



آنالیز حرکت و شکل سقوط خزشی قطرات غیرنیوتنی در سیال لزج

محمود نوروزی^{1*}، بهروز زارع وامرزان²، بهار فیروزآبادی³

1- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود
 2- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود
 3- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف، تهران
 *شاهرود، صندوق پستی 3619995161، mnorouzi@shahroodut.ac.ir

چکیده

در این مقاله، حرکت و شکل پایای خزشی قطره غیرنیوتنی در فاز نیوتنی به صورت تحلیلی بررسی شده است. در تحقیق حاضر از مدل فوق همرفتی ماکسول برای فاز قطره و از مدل نیوتنی برای فاز محیط پیرامون آن استفاده شده است. حل تحلیلی با استفاده از روش حساب اغتشاشات صورت گرفته و عدد دوبرا که نشان دهنده خاصیت الاستیک قطره است به عنوان پارامتر اغتشاشی در نظر گرفته شده است. محاسبه تحلیلی تا مرتبه دوم پارامتر اغتشاشی انجام شده و در نتیجه برای قطراتی که از محلول‌های رقیق پلیمری ساخته شده‌اند، از دقت مناسبی برخوردار است. نتایج حاصل از این مقاله نشان می‌دهد که، شکل پایای قطره نیوتنی در حال سقوط خزشی در سیال نیوتنی دیگر، کاملاً کروی است اما قطره غیرنیوتنی به دلیل وجود خاصیت الاستیک از این موضوع پیروی نمی‌کند. به عبارت دیگر، قطره غیرنیوتنی در حال سقوط، حالت کروی خود را از دست داده و شکل پهن شده به خود می‌گیرد. با افزایش خاصیت الاستیک در قسمت بالایی قطره، یک فرورفتگی ایجاد می‌شود. نتایج حاصل شده در این پژوهش گواهی از این دارد که حل تحلیلی حاضر نسبت به تحقیقات تحلیلی پیشین دارای مطابقت بهتری با نتایج آزمایشگاهی است. همچنین منشأ اثر تغییر شکل قطره نیز مورد توجه قرار گرفته و اثبات شده است که خاصیت الاستیک فاز قطره سبب ایجاد تمرکز تنش نرمال شعاعی در پشت قطره شده که این امر به ایجاد فرورفتگی در آن ناحیه، منجر می‌شود.

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
 دریافت: 11 اسفند 1392
 پذیرش: 09 اردیبهشت 1393
 ارائه در سایت: 16 مهر 1393
 کلید واژگان:
 قطره غیرنیوتنی
 مدل فوق همرفتی ماکسول
 عدد دوبرا
 آنالیز اغتشاش

Analysis of Motion and Shape of Non-Newtonian Falling Drops in a Viscous Liquid

Mahmoud Norouzi^{1*}, Behroz Zare Vamerzani¹, Bahar Firoozabadi²

1- Department of Mechanical Engineering, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran.

2- Department of Mechanical Engineering, Sharif University of Technology, Tehran, Iran.

*P.O.B. 361 9995161 Shahrood, Iran, mnorouzi@shahroodut.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
 Received 02 March 2014
 Accepted 29 April 2014
 Available Online 08 October 2014

Keywords:

non-Newtonian drop
 UCM model
 Deborah number
 perturbation technique

ABSTRACT

In this paper, steady creeping motion of non-Newtonian falling drop through a viscous fluid is investigated analytically. Here, the Upper Convected Maxwell model (UCM) is used for drop phase and Newtonian model is considered for external fluid. The perturbation technique is used to solve both exterior and interior flows and Deborah number, which indicate the elastic effect is considered as the perturbation parameter. The present solution is derived up to second order of perturbation parameter so this solution has suitable accuracy for drops made from dilute polymeric solutions. It was found that the Newtonian drop has a spherical shape during the creeping motion but the non-Newtonian drop loses this shape and takes an oblate form. By increasing the elastic effect, a dimple at the rear end of the drop is created and developed. Here, it is shown that the present results have better agreement with experimental data than the previous analytical studies. The origin of drop deformation is also considered and it is proved that the elastic property of drop phase creates a concentrated normal stress at the rear end of the drop that causes the dimple shape in this region.

1- مقدمه

نیروگاه، تولید داروهای پزشکی و تصفیه خانه‌ها دارای کاربرد است [1]. حرکت و شکل قطره در حال سقوط/برخاست به تنش‌های بین دو سیال، نیروی اینرسی، کشش سطحی، جاذبه و گرادیان فشار بین دو سیال وابسته است. هادامارد [2] و ریزنسکی [3] سقوط خزشی قطره نیوتنی در سیال ویسکوز را به صورت تحلیلی بررسی کردند. نتایج آن‌ها نشان داد که

سقوط/برخاست قطره در سیال مخلوط نشدنی در حوزه صنعت و مطالعات آکادمیک همواره مورد توجه بوده است. حرکت و شکل قطره در حال سقوط در زمینه‌های فرآیند تخمیر، اختلاط، جداسازی و وسایل انتقال حرارت مهم و اساسی بوده است. این موضوع در صنایع بسیاری از جمله نفت و پتروشیمی،

شکل قطره نیوتنی در حال سقوط بعد از رسیدن به حالت پایا، کروی باقی می‌ماند. هم‌چنین در این پژوهش نیروی پسای¹ وارده بر سطح قطره و سرعت نهایی² آن به صورت تحلیلی محاسبه شده است. تیلور و آکریوس [4] به صورت تحلیلی نشان دادند که در اعداد رینولدز نزدیک صفر و موینگی³ پایین، شکل قطره دقیقاً کروی باقی می‌ماند اما، با افزایش عدد رینولدز شکل قطره پهن شده⁴ به خود می‌گیرد. امین‌زاده و همکاران [5] حرکت و تغییر شکل یک قطره و یک دنباله از قطرات در حال بالاروی در آب را به صورت آزمایشگاهی مطالعه نمودند. آن‌ها تغییر شکل و ضرایب پسای مربوط به یک قطره منفرد و یک قطره مشخص در دنباله قطرات را بررسی کردند. در این پژوهش، تأثیر خواص غیرنیوتنی مایعات بر رفتارهای مذکور بررسی و مشخص شد، افزودن ویژگی‌های ویسکوالاستیک به قطرات موجب افزایش پایداری در شکل آن‌ها می‌شود. کو و لیل [6] شکل قطره نیوتنی در حال سقوط که در ابتدا کروی نبوده را به صورت عددی ارزیابی و مشاهده نمودند که برای اعداد موینگی پایین و در حالتی که تغییرات شکل ابتدایی قطرات نسبت به حالت کروی زیاد نباشد، قطرات به حالت کروی باز می‌گردند. در غیر این صورت، به ازای تغییرات ابتدایی بزرگ، قطرات شکل پهن شده یا دوکی⁵ به خود می‌گیرند.

