



بررسی رفتار آیرولاستیک غیرخطی بالواره با وجود جدایش جریان براساس مدل واماندگی استاتیکی درجه سه

شاهرخ شمس^{1*}، محمدرضا کاظمی²، بابک میرزاوند بروجنی¹، زهرا خجسته‌بخته‌کوپایی³

1- استادیار، مهندسی هوافضا، دانشگاه تهران، تهران

2- کارشناسی ارشد، مهندسی هوافضا، دانشگاه تهران، تهران

3- کارشناسی ارشد، مهندسی هوافضا، دانشگاه آزاد اسلامی واحد گرمسار، گرمسار

*تهران، صندوق پستی 14399-55941، shahrokh.shams@ut.ac.ir

چکیده

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 27 اردیبهشت 1395

پذیرش: 04 مهر 1395

ارائه در سایت: 21 آذر 1395

کلید واژگان:

واماندگی استاتیکی

آیرودینامیک ناپایایی وگنر

روش تاریخچه زمانی انتگرال

نوسانات با سیکل حدی

در این مقاله با معرفی یک الگوی جدید آیرودینامیک برای شبیه‌سازی جدایش جریان و واماندگی استاتیکی، شکل جدیدی از معادلات آیرولاستیک غیرخطی بالواره‌های دو درجه آزادی (خمشی عمودی و پیچشی) استخراج می‌شود. روابط ساده براساس مدل جرم-فنر و حاوی ترم‌های غیرخطی درجه دو و سه است. روابط آیرودینامیک از تلفیق الگوی آیرودینامیک ناپایایی وگنر و الگوی غیرخطی ضریب برآ-زاویه‌حمله برای شبیه‌سازی واماندگی جریان با تقریب معادله درجه سه، به دست می‌آید. برای استخراج معادلات آیرولاستیک از اصل همپلتون و معادلات لاگرانژ استفاده می‌شود. همچنین با به کارگیری شیوه حل تاریخچه زمانی انتگرال، معادلات آیرولاستیک غیرخطی انتگرالی-دیفرانسیلی حاصله، حل و رفتار آیرولاستیک مقطع مذکور در هر دو رژیم جریان ناپایا و شبه‌پایا با یکدیگر مقایسه می‌شود. استفاده از روش تاریخچه زمانی در حل معادلات باعث کاهش حجم معادلات در مقایسه با روش فضای حالت می‌گردد. نتایج نشان می‌دهد که رفتار آیرولاستیک بالواره با وجود سازه خطی، با استفاده از الگوی آیرودینامیکی غیرخطی معرفی شده برای واماندگی در مقایسه با الگوهای خطی آیرودینامیک، در جریان‌های شبه‌پایا و ناپایا باعث ایجاد نوسانات با سیکل حدی می‌شود. همچنین استفاده از الگوی منحنی درجه سه بجای منحنی تکه‌ای خطی مورد استفاده در مراجع هرچند باعث پیچیده‌تر شدن شکل ظاهری معادلات می‌شود لیکن در زمان حل توسط نرم‌افزار، همگرایی حل سریعتری خواهد داشت و باعث حذف خطاهای موجود در مدل‌های مذکور می‌شود. بررسی‌ها نشان می‌دهد که استفاده از آیرودینامیک غیرخطی استاتیکی استال علاوه بر کاهش سرعت ناپایداری، دامنه نوسانات سیکل محدود را نیز در هر دو رژیم جریان شبه پایا و ناپایا کاهش می‌دهد.

Investigation of nonlinear aeroelastic behavior of airfoils with flow separation based on cubic static stall modeling

Shahrokh Shams^{1*}, MohammadReza Kazemi¹, Babak Mirzavand Borojeni¹, Zahra Khojasteh Bakhteh Koupaie²

1- Department of Aerospace Engineering, Faculty of New Sciences and Technologies, University of Tehran, Tehran, Iran

2- Department of Engineering, Islamic Azad University of Garmsar, Garmsar, Iran

* P.O.B. 14399-55941, Tehran, Iran, shahrokh.shams@ut.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper

Received 16 May 2016

Accepted 25 September 2016

Available Online 11 December 2016

Keywords:

Static stall

Wagner unsteady aerodynamic

Integration historical method

Limit Cycle Oscillations (LCO)

