مجله مهندسی مکانیک مدرس، اسفند 1394، دوره 15، شماره 12، ص‌ص 367-375

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

تحلیل کمانش پوسته‌های مخروطی کامپوزیتی نسبتا جدار ضخیم با استفاده از روش گالرکین و تفاضل مربعات

محسن حسینی[1]، مصطفی طالبی‌توتی[2]*

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی قم، قم
2- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی قم، قم
* قم، صندوق پستی 1519-37195، talebi@qut.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 12 مرداد 1394
پذیرش: 10 آبان 1394
ارائه در سایت: 14 آذر 1394

کلید واژگان:
بار بحرانی کمانش
پوسته مخروطی کامپوزیتی
روش گالرکین
روش تفاضل مربعات
تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول

چکیده

هدف از این تحقیق، ارائه روش نیمه تحلیلی جهت بررسی کمانش پوسته‌های مخروطی کامپوزیتی نسبتا جدار ضخیم تحت بار محوری می‌باشد. بدین منظور جهت استخراج معادلات تعادل سیستم، از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول پوسته‌ها استفاده شده است. معادلات تعادل با اعمال اصل مینیمم پتانسیل انرژی به تابع انرژی استخراج شده است که به صورت معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی می‌باشند. در ادامه به کمک روش‌های گالرکین و تفاضل مربعات، معادلات دیفرانسیل به معادلات جبری تبدیل شده و سپس معادله استاندارد مقدار ویژه تشکیل و بار بحرانی کمانش محاسبه شده است. همچنین، برای بررسی صحت استخراج معادلات و روش حل استفاده شده در این تحقیق، نتایج به‌دست آمده با نتایج حاصل از تحقیقات دیگر محققین در این زمینه و نتایج تحلیل عددی حاصل از نرم افزار اجزای محدود آباکوس، مقایسه شده‌اند. بررسی نتایج نشان از سرعت همگرایی و صحت روش تفاضل مربعات و دقت مطلوب روش گالرکین در محاسبه بار بحرانی کمانش پوسته مورد بررسی دارد. در نهایت، اثر زاویه مخروط، زاویه الیاف، شرایط مرزی مختلف، نسبت‌های ضخامت به شعاع و طول به شعاع بر روی بار بحرانی کمانش بررسی گردیده است.

Buckling analysis of moderately thick composite conical shells using Galerkin and DQ methods

Mohsen Hosseini, Mostafa Talebitooti*

Department of Mechanical Engineering, Qom University of Technology, Qom, Iran
* P.O.B. 37195-1519, Qom, Iran, talebi@qut.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 03 August 2015
Accepted 01 November 2015
Available Online 05 December 2015

Keywords:
Critical Buckling Load
Composite Conical Shell
Galerkin Method
Differential Quadrature Method
First order Shear Deformation Theory

ABSTRACT

The objective of this investigation is to present a semi-analytical method for studying the buckling of the moderately thick composite conical shells under axial compressive load. In order to derive the equilibrium equations of the conical shell, first order shear deformation shell theory is used. The equilibrium equations are derived by applying the principle of minimum potential energy to the energy function that they are, in the type of partial differential equations. In the following, the partial differential equations are transformed to algebraic type by using Galerkin and differential quadrature methods and then the standard eigenvalue equation is formed and critical buckling load is calculated. Also, to validate the results obtained in this study, comparisons are made with outcomes of previous literature and the results of Abaqus finite element software. Analyzing the results shows the convergence speed and good accuracy of differential quadrature method and desired precision of Galerkin method in calculating the critical buckling load. Finally, the effect of cone angle, fiber orientation, boundary conditions, ratios of thickness to radius and length to radius of the critical buckling load are studied.

1- مقدمه

پوسته‌های مخروطی کامپوزیتی، کاربردهای وسیعی در صنایع هوافضا، حمل‌ونقل هوایی و سازه‌های دریایی دارند. این گستردگی کاربرد، توجه محققان بسیاری را معطوف به بررسی تغییرشکل، کمانش و ارتعاشات این پوسته‌ها نموده است.

تحقیقات فراوانی در زمینه کمانش و ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای در سال‌های گذشته صورت گرفته است. ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی دو بعدی روی بستر الاستیک توسط ابراهیمی و نجفی‌زاده [1] بررسی گردید. این تحقیق بر اساس تئوری کلاسیک پوسته‌ها و با حل معادلات با روش عددی تفاضل مربعات[1] صورت پذیرفت. یک حل تحلیلی برای جابجایی، فرکانس طبیعی و بار کمانش پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی توسط خدیر و همکاران [2] انجام گرفت. همچنین تحقیق مشابه‌ای توسط شادمهری و همکاران [3] در سال 2014 با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول[2] و برای شرایط مرزی متفاوت صورت پذیرفت.

1- Differential Quadrature Method (DQM)
1- First Order Shear Deformation Theory (FSDT)

Please cite this article using:

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

M. Hosseini, M. Talebitooti, Buckling analysis of moderately thick composite conical shells using Galerkin and DQ methods, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 12, pp. 367-375, 2015 (in Persian)

یک فرمول ساده برای کمانش پوسته‌های مخروطی ایزوتروپیک توسط سید [4] بدست آمده و بعدها توسط لاکمن و رنزین [5] اصلاح شد. فرمول سید مستقل از شرایط مرزی و مناسب برای پوسته‌های طویل بود. اگرچه مواد کامپوزیتی اخیرا کاربردهای صنعتی فراوانی داشته است، اما تحقیقات محدودی در زمینه کمانش پوسته‌های مخروطی کامپوزیتی چندلایه انجام شده است. کمانش پوسته مخروطی کامپوزیتی چندلایه تحت بار محوری و فشار خارجی توسط تانگ و همکارانش [7،6] مورد مطالعه قرار گرفت. ایشان با استفاده از تئوری کلاسیک دانل[1] و با استفاده از سری توانی، بار کمانش پوسته مورد نظر را در مودهای محیطی مختلف و شرایط مرزی متفاوت مورد ارزیابی قرار دادند. تحلیل کمانش پوسته‌های مخروطی کامپوزیتی توسط الازاوی [8] با تئوری پوسته لاو[2] و مرتبه سوم با فرض میدان جابجایی با سری توانی صورت گرفت. نتایج بدست آمده با تئوری مذکور با اختلاف ناچیزی، کمتر از نتایج حاصل از تئوری کلاسیک پوسته‌ها بودند. در سال 2012 اژدری و همکارانش [9] به بررسی کمانش پوسته مخروطی کامپوزیتی چندلایه با استفاده از روش تحلیلی و اجزای محدود پرداختند. ایشان بر اساس تئوری کلاسیک دانل و روش گالرکین[3] و ریتز[4] بار کمانش فشاری و محوری پوسته مخروطی را بدست آوردند. شادمهری و همکارانش [10]، پاسخ کمانش خطی پوسته مخروطی کامپوزیتی چندلایه تحت بار محوری را با استفاده از یک روش نیمه‌تحلیلی مورد مطالعه قرار دادند. در این تحقیق، از تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی استفاده شده است و با استفاده از مینیمم‌سازی انرژی پتانسیل و همچنین استفاده از روش ریتز، بار کمانش مسئله مورد نظر، فقط برای شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده بدست آمده است. ایشان در تحقیق خود، اثر تغییر شکل برشی عرضی را نیز در نظر گرفته‌اند، زیرا ثابت شده که تئوری کلاسیک پوسته‌ها، برای پوسته‌های نسبتا جدار ضخیم از دقت کافی برخوردار نیست [12،11].

اخیرا روش‌های عددی نیز سهم قابل توجهی از مطالعات مربوط به کمانش و ارتعاشات پوسته‌ها را تشکیل داده‌اند. لام و هوآ [13] با استفاده از روش عددی گالرکین، ارتعاشات آزاد پوسته‌های مخروطی ایزوتروپیک با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده را بررسی کردند. صوفیف [14] با استفاده از تئوری پوسته دانل به حل ارتعاشات و کمانش پوسته مخروطی مدرج تابعی با استفاده از روش گالرکین پرداخت. کمانش پوسته‌های استوانه‌ای ساندویچی تحت بار خارجی یکنواخت و شرایط مرزی دوسرگیردار توسط لوپاتین و مورازوف [15] بررسی گردید. ایشان حل معادلات دیفرانسیل را با روش عددی گالرکین انجام داده و نتایج را با روش اجزاء محدود مقایسه کردند. از سال 1988 روش عددی کارآمدی به نام تفاضل مربعات در تحلیل سازه‌ها استفاده شده است که در سال‌های اخیر، کاربردهای فراوانی در حل معادلات دیفرانسیل یافته است [16]. تحلیل کمانش پوسته استوانه‌ای با روش عددی تفاضل مربعات، توسط میرفخرائی و ردکاپ [17] انجام گردید. وو و لی [18] ارتعاشات آزاد پوسته‌های مخروطی کامپوزیتی با سفتی متغیر را بررسی کردند. ایشان با در نظر گرفتن اثر تغییر شکل برشی، معادلات حرکت را با استفاده از روش تفاضل مربعات به معادلات جبری تبدیل کرده و با حل مسئله مقدار ویژه، فرکانس طبیعی را بدست آوردند. بررسی پس‌کمانش پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده تحت بار فشاری خارجی توسط شاطرزاده و فروتن [19] انجام گردید. پوسته استوانه‌ای تحت بستر الاستیک وینکلر و پاسترناک[5] قرار داشت. ترابی و همکارانش [20] کمانش حرارتی پوسته‌های مخروطی ساخته‌شده از کامپوزیت‌های تقویت‌شده با توزیع هدفمند نانولوله‌های کربنی را بررسی کردند.