در مطالعه‌ای دیگر دینامیک بالا آمدن حباب گاز به صورت عددی بررسی شده است [7]. در این پژوهش تغییر شکل حباب و اثر نیروی کشش سطحی بر آن، در محدوده وسیعی از اعداد رینولدز⁶ بررسی شده است. سوستارز و بلمونته [8] شبیه‌سازی آزمایشگاهی و تحلیلی سقوط قطره ویسکوالاستیک⁷ را در فاز مایع انجام دادند. نتایج حاصل از این تحقیق بیان‌گر این است که، به ازای قطرات با حجم به اندازه کافی کوچک، قطرات در حالت کروی باقی مانده و با افزایش حجم آن، قطره حالت کروی خود را از دست می‌دهد. در این مطالعه مشخص شد که با ادامه روند افزایش حجم قطره در حال سقوط یک فرو رفتگی در قسمت بالایی قطره پدید می‌آید. اخیراً، حرکت و تغییر شکل قطره ویسکوالاستیک در سیال نیوتنی به صورت عددی مطالعه شده است [9]. آن‌ها اثرات ویسکوالاستیسیته را بر شکل قطره در حال سقوط بررسی کردند. نتایج حاصل از این تحقیق حاکی از آن است که، افزایش خاصیت الاستیک قطره در حال سقوط، باعث ایجاد یک گودی در قسمت بالایی قطره می‌شود. آگراوال و سرکار [10] تغییر شکل یک قطره ویسکوالاستیک در سیال نیوتنی برای عدد رینولدز پایین ($Re=0.1$) را به صورت عددی بررسی کردند. در این پژوهش از معادله ساختاری اولر-وید-بی⁸ برای مدل کردن قطره در حال حرکت استفاده شده است. از سوی دیگر، اثرات خاصیت الاستیک و نسبت لزجت قطره به سیال نیوتنی، بر تغییر شکل قطره تحقیق شده است. نتایج نشان می‌دهند که، در اعداد موینگی بالا افزایش خاصیت الاستیک سبب افزایش تغییر شکل قطره می‌شود. امین‌زاده و همکاران [11] حرکت قطرات نیوتنی و غیرنیوتنی را به صورت آزمایشگاهی بررسی کردند. برای ارزیابی اثر سیال بیرونی⁹ که قطره در آن حرکت می‌کند از آب و هوا به عنوان سیالات با خواص متفاوت که دارای کاربری وسیع صنعتی هستند، استفاده شده است. محدوده رژیم جریان آن‌ها

500 < Re < 50 بوده و آنالیز تصاویر حاصل شده از دوربین سرعت بالا به‌عنوان روش آزمایش بکار رفته است.

اسماگین و همکاران [12] سقوط خزشی قطره پلاستیک بینگهام را در فاز نیوتنی به صورت عددی بررسی کردند. هم‌چنین، شکل قطره نیوتنی در حال حرکت در سیال غیرنیوتنی ساکن به صورت آزمایشگاهی بر اساس عدد ایتوس¹⁰ [1] و به صورت عددی با استفاده از روش حجم محدود و معادله ساختاری FENE-R¹¹ برای فاز غیرنیوتنی شبیه‌سازی شده است [13].

مشاهده می‌شود، بررسی شکل و حرکت قطره در فاز دیگر به‌علت کاربرد وسیع آن در صنعت از سوی مراجع زیادی [11, 8, 1] مورد توجه قرار گرفته است.

با توجه به تحقیقات انجام شده، بررسی سقوط قطره بیشتر به صورت عددی و آزمایشگاهی صورت گرفته و به دلیل پیچیدگی روش تحلیلی، کمتر بدین صورت مطالعه شده است.

در مطالعه حاضر، حرکت و شکل خزشی قطره غیرنیوتنی در حال سقوط در سیال نیوتنی در حالت پایا به صورت تحلیلی بررسی شده است. در این پژوهش از مدل فوق همرفتی ماکسول¹² برای شبیه‌سازی قطره غیرنیوتنی در حال سقوط به‌همراه تکنیک حساب اغتشاشات برای هر دو سیال داخلی (قطره غیرنیوتنی) و خارجی (سیال نیوتنی) به‌عنوان روش حل تحلیلی استفاده شده است. عدد بی‌بعد دبور¹³ به‌عنوان پارامتر اغتشاشی در نظر گرفته شده است. در این مقاله تأثیر خواص گروه‌های بی‌بعد حاکم بر مسئله مسئله از قبیل نسبت لزجت قطره به سیال نیوتنی (k)، اعداد بی‌بعد دبور و موینگی بر شکل و حرکت قطره بررسی شده است. نحوه توزیع ترم عمودی تنش غیرنیوتنی که یکی از مهم‌ترین نیروهای وارده بر سطح قطره می‌باشد، نمایش داده شده و تغییرات مقادیر آن با تغییر خاصیت الاستیک قطره بررسی شده است. هم‌چنین شکل جریان‌های داخل قطره به صورت کمی با تغییرات اثر الاستیک قطره ترسیم شده است.

2- روش تحقیق

در تحقیق حاضر، برای جداسازی پارامترهای قطره غیرنیوتنی (سیال داخلی) از سیال نیوتنی (خارجی) بدین صورت عمل می‌شود که تمامی پارامترهای قطره با علامت مد (\sim) و سیال نیوتنی اطراف آن بدون این علامت معرفی شده‌اند. هم‌چنین علامت (\wedge) بالای پارامترها نشان دهنده بعددار بودن آن‌ها و عدم حضور این علامت نشانگر بی‌بعد بودن معادلات می‌باشد.

گروه‌های بی‌بعد با کمک رابطه (1) تعریف می‌شوند.

فاز قطره:

$$De = \frac{\lambda U_0}{R}, \tilde{\tau} = \frac{\hat{\tau} R}{\tilde{\eta}_0 U_0}, \tilde{\rho} = \frac{\hat{\rho} R}{\tilde{\eta}_0 U_0}$$

$$\tilde{u} = \frac{\hat{u}}{U_0}, \tilde{D} = \frac{\hat{D} R}{U_0}, d = \frac{\hat{d} R}{U_0} \quad (1)$$

در معادله بالا De عدد دبور (خاصیت الاستیک سیال)، λ زمان رهایی از تنش، U_0 سرعت مرجع قطره، $\tilde{\eta}_0$ لزجت قطره در نرخ برش صفر و R شعاع

معادل قطره است که به صورت $R = \left(\frac{3vol}{4\pi} \right)^{\frac{1}{3}}$ (حجم قطره) تعریف

10- Eotvos
11- Constitutive equation
12- Upper Convected Maxwell
13- Deborah

1- Drag Force
2- Terminal Velocity
3- Capillary
4- Oblate
5- Prolate
6- Reynolds
7- Viscoelastic
8- Oldroyd- B
9- External/Bulk Fluid

$$\nabla \bar{p} = \nabla \cdot \bar{\tau} + \frac{\bar{\rho} g R^2}{\bar{\eta}_0 U_0} \quad (9)$$

سیال داخلی (قطره غیرنیوتنی) به وسیله معادله ساختاری فوق همرفتی ماکسول مدل شده است که به صورت رابطه (10) تعریف می‌شود [15]:

$$\bar{\tau} + \lambda_1 \hat{d} \bar{\tau} = 2 \bar{\eta}_0 \bar{D} \quad (10)$$

با استفاده از پارامترهای بی‌بعدسازی معرفی شده در معادله (1)، شکل بی‌بعد مدل فوق همرفتی ماکسول به صورت رابطه (11) به دست می‌آید:

$$\bar{\tau} + \text{De} \bar{\tau} = 2 \bar{D} \quad (11)$$

در فصل مشترک دو سیال داخلی و خارجی شرایط مرزی زیر برقرار می‌باشد:

