد، مثال‌هایی از یک عامل هستند. در بسیاری از کاربردهای عملی لازم است چندین عامل در یک گروه قرار گیرند و ضمن انجام اهداف مستقل خود، با همکاری با یکدیگر، هدف مشترک عمومی تری را دنبال کنند. چنین گروهی با ویژگی‌های ذکر شده یک سامانه‌ی چند عاملی را تشکیل می‌دهند.

کنترل ربات‌های همکار به عنوان نمونه‌ای از سامانه‌های چندعاملی از مباحث چالش برانگیز در رباتیک است. عملیات پیچیده و سختی که ممکن است با یک ربات بزرگ، گران، درجه آزادی بالا و طراحی پیچیده صورت پذیرد را می‌توان با همکاری گروهی از ربات‌های کوچک و مشابه انجام داد. عملیات مونتاژ قطعاتی که هندسه‌ی پیچیده‌ای دارند، از مواردی است که اهمیت همکاری در ربات‌ها را نشان می‌دهد. علی‌رغم این مزیت، کنترل سامانه‌های همکار رباتیکی در مقایسه با یک ربات، دشوارتر است؛ زیرا در این سامانه‌ها معادلات دینامیکی مجموعه‌ی ربات‌ها در ارتباط با یکدیگر اثرات متقابل به وجود می‌آورند، حجم روابط زیاد می‌شود و مشکل‌تر شدن مسائل کنترلی را به دنبال دارد.

گستره‌ی کاربرد منیپولاتورها در عملیات مختلف، به صورتی روزافزون رو به افزایش است و وسعت تحقیقات و پژوهش‌های انجام شده در این زمینه به خوبی نمایان گر این واقعیت می‌باشد [2]. از جمله‌ی این عملیات می‌توان به مونتاژ، جوشکاری، برشکاری، رنگرزی، بازوهای جرثقیلی، میکروسکوپ اتمی و صنایع دفاعی و امنیتی اشاره کرد. پیش بینی می‌شود در آینده شاهد به کارگیری منیپولاتورهای قدرتمند در اکتشافات فضایی و عملیات پیچیده‌ی زیرآبی در اقیانوس‌ها باشیم [3]. منیپولاتورها از منظر طراحی، جنس ساخت و نوع کاربرد به دو دسته‌ی انعطاف پذیر<sup>2</sup> و صلب<sup>3</sup> تقسیم می‌شوند. در یک منیپولاتور منعطف، دینامیک بازو<sup>4</sup> و یا مفصل<sup>5</sup> حالت ارتجاعی دارد. شتاب بالای حرکت بازو و یا جنس سبک و بلند و باریک آن، دو دلیلی هستند که سبب ارتجاعی شدن بازو و انحراف راستای آن در هنگام کار می‌شود. الاستیک بودن بازو موجب انحرافات و لرزش بیشتر، افزایش زمان نشست و کاهش دقت موقعیت کارگیر (گیره یا پنجه‌ی انتهایی منیپولاتور) می‌شود. همچنین پیچیده‌تر شدن معادلات حاکم و اضافه شدن اثرات شدید غیر خطی، شناسایی دقیق و طراحی کنترل گر را برای این دسته از منیپولاتورها مشکل‌تر می‌کند. در مقابل مشکلات مذکور، مزایای انعطاف پذیری در بازو در بعضی کاربردها قابل توجه است. افزایش قدرت حمل بار، کاهش مصرف انرژی و عدم لزوم استفاده از محرک‌های پرمصرف، ارزان‌تر شدن منیپولاتور، شتاب بیشتر در حرکت بازوها، افزایش بازدهی کاربری به علت استفاده از بازوهای سبک و بهره بری ایمن‌تر به دلیل پایین بودن اینرسی بازوها از مزایای مهم منیپولاتور با بازوی منعطف می‌باشد [4]. انعطاف پذیری در مفاصل نیز غالباً از خاصیت الاستیک شفت موتور و المان‌های انتقال قدرت از موتور به بازو یا از بازو به بازو مثل گیربکس، تسمه و پولی ناشی می‌شود. در واقع هر منیپولاتور داری مفاصل انعطاف پذیر است و فرض صلب بودن مفصل، صرفاً یک فرض ساده شونده است. از دید مدل‌سازی، انحنا و پیچش داخلی بین محرک و بازو با یک فنر پیچشی<sup>6</sup> مدل می‌شود [5]. پایه‌ی منیپولاتور نیز می‌تواند صلب یا انعطاف پذیر باشد. در مرجع [6] مزایا و معایب نوع الاستیک

1- Manipulator  
2- Flexible  
3- Rigid  
4- Link  
5- Joint  
6- torsional spring

7- Consensus  
8- Lipschitz  
9- Linear Matrix Inequalities  
10- Leader following consensus

ضرب کرونیگر بین دو ماتریس، عبارت  $I_n$  ماتریس واحد  $n \times n$  و علامت \* استفاده شده در آرایه‌های ماتریس، نشان گر ترانهاده‌ی درایه‌ی متقارن آن عضو، نسبت به قطر اصلی است. همچنین برای ماتریس متقارن  $A$ ، نماد  $A > 0$  به معنی مثبت معین بودن آن است. عبارت  $\| \cdot \|$  معرف نرم ماتریسی و  $\text{diag}(A, B)$  بیان گر ماتریس بلوکی قطری ساخته شده از  $A$  و  $B$  است.

## 2-2- بیان سامانه‌های چندعاملی با استفاده از نظریه‌ی گراف

جهت نمایش توزیعی سامانه‌های چندعاملی، اتصالات درونی و توپولوژی شبکه‌ی آن‌ها، از گراف‌های جهت‌دار استفاده می‌شود. در این گراف هر عامل با یک گره<sup>4</sup> و ارتباط بین هر جفت عامل نیز با یک یال<sup>5</sup> نشان داده می‌شود. یک گراف جهت‌دار با  $N$  گره، با  $g = (V, E, A)$  معرفی می‌شود که در آن  $V = (v_1, v_2, \dots, v_N)$  مجموعه‌ی گره‌ها و  $E \subseteq V \times V$  مجموعه‌ی یال‌هاست. وجود یال  $(v_i, v_j)$  در گراف، بیان گر دریافت اطلاعات عامل  $v_j$  توسط  $v_i$  است. در این مدل  $A = [a_{ij}] \in R^{N \times N}$  ماتریس مجاورت<sup>6</sup> می‌باشد. اگر عامل  $i$  اطلاعات عامل  $j$  را دریافت کند، (یال جهت‌داری از  $j$  به  $i$  وجود داشته باشد)،  $a_{ij} > 0$  و در غیر این صورت  $a_{ij} = 0$  فرض می‌شود.  $(a_{ij} = 0)$

مجموعه‌ی همسایگان یک عامل، با  $N_i$  نمایش داده می‌شود. اعضای این مجموعه برای عامل شماره‌ی  $i$ ، عامل‌هایی هستند که اطلاعات آن‌ها را دریافت می‌کند:  $N_i = \{v_j \in V, (v_j, v_i) \in E\}$  [14].

## 2-3- ماتریس لاپلاسی و خواص مهم

با بررسی ماتریس لاپلاسی متناظر با یک شبکه، می‌توان به خواص گراف شبکه‌ی متناظر و نحوه‌ی ارتباط عامل‌های آن پی‌برد. ماتریس لاپلاسی  $L = [l_{ij}] \in R^{N \times N}$  مرتبط با گراف  $g = (V, E, A)$  به صورت رابطه (1) تعریف می‌گردد [17]:

$$l_{ii} = \sum_{j \in N_i} a_{ij} ; l_{ij} = -a_{ij} \quad \forall i \neq j ; i, j = 1, \dots, N \quad (1)$$

برای تشکیل ماتریس لاپلاسی،  $a_{ij}$  در صورت غیر صفر بودن، هر عددی می‌تواند فرض شود. یکی از ویژگی‌های مهم ماتریس لاپلاسی ناقص بودن مرتبه‌ی آن (مرتبه‌ی  $N-1$ ) است. به این معنی که عدد صفر حتماً از مقادیر ویژه‌ی آن خواهد بود. بردار ویژه‌ی متناظر با مقدار ویژه‌ی صفر، بردار واحد می‌باشد  $(1 = [1, 1, \dots, 1]^T)$ .