با توجه به آگاهی نویسنده، بررسی کمانش پوسته‌های مخروطی کامپوزیتی نسبتا جدار ضخیم تحت بار محوری و اثر شرایط مرزی مختلف با روش تفاضل مربعات مورد مطالعه قرار نگرفته است. به منظور دستیابی به این هدف، با استفاده از نگرش انرژی و با اعمال اصل مینیمم پتانسیل انرژی به تابع انرژی حاصل، معادلات تعادل استخراج و جهت مقایسه، به کمک دو روش گالرکین و تفاضل مربعات، معادلات حرکت تحت شرایط مرزی مختلف گسسته‌سازی گردیده است. پس از اعتبارسنجی روابط و نتایج حاصل به کمک مقایسه با نتایج موجود در ادبیات تحقیق و نتایج حاصل از نرم‌افزار آباکوس[6]، اثرات زاویه مخروط، شرایط مرزی مختلف، نسبت‌های ضخامت به شعاع و طول به شعاع بر روی بار بحرانی کمانش در این تحقیق بررسی شده است.

2- فرمول‌بندی مسئله

2-1- سینماتیک مسئله

پوسته مخروطی مطابق شکل 1 با طول L، زاویه α ، شعاع کوچک R_1، شعاع بزرگ R_2 و شعاع متوسط R_0 در نظر گرفته شده است. جابه‌جایی پوسته در سه جهت طولی x، محیطی θ و عمود بر پوسته z، به ترتیب با u، v و w نمادگذاری می‌شود. شعاع مخروط در هر نقطه روی پوسته با رابطه (1) بیان می‌گردد.

$$R(x) = R_1 + x\sin\alpha \tag{1}$$

میدان جابه‌جایی در تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی به صورت (2) قابل بیان است.

$$\begin{aligned} u(x,\theta,z) &= u_0(x,\theta,z) + z\beta_x(x,\theta,z) \\ v(x,\theta,z) &= v_0(x,\theta,z) + z\beta_\theta(x,\theta,z) \\ w(x,\theta,z) &= w_0(x,\theta,z) \end{aligned} \tag{2}$$

که u_0، v_0 و w_0 توابعی نامعین هستند که با توجه به شرایط مرزی حدس زده می‌شوند و جابه‌جایی یک نقطه بر روی سطح مرجع $z=0$ می‌باشند. β_x و β_θ چرخش عرضی حول محورهای θ و x می‌باشند.

مؤلفه‌های کرنش بر حسب کرنش‌های سطح مرجع و انحناها بصورت رابطه (3) تعریف می‌گردند.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \varepsilon_{xx}^0 + zk_{xx} \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \varepsilon_{\theta\theta}^0 + zk_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{x\theta} &= \varepsilon_{x\theta}^0 + zk_{x\theta} \\ \varepsilon_{xz} &= \varepsilon_{xz}^0 \\ \varepsilon_{\theta z} &= \varepsilon_{\theta z}^0 \end{aligned} \tag{3}$$

در رابطه (3) ε_x^0، ε_θ^0، $\varepsilon_{x\theta}^0$ ، ε_{xz}^0 و $\varepsilon_{\theta z}^0$ کرنش‌های سطح مرجع و k_x، k_θ و $k_{x\theta}$ انحناهای سطح مرجع هستند که در رابطه (4) و (5) ارتباط آن‌ها با جابه‌جایی‌ها، بیان گردیده است [10].

2- Donnell
3- Love
4- Galerkin
5- Ritz
6- winkler and pasternak
7- Abaqus software

[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.12.54.2]

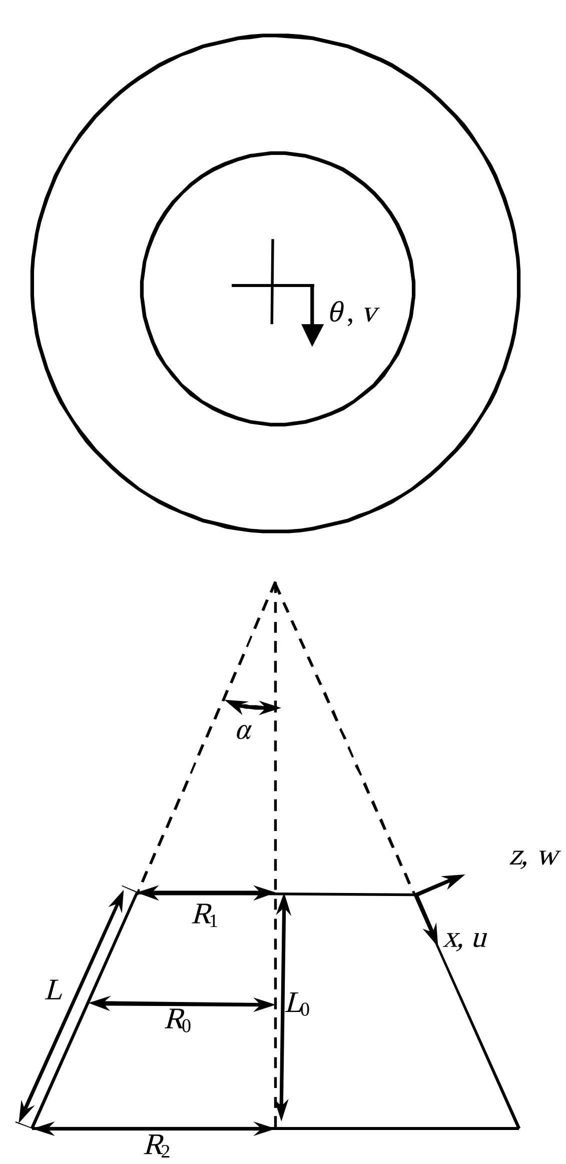

Fig. 1 Conical shell coordinate system

شکل 1 سیستم مختصات پوسته مخروطی

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_{xx}^0\\ \varepsilon_{\theta\theta}^0\\ \varepsilon_{x\theta}^0\\ \varepsilon_{xz}^0\\ \varepsilon_{\theta z}^0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial u_0}{\partial x}\\ \dfrac{1}{R}(\dfrac{\partial v_0}{\partial \theta}+u_0\sin\alpha+w_0\cos\alpha)\\ \dfrac{1}{R}\left(\dfrac{\partial u_0}{\partial \theta}-v_0\sin\alpha\right)+\dfrac{\partial v_0}{\partial x}\\ \beta_x+\dfrac{\partial w_0}{\partial x}\\ \beta_\theta+\dfrac{1}{R}\dfrac{\partial w_0}{\partial \theta}-\dfrac{v}{R}\cos\alpha\end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix}k_{xx}\\ k_{\theta\theta}\\ k_{x\theta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial \beta_x}{\partial x}\\ \dfrac{1}{R}(\dfrac{\partial \beta_\theta}{\partial \theta}+\beta_x\sin\alpha)\\ \dfrac{1}{R}\left(\dfrac{\partial \beta_x}{\partial \theta}-\beta_\theta\sin\alpha\right)+\dfrac{\partial \beta_\theta}{\partial x}\end{bmatrix} \quad (5)$$

2-2- معادلات ساختاری

نیروها و ممان‌های منتجه، طبق رابطه (6) با کرنش‌ها ارتباط می‌یابند [10].

$$\begin{bmatrix}N_{xx}\\ N_{\theta\theta}\\ N_{x\theta}\\ M_{xx}\\ M_{\theta\theta}\\ M_{x\theta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{16}&B_{11}&B_{12}&B_{16}\\ A_{12}&A_{22}&A_{26}&B_{12}&B_{22}&B_{26}\\ A_{16}&A_{26}&A_{66}&B_{16}&B_{26}&B_{66}\\ B_{11}&B_{12}&B_{16}&D_{11}&D_{12}&D_{16}\\ B_{12}&B_{22}&B_{26}&D_{12}&D_{22}&D_{26}\\ B_{16}&B_{26}&B_{66}&D_{16}&D_{26}&D_{66}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_{xx}^0\\ \varepsilon_{\theta\theta}^0\\ \varepsilon_{x\theta}^0\\ \varepsilon_{xz}^0\\ \varepsilon_{\theta z}^0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}Q_{\theta z}\\ Q_{xz}\end{bmatrix}=k_s\begin{bmatrix}A_{44}&A_{45}\\ A_{45}&A_{55}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_{\theta z}^0\\ \varepsilon_{xz}^0\end{bmatrix} \quad (6)$$

که در رابطه (6)، A_{ij}، B_{ij} و D_{ij} به ترتیب سفتی کششی، کوپلینگ و خمشی پوسته می‌باشند که به صورت (7) قابل محاسبه می‌باشند.

$$\{A_{ij},B_{ij},D_{ij}\}=\int_{-h/2}^{h/2}Q_{ij}\{1,z,z^2\}\mathrm{d}z \quad (7)$$

و k_s ، ضریب تصحیح برشی نام دارد و مقدار آن برابر با 5/6 می‌باشد [1].

2-3- معادلات تعادل

انرژی پتانسیل کل در پوسته مخروطی، برابر با مجموع انرژی کرنشی و کار حاصل از بار محوری می‌باشد.

$$\Pi=U+W \quad (8)$$

که در رابطه (8)، U، انرژی کرنشی و W، کار حاصل از نیروی فشاری محوری می‌باشد که با رابطه (9) قابل بیان است.

$$\begin{aligned}U&=\frac{1}{2}\int_V\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\mathrm{d}V\\ &=\frac{1}{2}\int_z\int_\theta\int_x(\sigma_{xx}\varepsilon_{xx}+\sigma_{\theta\theta}\varepsilon_{\theta\theta}+\sigma_{x\theta}\varepsilon_{x\theta}+Q_{xz}\varepsilon_{xz}\\ &\qquad+Q_{\theta z}\varepsilon_{\theta z})R(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z\\ W&=\frac{1}{2}\int_x\int_\theta\widehat{N}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2R(x)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}x\end{aligned} \quad (9)$$

N در رابطه (9)، بار محوری کمانش می‌باشد که در ترم غیرخطی کرنش ضرب گردیده است.