- مؤلفه‌های عمودی سرعت هر دو سیال برابر صفر می‌باشند.
- مؤلفه‌های مماسی سرعت و تنش با هم برابرند.
- برآیند نیروهای وارده در فصل مشترک دو سیال با رابطه (12) بیان می‌شود [16].

$$n \cdot (\hat{\tau} - \bar{\tau}) \cdot n - \hat{p} + \bar{p} = \Gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (12)$$

که n بردار نرمال یکه بر سطح قطره، \hat{R}_1 و \hat{R}_2 شعاع انحنا قطره و Γ نیروی کشش سطحی بین دو سیال می‌باشند. در واقع، مؤلفه‌های عمودی تنش قطره و سیال نیوتنی در معادله (12) جایگذاری می‌شوند. با بی‌بعدسازی معادله (12) به وسیله معادلات (1) و (2)، رابطه (13) به دست می‌آید.

$$n \cdot (\tau - \bar{\tau}) \cdot n - p + \bar{p} = \frac{1}{\text{Ca}} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (13)$$

برای به دست آوردن شکل پایای قطره، فرض شده است که قطره از حالت کروی ($r=1$) به شکل $r=1+\zeta(\mu)$ که $\mu = \cos \theta$ ، تغییر شکل دهد. برای به دست آوردن شکل پایای قطره غیرنیوتنی باید تابع $\zeta(\mu)$ محاسبه شود. برای تغییر شکل‌های کوچک ($|\zeta| \ll 1$)، جمله انحنای قطره در معادله (12) به صورت رابطه (14) قابل نمایش می‌باشد [16]:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 2 - 2\zeta - \frac{d}{d\mu} \left[(1 - \mu^2) \frac{d\zeta}{d\mu} \right] \quad (14)$$

با جایگذاری معادله (14) در معادله (13)، رابطه (15) حاصل می‌شود.

$$n \cdot (\tau - \bar{\tau}) \cdot n - p + \bar{p} = \frac{1}{\text{Ca}} (2 - 2\zeta - \frac{d}{d\mu} [(1 - \mu^2) \frac{d\zeta}{d\mu}]) \quad (15)$$

معادله بالا دو شرط رابطه (16) را ارضا می‌کند [16]:

$$\int_{-1}^1 \zeta d\mu = 0, \quad \int_{-1}^1 \mu d\mu = 0 \quad (16)$$

پروفیل‌های سرعت و فشار و تانسورهای تنش و تغییر شکل برای سیال قطره حول عدد دورا تا جمله دوم بسط داده می‌شود (روابط (17) تا (20)):

$$\bar{u} = \bar{u}_0 + \text{De} \bar{u}_1 + \text{De}^2 \bar{u}_2 + O(\text{De}^3) \quad (17)$$

$$\bar{p} = \bar{p}_0 + \text{De} \bar{p}_1 + \text{De}^2 \bar{p}_2 + O(\text{De}^3) \quad (18)$$

$$\bar{\tau} = \bar{\tau}_0 + \text{De} \bar{\tau}_1 + \text{De}^2 \bar{\tau}_2 + O(\text{De}^3) \quad (19)$$

$$\bar{D} = \bar{D}_0 + \text{De} \bar{D}_1 + \text{De}^2 \bar{D}_2 + O(\text{De}^3) \quad (20)$$

همچنین اپراتور مشتق همرفتی برای فاز قطره به صورت رابطه (21) بسط داده می‌شود.

می‌شود. همچنین $\hat{d}, \hat{D}, \hat{\tau}$ به ترتیب، تانسور تنش، تغییر شکل و اپراتور مشتق همرفتی برای سیال غیرنیوتنی هستند که به صورت رابطه (2) تعریف می‌شود.

$$\hat{d}(\hat{\tau}) = \left(\frac{\partial \hat{\tau}}{\partial t} + \hat{u} \cdot (\nabla \hat{\tau}) \right) - \left[(\nabla \hat{u}) \cdot \hat{\tau} + \hat{\tau} \cdot (\nabla \hat{u}^T) \right] \quad (2)$$

گروه‌های بی‌بعد فاز سیال نیوتنی با رابطه (3) تعریف می‌شوند:

$$\tau = \frac{\hat{\tau} R}{\eta U_\infty}, \quad \rho = \frac{\hat{\rho} R}{\eta U_\infty}, \quad u = \frac{\hat{u}}{U_\infty} \quad (3)$$

$$\text{Ca} = \frac{\eta U_\infty}{\Gamma}, \quad \text{Re} = \frac{\rho R U_\infty}{\eta}$$

در معادله (3)، Ca عدد بی‌بعد موینگی، Re عدد رینولدز، ρ دانسیته سیال نیوتنی، U_∞ سرعت نهایی مرجع، η لزجت سیال نیوتنی، Γ نیروی کشش سطحی بین دو سیال و $\hat{\tau}$ تانسور تنش سیال خارجی است. با توجه به اختلاف لزجت بین سیال داخلی (قطره) و خارجی (نیوتنی) و تأثیر این پارامتر روی شکل و حرکت قطره، عدد بی‌بعد k ، که نسبت لزجت قطره در نرخ برش صفر ($\bar{\eta}_0$) به لزجت سیال محیط (η) است، با کمک رابطه (4) تعریف می‌شود.

$$k = \frac{\bar{\eta}_0}{\eta} \quad (4)$$

با توجه به معادله (4) و اختلاف لزجت دو سیال داخلی (قطره غیرنیوتنی) و سیال خارجی (نیوتنی)، سرعت مرجع قطره ویسکوالاستیک (U_0) با سرعت نهایی سیال خارجی (U_∞) دارای رابطه‌ای به صورت معادله (5) می‌باشد:

$$U_0 = \frac{U_\infty}{(k+1)} \quad (5)$$

در این مقاله تأثیر گروه‌های بی‌بعد مانند اعداد دورا، موینگی و نسبت لزجت دو سیال روی شکل و حرکت قطره غیرنیوتنی ارزیابی شده است.

3- حل تحلیلی

برای حل تحلیلی از روش آنالیز اغتشاشات برای هر دو سیال داخلی و خارجی بهره گرفته شده است. رژیم جریان هر دو سیال داخل و خارج، خزشی فرض شده $\text{Re} \approx 1$ ، از این رو معادلات استوکس [14] برای هر دو جریان صادق است. فرضیات مسئله به صورت زیر می‌باشد:

- هر دو سیال داخلی و خارجی تراکم ناپذیر هستند.
- جریان هر دو سیال پایاست.
- شکل قطرات دارای تقارن محوری می‌باشند.
- از اثر اینرسی به دلیل خزشی بودن جریان صرف نظر شده است.