گراف  $g$  یک درخت پوشا<sup>7</sup> دارد، اگر و فقط اگر ماتریس لاپلاسی تنها دارای یک مقدار ویژه‌ی صفر بوده و سایر مقادیر ویژه همگی دارای قسمت حقیقی مثبت باشند. کوچکترین مقدار ویژه‌ی غیر صفر ماتریس لاپلاسی گراف  $g$ ، مقدار ویژه‌ی دوم نامیده و با  $\lambda_2(L(g))$  نشان داده می‌شود. ثابت می‌شود که مقدار ویژه‌ی دوم، مبین میزان همبند بودن گراف است. به عبارت دیگر، بزرگتر بودن مقدار ویژه‌ی دوم به معنی تعداد یال بیشتر در گراف و

بدون راهبر برای وضعیتی که عامل‌ها متناوباً و نه به صورت پیوسته اطلاعات یکدیگر را دریافت می‌کنند فرم‌بندی شده است. کنترل گر طراحی شده همچنان بازخورد حالت می‌باشد. با استناد به منابع فوق و بسیاری منابع دیگر، به کارگیری ماتریس لاپلاسی<sup>1</sup> در الگوریتم‌های پیشنهادی اهمیت زیادی دارد. از جمله روش‌های کار شده برای توافق جمعی در سامانه‌های چند عاملی خطی که در آن نحوه‌ی ارتباط عامل‌ها با یکدیگر، غیر متمرکز<sup>2</sup> است، استفاده از بازخورد خروجی می‌باشد. در مرجع [14] برای توافق جمعی بدون راهبر در سامانه‌های چند عاملی خطی، طراحی کنترل گر غیر متمرکز بازخورد خروجی پویا در دستور کار قرار گرفته است. در آن‌جا علاوه بر محدودیت خطی بودن عامل‌ها، طراحی کنترل گر نیز به حل نامساوی‌های ماتریسی دو سوپه<sup>3</sup> منتهی می‌شود که به منظور حل آن روش تکرارشونده‌ی هوموتوپیی اتخاذ شده است. محاسبات عددی در نامساوی ماتریسی دو سوپه به مراتب مشکل‌تر است و برای حل این دسته نابرابری‌ها الگوریتم مؤثری که تمام فرم‌ها را شامل شود وجود ندارد [15]. در مرجع [16] مسئله‌ی طراحی کنترل گر بازخورد خروجی برای سامانه‌های مقیاس وسیع با عدم قطعیت غیرخطی مورد مطالعه قرار گرفته است و به منظور تبدیل نامساوی‌های ماتریسی دو سوپه به نامساوی‌های ماتریسی خطی و حل صریح آن‌ها با نرم افزار، روشی ابتکاری پیشنهاد شده است.

در این نوشتار مسئله‌ی طراحی کنترل گر بازخورد خروجی پویا جهت تضمین توافق جمعی که پیش‌تر برای سامانه‌های خطی طراحی شده است، به سامانه‌های غیرخطی لپیشیتیز تعمیم داده شده است. برخلاف کارهای گذشته، پیکربندی مسئله و طراحی، به نحوی است که انتخاب مرتبه‌ی کنترل گر در اختیار طراح بوده و به راحتی می‌توان نتایج کنترل گره‌های مرتبه‌های مختلف را مقایسه و مورد ایده آل را انتخاب نمود. ضمناً نامساوی ماتریسی نهایی نیز خطی می‌باشد و می‌توان پارامترهای کنترل گر را با استفاده از الگوریتم‌های کارآمد پیاده‌سازی شده در نرم‌افزارهای موجود تعیین نمود. توافق جمعی در مینیپولاتورهای تک بازو با مفصل انعطاف پذیر در کارهای پیشین به وسیله‌ی کنترل گر بازخورد حالت ایستا مورد مطالعه قرار گرفته است و لذا باید تمامی حالت‌های سامانه اندازه‌گیری یا جهت استخراج حالات، رؤیت گر طراحی شود. نظر به عملی‌تر بودن کنترل گر بازخورد خروجی نسبت به بازخورد حالت، و همچنین انعطاف بیشتر کنترل گر پویا نسبت به ایستا، در این نوشتار کنترل گر بازخورد خروجی پویا برای طراحی انتخاب گردیده است. در ادامه، در بخش دوم پیش‌نیازهای لازم مطرح می‌شوند. در بخش سوم مینیپولاتور تک بازو با مفصل انعطاف پذیر معرفی و کنترل گر بازخورد خروجی مرتبه‌ی ثابت غیرمتمرکز به منظور توافق جمعی بدون راهبر طراحی می‌شود. در قسمت چهارم مثال عددی این سامانه مورد بررسی قرار می‌گیرد و نتایج حاصل با کارهای مشابه پیشین مقایسه می‌شود. در نهایت، نتیجه‌گیری و جمع‌بندی نهایی کار ارائه شده است.

## 2- مقدمات ریاضی

در این بخش مقدمات ریاضی مورد نیاز برای بیان مسئله به اختصار عنوان می‌شود.

### 1-2- نمادهای به کار رفته

عبارت  $X \in R^m$  معرف بردار ستونی حقیقی  $m$  عضو، علامت  $\otimes$  بیان گر

4- Node  
5- Edge  
6- Adjacency matrix  
7- Spanning Tree

1- Laplacian Matrix  
2- Decentralize  
3- Bilinear

لم 1 [22]: نتیجه‌ای از روند  $S^2$ : دو ماتریس متقارن و هم بعد  $T_0$  و  $T_1$ ، مفروض‌اند. فرض می‌شود، عبارت رابطه (7) برای آن دو برقرار باشد.

$$\zeta^T T_1 \zeta \geq 0 \text{ و } \zeta^T T_0 \zeta > 0, \forall \zeta \neq 0 \quad (7)$$

روشن است در صورتی که  $\tau \geq 0$  وجود داشته باشد به طوری که  $T_0 - \tau T_1 > 0$  باشد، آن‌گاه فرض (7) برقرار خواهد بود و بالعکس.

لم 2 [15]: مکمل شور<sup>3</sup>: لم مکمل شور دسته‌ای از نابرابری‌های غیر خطی به فرم رابطه (8) را به نابرابری ماتریسی خطی تبدیل می‌کند.

$$R(x) > 0, \quad Q(x) - S(x)R^{-1}(x)S^T(x) > 0 \quad (8)$$

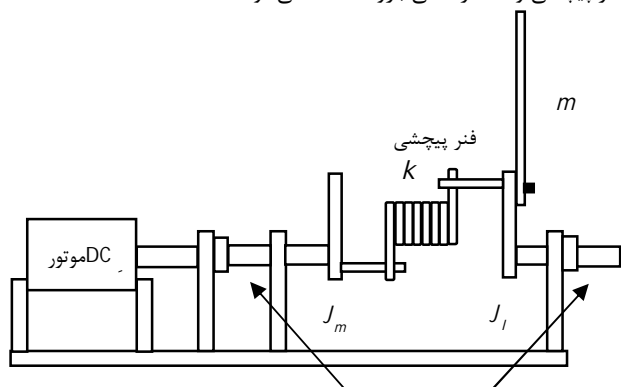
که در آن  $R(x)$  و  $Q(x)$  هر دو ماتریس‌های متقارن هستند. مکمل شور نابرابری‌های (8) را به نابرابری خطی زیر تبدیل می‌کند:

$$\begin{pmatrix} Q(x) & S(x) \\ * & R(x) \end{pmatrix} > 0$$

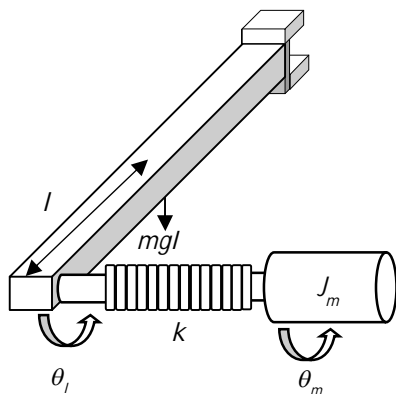
### 3- تعریف مسئله و طراحی کنترل گر بازخورد خروجی پویا

در این بخش ضمن معرفی دینامیک ربات تک بازو با مفصل انعطاف پذیر، توافق جمعی در سامانه‌ای چندعاملی متشکل از این نوع ربات بررسی خواهد شد. در شکل 1 طرح آزمایشگاهی یک بازوی رباتیکی با یک درجه آزادی و مفصل انعطاف پذیر نشان داده شده است.