بر طبق اصل مینیمم انرژی پتانسیل، تغییرات مجموع انرژی پتانسیل و انرژی حاصل از بار کمانش باید صفر گردد [10]. به عبارت دیگر:

$$\delta\Pi=\delta U+\delta W=0 \quad (10)$$

با جایگزینی رابطه (9) در (10) و استفاده از انتگرالگیری جزبه‌جز و با صفر قرار دادن ضرایب δu، δv، δw، $\delta\beta_x$ و $\delta\beta_\theta$ ، معادلات تعادل به شکل (11) بدست می‌آیند.

$$\begin{aligned}&\frac{\partial N_{xx}}{\partial x}+(N_{xx}-N_{\theta\theta})\frac{\sin\alpha}{R}+\frac{1}{R}\frac{\partial N_{x\theta}}{\partial \theta}=0\\ &\frac{1}{R}\frac{\partial N_{\theta\theta}}{\partial \theta}+2N_{x\theta}\frac{\sin\alpha}{R}+\frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x}+Q_{\theta z}\frac{\cos\alpha}{R}=0\\ &-N_{\theta\theta}\frac{\cos\alpha}{R}+Q_{xz}\frac{\sin\alpha}{R}+\frac{\partial Q_{xz}}{\partial x}+\frac{1}{R}\frac{\partial Q_{\theta z}}{\partial \theta}+\widehat{N}(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\\ &\qquad+\frac{\sin\alpha}{R}\frac{\partial}{\partial x})=0\\ &\frac{\partial M_{xx}}{\partial x}+(M_{xx}-M_{\theta\theta})\frac{\sin\alpha}{R}+\frac{1}{R}\frac{\partial M_{x\theta}}{\partial \theta}-Q_{xz}=0\\ &\frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x}+2M_{x\theta}\frac{\sin\alpha}{R}+\frac{1}{R}\frac{\partial M_{\theta\theta}}{\partial \theta}-Q_{\theta z}=0\end{aligned} \quad (11)$$

با قرار دادن روابط (1-7) در معادلات تعادل (11) و ساده‌سازی‌های لازم، معادلات تعادل به شکل (12) بازنویسی می‌گردند.

$$\begin{bmatrix}\bar{L}_{11}&\bar{L}_{12}&\bar{L}_{13}&\bar{L}_{14}&\bar{L}_{15}\\ \bar{L}_{21}&\bar{L}_{22}&\bar{L}_{23}&\bar{L}_{24}&\bar{L}_{25}\\ \bar{L}_{31}&\bar{L}_{32}&\bar{L}_{33}&\bar{L}_{34}&\bar{L}_{35}\\ \bar{L}_{41}&\bar{L}_{42}&\bar{L}_{43}&\bar{L}_{44}&\bar{L}_{45}\\ \bar{L}_{51}&\bar{L}_{52}&\bar{L}_{53}&\bar{L}_{54}&\bar{L}_{55}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_0\\ v_0\\ w_0\\ \beta_x\\ \beta_\theta\end{Bmatrix}=0 \quad (12)$$

که L_{ij} عملگرهای دیفرانسیلی بر حسب x و θ می‌باشند که در پیوست آورده شده‌اند.

شرایط مرزی که در این تحقیق مورد بررسی قرار خواهد گرفت، یکی از سه حالت زیر و یا ترکیبی از آن‌ها خواهد بود.

شرط مرزی تکیه‌گاه ساده:

$$v_0=w_0=\beta_\theta=N_{xx}=M_{xx}=0 \quad (13)$$

شرایط مرزی گیردار:

$$u_0=v_0=w_0=\beta_x=\beta_\theta=0 \quad (14)$$

شرایط مرزی آزاد:

$$N_{xx}=M_{xx}=N_{x\theta}=M_{x\theta}=Q_x=0 \quad (15)$$

2-4- حل با روش گالرکین

در روش گالرکین، توابع میدان جابجایی باید به گونه‌ای حدس زده شوند که حداقل شرایط مرزی هندسی را ارضاء کنند. به دلیل اینکه شرایط مرزی هندسی از شرایط مرزی طبیعی در رفتار پوسته مؤثرتر می‌باشند، این روش نیز از دقت مطلوبی در محاسبه بار کمانش پوسته مخروطی کامپوزیتی برخوردار است. برای مثال، در مورد شرایط مرزی دو طرف تکیه‌گاه ساده در پوسته مخروطی، توابع میدان جابجایی را می‌توان به شکل (16) حدس زد.

$$u_0 = U\cos(\frac{m\pi}{L}x)\cos(n\theta)$$
$$v_0 = V\sin(\frac{m\pi}{L}x)\sin(n\theta)$$
$$w_0 = W\sin(\frac{m\pi}{L}x)\cos(n\theta)$$
$$\beta_x = \psi_x \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\cos(n\theta)$$
$$\beta_\theta = \psi_\theta\sin(\frac{m\pi}{L}x)\sin(n\theta) \tag{16}$$

با جایگزینی توابع میدان جابجایی (16) در رابطه (12)، و استفاده از روش گالرکین به شکل (17) انجام می‌گیرد.

$$\int_\theta\int_x (P_{11}U + P_{12}V + P_{13}W + P_{14}\psi_x + P_{15}\psi_\theta)\delta u_0 \mathrm{d}x\mathrm{d}\theta = 0$$
$$\int_\theta\int_x (P_{21}U + P_{22}V + P_{23}W + P_{24}\psi_x + P_{25}\psi_\theta)\delta v_0 \mathrm{d}x\mathrm{d}\theta = 0$$
$$\int_\theta\int_x (P_{31}U + P_{32}V + P_{33}W + P_{34}\psi_x + P_{35}\psi_\theta)\delta w_0 \mathrm{d}x\mathrm{d}\theta = 0$$
$$\int_\theta\int_x (P_{41}U + P_{42}V + P_{43}W + P_{44}\psi_x + P_{45}\psi_\theta)\delta \beta_x \mathrm{d}x\mathrm{d}\theta = 0$$
$$\int_\theta\int_x (P_{51}U + P_{52}V + P_{53}W + P_{54}\psi_x + P_{55}\psi_\theta)\delta \beta_\theta \mathrm{d}x\mathrm{d}\theta = 0 \tag{17}$$

معادلات تعادل، با انتگرالگیری معین از روابط (17)، به شکل ماتریسی (18) تبدیل می‌گردند.

$$\begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{13} & \bar{C}_{14} & \bar{C}_{15} \\ \bar{C}_{21} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{24} & \bar{C}_{25} \\ \bar{C}_{31} & \bar{C}_{32} & \bar{C}_{33} & \bar{C}_{34} & \bar{C}_{35} \\ \bar{C}_{41} & \bar{C}_{42} & \bar{C}_{43} & \bar{C}_{44} & \bar{C}_{45} \\ \bar{C}_{51} & \bar{C}_{52} & \bar{C}_{53} & \bar{C}_{54} & \bar{C}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \\ \psi_x \\ \psi_\theta \end{Bmatrix} = 0 \tag{18}$$

که در آن C_{ij}ها، عبارات جبری بر حسب ثوابت ماده و خصوصیات هندسی پوسته می‌باشند.

معادله (18)، فقط در صورتی جواب غیربدیهی دارد که دترمینان ماتریس ضرایب صفرگردد. به عبارت دیگر:

$$\det([\bar{C}_{ij}]) = 0 \tag{19}$$

با حل معادله (19)، به ازای مقادیر مختلف m و n، بار کمانش بدست می‌آید که کمترین مقدار آن مساوی بار بحرانی کمانش N_b خواهد بود.

2-5- حل با روش تفاضل مربعات

اساس روش تفاضل مربعات بر این اصل استوار است که مشتق یک تابع یکنواخت در یک نقطه در جهتی از مختصات با مجموع وزنی مقدار تابع در تمام نقاط مجزا در همان راستا برابر است و در نهایت منجر به تبدیل معادلات دیفرانسیلی به معادلات جبری می‌گردد. روش فوق از لحاظ ریاضی به صورت (20) بیان می گردد.

$$\left.\frac{\partial^p f(x)}{\partial x^p}\right|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^{N} \bar{E}_{ij}^p f(x_j) \quad , \quad i = 1,2,\dots,N. \tag{20}$$

که $\bar{E}_{ij}^p$ ضرایب وزنی مشتق مرتبه p در نقطه x_i و N تعداد نقاط شبکه می‌باشند. برای یافتن ضرایب وزنی مشتق مرتبه اول، شو و ریچاردز، از فرمول صریح (21) استفاده کردند [16].

$$\bar{E}_{ij}^1 = \frac{\pi(x_i)}{(x_i - x_j)\pi(x_j)}, \quad i,j = 1,2,\dots,N, i \neq j$$
$$\pi(x_i) = \prod_{j=1}^{N}\left(x_i - x_j\right), i \neq j \tag{21}$$

ضرایب وزنی برای مشتق مراتب بالاتر از روابط بازگشتی زیر بدست می‌آیند:

$$\bar{E}_{ij}^p = p\left[\bar{E}_{ii}^{p-1}\bar{E}_{ij}^1 - \frac{\bar{E}_{ij}^{p-1}}{(x_i - x_j)}\right], i,j = 1,2,\dots,N, \quad i \neq j, 2 \leq p \leq N-1 \tag{22}$$

$$\bar{E}_{ij}^p = \bar{E}_{ii}^p = -\sum_{k=1}^{N}\bar{E}_{ik}^p \ , i,j = 1,2,\dots,N, i = j, \quad 1 \leq \mathrm{p} \leq N-1 \tag{23}$$

انتخاب‌های متفاوتی برای نقاط مش می‌توان داشت. اولین انتخاب، مش‌بندی بازه با فواصل یکسان است. اما نشان داده شده که مش‌بندی با نقاط نزدیک به هم در مجاورت شرایط مرزی، موجب همگرایی سریع‌تر جواب‌ها می‌گردد. یکی از روش‌های مش‌بندی مطلوب، روش ارائه شده توسط شو می‌باشد که با رابطه (24) قابل بیان است [16].

$$x_i = \frac{1}{2}(1 - \cos\frac{i-1}{N-1}\pi)L \tag{24}$$

ترم‌های جابه‌جایی برای هر نقطه بر روی پوسته مخروطی به صورت (25) بیان می‌گردد که برای شرایط مرزی مختلف به کار می‌روند.

$$u_0(x,\theta) = U(x)\cos(n\theta)$$
$$v_0(x,\theta) = V(x)\sin(n\theta)$$
$$w_0(x,\theta) = W(x)\cos(n\theta)$$
$$\beta_x(x,\theta) = \psi_x(x)\cos(n\theta)$$
$$\beta_\theta(x,\theta) = \psi_\theta(x)\sin(n\theta) \tag{25}$$

با جاگذاری رابطه (25) در معادلات دیفرانسیل پاره‌ای حرکت، این معادلا ، به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌شوند که در آن ترم‌های $\frac{}{\partial x^p}$ مشاهده می‌شود. معادلات ساده شده به صورت (26) قابل بیان است.

$$L^* U^* = 0 \tag{26}$$

که $U^*=\{U(x),V(x),W(x),\psi_x(x),\psi_\theta(x)\}$ بردار شکل مود و ناشناخته و L^* اپراتور دیفرانسیلی بردار U^* می‌باشد. با استفاده از رابطه (20) و جاگذاری رابطه (27) در رابطه (26)، معادلات جبری حرکت حاصل خواهد شد.

$$U^{(m)}(x_i) = \sum_{j=1}^{N}\bar{E}_{ij}^m U(x_j)$$
$$V^{(m)}(x_i) = \sum_{j=1}^{N}\bar{E}_{ij}^m V(x_j)$$
$$W^{(m)}(x_i) = \sum_{j=1}^{N}\bar{E}_{ij}^m W(x_j)$$
$${\psi_x}^{(m)}(x_i) = \sum_{j=1}^{N}\bar{E}_{ij}^m \psi_x(x_j)$$
$${\psi_\theta}^{(m)}(x_i) = \sum_{j=1}^{N}\bar{E}_{ij}^m \psi_\theta(x_j) \ ; \quad m = 1,2 \tag{27}$$

شرایط مرزی در روش تفاضل مربعات به شکل (28) تا (30) بازنویسی می‌گردند.