شکل بی‌بعد معادلات پیوستگی و مومنتم برای سیال خارجی، (6) و (7)، و سیال داخلی، (8) و (9)، عبارتند از:

$$\nabla \cdot u = 0 \quad (6)$$

$$\nabla p = \nabla \cdot \tau + \frac{\rho g R^2}{\eta U_\infty} \quad (7)$$

در رابطه‌های (6) و (7)، $D = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T)$ است.

$$\nabla \cdot \bar{u} = 0 \quad (8)$$

$$Q_n(\mu) = \int_{-1}^{\mu} P_n(s) ds \quad (34)$$

برای فاز قطره و به ازای $n \geq 1$ مقادیر A_n و B_n صفر بوده و برای سیال خارجی در $n \geq 1$ مقدار D_n و در $n \geq 2$ مقدار C_n صفر می‌باشد. با اعمال شرایط مرزی که پیش‌تر بیان شد تابع جریان برای مرتبه صفر، به‌صورت روابط (35-الف) و (35-ب) است:

$$\tilde{\psi}_0 = \frac{1}{2}(r^2 - r^4)Q_1(\mu) \quad (35\text{-الف})$$

$$\psi_0 = -\frac{1}{2}(2r^2 - \frac{3k+2}{k+1}r + \frac{k}{k+1}\frac{1}{r})Q_1(\mu) \quad (35\text{-ب})$$

که $Q_1(\mu) = -\frac{1}{2}\sin^2\theta$ می‌باشد.

برای مرتبه‌های یک و دو عدد دوبرا پروفیل جریان با حذف فشار از معادلات مومنتم هر مرتبه و معادله (33) به‌دست می‌آید. از آنجایی که سیال خارجی نیوتنی بوده، همواره رابطه (36) برقرار است.

$$E^4\psi_1 = 0 \quad (36)$$

در مقابل برای هر مرتبه عدد دوبرا سیال داخلی با توجه به غیرنیوتنی بودن آن باید معادله مومنتم محاسبه شود. برای سیال داخلی (قطره) معادله مومنتم به ازای مرتبه اول عدد دوبرا $\left(O(De^1)\right)$ به‌صورت رابطه (37) قابل بیان است.

$$\nabla \tilde{p}_1 = \Delta \tilde{u}_1 + f_1(\tilde{u}_0), \quad f_1(\tilde{u}_0) = -\nabla \cdot (d_0 \tilde{D}_0) \quad (37)$$

با حذف عبارت فشار از معادله (37) رابطه (38) به‌دست می‌آید:

$$E^4 \tilde{\psi}_1 = r \sin \theta \left[\nabla \times f_1(\tilde{u}_0) \right] \cdot \hat{e}_\phi = 0 \quad (38)$$

با استفاده از شرایط مرزی و معادله (33) پروفیل جریان داخلی و خارجی برای مرتبه اول دوبرا به‌صورت روابط (39) است:

$$\tilde{\psi}_1 = \frac{9k}{10(k+1)}(r^3 - r^5)Q_2(\mu) \quad (39\text{-الف})$$

$$\psi_1 = \frac{9k}{10(k+1)^2}\left(\frac{1}{r^2} - 1\right)Q_2(\mu) \quad (39\text{-ب})$$

در معادله بالا $Q_2(\mu) = \frac{1}{2}\sin^2\theta \cos\theta$ می‌باشد. معادله مومنتم برای جریان داخلی قطره غیر نیوتنی برای مرتبه دوم دوبرا به‌صورت رابطه (40) قابل بیان است:

$$\nabla \tilde{p}_2 = \Delta \tilde{u}_2 + f_2(\tilde{u}_0, \tilde{u}_1), \quad f_2(\tilde{u}_0, \tilde{u}_1) = -\nabla \cdot \left[d_1 \tilde{D}_0 + d_0 (\tilde{D}_1 - d_0 \tilde{D}_0) \right] \quad (40)$$

با حذف عبارت فشار از رابطه (40)، رابطه (41) به‌دست می‌آید:

$$E^4 \tilde{\psi}_2 = r \sin \theta \left[\nabla \times f_2(\tilde{u}_0, \tilde{u}_1) \right] \cdot \hat{e}_\phi = 140ar^2 \sin^2 \theta, \quad a = -\frac{3(41k+20)}{1400(k+1)} \quad (41)$$

با استفاده از شرایط مرزی در $r(\theta)=1$ معادله (33) پروفیل جریان داخلی و خارجی برای مرتبه دوم عدد دوبرا به‌صورت روابط (42) است.

$$\tilde{\psi}_2 = (a(r^6 - r^2) + C_1(r^2 - r^4))Q_1(\mu) + C_3(r^4 - r^6)Q_3(\mu) \quad (42\text{-الف})$$

$$\psi_2 = A_1\left(\frac{1}{r} - r\right)Q_1(\mu) + A_3\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r}\right)Q_3(\mu) \quad (42\text{-ب})$$

$$d(j) = d_0(j) + De d_1(j) + De^2 d_2(j) + O(De^3) \quad (21)$$

با استفاده از معادلات فوق و جایگذاری در معادله (11)، روابط (22-الف) تا (22-ج) به‌دست می‌آید.

$$\tilde{\tau}_0 = 2\tilde{D}_0 \quad (22\text{-الف})$$

$$\tilde{\tau}_1 = 2\tilde{D}_1 - 2d_0\tilde{D}_0 \quad (22\text{-ب})$$

$$\tilde{\tau}_2 = 2\tilde{D}_2 - 2d_0(\tilde{D}_1 - d_0\tilde{D}_0) - 2d_1\tilde{D}_0 \quad (22\text{-ج})$$

مانند فاز قطره، پروفیل‌های سرعت و فشار، تانسورهای تنش و تغییر شکل سیال خارجی (نیوتنی) حول عدد دوبرا بسط داده می‌شود. به‌دلیل نیوتنی بودن سیال خارجی برای تمامی مرتبه‌های آن رابطه (23) برقرار است:

$$\tau_1 = 2D_1 \quad (23)$$

تابع جریان برای هر دو سیال به‌صورت روابط (24) و (25) بسط داده می‌شود:

$$\tilde{\psi} = \tilde{\psi}_0 + De \tilde{\psi}_1 + De^2 \tilde{\psi}_2 \quad (24)$$

$$\psi = \psi_0 + De \psi_1 + De^2 \psi_2 \quad (25)$$

دستگاه مختصات کروی برای هر دو جریان داخلی و خارجی استفاده شده است. بنابراین، پروفیل‌های سرعت برای تمامی جملات به‌صورت روابط (26) و (27) قابل محاسبه می‌باشند [14]:

$$\tilde{u}_j(r, \theta) = \left(\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \tilde{\psi}_j}{\partial \theta}, -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tilde{\psi}_j}{\partial r} \right) \quad (26)$$

$$u_j(r, \theta) = \left(\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi_j}{\partial \theta}, -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi_j}{\partial r} \right) \quad (27)$$

با تفکیک پارامترهای هم‌مرتبه معادله استوکس برای مرتبه صفر $O(1)$ به‌صورت روابط (28) و (29) بیان می‌شود:

$$\nabla \tilde{p}_0 = \Delta \tilde{u}_0 + \frac{\tilde{\rho} g R^2}{\tilde{\eta}_0 U_0} \quad (28)$$

$$\nabla p_0 = \Delta u_0 + \frac{\rho g R^2}{\eta U_\infty} \quad (29)$$

با حذف جمله فشار با به‌کارگیری تابع ورتیسسته¹ روابط (30) و (31) به‌دست می‌آیند:

$$\nabla^4 \tilde{\psi}_0 = 0 \quad (30)$$

$$\nabla^4 \psi_0 = 0 \quad (31)$$

در معادله بالا $\nabla^4 \equiv \nabla^2 \nabla^2$ و اپراتور ∇^2 در مختصات کروی به‌صورت رابطه (32) قابل تعریف می‌باشد [14].