در شکل 2، جهت چرخش زاویه‌ای موتور و بازو، مدل سازی مفصل با یک فنر پیچشی و عملکرد کلی بازو ملاحظه می‌شود.



شکل 1 طرح ربات تک بازو با مفصل انعطاف پذیر [23]



شکل 2 شماتیک ربات تک بازو با مفصل انعطاف پذیر [10]

متراکم‌تر بودن شبکه است.

یک درخت زیرگرافی بدون حلقه از گراف اصلی است که در آن هر گره فقط و فقط یک یال ورودی دارد؛ به غیر از یک گره که هیچ ورودی‌ای ندارد و پایه‌ی<sup>1</sup> درخت نامیده می‌شود. یک گراف در بر دارنده‌ی یک درخت پوشا است اگر بتوان زیرمجموعه‌ای از یال‌های آن یافت که یک درخت تشکیل دهند به گونه‌ای که تمامی گره‌ها را شامل شود. باید توجه داشت که شرط لازم برای تحقق توافق جمعی در یک سامانه‌ی چندعاملی وجود حداقل یک درخت پوشا در گراف ارتباطی عامل‌هاست [18].

### 2-4- توافق جمعی بر مبنای ماتریس لاپلاسی

همانطور که گفته شد، عدد صفر حتماً از مقادیر ویژه‌ی ماتریس لاپلاسی و بردار واحد، بردار ویژه‌ی متناظر با آن است. در این قسمت با در نظر گرفتن مدلی ساده برای هر عامل، اساس توافق جمعی بر اساس ماتریس لاپلاسی نشان داده می‌شود. دینامیک هر عامل در یک سامانه‌ی چند عاملی به صورت رابطه (2) فرض می‌گردد:

$$\dot{x}_i = u_i, \quad i=1, \dots, N \quad (2)$$

که در آن  $x$  موقعیت هر عامل،  $u$  خروجی کنترل گر و  $N$  تعداد عامل‌ها در سامانه‌ی چندعاملی است. سامانه‌ی (2) اصطلاحاً انتگرال گیر نامیده می‌شود. مسئله‌ی توافق جمعی در حالات، در واقع به معنی یافتن  $u$ ‌های مناسبی است که با توجه به اطلاعات خود عامل و عامل‌های همسایه، حالات متناظر همه‌ی عامل‌ها را به مقداری یکسان ببرد. (رابطه (3) یعنی:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x_i(t) - x_j(t)| = 0 \quad \forall i \neq j \quad (3)$$

قانون کنترلی  $u$  به فرم رابطه (4) پیشنهاد می‌شود:

$$u_i = \sum_{j \in N_i} (x_j - x_i) \quad (4)$$

که ایده‌ی آن کم شدن اختلاف حالت عامل مورد نظر با همسایه‌هایش است.

اگر  $X = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_N]^T$  و  $U = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_N]^T$  در نظر گرفته شود، با توجه به تعریف ماتریس لاپلاسی در (1)، قانون کنترلی (4) به ساختار رابطه (5) تبدیل می‌شود:

$$U = -L X \quad (5)$$

و سامانه‌ی حلقه بسته در این حالت به فرم رابطه (6) تبدیل می‌گردد [19]:

$$\dot{X} = -L X \quad (6)$$

از آن‌جا که مقادیر ویژه‌ی ماتریس لاپلاسی متناظر با گراف یک تکه، همواره نامنفی است، مقادیر ویژه  $-L$  همواره نامثبت و سامانه پایدار است [20].

بنابراین  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{X} = 0$  و به تبع آن  $\lim_{t \rightarrow \infty} L X = 0$  است. مقادیر نهایی بردار

$X$  به صورت  $X^* = [x_1^* \ x_2^* \ \dots \ x_N^*]^T$  فرض می‌شود. لذا می‌توان گفت

$$L X^* = L [x_1^* \ \dots \ x_N^*]^T = 0$$

واحد، بردار ویژه‌ی آن است. یعنی  $L [c \ 1 \ \dots \ 1]^T = 0$  است و

$$X^* = c [1 \ \dots \ 1]^T \quad (21)$$

2- S-procedure  
3- Schur Complement

1- Root

$$h_j(t, x_j)^T h_j(t, x_j) \leq \bar{\alpha}_j^2 x_j^T (\bar{H}_j^T \bar{H}_j) x_j \quad (12)$$

در رابطه‌ی (12)،  $x_j \in R^n$  و  $\bar{H}_j$  ماتریسی  $n \times n$  و معلوم است.  $\bar{\alpha}$  نیز کران بیشینه‌ای است که رابطه‌ی (12) را برقرار می‌سازد.

همان طور که عنوان شد مسئله‌ی توافق جمعی به معنی طراحی یک کنترل گر است که با توجه به نحوه‌ی ارتباط عامل‌ها با یکدیگر، بتواند حالات عامل‌ها را به بردار مشترکی همگرا کند. (رابطه (13)) به بیان ریاضی یعنی [14]:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_j(t) - x_j(t)\| = 0, \quad \forall i \neq j \quad (13)$$

برای تحقق توافق جمعی مطابق با رابطه (13)، ابتدا همه‌ی عامل‌های موجود به فرم (11)، در سامانه‌ی  $N$  عاملی، به فرم یک سامانه‌ی واحد اما با ابعاد بزرگ بیان می‌شود. (رابطه (14)):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_D x + B_D u + h(x) & x \in R^{4 \times N}, u \in R^N \\ y &= C_D x & y \in R^{2 \times N} \end{aligned} \quad (14)$$

در رابطه‌ی (14)،  $x = [x_1^T, x_2^T, \dots, x_N^T]^T$  نمایان‌گر بردار حالت کل سامانه،  $u = [u_1^T, u_2^T, \dots, u_N^T]^T$  بردار ورودی‌های کنترلی و

$h(x) = [h_1(x_1)^T, h_2(x_2)^T, \dots, h_N(x_N)^T]^T$  بردار جملات غیرخطی کل سامانه و  $y = [y_1^T, y_2^T, \dots, y_N^T]^T$  بردار خروجی‌هاست. همچنین  $A_D = I_N \otimes A$ ،  $B_D = I_N \otimes B$  و  $C_D = I_N \otimes C$  می‌باشد.

حال  $\bar{H}^T = [\bar{H}_1^T, \dots, \bar{H}_N^T]^T$  و  $\bar{\Gamma} = \text{diag}(\bar{\gamma}_1/4, \dots, \bar{\gamma}_N/4)$  در نظر گرفته می‌شوند. در مرجع [9] نشان داده شده است که با تعریف  $\bar{\gamma}_i = \bar{\alpha}_i^{-2}$  همواره می‌توان ماتریس‌های  $H$  و  $\Gamma$  را طبق رابطه (15) یافت:

$$h(t, x)^T h(t, x) \leq x^T \bar{H}^T \bar{\Gamma}^{-1} \bar{H} x \leq x^T H^T \Gamma^{-1} H x \quad (15)$$

و در آن  $H = \text{diag}(H_1, \dots, H_N)$  و  $\Gamma = \text{diag}(\gamma_1/4, \dots, \gamma_N/4)$  و  $\gamma_i > 0$  هستند.