شرط مرزی تکیه‌گاه ساده:

$$V(x_j) = W(x_j) = \psi_\theta(x_j) = 0$$
$$N_{xx}(x_j,\theta) = M_{xx}(x_j,\theta) = 0;\ j = 1, N \tag{28}$$

شرط مرزی گیردار:

$$U(x_j) = V(x_j) = W(x_j) = \psi_x(x_j) = \psi_\theta(x_j) = 0$$
$$j = 1, N \tag{29}$$

شرط مرزی آزاد:

$$N_{xx}(x_j,\theta) = M_{xx}(x_j,\theta) = N_{x\theta}(x_j,\theta) = 0$$
$$M_{x\theta}(x_j,\theta) = Q_x = 0;\ j = 1, N \tag{30}$$

با اعمال روش تفاضل مربعات و مرتب‌سازی معادلات تعادل و بازنویسی آن‌ها در یک معادله ماتریسی، امکان اعمال شرط مرزی به معادله تعادل فراهم خواهد شد. برای تشکیل این معادله به صورت ماتریسی، نیاز به جداسازی درجات آزادی شرایط مرزی و دامنه به صورت (31) می‌باشد:

$$\{d\}^{\mathrm{T}} = \left[\{U\}_j\ \ \{V\}_j\ \ \{W\}_j\ \ \{\psi_x\}_j\ \ \{\psi_\theta\}_j\right]_{\mathrm{domain}}$$
$$\{b\}^{\mathrm{T}} = \left[\{U\}_j\ \ \{V\}_j\ \ \{W\}_j\ \ \{\psi_x\}_j\ \ \{\psi_\theta\}_j\right]_{\mathrm{boundary}} \tag{31}$$

با توجه به معادله (31) ، معادلات تعادل پوسته برای بخش مربوط به دامنه به فرم (32) تبدیل می‌شود.

$$[K_{db}]\{b\} + [K_{dd}]\{d\} = \{0\} \tag{32}$$

همچنین برای معادلات مربوط به شرایط مرزی می‌توان نوشت:

$$[K_{bb}]\{b\} + [K_{bd}]\{d\} = \{0\} \tag{33}$$

با استفاده از معادله (33) درجات آزادی شرایط مرزی از معادله (32) می‌تواند حذف گردد و معادله به صورت (34) حاصل می‌گردد.

$$[K]\{d\} = \{0\} \tag{34}$$

به طوری که

$$[K] = [K_{dd}] - [K_{db}][K_{bb}]^{-1}[K_{bd}] \tag{35}$$

معادله (35) بیان‌گر یک مسئله مقدار ویژه می‌باشد که این معادله در صورتی جواب غیربدیهی خواهد داشت که رابطه (36) برقرار باشد.

$$\det([K]) = 0 \tag{36}$$

گسترش رابطه (36)، منجر به معادله جبری زیر می‌گردد.

$$d_0\widehat{N}^8 + d_1\widehat{N}^7 + d_2\widehat{N}^6 + d_3\widehat{N}^5 + d_4\widehat{N}^4 + d_5\widehat{N}^3$$
$$+ d_6\widehat{N}^2 + d_7\widehat{N} + d_8 = 0 \tag{37}$$

کمترین ریشه رابطه (37)، برابر با بار بحرانی کمانش یا N_b خواهد بود.

3- اعتبارسنجی نتایج

برای پوسته‌های استوانه‌ای متعامد، حل دقیق وجود دارد که توسط خدیر و همکاران [2] و شادمهری [3] ارائه گردیده است. برای مقایسه نتایج مقاله حاضر با این مراجع، زاویه مخروط صفر در نظر گرفته شده است. در نمایش نتایج، شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده در دو سر به صورت SS، شرایط مرزی تکیه‌گاه گیردار در دوسر به صورت CC ، شرایط مرزی تکیه ساده در سر کوچک و تکیه‌گاه گیردار در سر بزرگ به صورت SC و شرایط مرزی تکیه‌گاه آزاد در سر کوچک و تکیه‌گاه گیردار در سر بزرگ به صورت FS بیان می‌گردد. همچنین در استخراج نتایج، خواص مکانیکی ماده کربن- اپوکسی [1] به صورت رابطه (38) در نظر گرفته شده است [10].

$$E_{11} = 3.05 \times 10^7\ \mathrm{psi}$$
$$E_{22} = E_{33} = E_{11}/40$$
$$G_{12} = G_{13} = 0.6E_{22}$$
$$G_{23} = 0.5E_{22}$$
$$\nu_{12} = 0.25 \tag{38}$$

در مراجع [2] و [3]، پارامتر بی‌بعد کمانش $\widetilde{N}$ و نسبت‌های شعاع به ضخامت و شعاع به طول پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی با رابطه (39) تعریف شده‌اند.

$$\widetilde{N} = \frac{N_b L^2}{100h^3E_{22}},\ \frac{R}{h} = 10,\ \frac{R}{L} = 1 \tag{39}$$

پارامتر بی‌بعد کمانش برای سه حالت مختلف شرایط مرزی و لایه‌چینی‌های متفاوت با مشخصات (38) و (39) از دو روش تفاضل مربعات و روش المان محدود به کمک نرم‌افزار آباکوس با مراجع، مقایسه و در جدول 1 آورده شده است. نزدیکی نتایج بین نرم‌افزار آباکوس، تحقیق حاضر و مراجع در شرایط مرزی و لایه‌چینی‌های مختلف، نشان از صحت روابط به کار گرفته شده و روش حل دارد.

شکل 2 و 3 به ترتیب کانتور تغییرشکل مربوط به کمانش پوسته‌های استوانه‌ای و مخروطی را در نرم‌افزار آباکوس نمایش می‌دهد. شرایط مرزی در پوسته استوانه‌ای SS و در پوسته مخروطی SC در نظر گرفته شده است. لایه‌چینی در نظر گرفته شده در پوسته استوانه‌ای و مخروطی به شکل [0/90/0] می‌باشد.

جدول 1 اعتبارسنجی پارامتر بی‌بعد کمانش $\widetilde{N}$ در پوسته استوانه‌ای

Table 1 Validation of dimensionless critical buckling load $\widetilde{N}$ of cylindrical shell

شرط مرزی	چندلایه	نرم‌افزار آباکوس	مقاله حاضر (DQ, N=10)	مرجع [3]	مرجع [2]
SS	[0/90/0]	0.2577	0.2765	0.2765	0.2813
SS	[0/90]	0.1180	0.1525	0.1525	0.1670
CC	[0/90/0]	0.3906	0.4167	0.4168	0.4197
CC	[0/90]	0.2021	0.2405	0.2406	0.2508
SC	[0/90/0]	0.3181	0.3411	0.3411	0.3452
SC	[0/90]	0.1486	0.1851	0.1851	0.1969

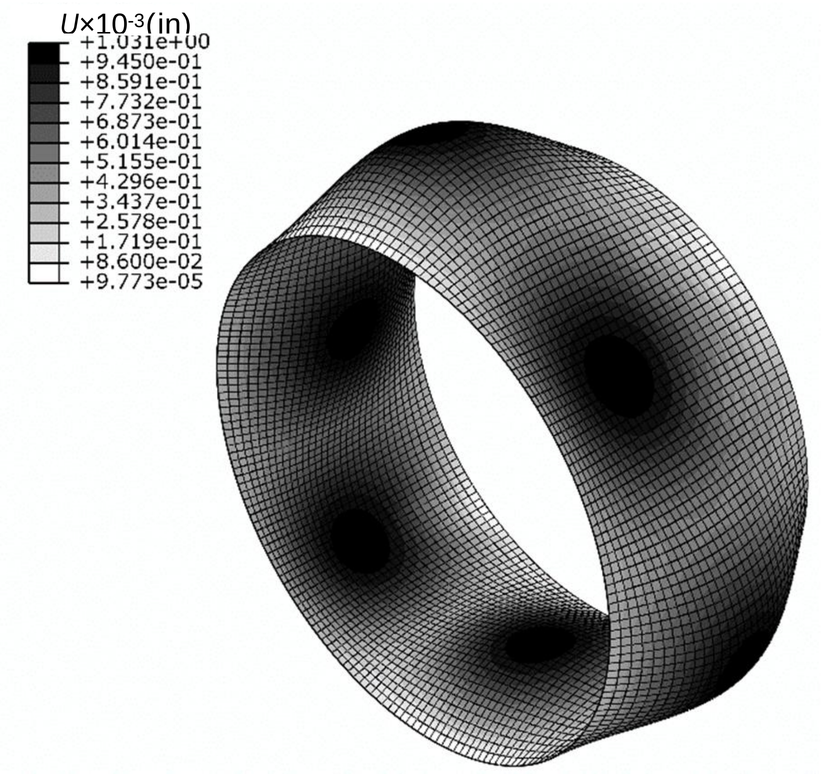

Fig. 2 Deformation contour for buckling of cylindrical shell (U×10^{-3}(in))