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \quad (32)$$

با توجه به تئوری هاپل و برنر [17]، حل معادله استوکس در مختصات کروی به‌صورت رابطه (33) قابل بیان است:

$$\psi(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n r^{-n} + B_n r^{2-n} + C_n r^{n+1} + D_n r^{n+3}) Q_n(\mu) \quad (33)$$

که $\mu = \cos \theta$ و $Q_n(\mu)$ (سری ججنبر²) با سری لژاندر³ به‌صورت معادله (34) رابطه دارند.

1- Vorticity
2- Gegenbauer
3- Legendre

$$\begin{aligned} \delta p - 4\alpha_2 \text{DeP}_2(\mu) + 10\alpha_3 \text{De}^2 \text{P}_3(\mu) \\ = \frac{1}{\text{Ca}} \left(2 - 2\zeta - \frac{d}{d\mu} \left[(1 - \mu^2) \frac{d\zeta}{d\mu} \right] \right), \\ \delta p = \frac{2}{\text{Ca}}, \\ \alpha_2 = \frac{k(56k + 114)}{80(k+1)^2}, \\ \alpha_3 = \frac{1}{7000(k+1)^3} (34k^3 + 3309k^2 + 9078k + 385) \end{aligned} \quad (51)$$

با اعمال شرایط مرزی یاد شده در معادله (16)، صورت حل شده معادله (51) به صورت رابطه (52) می‌باشد.

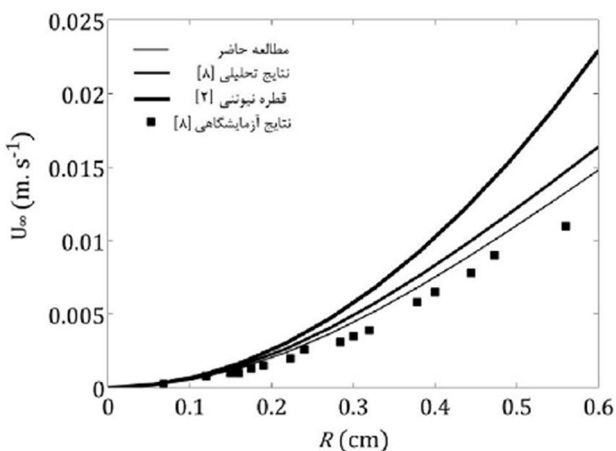
$$\begin{aligned} \zeta(\mu) = -\alpha_2 \text{DeCaP}_2(\cos\theta) - \beta_3 \text{DeCa}^2 \text{P}_3(\cos\theta) \\ + \alpha_3 \text{De}^2 \text{CaP}_3(\cos\theta) \end{aligned} \quad (52)$$

شکل پایای قطره غیرنیوتنی ماکسول به صورت رابطه (53) قابل بیان است.

$$r(\theta) = 1 + \zeta(\mu) \quad (53)$$

4- نتایج

در مطالعه حاضر، حرکت و شکل پایای خزشی سقوط قطره غیرنیوتنی در فاز نیوتنی به صورت تحلیلی بررسی شده است. در شکل 1 سرعت نهایی قطره غیرنیوتنی نسبت به شعاع معادل قطره، نمایش داده شده است. سوستارز و بلمونته [8] سقوط خزشی قطره غیرنیوتنی را به صورت تحلیلی و آزمایشگاهی بررسی کردند و هادامارد [2] شکل پایای سقوط خزشی قطره نیوتنی در فاز مایع را به صورت تحلیلی به دست آورده است. با توجه به شکل 1 نتیجه می‌شود که سرعت نهایی قطره غیرنیوتنی نسبت به قطره نیوتنی کاهش می‌یابد. از این رو، افزایش خاصیت الاستیک قطره کاهش سرعت نهایی آن را در پی دارد. به عبارت دیگر، قطره نیوتنی با خاصیت الاستیک تقریباً صفر، بیشترین سرعت سقوط را دارا می‌باشد. کاهش سرعت نهایی قطره غیرنیوتنی به تغییر شکل قطره و افزایش نیروی درگ وارده بر سطح آن مربوط می‌شود. مشاهده می‌شود افزایش حجم قطره اختلاف میان سرعت نهایی قطره نیوتنی [2] با قطره غیرنیوتنی را افزایش می‌دهد. همچنین شکل 1 نشان می‌دهد،



شکل 1 سرعت نهایی قطره غیرنیوتنی نسبت به شعاع معادل

که $Q_3(\mu) = -\frac{1}{8} \sin^2 \theta (5 \cos^2 \theta - 1)$ و کمیت‌های A ، C از رابطه (43) به دست می‌آیند.

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{150} \frac{k(45 + 63k + 200ak + 200a)}{(k+1)^3}, \\ A_3 &= \frac{3}{175} \frac{k(-95 + 82k)}{(k+1)^3}, \\ C_1 &= \frac{1}{150} \frac{(63k^2 + 45k + 500ak^2 + 800ak + 300a)}{(k+1)^2}, \\ C_3 &= \frac{3}{175} \frac{k(-95 + 82k)}{(k+1)^2} \end{aligned} \quad (43)$$

برآیند نیروهای وارد بر سطح قطره شامل نیروی شناوری و درگ بوده و از رابطه (44) به دست می‌آید.

$$F = F_D + F_B \quad (44)$$

نیروی شناوری در معادله (44) به صورت رابطه (45) تعریف می‌شود:

$$F_B = \frac{4\pi R^2(\rho - \bar{\rho})}{3\eta U_\infty} \quad (45)$$

همچنین با استفاده از تئوری پایه و پل [18] نیروی درگ وارده بر سطح قطره از رابطه (46) قابل محاسبه است.

$$F_D = 8\pi \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\psi_\infty - \psi(r, \theta)}{r \sin^2 \theta} \quad (46)$$

در رابطه (46) ψ_∞ تابع جریان آزاد نام دارد و به صورت رابطه (47) تعریف می‌شود:

$$\psi_\infty = \frac{r^2 \sin^2 \theta}{2} \quad (47)$$

با استفاده از معادله (25) رابطه (48) حاصل می‌شود.

$$\psi = \psi_0 + \text{De}\psi_1 + \text{De}^2\psi_2 \quad (48)$$

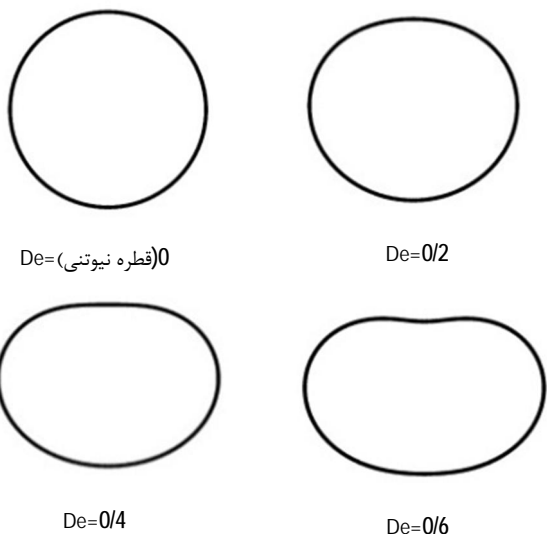
با جایگذاری معادله (48) در رابطه (46) نیروی درگ وارده بر سطح قطره غیرنیوتنی از رابطه (49) محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned} \frac{F_D}{2\pi} &= F_0 + \text{De}F_1 + \text{De}^2F_2, \\ F_0 &= \frac{3k+2}{k+1}, \quad F_1 = 0, \\ F_2 &= -\frac{k(45 + 63k + 200ak + 200a)}{75(k+1)^2} \end{aligned} \quad (49)$$