اکنون برای رسیدن به توافق جمعی، کنترل گر غیر متمرکز بازخورد خروجی بیان شده در مرجع [14]، از مرتبه‌ی ثابت  $n_c$  استفاده می‌شود. (رابطه (16)):

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= \hat{A}_D \hat{x} + \hat{B}_D L_C^- y & \hat{x} \in R^{n_c N} \\ u &= \hat{C}_D \hat{x} + \hat{D}_D L_C^- y \end{aligned} \quad (16)$$

در کنترل گر (16)،  $\hat{x} = [\hat{x}_1^T, \hat{x}_2^T, \dots, \hat{x}_N^T]^T$  مجموعه‌ی حالات کنترل گر و  $L_C^- = L \otimes I_2$  می‌باشند.  $\hat{A}_D$ ،  $\hat{B}_D$ ،  $\hat{C}_D$  و  $\hat{D}_D$  دارای ساختاری به فرم زیر هستند:

$$\begin{aligned} \hat{A}_D &= \text{diag}(\hat{A}_1, \hat{A}_2, \dots, \hat{A}_N) \\ \hat{B}_D &= \text{diag}(\hat{B}_1, \hat{B}_2, \dots, \hat{B}_N) \\ \hat{C}_D &= \text{diag}(\hat{C}_1, \hat{C}_2, \dots, \hat{C}_N) \\ \hat{D}_D &= \text{diag}(\hat{D}_1, \hat{D}_2, \dots, \hat{D}_N) \end{aligned}$$

با استفاده از قوانین حاکم در فیزیک، دینامیک هر عامل به فرم رابطه (9) قابل بیان است [24]:

$$\begin{aligned} J_I \ddot{\theta}_I + mgl \sin(\theta_I) + k(\theta_I - \theta_m) &= 0 \\ J_m \ddot{\theta}_m + k(\theta_m - \theta_I) + B \dot{\theta}_m &= K_T u \end{aligned} \quad (9)$$

که در آن  $K$  ثابت فنر،  $K_T$  یک بهره‌ی معین،  $J_I$  و  $J_m$  به ترتیب اینرسی موتور و بازو،  $U$  بردار ورودی کنترلی،  $B$  اصطکاک یاتاقان،  $m$  و  $l$  نیز به ترتیب جرم و نصف طول بازو می‌باشند. در این منیپولاتور، اگر بازو در وضعیت افقی کار کند و تغییر ارتفاع نداشته باشد، مدل آن کاملاً خطی می‌شود؛ اما در عمل، کاربرد وضعیت عمودی بیشتر است. با تعریف سرعت زاویه‌ای به عنوان مشتق موقعیت زاویه‌ای، معادلات درجه اول حاصل می‌شود. (رابطه (10)):

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_m &= \omega_m \\ \dot{\omega}_m &= \frac{k}{J_m}(\theta_I - \theta_m) - \frac{B}{J_m} \omega_m + \frac{K_T}{J_m} U \\ \dot{\theta}_I &= \omega_I \\ \dot{\omega}_I &= -\frac{k}{J_m}(\theta_I - \theta_m) - \frac{mgh}{J_I} \sin(\theta_I) \end{aligned} \quad (10)$$

با توجه به رابطه (10)، مدل  $N$  ربات در سامانه‌ی چندعاملی با  $N$  عامل به فرم رابطه (11) قابل بیان می‌باشد:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= A x_i + B u_i + h_i(x) & i = 1, \dots, N \\ y_i &= C x_i \end{aligned} \quad (11)$$

در سامانه‌ی (11)،  $x_i = (\theta_i^T \quad \omega_i^T \quad \theta_I^T \quad \omega_I^T)^T \in R^4$  بردار حالات

هر ربات،  $h_i(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{mgh}{J_I} \sin(\theta_I) \end{pmatrix}^T$  جمله‌ی غیر خطی هر

ربات و  $B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{K_T}{J_m} & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$  می‌باشد. در این سامانه دو خروجی

جدگانه‌ی  $\theta_m$  و  $\omega_m$  تعریف می‌شود و  $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . سامانه‌ای که قابل بیان به فرم (11) است و شرط زیر را برآورده می‌سازد اصطلاحاً سامانه‌ی غیرخطی لپیشیتز نامیده می‌شوند [11].

$$\|h(x) - h(y)\| \leq \omega \|x - y\|, \quad \forall x, y \in R^n$$

که در آن  $\omega > 0$  ثابت لپیشیتز است. مزایای زیادی در طراحی کنترل گر برای سامانه‌های به این فرم وجود دارد. روش‌های مبتنی بر نامساوی‌های ماتریسی خطی برای طراحی کنترل گر مقاوم بازخورد خروجی پویا یا رؤیت گر خطی به راحتی برای چنین سامانه‌هایی قابل پیاده سازی است. همچنین بسیاری از سامانه‌های خطی که تحت یک شبکه با یکدیگر کار می‌کنند، اثرات متقابل غیرقابل شناسایی برهم دارند که با مدل کردن هر زیرسامانه به فرم رابطه (11) می‌توان مقاوم بودن سامانه‌ی کل را نسبت به اثرات متقابل تضمین کرد [25].

در حالت کلی  $h_j(x)$  تابعی برداری تکه‌ای خطی نسبت به هر دو آرگومان  $t$  و  $x_j$  است که در حوزه‌ی پیوستگی خود رابطه‌ی (12) را برآورده می‌کند.

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A_D + B_D \hat{D}_D C_D L_C & B_D \hat{C}_D \\ \hat{B}_D C_D L_C & \hat{A}_D \end{pmatrix}$$

اکنون برای این‌که سامانه‌ی رابطه‌ی (21) پایدار باشد و در خلال تضمین پایداری، پارامترهای مجهول کنترل گر نیز به دست آیند، با استفاده از تابع لیپانوف مربعی زیر، معیار قضیه‌ی پایداری لیپانوف، به صورت رابطه (22) دست می‌آید.

$$V = \bar{x}^T P \bar{x} \quad (22)$$

ماتریس متقارن و مثبت معین  $P$ ، به فرم رابطه‌ی (17) فرض می‌شود. برای بهبود نرخ همگرایی حالات سامانه، با تعریف پارامتر مثبت و دلخواه  $\lambda$ ، قضیه‌ی پایداری لیپانوف، به ازای همگرایی  $e^{\lambda t} x(t)$  به صفر، نوشته می‌شود. لذا با مشتق‌گیری از رابطه‌ی (22) و جایگذاری معادلات سامانه‌ی رابطه‌ی (21) به صورت رابطه (23) داریم:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{d(e^{\lambda t} \bar{x})^T}{dt} P (e^{\lambda t} \bar{x}) + (e^{\lambda t} \bar{x})^T P \frac{d(e^{\lambda t} \bar{x})}{dt} \\ &= e^{\lambda t} [\bar{x}^T (2\lambda P + \bar{A}^T P + P \bar{A}) \bar{x} \\ &\quad + z^T P \bar{x} + \bar{x}^T P z] e^{\lambda t} \\ &= e^{\lambda t} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ z \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} L & P \\ * & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ z \end{bmatrix} e^{\lambda t} \end{aligned} \quad (23)$$

که در آن  $L$ ، عبارت معرفی شده در رابطه‌ی (19) می‌باشد. برای این‌که سامانه‌ی حلقه بسته‌ی رابطه‌ی (21) پایدار باشد، رابطه‌ی (23) باید منفی معین، یا به عبارت دیگر قرینه‌ی آن مثبت معین باشد (رابطه‌ی (24)).