شکل 2 کانتور تغییر شکل در کمانش پوسته استوانه‌ای (U×10^{-3}(in))
(SS, R/h=10, R/L=1, [0/90/0])

1- graphite-epoxy

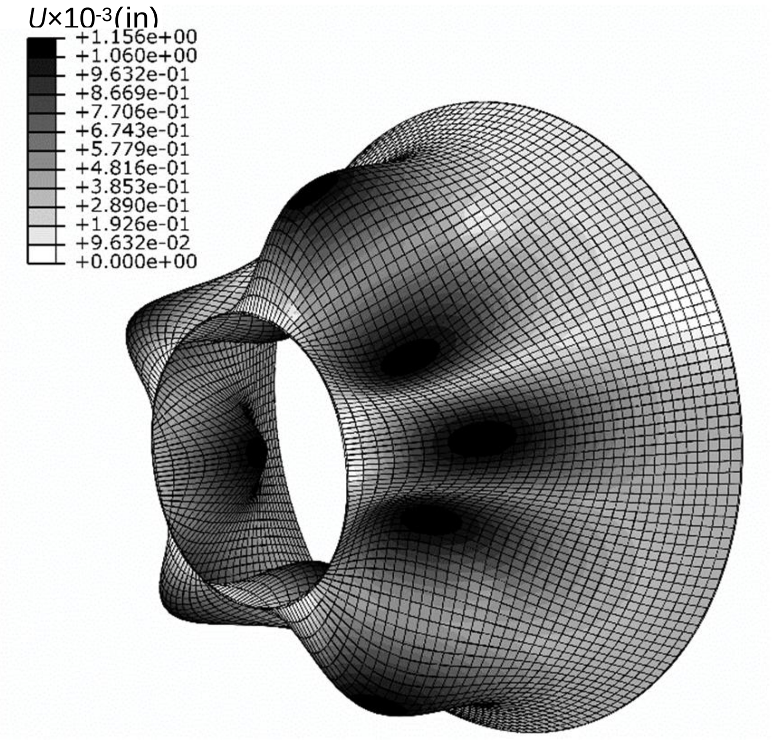

Fig. 3 Deformation contour for buckling of conical shell (U×10^{-3}(in))

شکل 3 کانتور تغییر شکل در کمانش پوسته مخروطی (U×10^{-3}(in))
(SC, R_2/h=10, R_2/L_0=1, [0/90/0] , α=30)

به قصد بررسی همگرایی نتایج حاصل از روش تفاضل مربعات، روند تغییرات پارامتر بی‌بعد کمانش $\bar{N}$ سه نمونه از پوسته مورد مطالعه بر حسب تعداد نقاط شبکه در روش مذکور مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در پوسته مخروطی، مشخصات پوسته و پارامتر بی‌بعد کمانش به شکل رابطه (40) در نظر گرفته می‌شوند.

$$\bar{N} = \frac{N_b(L_0)^2}{h^3E_{22}}, \frac{R_2}{h} = 100, \frac{R_2}{L_0} = 10 \tag{40}$$

در رابطه (40)، h ضخامت کلی پوسته می‌باشد. شعاع بزرگ (R_2)، ثابت در نظر گرفته شده، در حالیکه زاویه مخروط از 0 تا 60 درجه تغییر می‌کند. جدول 2، همگرایی روش تفاضل مربعات با افزایش نقاط همگرایی برای پوسته مخروطی با مشخصات ارائه شده در روابط (38) و (39) با زاویه 30، 45 و 60 درجه، شرایط مرزی SS و لایه‌چینی [0/90/0] را نشان می‌دهد. نمودار شکل 4 نیز سرعت همگرایی بار بحرانی کمانش با افزایش تعداد نقاط شبکه را نشان می‌دهد. نمودار برای سه حالت مختلف نسبت L_0/R_2 رسم شده و شرایط مرزی آن دو طرف تکیه‌گاه گیردار انتخاب شده است. مطالعه نتایج نشان از سرعت همگرایی و پایداری آن دارد و برای پوسته مخروطی، استفاده از 10 نقطه شبکه برای رسیدن به جواب دقیق، کافی می‌باشد.

برای بررسی دقت روش گالرکین در محاسبه بار کمانش پوسته مخروطی، مقایسه‌ای بین تحقیق حاضر با نتایج مرجع [10] در نمودار شکل 5 آورده شده است. شرایط مرزی درنظر گرفته شده در مرجع [10]، تکیه‌گاه ساده نوع دوم می‌باشد که به شکل (41) تعریف می‌گردد.

$$u_0 = w_0 = \beta_\theta = N_{xx} = M_{xx} = 0 \tag{41}$$

جدول 2 همگرایی پارامتر $\bar{N}$ با افزایش تعداد نقاط شبکه در روش تفاضل مربعات

Table 2 Convergence of $\bar{N}$ parameter with increasing the number of grid points in differential quadrature method (SS, R_2/h=100, R_2/L_0=10)

α=60˚	α =45˚	α=30˚	N
13.5901	17.4345	20.4952	4
7.0873	12.1477	16.0896	6
7.1172	12.1789	16.1166	8
7.1169	12.1786	16.1164	10
7.1169	12.1786	16.1164	12

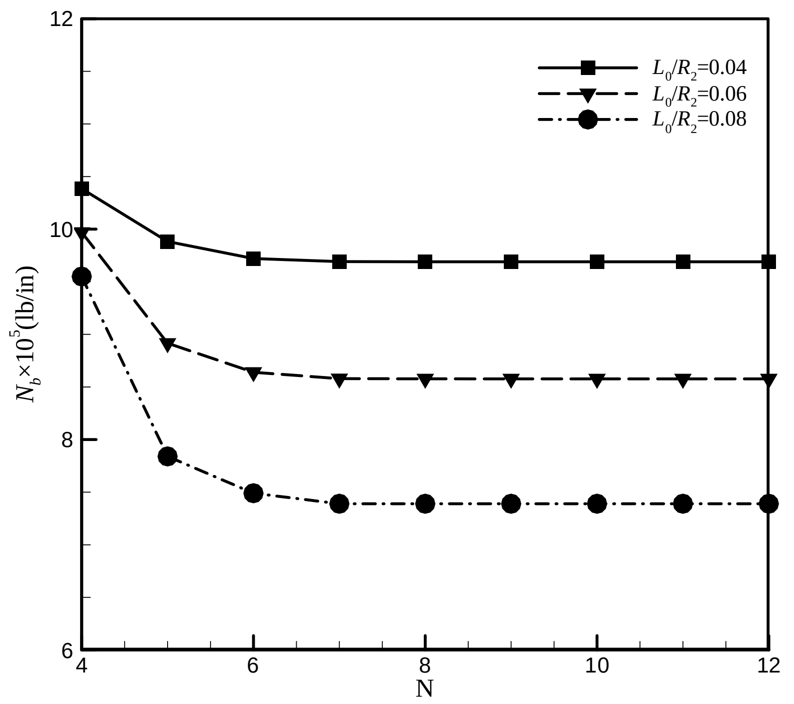

Fig. 4 Convergence speed in differential quadrature method with increasing grid point number in conical shell

شکل 4 سرعت همگرایی روش تفاضل مربعات با افزایش تعداد نقاط شبکه در پوسته مخروطی(CC, R_2/h=100, α=45, [0/90/0])

برای ارضای شرایط مرزی هندسی، میدان جابجایی به شکل (42) حدس زده شده است.

$$\begin{aligned}
u_0 &= U\sin(\frac{m\pi}{L}x)\cos(n\theta)\\
v_0 &= V\cos(\frac{m\pi}{L}x)\sin(n\theta)\\
w_0 &= W\sin(\frac{m\pi}{L}x)\cos(n\theta)\\
\beta_x &= \psi_x\cos(\frac{m\pi}{L}x)\cos(n\theta)\\
\beta_\theta &= \psi_\theta\sin(\frac{m\pi}{L}x)\sin(n\theta)
\end{aligned} \tag{42}$$

همچنین مقایسه‌ای میان نتایج روش تفاضل مربعات و روش المان محدود به کمک نرم‌افزار آباکوس انجام گردیده که نتایج آن در جدول 3 ارائه گردیده است. شرایط مرزی مدنظر SC است و مشخصات از رابطه (40) گرفته شده است. نزدیکی نتایج روش المان محدود، نشان از دقت قابل قبول این روش دارد.

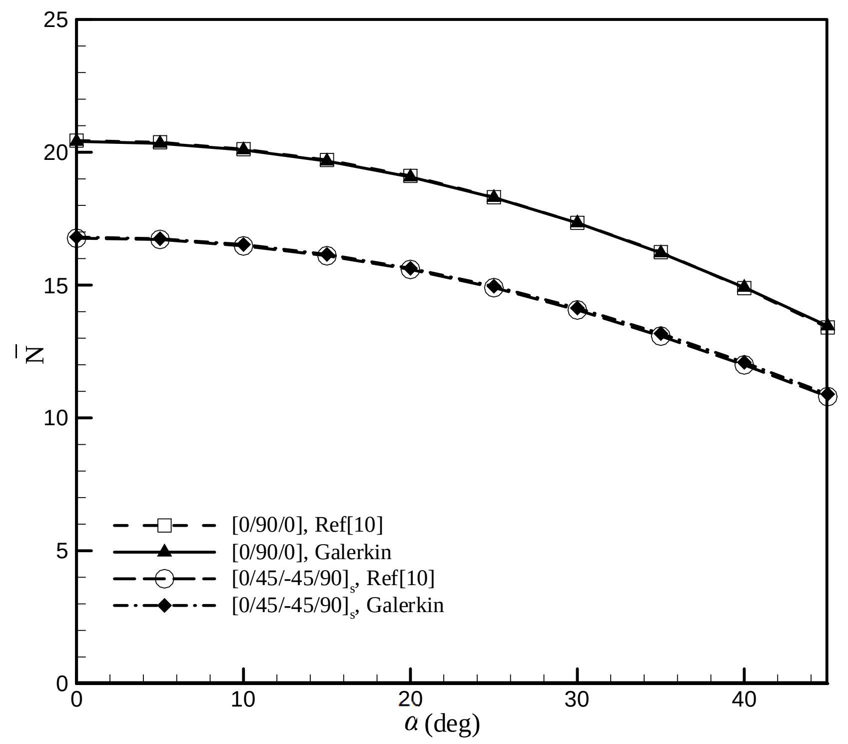

Fig. 5 Comparison of the effect of cone angle on the dimensionless buckling parameter $\bar{N}$ between Galerkin method and Ref.[10]