ABSTRACT

In this paper, by defining a new paradigm for nonlinear aerodynamic equations of flow separation and static stall, a new form of nonlinear aeroelastic equations for two degrees of freedom airfoils (torsional and bending) are presented. Structural equations are based on the nonlinear mass-spring model which includes the nonlinear quadratic and cubic terms. Aerodynamic equations are obtained by combining the unsteady Wagner model and the nonlinear lift coefficient-angle of attack for simulating stall using a cubic approximation. Hamilton's principle and Lagrange equations were used to derive the aeroelastic equations. The obtained integro-differential nonlinear aeroelastic equations are solved using a time-history integration method. The aeroelastic behavior of the airfoil is compared in both unsteady and quasi-steady flow. Using the time-history method compared to the phase space method leads to fewer equations. The results show that the aeroelastic behavior of airfoil with a linear structure, using a nonlinear aerodynamic theory for the stall, causes oscillations with a limit cycle in unsteady and quasi-steady flow compared to other linear aerodynamic theories. Also, the use of the cubic curve instead of the piecewise linear curves which are commonly used in other references, causes an apparent complication of the equations, reduces the computational time due to faster convergence in solution and makes the reduction in errors. The results show that the use of nonlinear aerodynamic static stall not only reduces the instability velocity, but also reduces the amplitude of limit cycle oscillations in both unsteady and quasi-steady regimes.

1- مقدمه

آزادی و متمرکز شدن بر روی آثار غیرخطی توسط محققین بسیاری، به دلیل

سودمندی آن، همواره مورد توجه بوده است. درک رفتار غیرخطی سیستم

امروزه بررسی رفتار آیرولاستیک مقطع دوبعدی با در نظر گرفتن دو درجه

Please cite this article using:

Sh. Shams, M. Kazemi, B. Mirzavand Borojeni, Z. Khojasteh_Bakhteh_Koupaie, Investigation of nonlinear aeroelastic behavior of airfoils with flow separation based on cubic static stall modeling, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 12, pp. 311-322, 2016 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

از صوت، همبند شدن⁸ درگ با تغییرمکان‌های عمودی، بال را به سمت واگرایی سوق می‌دهد که در قیاس با نتایج خطی میزان پیچش نوک بال بیشتر شده و باعث وقوع واماندگی نوک بال⁹ می‌شود [9].

در سال 2010 بدیعی و همکاران با اصلاح جریان وگنر، الگوی غیرخطی از این جریان را معرفی نمودند و با استفاده از این الگو بررسی‌های خود را بر روی بال ایزوتروپ صورت دادند. آن‌ها برای مدل‌سازی بخش غیرخطی منحنی $C_L - \alpha$ از پاره‌خط‌هایی مشخص در محدوده‌های معین استفاده کرده و نشان دادند با افزایش تعداد این پاره خط‌ها می‌توان بخش غیرخطی منحنی را با دقت بیشتری تقریب زد [10]. در همین سال وای و ژیتون فلاتر یک بالواره دو درجه آزادی با سختی غیرخطی را در حالت پیچ بررسی کردند. در این مطالعه با در نظر گرفتن یک تابع احتمال در حالت پیچ برای سختی پیچشی، سرعت فلاتر و احتمال فلاتر آن بررسی شد [11]. ایرانی و همکاران در سال 2011 یک بالواره با سه درجه آزادی را با استفاده از روش تحلیلی بالانس هارمونیک¹⁰ بررسی کرده و با در نظر گرفتن سازه به صورت غیرخطی مرز ناپایداری و نوسانات با چرخه محدود و پدیده دو شاخه‌ای شدن را مطالعه کردند [12]. گل‌پرور و ایرانی در سال 2013 با استفاده از آزمون تجربی به تحلیل غیرخطی یک بالواره دو درجه آزادی در جریان مادون صوت تراکم ناپذیر پرداخته و با استفاده از نتایج تونل باد نشان دادند افزایش نسبت فرکانسی باعث کاهش سرعت فلاتر می‌شود که این کاهش در یک نسبت فرکانسی خاص به حداقل رسیده و سپس دوباره افزایش می‌یابد [13].