$$-\begin{bmatrix} \bar{x} \\ z \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} L & P \\ * & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ z \end{bmatrix} \geq 0 \quad (24)$$

اسکالر  $e^{\lambda t}$  با توجه به مثبت بودنش، بدون تأثیر در جهت نامساوی فوق حذف شده است. حال با توجه به تعریف  $Z$  و بنا به آن چه در رابطه‌ی (15) بیان شد، می‌توان رابطه‌ی (25) را به صورت زیر نوشت:

$$z^T z \leq x^T (H^T \Gamma^{-1} H) x \quad (25)$$

رابطه‌ی (25) را می‌توان به فرم ماتریسی رابطه‌ی (26) بازنویسی کرد:

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ z \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} H^T \Gamma^{-1} H & 0 \\ * & 0 \\ * & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ z \end{bmatrix} \geq 0 \quad (26)$$

حال با توجه به روابط (24) و (26) و با استفاده از لم 1 (روند S)، رابطه (27) داریم:

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ z \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} L + \tau \begin{bmatrix} H^T \Gamma^{-1} H & 0 \\ * & 0 \\ * & -I \end{bmatrix} & P \\ & -\tau I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ z \end{bmatrix} < 0 \quad (27)$$

با توجه به مشخص بودن جمله‌ی غیرخطی، می‌توان با استفاده از (25) مقدار مناسبی برای  $\Gamma$  یافت. انتخاب مقادیر بزرگ‌تر برای آن نیز مشکلی به وجود نمی‌آورد فقط گستره‌ی یافتن پارامترهای کنترل گر محدود خواهد شد. برای برقراری (27) لازم است رابطه‌ی (18) برقرار باشد. پایان اثبات □

قضیه: کنترل گر پویای خروجی رابطه (16)، سامانه‌ی تعریف شده در رابطه (11) را به توافق جمعی می‌رساند، اگر ماتریس متقارن و مثبت معین  $P$  به فرم رابطه (17):

$$\begin{aligned} P &= \text{diag}(P_1, P_2) \\ P_1 &= \text{diag}(p_{11}, p_{12}, \dots, p_{1N}) \\ P_2 &= \text{diag}(p_{21}, p_{22}, \dots, p_{2N}) \\ p_{1i} &\in R^{4 \times 4}, p_{2i} \in R^{n_c \times n_c} \quad i=1, \dots, N \end{aligned} \quad (17)$$

و ماتریس‌های  $H, Q, M, Z, R$  و همچنین اسکالر مثبت  $\tau$  وجود داشته باشند (رابطه (18)) به طوری که:

$$\begin{bmatrix} L + \tau \begin{bmatrix} H^T \Gamma^{-1} H & 0 \\ * & 0 \\ * & -I \end{bmatrix} & P \\ & -\tau I \end{bmatrix} < 0 \quad (18)$$

برقرار باشد. در رابطه (18)،  $\Gamma = \text{diag}(\gamma_1 I_4, \dots, \gamma_N I_4)$  و طبق رابطه (19)

$$\begin{aligned} L &= \bar{A}^T P + P \bar{A} + 2\lambda P \\ &= \begin{bmatrix} A_D^T P_1 + L_C^T C_D^T Q^T + P_1 A_D & L_C^T C_D^T Z^T + M \\ + Q C_D L_C + 2\lambda P_1 & \\ * & R^T + R + 2\lambda P_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (19)$$

می‌باشد. همچنین، پارامترهای کنترل گر رابطه (16) از رابطه‌ی (20) قابل محاسبه خواهند بود:

$$\begin{aligned} \hat{A}_D &= P_2^{-1} R \\ \hat{B}_D &= P_2^{-1} Z \\ \hat{C}_D &= \left( (P_1 B_D)^T (P_1 B_D) \right)^{-1} (P_1 B_D)^T M \\ \hat{D}_D &= \left( (P_1 B_D)^T (P_1 B_D) \right)^{-1} (P_1 B_D)^T Q \end{aligned} \quad (20)$$

اثبات: با اعمال کنترل گر رابطه‌ی (16) به سامانه‌ی تعریف شده در رابطه‌ی (14) فرم فضای حالت سامانه‌ی حلقه بسته را می‌توان به صورت رابطه‌ی (21) نوشت:

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A} \bar{x} + z \quad (21)$$

که در آن  $\bar{x} = [x^T, \bar{x}^T]^T$  و  $\bar{A} = \begin{pmatrix} A_D + B_D \hat{D}_D L_C C_D & B_D \hat{C}_D \\ \hat{B}_D L_C C_D & \hat{A}_D \end{pmatrix}$

و  $z = \begin{bmatrix} h(t, x) \\ 0_{nN \times 1} \end{bmatrix}$  می‌باشد.

برای این‌که ابعاد ماتریس لاپلاسی قطری بلوکی شده‌ی  $L_C$  متأثر از تعداد حالات هر عامل باشد و نه خروجی (q)، با روند زیر،  $L_C = L \otimes I_n$  با آن تعویض می‌گردد:

$$\begin{aligned} L_C C_D &= (L \otimes I_q)(I_N \otimes C) = (L I_N) \otimes (I_q C) \\ &= (I_N L) \otimes (C I_n) = (I_N \otimes C)(L \otimes I_n) \\ &= C_D L_C \end{aligned}$$

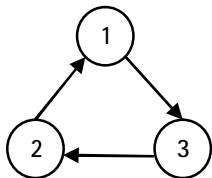
حال فرم  $\bar{A}$ ، به فرم زیر تغییر می‌یابد:

این سه عامل با توپولوژی مثلثی نشان داده شده در شکل 3 با یکدیگر ارتباط دارند.  
با توجه به شکل 3 و رابطه‌ی (1) ماتریس لاپلاسی این سامانه به فرم زیر نوشته می‌شود.

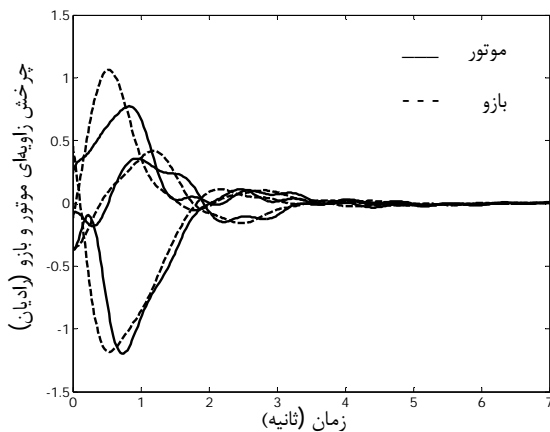
$$L = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

با فرض  $H = I_{12}$  و  $\Gamma = 30000I_{12}$  برای پوشش دادن کران بالاتری از جمله‌ی غیرخطی و همچنین  $\lambda = 0.8$  و با شبیه سازی سامانه‌ی فوق در نرم افزار متلب<sup>1</sup> و حل نامساوی‌های ماتریسی خطی به دست آمده از رابطه‌ی (28) با جعبه ابزار یالمیپ<sup>2</sup> پارامترهای کنترل گر با مرتبه‌ی دو استخراج می‌شود.