در حالت پایا برآیند نیروهای وارده بر سطح قطره صفر می‌باشد، بنابراین با جایگذاری معادلات (45) و (49) در معادله (44) می‌توان سرعت نهایی قطره غیرنیوتنی در حالت پایا را از رابطه (50) محاسبه نمود:

$$U_\infty = \frac{2(\bar{\rho} - \rho)gR^2}{3\eta(F_0 + \text{De}F_1 + \text{De}^2F_2)} \quad (50)$$

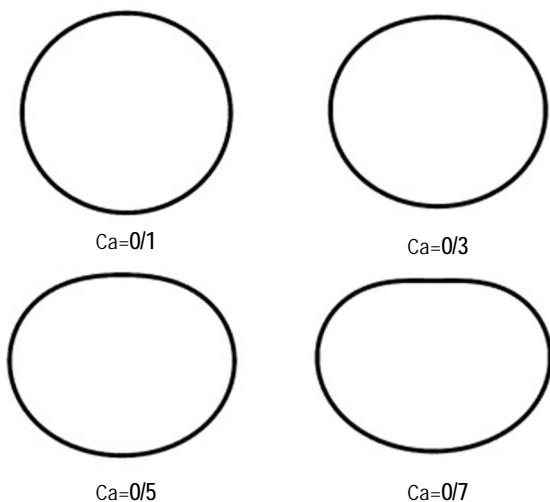
شکل قطره با حل معادله (15) با استفاده از شرایط مرزی ذکر شده در معادله (16) قابل محاسبه است (رابطه (51)).



شکل 3 شکل پایای قطره غیرنیوتنی با تغییرات عدد دپورا (خاصیت الاستیک)
 $Ca = 0.65, k = 20$

سطحی بین دو سیال و نهایتاً تغییر شکل پایای قطره می‌شود. این موضوع در معادلات (51) و (52) نمایان می‌باشد. نیروی کشش سطحی همواره سعی دارد به گونه‌ای نماید که قطره در حال سقوط، کمترین سطح را در فصل مشترک دو سیال اشغال نماید. به عبارت دیگر، نیروی کشش سطحی سعی دارد شکل کروی قطره را حفظ نماید. افزایش عدد موئینگی نیروی کشش سطحی بین دو سیال (داخلی و خارجی) را کاهش داده و سبب تغییر شکل قطره می‌شود. مطابق شکل 4، افزایش عدد موئینگی باعث می‌شود قطره از حالت کروی خود، نسبت به حالت نیوتنی فاصله بگیرد و شکل پهن شده را برای خود اختیار نماید.

در شکل 5، تغییرات شکل پایای قطره غیرنیوتنی در حال سقوط در فاز نیوتنی در مقابل نسبت لزجت $(k = \bar{\eta}_0 / \eta)$ ترسیم شده است. مشاهده می‌شود، تغییرات نسبت لزجت به ازای مقادیر بزرگتر از واحد تأثیر زیادی در شکل پایای قطره ندارد. به عبارت دیگر، برای مقادیر بزرگتر از یک قطره شکل



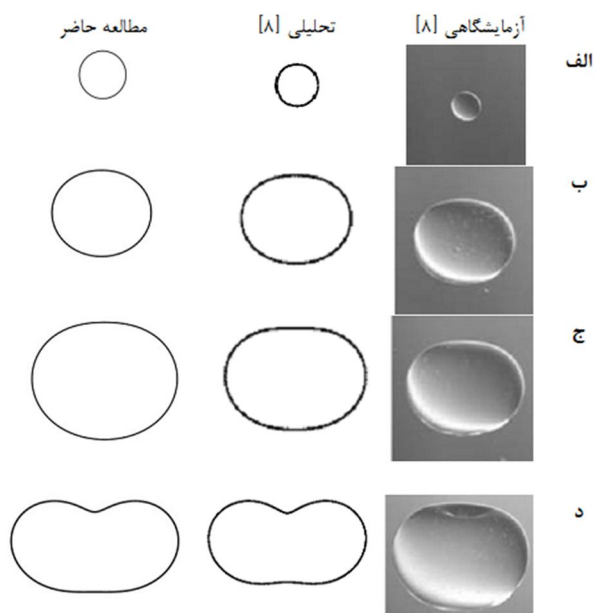
شکل 4 شکل پایای قطره غیرنیوتنی با تغییرات عدد دپورا (خاصیت الاستیک)
 $De = 0.4, k = 20$

نتایج حاصل از حل تحلیلی با استفاده از مدل فوق همرفتی ماکسول (تحقیق حاضر) دارای مطابقت خوبی با نتایج پیشین آزمایشگاهی [8] است و نسبت به حل تحلیل سوستارز و بلمونته [8] دارای خطای کمتری می‌باشد.

در شکل 2 نتایج تحلیلی و آزمایشگاهی مرجع [8] با نتایج تحلیلی حاصل از مطالعه حاضر برای قطره غیرنیوتنی 0/16% وزنی زانتان گام¹ با 20:80 حجمی آب/گلیسرین² و روغن پلی‌دیمتیل‌سیلوگزان³ با لزجت 9.8 پوایز⁴ مقایسه شده است. به ازای مقادیر به اندازه کافی کوچک حجم، قطره حالت کروی خود را حفظ می‌کند (قسمت الف). در این حالت نیروی کشش سطحی به عنوان نیروی غالب وارد بر سطح قطره می‌باشد. با افزایش حجم قطره، تنش‌های ویسکوالاستیک غیرنیوتنی سیال افزایش می‌یابد و بر کشش سطحی وارد غلبه می‌کند. روند افزایشی حجم قطره ایجاد یک فرورفتگی در قسمت بالایی قطره را در پی دارد. نتایج حاصل از حل تحلیلی در این پژوهش که با استفاده از مدل فوق همرفتی ماکسول حاصل شده دارای مطابقت خوبی با نتایج آزمایشگاهی حاصل از مرجع [8] می‌باشد.

شکل 3 شکل‌های پایای قطره در حال سقوط خزشی در فاز نیوتنی برای اعداد الاستیک مختلف را نشان می‌دهد. عدد دپورا نشان دهنده خاصیت الاستیک فاز قطره می‌باشد. برای $De = 0$ ، قطره در حال سقوط نیوتنی بوده و مشاهده می‌شود شکل پایای آن دقیقاً کروی است [2]. با افزایش خاصیت الاستیک، قطره شکل کروی خود را از دست داده و شکل پهن شده به خود می‌گیرد. همچنین ادامه روند افزایشی خاصیت الاستیک سبب ایجاد یک فرورفتگی در قسمت بالایی قطره که در $De = 0/6$ شکل 2 قابل مشاهده است، می‌شود.