شکل 5 مقایسه تاثیر زاویه مخروط بر پارامتر بی‌بعد کمانش $\bar{N}$ در روش گالرکین با مرجع [10] (SS2, R_2/h=100, R_2/L_0=10)

جدول 3 مقایسه نتایج پارامتر $\overline{N}$ روش تفاضل مربعات با روش المان محدود به کمک نرم‌افزار آباکوس

Table 3 Comparison of $\overline{N}$ parameter results in DQ method with finite element method using Abaqus software
(SC, R_2/h=100, R_2/L_0=10, N=10)

α=60°	α =45°	α=30°	روش حل
12.4896	19.2293	23.5471	تفاضل مربعات
12.1084	18.9504	22.7663	آباکوس

4- نتایج عددی و بحث

به منظور بررسی اثر زاویه مخروط بر پارامتر بی‌بعد کمانش، با استفاده از روش تفاضل مربعات، پنج نوع چندلایه با مشخصات ارائه شده در روابط (38) و (39) و شرایط مرزی SS در نظر گرفته شده و تغییر پارامتر کمانش با افزایش زاویه مخروط در نمودار شکل 6 مشاهده می‌گردد. واضح است که برای همه چندلایه‌ها با افزایش زاویه مخروط، بار کمانش کاهش می‌یابد. این کاهش با نرخ ثابتی صورت نمی‌گیرد. در محدوده بین 0 تا 10 درجه این اختلاف قابل صرفنظر کردن می‌باشد (کمتر از 8%). در حالی که این اختلاف برای زوایای نزدیک 60 درجه به حدود 68% نیز می‌رسد. همچنین بیشترین مقاومت در برابر کمانش مربوط به لایه‌چینی [0/90/0] می‌باشد که علت آن قرارگیری لایه با زاویه صفر درجه در سطح داخلی و خارجی است که منجر به افزایش سختی پوسته می‌گردد.

جدول 4 مقادیر بار کمانش به ازای شماره مود محیطی و طولی را برای چندلایه [0/90] و شرایط مرزی SS را نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که کمانش در این حالت در شماره مود طولی و محیطی 1 و 10 اتفاق می‌افتد.

اثر شرایط مرزی مختلف بر پارامتر بی‌بعد کمانش در نمودار شکل 7 نشان داده شده است. همانطور که انتظار می‌رود، پوسته با شرایط مرزی دو سر گیردار به علت ایجاد محدودیت حرکتی بیشتر، دارای استحکام و بار کمانش بیشتر و پوسته با شرایط مرزی تکیه‌گاه آزاد در سر کوچک و تکیه‌گاه گیردار در سر بزرگ ، دارای بار کمانش کمتر می‌باشد. همچنین نزدیکی نتایج دو تکیه‌گاه FS و SS، نسبت به تکیه‌گاه‌های دیگر، حکایت از نزدیکی اثر دو شرط مرزی تکیه‌گاه آزاد و تکیه‌گاه ساده بر روی بار کمانش دارد.

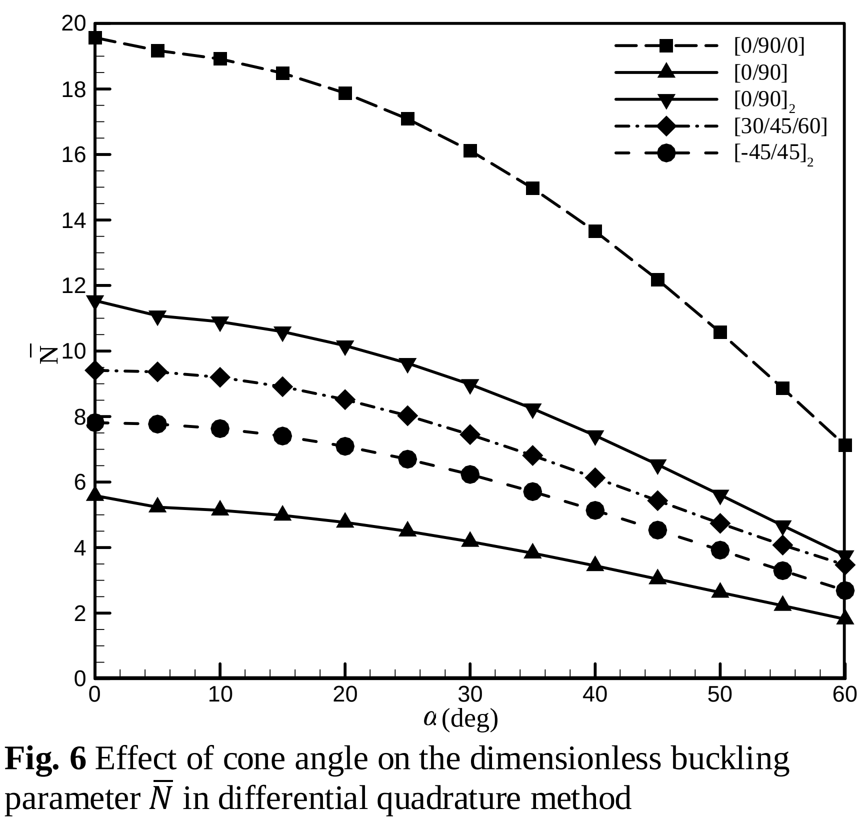

Fig. 6 Effect of cone angle on the dimensionless buckling parameter $\overline{N}$ in differential quadrature method

شکل 6 تاثیر زاویه مخروط بر پارامتر بی‌بعد کمانش $\overline{N}$ در روش تفاضل مربعات
(SS, R_2/h=100, R_2/L_0=10, N=10)

جدول 4 مقادیر بار کمانش $\widehat{N}\times10^5$ (lb/in) در شماره مودهای محیطی و طولی مختلف

Table 4 Buckling force values $\widehat{N}\times10^5$ (lb/in) in different circumferential and longitudinal mode number
(Galerkin, R_2/h=100, R_2/L_0=10, [0/90])

m					n
9	7	5	3	1	
6.3370	5.9727	5.2431	3.6505	1.0625	1
6.3372	5.9729	5.6754	4.6022	2.3364	2
6.3375	5.9733	5.2439	3.6509	0.9969	3
6.3378	5.9739	5.2447	2.6514	0.9595	4
6.3383	5.9745	5.2456	3.6520	0.9267	5
6.3389	5.9754	5.2468	3.6528	0.9003	6
6.3397	5.9763	5.2481	3.6539	0.8804	7
6.3405	5.9775	5.2497	3.6554	0.8662	8
6.3414	5.9788	5.2515	3.6572	0.8572	9
6.3425	5.9802	5.2536	3.6594	0.8525	10

تأثیر جهت‌گیری الیاف بر بار بحرانی کمانش در نمودار شکل 8 آورده شده است. چندلایه $[\gamma,-\gamma]_2$ در نظر گرفته شده که γ از زاویه 0 تا 90 درجه تغییر می‌کند. از نمودار می‌توان دریافت که با افزایش زاویه الیاف وقتی که زاویه مخروط ثابت است، بار بحرانی کمانش کاهش می‌یابد. همچنین واضح است که نرخ کاهش بار بحرانی کمانش با افزایش زاویه الیاف کاهش می‌یابد. در نمودار شکل 9، بار بحرانی کمانش بر حسب نسبت L_0/R_2 برای سه زاویه متفاوت مخروط با دو روش عددی گالرکین و تفاضل مربعات مقایسه و نشان داده شده است. واضح است که مطابق انتظارات، با افزایش نسبت L_0/R_2 که معادل افزایش نسبی طول مخروط می‌باشد، بار بحرانی کمانش در هر دو روش کاهش می‌یابد. همچنین می‌توان دریافت که نتایج دو روش بسیار به هم نزدیک می‌باشند.

تاثیر نسبت h/R_2 بر بار بحرانی کمانش در نمودار شکل 10 نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که برای زوایای مختلف مخروط، همانطور که انتظار می‌رود با افزایش نسبت h/R_2 بار کمانش نیز افزایش می‌یابد.

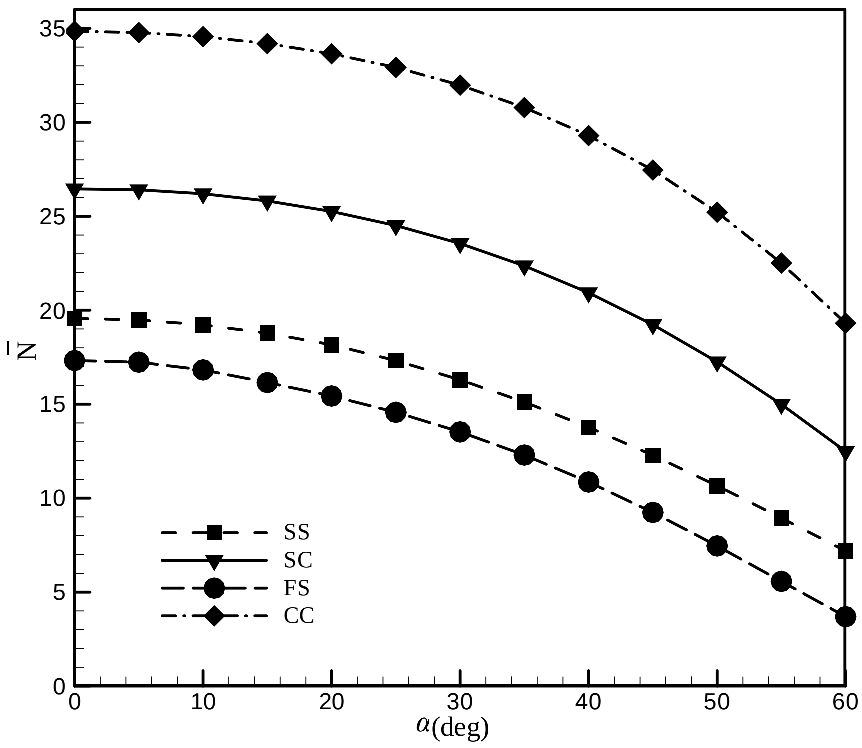

Fig. 7 Effect of boundary condition on the dimensionless buckling parameter $\overline{N}$ in differential quadrature method