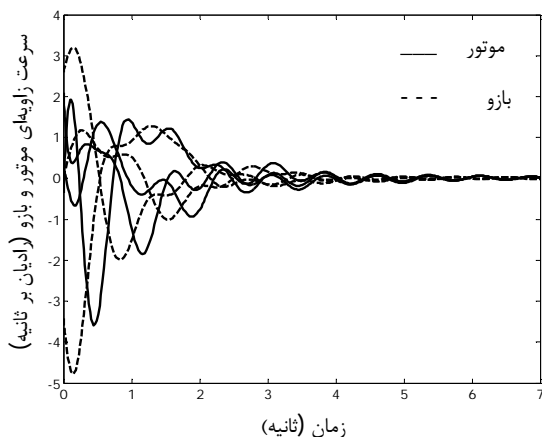
در شکل 4 همگرا شدن موقعیت‌های  $\theta_m$  و  $\theta_l$  و در شکل 5 نیز همگرا شدن  $\omega_l$  و  $\omega_m$  به مقداری یکسان و تحقق توافق جمعی با کنترل گر مرتبه‌ی دو ( $n_c = 2$ ) ملاحظه می‌شود:



شکل 3 توپولوژی شبکه‌ی سامانه‌ای با سه عامل



شکل 4 توافق جمعی در حالات چرخش زاویه‌ای موتور و بازو



شکل 5 توافق جمعی در حالات سرعت زاویه‌ای موتور و بازو

**نتیجه‌ی فرعی:** اگر جملات غیر خطی قابل شناسایی نباشند یا به صورت عدم قطعیت ظاهر شده باشند، یا در محیط ورودی مزاحم تأثیرگذار باشد،  $\Gamma$  نیز مجهول است. بنابراین لازم است پارامترهای مجهول  $\tau$  و  $\Gamma$ ، از یکدیگر جدا شوند تا (27) به فرم نامساوی‌های ماتریسی خطی درآید. برای این منظور تکنیک مکمل شور به کار گرفته می‌شود و رابطه‌ی (18) به فرم رابطه‌ی (28) بازنویسی می‌گردد:

$$\begin{bmatrix} L & P & \tau(H \ 0)^T \\ * & -\tau I & 0 \\ * & * & -\hat{\Gamma} \end{bmatrix} < 0 \quad (28)$$

در نامساوی (28)،  $\hat{\Gamma} = \tau\Gamma$ ،  $\hat{\Gamma} = \text{diag}(\hat{\gamma}_1/4, \dots, \hat{\gamma}_N/4)$  می‌باشد. از رابطه‌ی (15) می‌توان استنباط کرد که با کمینه شدن  $\gamma_i$  ها،  $\Gamma$  نیز کمینه می‌شود. پس به این ترتیب  $\Gamma^{-1}$  و به تبع آن  $\hat{\Gamma}^{-1}$  نیز بیشینه می‌شود. لذا برای به دست آوردن مطمئن‌ترین کران برای عبارت رابطه‌ی (15) نامساوی‌های ماتریسی (28)، با هدف کمینه شدن  $\sum_{i=1}^N \hat{\gamma}_i$  حل می‌شود.

#### 4- نتایج شبیه‌سازی

در این بخش جهت ارزیابی روش طراحی شده، یک سامانه‌ی چندعاملی با سه عامل که هر کدام ربات آزمایشگاهی تک بازو با مفصل انعطاف پذیر است مورد بررسی قرار می‌گیرد. پارامترهای این مدل آزمایشگاهی در جدول 1 گزارش شده است.

با جایگذاری مقادیر عددی پارامترها، مدل فضای حالت سامانه به فرم (11) با  $A, B, C, h$  و  $C$  به قرار رابطه‌ی (29) به دست می‌آید:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -48.6 & -1.25 & 48.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 19.5 & 0 & -19.5 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 21.6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$h = (0 \ 0 \ 0 \ -3.33\sin(\theta_l))^T, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (29)$$

جدول 1 مشخصات ربات تک بازو با مفصل انعطاف پذیر [24]

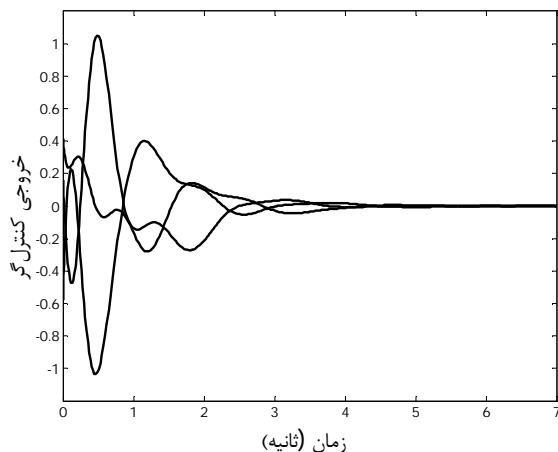
مشخصات ربات	نماد	مقدار	واحد
اینرسی محرک (موتور DC)	$J_m$	0/0037	kgm <sup>2</sup>
اینرسی بازو	$J_l$	0/0093	kgm <sup>2</sup>
اصطکاک حرکتی یاتاقان موتور	$B$	0/046	NmV <sup>-1</sup>
ضریب ثابت فنر چرخشی	$k$	0/18	Nm rad <sup>-1</sup>
بهره تقویت کننده برای کنترل	$K_\tau$	0/008	NmV <sup>-1</sup>
جرم بازو	$m$	0/21	kg
طول نصف بازو	$L$	0/3	m
چرخش زاویه ای موتور	$\theta_m$	متغیر حالت	rad
چرخش زاویه ای بازو	$\theta_l$	متغیر حالت	rad
سرعت زاویه ای موتور	$\omega_m$	متغیر حالت	rad s <sup>-1</sup>
سرعت زاویه ای بازو	$\omega_l$	متغیر حالت	rad s <sup>-1</sup>

1- MATLAB  
2- YALMIP

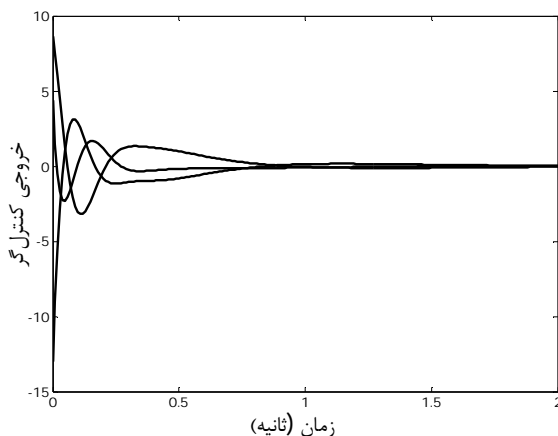
9 در لحظات اولیه خروجی کنترل گر بسیار زیاد است و شوک زیادی را به موتور وارد می‌کند.

با انتگرال‌گیری قدر مطلق سطح زیر خروجی هر کنترل گر در روش طراحی شده و روش ارائه شده در مرجع [26] نتایج جدول 2 حاصل می‌شود. سطح زیر نمودار کنترل گر بازخورد ایستای حالت در مقایسه با کنترل گر بازخورد خروجی پویا بیشتر و این از مصرف بیشتر انرژی در وضعیت اول حکایت دارد.

در جدول 3 پارامترهای کنترل گرها و نزدیک‌ترین قطب سامانه‌ی حلقه بسته به محور موهومی به عنوان معیاری از پایداری نسبی مشاهده می‌شود. در هر دو کنترل گر مقدار حقیقی نزدیک‌ترین قطب به محور یکسان است.