شکل 4 تصویر پایای قطره غیرنیوتنی در حال سقوط را در فاز نیوتنی برای اعداد موئینگی مختلف نشان می‌دهد. تغییرات عدد موئینگی سبب تغییر مقدار تنش‌های وارد بر سطح قطره و تغییر مقدار نیروی کشش

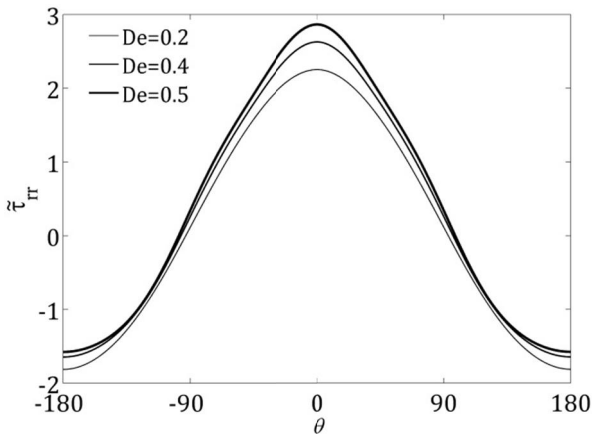


شکل 2 مقایسه شکل پایای قطره در حال سقوط مقاله حاضر با نتایج آزمایشگاهی و تحلیلی مرجع [8]. حجم قطرات: الف) 0/01 ب) 0/12 ج) 0/21 د) 0/52 میلی‌لیتر می‌باشند.

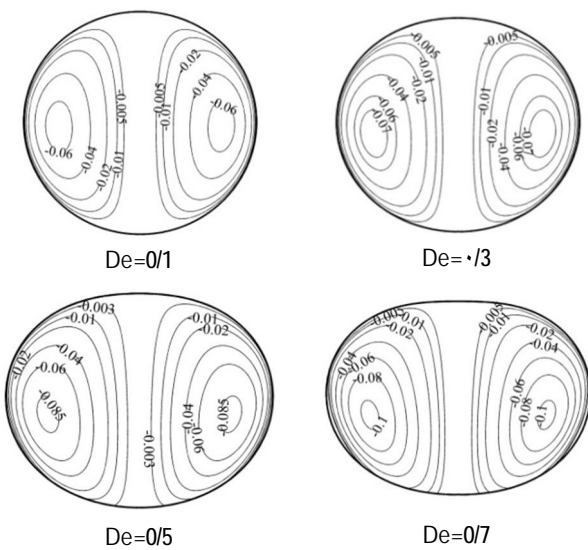
1- Xanthan Gum
 2- Glycerol
 3- Polydimethylsiloxane (PDMS)
 4- Poise

شکل 7 تغییرات مؤلفه عمودی تنش غیرنیوتنی قطره ($\bar{\tau}_{rr}$) را برای اعداد مختلف دپورا نمایش می‌دهد. مؤلفه عمودی تنش غیرنیوتنی وارده بر سطح قطره، یکی از مهم‌ترین عوامل تغییر شکل پایای قطره در حال سقوط می‌باشد [8]. با توجه به شکل 6، بیشینه مقدار مؤلفه عمودی تنش در قطره در حال سقوط در قسمت بالایی قطره ($\theta=0$) اتفاق می‌افتد. افزایش خاصیت الاستیک در فاز قطره سبب افزایش مؤلفه عمودی تنش غیرنیوتنی در این قسمت می‌شود. از این‌رو، با افزایش خاصیت الاستیک قطره یک فرورفتگی در بالای آن ایجاد شده و توسعه می‌یابد.

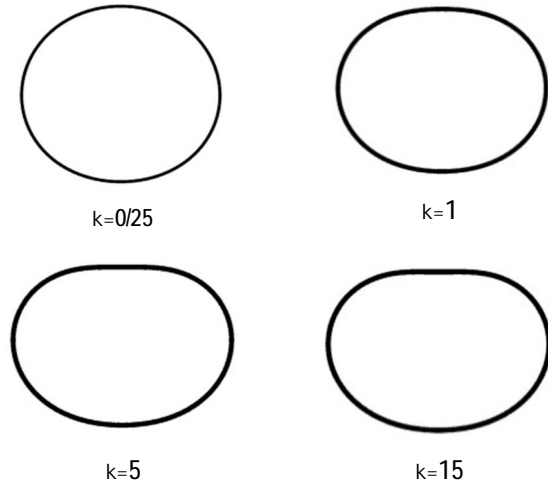
شکل 8 بردارهای سرعت و شکل پایای جریان داخل قطره غیرنیوتنی در حال سقوط خزشی را به صورت کمی نمایش می‌دهد. داخل قطره دو گردابه متقارن محوری وجود دارد که گردابه سمت راست در جهت عقربه‌های ساعت می‌چرخد و جهت گردابه‌های سمت چپ عکس آن می‌باشد. مشاهده می‌شود، افزایش خاصیت الاستیک سیال قطره در حال سقوط، شدت بردارهای سرعت داخل قطره را افزایش می‌دهد. هرچه فاصله از مرکز گردابه افزایش یابد شدت گردابه کاهش می‌یابد. به عبارت دیگر، بیشینه مقدار کمی بردار سرعت داخل قطره در مرکز گردابه قرار دارد و افزایش خاصیت الاستیک قطره باعث افزایش این مقدار می‌شود.



شکل 7 تغییرات مؤلفه $\bar{\tau}_{rr}$ روی سطح قطره برای اعداد دپورا مختلف $k=5$.



شکل 8 بردارهای سرعت داخل قطره غیرنیوتنی با تغییرات خاصیت الاستیک سیال $Ca=0.4, k=15$.

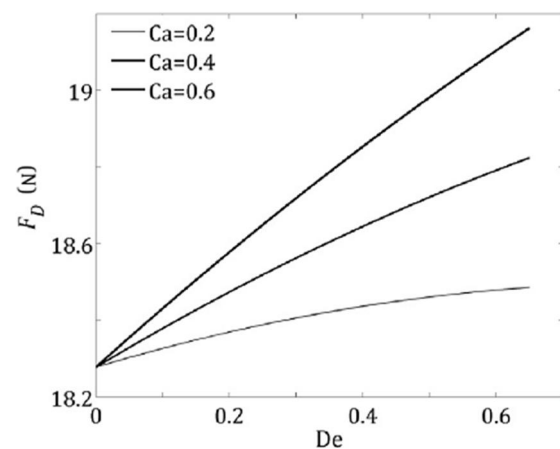


شکل 5 شکل پایای قطره غیرنیوتنی با تغییرات نسبت لزجت (k)

$$De = 0.6, Ca = 0.5$$

پهن شده خود را حفظ کرده و تغییر محسوسی در آن نمایان نمی‌شود. حال آن‌که، شکل قطره برای نسبت لزجت کوچکتر از واحد دارای تفاوت قابل فهم می‌باشد.