شکل 7 تاثیر شرایط مرزی بر پارامتر بی‌بعد کمانش $\overline{N}$ در روش تفاضل مربعات
(R_2/h=100, R_2/L_0=10, [0/90/0], N=10)

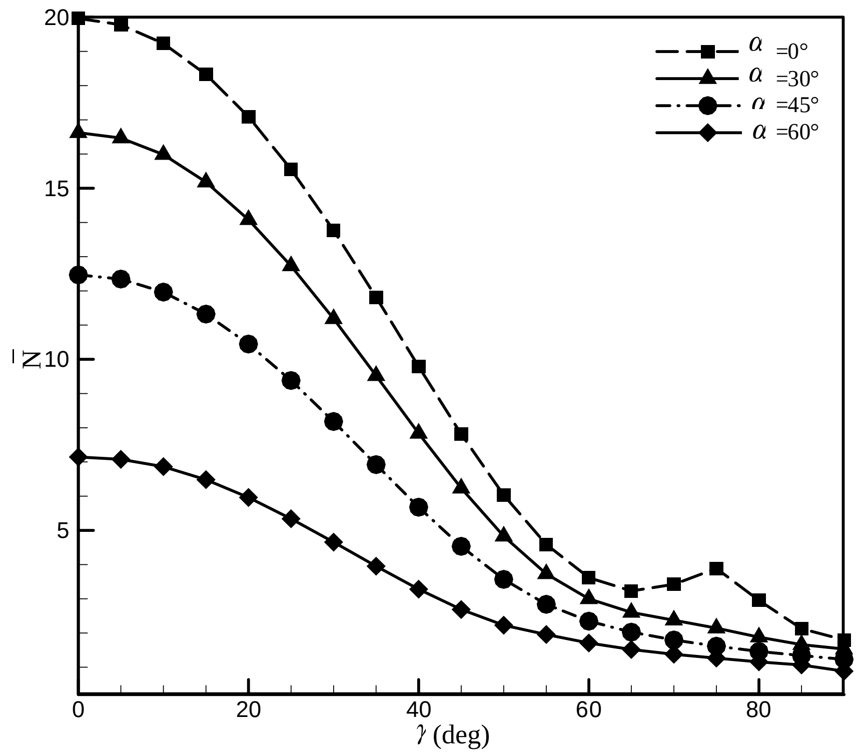

Fig. 8 Effect of fiber orientation on the dimensionless buckling parameter in differential quadrature method

شکل 8 تأثیر زاویه الیاف بر پارامتر بی‌بعد کمانش در روش تفاضل مربعات
(SS, R_2/h=100, R_2/L_0=10, $[\gamma/-\gamma]_2$, N=10)

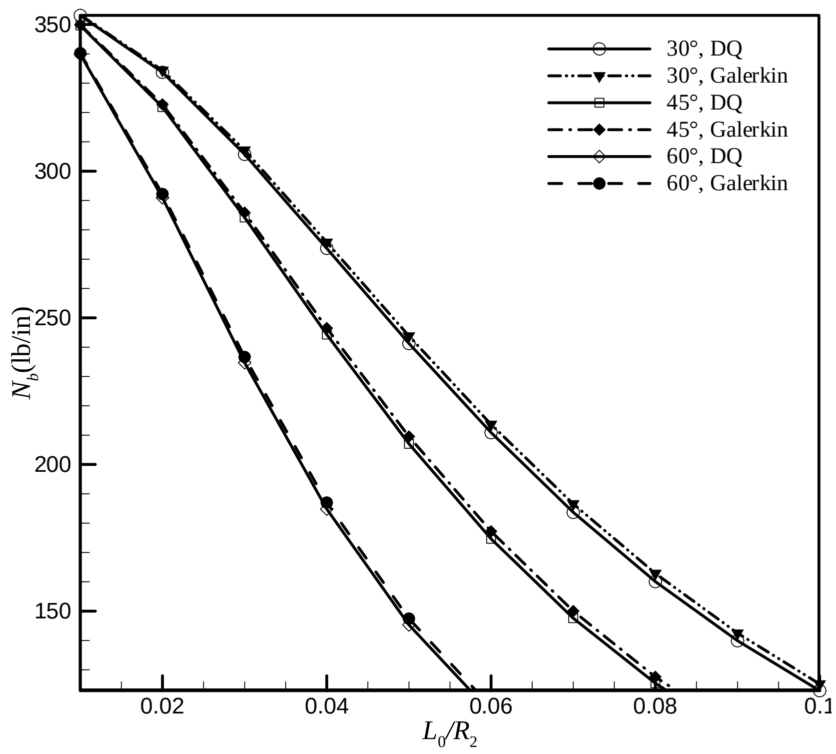

Fig. 9 Effect of L_0/R_2 on the buckling load in differential quadrature and Galerkin method

شکل 9 تأثیر نسبت L_0/R_2 بر بار کمانش در روش تفاضل مربعات و گالرکین
(SS, h=1mm, R_2/h=100, [0/90/0] , N=10)

5- نتیجه‌گیری

در این تحقیق، کمانش پوسته‌های مخروطی چندلایه تحت بار محوری، با استفاده از روش گالرکین و تفاضل مربعات مورد بررسی قرار گرفت و عمده نتایج آن به صورت زیر ارایه می‌گردد.

1- بررسی نتایج، این اطمینان را حاصل می‌کند که روش تفاضل مربعات از کارآمدی مناسب و سرعت همگرایی بالا در تحلیل کمانش پوسته‌های مخروطی چندلایه برخوردار است و امکان استفاده از این روش را برای شرایط مرزی غیر کلاسیک (تکیه‌گاه ساده، گیردار) که روش گالرکین در آن ناکارآمد است را فراهم می‌کند.

2- با توجه به اینکه روش گالرکین قادر به ارضای شرایط مرزی طبیعی نمی‌باشد، اما این امر در روش تفاضل مربعات محقق می‌شود و اینکه در روش عددی نتایج از بالا به نتایج حل دقیق میل می‌کند، پاسخ روش تفاضل مربعات دقیق‌تر می‌باشد.

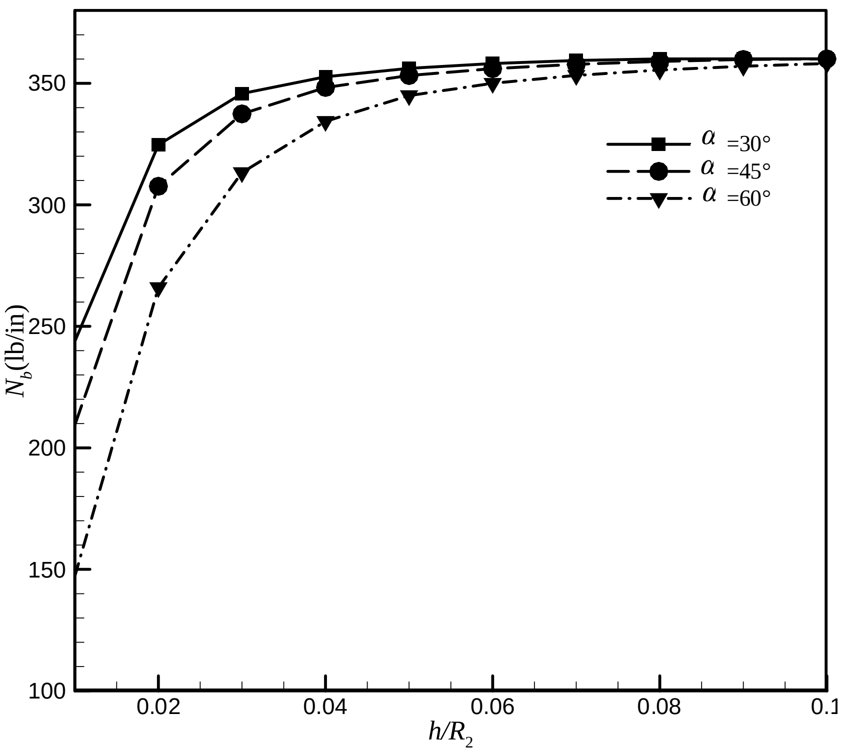

Fig. 10 Effect of h/R_2 on the buckling load in differential quadrature method

شکل 10 تأثیر نسبت h/R_2 بر بار کمانش در روش تفاضل مربعات
(CC, h=1mm, R_2/L_0=10, [0/90/0], N=10)

3- برای پوسته‌های مخروطی کوتاه مطالعه‌شده در این تحقیق، پارامتر بی‌بعد کمانش با افزایش زاویه مخروط، کاهش می‌یابد. این کاهش با بالاتر رفتن زاویه از 10 درجه نمایان‌تر می‌گردد که این زاویه می‌تواند به عنوان نقطه شروع طراحی منظور گردد.

4- استفاده از لایه صفر درجه در لایه‌های داخلی و خارجی پوسته مخروطی چندلایه، سبب افزایش سختی پوسته و در نتیجه آن افزایش بار بحرانی کمانش می‌گردد.

5- پوسته با شرایط مرزی دو سر گیردار به علت ایجاد محدودیت حرکتی بیشتر، دارای استحکام و بار کمانش بیشتر و پوسته با شرایط مرزی تکیه‌گاه آزاد در سر کوچک و تکیه‌گاه گیردار در سر بزرگ ، دارای بار کمانش کمتر می‌باشد. همچنین نزدیکی نتایج دو تکیه‌گاه FS و SS، نسبت به تکیه‌گاه‌های دیگر، حکایت از نزدیکی اثر دو شرط مرزی تکیه‌گاه آزاد و تکیه‌گاه ساده بر روی بار کمانش دارد.