شکل 8 خروجی کنترل گر طراحی شده برای اعمال به موتور



شکل 9 خروجی کنترل گر برای اعمال به موتور با استفاده از الگوریتم [26]

جدول 2 مقایسه انتگرال سطح زیر نمودار خروجی کنترل گرها

انتگرال سطح کنترل گر در روش [26]	انتگرال سطح کنترل گر در روش حاضر	کنترل گر سامانه‌ی یک
2/9206	0/7589	کنترل گر سامانه‌ی یک
1/8167	0/7178	کنترل گر سامانه‌ی دو
2/8942	0/3745	کنترل گر سامانه‌ی سه

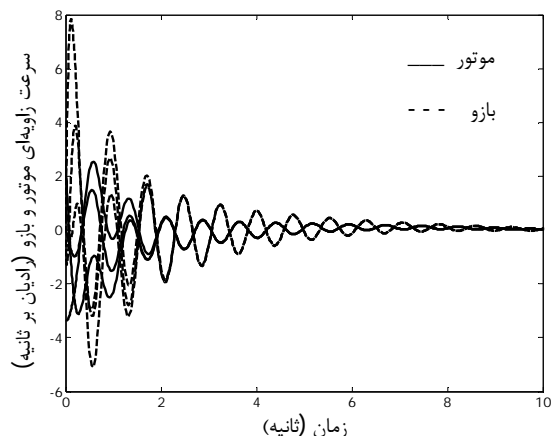
به منظور مقایسه‌ی نتایج حاصل با کارهای مشابه پیشین، الگوریتم و کنترل گر استفاده شده در مرجع [26] جهت توافق جمعی در عامل‌های به فرم غیرخطی لیپشیتز مورد بررسی قرار می‌گیرد. کنترل گر پیشنهادی در مرجع [26] به فرم زیر است:

$$u_i = cK \sum_{j=1}^N a_{ij} (x_i - x_j)$$

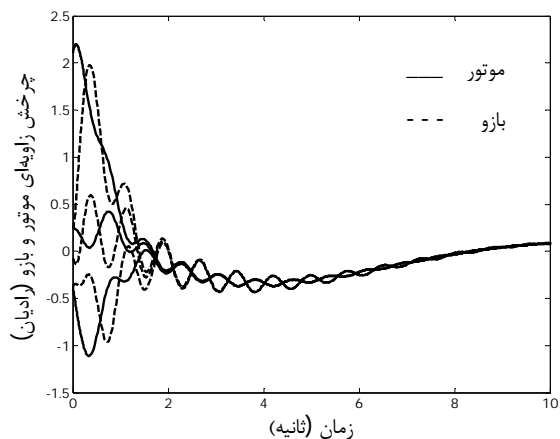
که در آن  $c$  و  $K$  باید تعیین شوند و  $a_{ij}$  مربوط به ماتریس مجاورت شبکه‌ی عامل‌هاست. نتایج فعلی در مقایسه با کار مشابه انجام شده در مرجع [26] از آن جهت اهمیت دارد که در آنجا الگوریتم کنترلی از تمامی حالت‌های سامانه بازخورد می‌گیرد و لذا باید تمامی حالات اندازه‌گیری شوند یا جهت استخراج حالات، رؤیت گر طراحی شود. در این مثال خاص اندازه‌گیری حالت‌های مربوط به بازو دشوار است.

از آنجا که در مسائل عملی کنترل، فشار وارد بر محرک اهمیت ویژه‌ای دارد، مقایسه‌ی خروجی کنترل گرهای این دو روش ضروری است. خروجی کنترل گر پویا طبق رابطه‌ی (16)، در شکل 8 آمده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود در این حالت نوسانات سه کنترل گر منطقی است و فراجاهش چشمگیری وجود ندارد.

در شکل 9 نیز خروجی کنترل گر ایستای بازخورد حالت مشاهده می‌شود. علی‌رغم استفاده از تمامی حالات سامانه، که اطلاعات کامل‌تری نسبت به خروجی سامانه ارائه می‌دهند، تفاوت قابل ملاحظه‌ای در میزان نوسانات و زمان نشست پاسخ مشاهده نمی‌شود. ضمن این که با توجه به شکل

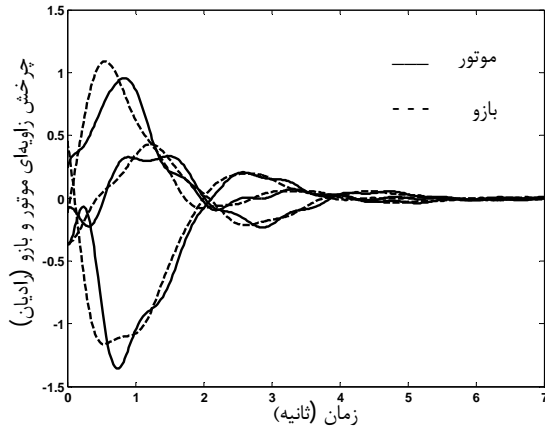


شکل 6 توافق جمعی در سرعت زاویه‌ای با استفاده از الگوریتم [26]

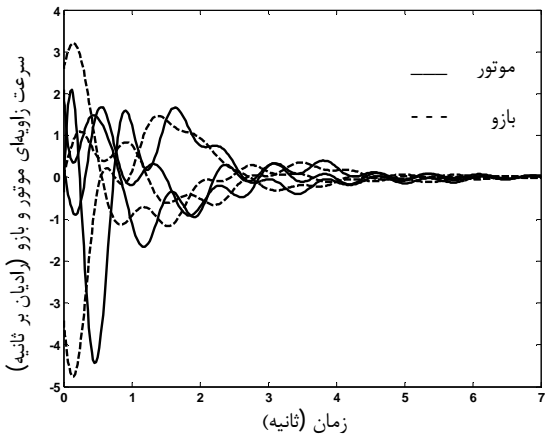


شکل 7 توافق جمعی در چرخش زاویه‌ای با استفاده از الگوریتم [26]

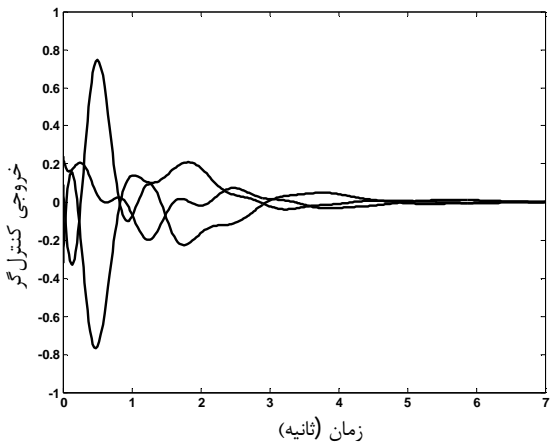




شکل 10 توافق جمعی در چرخش زاویه‌ای موتور و بازو، کنترل گر مرتبه‌ی شش



شکل 11 توافق جمعی در سرعت زاویه‌ای موتور و بازو، کنترل گر مرتبه‌ی شش



شکل 12 خروجی کنترل گر مرتبه‌ی شش برای اعمال به موتور

- امکان در نظر گرفتن حد بالای جمله‌ی غیرخطی به صورت خودکار و یا دستی.
  - دلخواه بودن مرتبه‌ی کنترل گر و انتخاب آن با توجه به محدودیت‌های پیاده‌سازی و اهداف کنترلی مدنظر طراح.
  - رفع مشکل غیرخطی بودن قید نهایی و فرم بندی یک نامساوی ماتریسی خطی جهت استخراج پارامترهای کنترل گر و در نتیجه امکان استفاده از نرم‌افزارهای کارآمد بهینه‌سازی موجود جهت حل آن.
- در نهایت روش مذکور برای مدل آزمایشگاهی منیپولاتور فوق شبیه

جدول 3 پارامترهای کنترل گر طراحی شده و کنترل گر [26]

نوع کنترل گر	پارامترهای طراحی شده	کنترل گر طراحی شده
قطب به نزدیک ترین	$A_1 = \begin{pmatrix} -2/610 & 0/001 \\ 0/001 & -2/6103 \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} 0/0039 & 0/0021 \\ 0/0044 & 0/0025 \end{pmatrix}$ $C_1 = (-0/0023 \quad -0/0024), D_1 = (-0/1386 \quad -0/2013)$	-0/362
کنترل گر	$A_2 = \begin{pmatrix} -2/614 & 0/001 \\ 0/001 & -2/615 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0/0047 & 0/0024 \\ 0/0050 & 0/0026 \end{pmatrix}$ $C_2 = (-0/0027 \quad -0/0029), D_2 = (-0/1373 \quad -0/201)$	-0/362
کنترل گر [26]	$A_3 = \begin{pmatrix} -2/619 & 0/001 \\ 0/001 & -2/603 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 0/0040 & 0/0025 \\ 0/0045 & 0/0029 \end{pmatrix}$ $C_3 = (-0/0026 \quad -0/0029), D_3 = (-0/138 \quad -0/201)$	-0/362
	$K = \begin{pmatrix} -2/762 & 1/885 & -0/320 & -0/341 \end{pmatrix}$	

با توجه به این‌که در این روش امکان انتخاب مرتبه‌ی کنترل گر قبل از طراحی وجود دارد لازم است نتایج خروجی و تلاش کنترلی برای مرتبه‌های مختلف کنترل گر علاوه بر مرتبه‌ی دو مورد بررسی قرار گیرد. در جدول شماره‌ی 4 نتایج برای کنترل گرهای مرتبه‌ی صفر تا شش آورده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، با اعمال کنترل گر مرتبه‌ی صفر و یک سامانه‌ی حلقه بسته ناپایدار است. با افزایش مرتبه‌ی کنترل گر تلاش کنترلی کاهش یافته است و لذا فراجهدش و زمان نشست هر دو بیشتر می‌شوند. نتایج خروجی با اعمال کنترل گر مرتبه‌ی شش در شکل‌های 10، 11 و 12 مشاهده می‌شود.