شکل 6 تغییرات نیروی درگ وارده بر سطح قطره در حال سقوط را در مقابل عدد دپورا به ازای اعداد موئینگی مختلف نشان می‌دهد. در این شکل می‌توان اثر خاصیت الاستیک قطره را روی نیروی درگ مشاهده نمود. با توجه به این شکل، افزایش خاصیت الاستیک در فاز قطره افزایش نیروی درگ وارده را در پی دارد. برای عدد دپورا صفر به ازای اعداد موئینگی مختلف، مقدار نیروی درگ وارده ثابت می‌باشد زیرا، در این وضعیت قطره در حال سقوط نیوتنی بوده و شکل آن بدون هیچ تغییری کاملاً کروی می‌باشد. افزایش عدد موئینگی سبب افزایش نیروی درگ در قطرات غیرنیوتنی می‌شود. افزایش خاصیت الاستیک قطره، افزایش تغییر شکل قطره را در پی دارد و ادامه روند افزایش آن سبب توسعه این تغییر شکل می‌شود. بنابراین، از شکل 6 نتیجه می‌شود که رشد تغییر شکل پایای قطره غیرنیوتنی به واسطه افزایش خاصیت الاستیک یا موئینگی، نیروی درگ وارده بر سطح آن را افزایش می‌دهد.



شکل 6 تغییرات نیروی درگ وارده بر سطح قطره نسبت به عدد دپورا به ازای عدد موئینگی مختلف.

5- نتیجه گیری

در مقاله حاضر، حرکت و شکل پایای سقوط خزشی قطره غیرنیوتنی در سیال نیوتنی به صورت تحلیلی مورد بررسی قرار گرفته است. در این پژوهش، آنالیز اغتشاشات به عنوان روش حل تحلیلی و عدد دپورا که نشان دهنده خاصیت الاستیک قطره است، تا مرتبه دوم به عنوان پارامتر اغتشاشی استفاده شده است. در مطالعه حاضر شکل پایای قطره در حال سقوط نسبت به پارامترهای تأثیرگذار بررسی و مورد بحث قرار گرفته است. نتایج حاصل از این مطالعه نشان می‌دهد که شکل پایای قطره نیوتنی در حال سقوط خزشی در سیال نیوتنی کاملاً کروی می‌باشد. اما قطره غیرنیوتنی همواره از این موضوع پیروی نمی‌کند. بدین معنی که با افزایش خاصیت الاستیک قطره در حال سقوط، قطره حالت کروی خود را از دست داده و شکل پهن شده به خود می‌گیرد. با ادامه روند افزایش خاصیت الاستیک، یک فرورفتگی در قسمت بالایی قطره ایجاد می‌شود. از سوی دیگر، شکل پایای قطره غیرنیوتنی به نیروی کشش سطحی بین دو سیال هم وابسته است و افزایش عدد موینگی سبب افزایش تغییر شکل قطره نسبت به حالت کروی می‌شود. تمرکز مؤلفه عمودی تنش غیرنیوتنی در قسمت بالایی قطره، تغییر شکل و تولید فرورفتگی در آن ناحیه را به دنبال دارد. همچنین مشاهده شد، افزایش خاصیت الاستیک کاهش سرعت نهایی سقوط قطره غیرنیوتنی به دلیل افزایش نیروی درگ وارده بر سطح قطره را به دنبال دارد. به عبارت دیگر، سرعت پایای قطره غیرنیوتنی نسبت به قطره نیوتنی در حال سقوط کمتر می‌باشد. نتایج حاصل از حل تحلیلی در این مقاله دارای تطابق مناسبی با مشاهدات آزمایشگاهی مطالعات پیشین می‌باشد. یکی از نتایج مهم مورد مطالعه در این مقاله، بررسی کمی تغییرات بردارهای داخلی سرعت قطره نسبت به خاصیت الاستیک بوده است. مشاهده گردید، افزایش خاصیت الاستیک قطره افزایش کمی قدرت گردابه‌های موجود در آن را به همراه دارد.

6- مراجع

- [1] R. K. Wanchoo, S. K. Sharma, R. Gupta, Shape of a Newtonian liquid drop moving through an immiscible quiescent non-Newtonian liquid, *Chemical Engineering and Processing*. Vol. 42, PP. 387-393, 2003.
- [2] J. Hadamard, Mouvement permanent lent d'une sphere liquide et visqueuse dans un liquide, *C. R. Acad. Sci. Paris*. Vol. 152, pp. 1735-1738, 1911. (In French)
- [3] W. Rzybczynski, Uber die fortschreitende Bewegung einer flüssigen Kugel in einem zähen Medium, *Bull. Acad. Sci. Cracovie A*, pp. 40-46. 1911. (In German)
- [4] T.D. Taylor, A. Acrivos, On the deformation and drag of a falling viscous drop at low Reynolds number, *Journal of Fluid Mechanics*. Vol. 18, pp. 466-476, 1964.
- [5] M. Aminzadeh, A. Maleki, H. Afshin, B. Firoozabadi, Experimental investigation on rising of a sequence of drops in a viscous fluid, *Journal of solid and fluid Mechanics*. Vol. 1, pp. 39-46, 2011. (In Persian)
- [6] C. J. Koh, L. G. Leal, The stability of drop shapes for translation at zero Reynolds number through a quiescent fluid, *physics of Fluids A*, Vol. 1 (1309) pp. 1-5, 1989.
- [7] Smolianski, A. Haario, P. Luukka, Numerical bubble dynamics, *Computer Aided Chemical Engineering*. Vol.14, pp. 941-946, 2003.
- [8] M.C. Sostarecz, A. Belmonte, Motion and shape of a viscoelastic drop falling through a viscous fluid, *Journal of Fluid Mechanics*. Vol. 497, pp. 235-252, 2003.
- [9] S. Mukherjee, K. Sarkar, Viscoelastic drop falling through a viscous medium, *Physics of Fluids*, Vol. 23 (013101), pp. 1-8, 2011.
- [10] N. Aggarwal, K. Sarkar, Deformation and breakup of a viscoelastic drop in a Newtonian matrix under steady shear *Journal of Fluid Mechanics*. Vol. 584, pp. 1-21, 2007.
- [11] M. Aminzadeh, A. Maleki, B. Firoozabadi, H. Afshin, on the motion of Newtonian and non-Newtonian liquid drops, *Scientia Iranica B*, Vol. 19 (5), pp. 1265-1278, 2012.
- [12] I. Smagin, M. Pathak, O.M. Lavrenteva, A.Nir, Motion and shape of an axisymmetric viscoplastic drop slowly falling through a viscous fluid, *Rheologica Acta*, Vol. 50, pp. 361-374, 2011.
- [13] R. You, A. Borhan, H. Haj-Hariri, A finite volume formulation for simulating drop motion in a viscoelastic two-phase system in a viscoelastic two-phase system, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. Vol. 153, pp. 109-129, 2008.
- [14] F.M. White, *Viscose fluid flow*, pp. 173-180, third ed., New York, 2006.
- [15] R.B. Bird, R.C. Armstrong, O. Hassager, *Dynamics of Polymeric Liquids, fluid dynamics*, Vol. 1, second ed., Wiley, New York, 1987.
- [16] L. Landau, I. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, pp. 238-250, Pergamon, 1959.
- [17] J. Happel, H. Brenner, *Low Reynolds Number Hydrodynamics*, Prentice-Hall, pp. 152-168, 1965.
- [18] L.E. Payne, W.H. Pell, The Stokes flow problem for a class of axially symmetric bodies, *Journal of Fluid Mechanics*. Vol. 7, pp. 529-542, 1960.
- [1] R. K. Wanchoo, S. K. Sharma, R. Gupta, Shape of a Newtonian liquid drop moving through an immiscible quiescent non-Newtonian liquid,