6- در پوسته‌های مخروطی چندلایه با زوایای مختلف مخروط، افزایش نسبت طول به شعاع و ضخامت به شعاع، به ترتیب منجر به کاهش و افزایش بار بحرانی کمانش می‌گردند.

6- پیوست

$$\bar{L}_{11} = A_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{A_{11}\sin\alpha}{R}\frac{\partial}{\partial x} + (\frac{A_{12}-A_{22}}{R^2})\sin^2\alpha$$

$$\bar{L}_{12} = A_{16}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{A_{26}\sin\alpha}{R}\frac{\partial}{\partial x} - (\frac{A_{16}-A_{26}}{R^2})\sin^2\alpha$$

$$\bar{L}_{13} = \frac{A_{12}\cos\alpha}{R}\frac{\partial}{\partial x} + (\frac{A_{12}-A_{22}}{R^2})\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\bar{L}_{14} = B_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{B_{11}\sin\alpha}{R}\frac{\partial}{\partial x} + (\frac{B_{12}-B_{22}}{R^2})\sin^2\alpha$$

$$\bar{L}_{15} = B_{16}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{B_{26}\sin\alpha}{R}\frac{\partial}{\partial x} - \left(\frac{B_{16}-B_{26}}{R^2}\right)\sin^2\alpha$$

$$\bar{L}_{21} = A_{16}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (\frac{2A_{16}+A_{26}}{R})\sin\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \frac{2A_{26}}{R^2}\sin^2\alpha$$

$$\bar{L}_{22} = A_{66}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{A_{66}\sin\alpha}{R}\frac{\partial}{\partial x} - (\frac{2A_{66}\sin^2\alpha + H_{44}\cos^2\alpha}{R^2})$$

$$\bar{L}_{23}=\left(\frac{A_{26}+H_{45}}{R}\right)\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\frac{2A_{26}\sin\alpha\cos\alpha}{R^2}$$

$$\bar{L}_{24}=B_{16}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\left(\frac{2B_{16}+B_{26}}{R}\right)\sin\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\left(\frac{2B_{26}\sin^2\alpha+RH_{45}\cos\alpha}{R^2}\right)$$

$$\bar{L}_{25}=B_{66}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{B_{66}\sin\alpha}{R}\frac{\partial}{\partial x}+\left(\frac{-2B_{66}\sin^2\alpha+RH_{44}\cos\alpha}{R^2}\right)$$

$$\bar{L}_{31}=-\frac{A_{12}\cos\alpha}{R}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{A_{22}\sin\alpha\cos\alpha}{R^2}$$

$$\bar{L}_{32}=-\left(\frac{A_{26}+H_{45}}{R}\right)\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\left(\frac{A_{26}-H_{45}}{R^2}\right)\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\bar{L}_{33}=\left(H_{55}+\hat{N}\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\left(\frac{H_{55}+\hat{N}}{R}\right)\sin\alpha\frac{\partial}{\partial x}-\frac{A_{22}\cos^2\alpha}{R^2}$$

$$\bar{L}_{34}=\left(\frac{RH_{55}-B_{12}\cos\alpha}{R}\right)\frac{\partial}{\partial x}+\left(\frac{RH_{55}-B_{22}\cos\alpha}{R^2}\right)\sin\alpha$$

$$\bar{L}_{35}=\left(\frac{RH_{45}-B_{26}\cos\alpha}{R}\right)\frac{\partial}{\partial x}+\left(\frac{RH_{45}-B_{26}\cos\alpha}{R^2}\right)\sin\alpha$$

$$\bar{L}_{41}=B_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{B_{11}\sin\alpha}{R}\frac{\partial}{\partial x}+\left(\frac{B_{12}-B_{22}}{R^2}\right)\sin^2\alpha$$

$$\bar{L}_{42}=B_{16}\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{B_{26}\sin\alpha}{R}\frac{\partial}{\partial x}+\left(\frac{RH_{45}\cos\alpha-(B_{16}-B_{26})\sin^2\alpha}{R^2}\right)$$

$$\bar{L}_{43}=\left(\frac{B_{12}\cos\alpha-RH_{45}}{R}\right)\frac{\partial}{\partial x}+\left(\frac{B_{12}-B_{22}}{R^2}\right)\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\bar{L}_{44}=D_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{D_{11}\sin\alpha}{R}\frac{\partial}{\partial x}+\left(\frac{(D_{12}-D_{22})\sin^2\alpha-R^2H_{55}}{R^2}\right)$$

$$\bar{L}_{45}=D_{16}\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{D_{26}\sin\alpha}{R}\frac{\partial}{\partial x}-\left(\frac{(D_{16}-D_{26})\sin^2\alpha+R^2H_{45}}{R^2}\right)$$

$$\bar{L}_{51}=B_{16}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\left(\frac{2B_{16}+B_{26}}{R}\right)\sin\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\frac{2B_{26}\sin^2\alpha}{R^2}$$

$$\bar{L}_{52}=B_{66}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{B_{66}\sin\alpha}{R}\frac{\partial}{\partial x}+\left(\frac{RH_{44}\cos\alpha-2B_{66}\sin^2\alpha}{R^2}\right)$$

$$\bar{L}_{53}=\left(\frac{B_{26}\cos\alpha-RH_{45}}{R}\right)\frac{\partial}{\partial x}+\frac{2B_{26}\sin\alpha\cos\alpha}{R^2}$$

$$\bar{L}_{54}=D_{16}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\left(\frac{2D_{16}+D_{26}}{R}\right)\sin\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\left(\frac{2D_{26}\sin^2\alpha-R^2H_{45}}{R^2}\right)$$

$$\bar{L}_{55}=D_{66}\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{D_{66}\sin\alpha}{R}\frac{\partial}{\partial x}-\left(\frac{2D_{66}\sin^2\alpha-R^2H_{44}}{R^2}\right)$$

7- مراجع

[1] M. J. Ebrahimi, M. M. Najafizadeh, Free vibration of two-dimensional functionally graded circular cylindrical shells on elastic foundation, *Modares Mechanical Engineering,* Vol. 13, No. 5, pp. 27-38, 2013. (in Persian فارسی)

[2] A. A. Khdeir, J. N. Reddy, D. Frederick, A study of bending, vibration and buckling of cross-ply circular cylindrical shells with various shell theories, *International Journal of Engineering Science,* Vol. 27, No. 11, pp. 1337-1351, 1989.

[3] F. Shadmehri, S. Hoa, M. Hojjati, The Effect of Displacement Field on Bending, Buckling, and Vibration of Cross-Ply Circular Cylindrical Shells, *Mechanics of Advanced Materials and Structures,* Vol. 21, No. 21, pp. 14-22, 2014.

[4] P. Seide, Axisymmetrical buckling of circular cones under axial compression, *Journal of Applied Mechanics,* Vol. 23, No. 1, pp. 626-628, 1956.

[5] L. Lackman, J. Renzien, Buckling of circular cones under axial compression, *Journal of Applied Mechanics,* Vol. 27, No. 3, pp. 458-460, 1960.

[6] L. Tong, B. Tabarrok, T. K. Wang, Simples solutions for buckling of orthotropic conical shells, *Solids Structures,* Vol. 29, No. 8, pp. 933-946, 1992.

[7] L. Tong, T. K. Wang, Simple solutions for buckling of laminated conical shells, *Journal of Mechanical Science and Technology,* Vol. 34, No. 2, pp. 93-111, 1992.

[8] W. I. Alazzawy, Analytical solution for buckling of laminated conical shells, *College of Engineering Journal (NUCEJ),* Vol. 13, No. 2, pp. 129-146, 2009.

[9] M. A. B. Ajdari, S. Jalili, M. Jafari, M. Shariat, The analytical of the buckling of composite truncated conical shells under combined external pressure and axial compression, *Journal of Mechanical Science and Technology,* Vol. 26, No. 9, pp. 2783-2791, 2012.

[10] F. Shadmehri, S. V. Hoa, M. Hojjati, Buckling of conical composite shells, *Composite Structures,* Vol. 94, No. 2, pp. 787-792, 2012.

[11] I. F. P. Correia, C. M. M. Soares, C. A. M. Soares, Analysis of laminated conical shell structures using higher order models, *Composite Structure,* Vol. 62, No. 3, pp. 383-390, 2003.

[12] E. J. Barbero, J. N. Reddy, J. I. Teply, General two-dimensional theory of laminated cylindrical shells, *American Institute of Aeronautics and Astronautics,* Vol. 28, No. 3, pp. 544, 1990.

[13] K. Y. Lam, L. Hua, Vibration analysis of rotating truncated circular conical shell, *International Journal of Solids and Structures,* Vol. 34, No. 17, pp. 2183-2197, 1997.

[14] A. H. Sofiyev, On the vibration and stability of shear deformable FGM truncated conical shells subjected to an axial load, *Composites Part B,* Vol. 80, No. 1, pp. 53-62, 2015.

[15] A. V. Lopatin, E. V. Morozov, Buckling of the composite sandwich cylindrical shell with clamped ends under uniform external pressure, *Composite Structures,* Vol. 122, No. 1, pp. 209-216, 2015.

[16] C. Shu, *Differential Quadrature and Its Application in Engineering*, second Eddition, Berlin: Springer, 2000.

[17] P. Mirfakhari, D. Redekop, Buckling of circular cylindrical shells by the differential quadrature method, *International Journal of Pressure Vessels and Piping,* Vol. 75, No. 4, pp. 347-353, 1998.

[18] C. P. Wu, C. Y. Lee, Differential quadrature solution for the free vibration analysis of laminated conical shells with variable stiffness, *International Journal of Mechanical Sciences,* Vol. 43, No., pp. 1853-1869, 2001.

[19] A. R. Shaterzadeh, K. Foroutan, Post-buckling analysis of eccentrically stiffened FGM cylindrical shells under external pressure and elastic foundation, *Modares Mechanical Engineering,* Vol. 15, No. 7, pp. 80-88, 2015. (in Persian فارسی)

[20] J. Torabi, M. Bazdid-Vahdati, R. A. Kalkhali, Thermal buckling of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite conical shells, *Modares Mechanical Engineering,* Vol. 15, No. 10, pp. 137-146, 2015. (in Persian فارسی)