### 5- نتیجه‌گیری

در این نوشتار به منظور حل مسئله‌ی توافق جمعی در سامانه‌ی چندعاملی متشکل از منیپولاتورهای تک بازو با مفصل انعطاف پذیر، کنترل گر پویای بازخورد خروجی از مرتبه‌ی ثابت طراحی شده است. از مزایای عمده‌ی این روش می‌توان به موارد زیر اشاره کرد.

- عدم نیاز به اندازه‌گیری یا تخمین حالات چرخش زاویه‌ای و سرعت زاویه‌ای مربوط به بازو.

جدول 4 مقایسه انتگرال سطح زیر نمودار خروجی کنترل گرها

مرتبه‌ی کنترل گر	وضعیت	مجموع انتگرال سطح سه کنترل گر	حد اکثر فراجهدش یا فروجهدش چرخش زاویه‌ای (ثانیه)	زمان نشست
صفر	ناپایدار	بی‌نهایت	بی‌نهایت	بی‌نهایت
یک	ناپایدار	بی‌نهایت	بی‌نهایت	بی‌نهایت
دو	پایدار	1/8512	1/1988	3/15
سه	پایدار	1/7586	1/2338	3/39
چهار	پایدار	1/7172	1/2890	3/73
پنج	پایدار	1/5093	1/3683	3/80
شش	پایدار	1/3591	1/4010	4/91

- [13] W. Guanghai, D. Zhisheng, L. Zhongkui, C. Guanrong, Consensus of multi-agent systems with Lipschitz nonlinear dynamics and intermittent communications, in *Control Conference (CCC), 31st Chinese*, 2012, pp. 6232–6238.
- [14] G. Zhai, S. Okuno, J. Imae, and T. Kobayashi, A new consensus algorithm for multi-agent systems via decentralized dynamic output feedback, *J. Intell. Robot. Syst.*, Vol. 63, No. 2, pp. 309–322, 2011.
- [15] F. Zhang, Matrix theory: basic results and techniques. Springer Science & Business Media, 2011.
- [16] M. Sojoodi and V. Johari Majd, A Fixed-Order Robust Decentralized Dynamic Output Feedback Controller Design for Large Scale Systems with Nonlinear Uncertainty, *JOC*, Vol. 4, No. 3, 2010. (In Persian)
- [17] J. Wu and Y. Shi, Consensus in multi-agent systems with random delays governed by a Markov chain, *Syst. Control Lett.*, Vol. 60, No. 10, pp. 863–870, 2012.
- [18] M. R. Doost Mohammadian, *Development of Control Strategies for Consensus in Multi-agent Systems*, Master thesis Mechanical Engineering of Sharif University, 2009. (In Persian)
- [19] G. Zhai, S. Okuno, J. Imae, and T. Kobayashi, A new consensus algorithm for multi-agent systems via dynamic output feedback control, in *IEEE Control Applications, (CCA) Intelligent Control, (ISIC)*, 2009, pp. 890–895.
- [20] M. M. Zavlanos, M. B. Egerstedt, and G. J. Pappas, Graph-theoretic connectivity control of mobile robot networks, *Proc. IEEE*, Vol. 99, No. 9, pp. 1525–1540, 2011.
- [21] C.-L. LIU and F. LIU, consensus problem of second-order multi-agent systems with input delay, *international journal of information and system science*, Vol. 7, No. 2, pp. 175-191, 2010.
- [22] S. Boyd, L. El Ghaoul, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear matrix inequalities in system and control theory*, Vol. 15. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1987.
- [23] A. M. Pertew, H. J. Marquez, Q. Zhao, A direct sampled-data design approach for robot stabilization, in *American Control Conference*, 2008, pp. 369–374.
- [24] S. Raghavan and J. K. Hedrick, Observer design for a class of nonlinear systems, *Int. J. Control*, Vol. 59, No. 2, pp. 515–528, 1994.
- [25] M. S. Mahmoud, *Decentralized Systems with Design Constraints*. Springer, 2011.
- [26] Z. Li, X. Liu, M. Fu, Global consensus control of Lipschitz nonlinear multi-agent systems, in *Proceedings of the 18th IFAC World Congress*, 2011, pp. 10056–10061.

سازی شده است. با مقایسه با روش مشابه پیشین که با در اختیار داشتن تمام حالات سامانه اقدام به طراحی کنترل گر تضمین کننده‌ی توافق جمعی شده است، تلاش کنترل گر در اینجا کمتر و نوسان و فراجهدش محدودتر است.

## 6- مراجع

- [1] D. Chen and S. Dong, The application of multi-agent system in robot football game, Vol. 17, pp. 183-187, 2013.
- [2] P. Zarafshan, S. A. A. Moosavian, Adaptive Hybrid Suppression Control of a Wheeled Mobile Robot with Flexible Solar Panels, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 13, No. 5, pp. 130-143, 2012. (In Persian)
- [3] D. Zhao, W. Ni, Q. Zhu, A framework of neural networks based consensus control for multiple robotic manipulators, *Neurocomputing*, Vol. 140, pp. 8-18, 2014.
- [4] I. H. Akyuz, E. Yolacan, H. M. Ertunc, PID and state feedback control of a single-link flexible joint robot manipulator, in *Mechatronics (ICM) IEEE International Conference*, 2011, pp. 409–414.
- [5] M. Salehi, A. Nikoobin, Optimal trajectory planning of flexible joint manipulator: maximum load carrying capacity minimum vibration, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 13, No. 14, pp. 68-80, 2013. (In Persian)
- [6] A. Salehi, M. Sadigh, Control of a Manipulator with Elastic Base Moving on Unknown Path, *JoC*, Vol. 6 No.2, pp. 39-54, 2012. (In Persian)
- [7] P. Miguel Santos Pires, *Trajectory Control of a Single Link Rigid-Flexible Manipulator*, PhD Thesis, Technical University of Lisbon, 2007.
- [8] E. Nuno, Leader Follower and Leaderless Consensus in Networks of Flexible-Joint Manipulators, *Congr. Nac. Control Automático*, 2013.
- [9] M. H. Korayem, A. M. Shafei, Application of recursive Gibbs-Appell formulation in deriving the motion equation of revolute-prismatic joints, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 12, No. 13, pp. 1-10, 2012. (In Persian)
- [10] M. W. Spong, S. Hutchinson, M. Vidyasagar, *Robot modeling and control*. John Wiley & Sons New York, 2006.
- [11] Z. Li, X. Liu, M. Fu, and L. Xie, Global H<sub>∞</sub> consensus of multi-agent systems with Lipschitz non-linear dynamics, *Control Theory Appl. IET*, Vol. 6, No. 13, pp. 2041–2048, 2012.
- [12] G. Wen, Z. Duan, G. Chen, Consensus tracking of multi-agent systems with lipschitz-type node dynamics and switching topologies, *Circuits and Systems I IEEE Transactions*, Vol. 61, pp. 499-511, 2013.