همان‌طور که مشاهده می‌شود در سال‌های اخیر تلاش‌های فراوانی برای مدل‌سازی رفتار غیرخطی آیرولاستیک بالواره‌ها صورت پذیرفته است. با توجه به همین دیدگاه در مقاله حاضر نیز، معادلات جدید آیرولاستیک بالواره‌ها در جریان تراکم‌ناپذیر و غیرلزج و محدوده رژیم جریان زیر صوت با کمک اصل همپلتون و معادلات لاگرانژ با در نظر گرفتن دو درجه آزادی پیچشی و خمش عمودی، از تلفیق مدل غیرخطی سازه بالواره و مدل غیرخطی جدید آیرودینامیک در حالت واماندگی استاتیکی، استخراج می‌شود. روابط حاکم بر سازه براساس مدل جرم-فنر و حاوی ترم‌های غیرخطی درجه دو و سه می‌باشد. مدل جدید آیرودینامیکی نیز از تلفیق الگوی آیرودینامیک ناپایای وگنر و الگوی غیرخطی ضریب برآزواویه¹¹ حمله برای شبیه‌سازی واماندگی جریان با تقریب معادله درجه سه، حاصل می‌گردد. برای حل این معادلات از روش تاریخچه زمانی انتگرال و روش عددی آدامز-گی¹¹ بهره گرفته می‌شود. در نهایت برای تعیین صحت نتایج و نشان دادن دقت روش ارائه شده، نتایج به‌دست آمده با نتایج مراجع مختلف مقایسه می‌گردد. نتایج نشان می‌دهد، الگوی جدید آیرولاستیک ارائه شده علاوه بر حذف خطاهای حل عددی مربوط به روش‌های گذشته دقت خوبی در مدل‌سازی رفتار آیرولاستیک بالواره در شرایط واماندگی استاتیکی دارد.

2- مدل‌سازی مسأله

برای شبیه‌سازی رفتار سازه الگوهای مشخصی وجود دارد که بسته به رفتار و ابعاد و مواد به‌کار رفته تغییر می‌کنند. برای بررسی پدیده‌های دینامیکی آیرولاستیک از جمله فلاتر و سرعت ناپایداری، ابتدا بایستی الگوی مناسبی برای مدل‌سازی دینامیکی جسم و معادلات حاکم بر آن ایجاد نمود. این امر مستلزم به‌دست آوردن معادلات حرکت سیستم الاستیک مذکور تحت بارهای

آیرولاستیک به منظور انجام یک طراحی ایمن و کارآمد در بال‌های هواگرد و سطوح کنترل آن از اهمیت خاصی برخوردار است. اگرچه استفاده از الگوی آیرودینامیک کلاسیک خطی به دلیل سادگی همواره مورد توجه بوده، اما استفاده از آن در عمل موجب نادیده گرفتن آثار غیرخطی آیرودینامیکی در سیستم آیرولاستیک از جمله جدایش جریان شده که خود موجب پدیدار شدن خطاهایی در حل می‌گردد. تحلیل آثار غیرخطی آیرودینامیکی مشکل‌تر از آثار غیرخطی سازه‌ای است، زیرا در عمل حل تحلیلی معادلات حاکم بر حرکت سیال موجود نبوده یا بسیار مشکل است. از همین رو بررسی رفتار غیرخطی آیرولاستیک این مقاطع، با لحاظ نمودن آثار غیرخطی آیرودینامیکی همواره مورد توجه بسیاری از محققین در این زمینه بوده است.

داونچی در سال 1992 منابع ایجاد کننده آیرولاستیک غیرخطی را دسته‌بندی کرد و با کمک مثال‌هایی هریک را توضیح داد [1]. بر طبق این دسته‌بندی، آیرولاستیک غیرخطی هم می‌تواند ناشی از آیرودینامیک و هم می‌تواند ناشی از سازه باشد. غیرخطی سازه‌ای می‌تواند ناشی از غیرخطی هندسی مانند تغییرمکان با دامنه‌های بزرگ، اتصالات و سیستم‌های کنترل یا غیرخطی مواد باشد. غیرخطی آیرودینامیکی می‌تواند ناشی از زاویه حمله‌های بزرگ، رژیم‌های جریانی گذر از صوت، شوک، جدایش جریان و شکل بلاف¹ باشد. پاتیل و هاجز رفتار پروازی هواپیمایی با بال بلند را در رژیم جریان زیر صوت بررسی کردند. در این بررسی معادلات سازه‌ای تیر به کمک روابط هامپلتون و معادلات آیرودینامیکی بر مبنای فرضیه حالت محدود پیترز الگوسازی شده‌اند. فرضیه پیترز با اعمال الگوهای واماندگی نظیر مدل اونرا برای حالت واماندگی نیز قابل استفاده است [2]. در سال 2000 پریدیکن و موک نشان دادند که آیرودینامیک غیرخطی به تنهایی می‌تواند باعث نوسانات با سیکل حدی شود [3]. در همان سال لیو و همکاران با کمک الگوی مقطع بال دو درجه آزادی و آیرودینامیک ناپایا با استفاده از تابع وگنر، کاربردهای فرضیه منیفولد مرکزی² را در آیرولاستیک غیرخطی نشان دادند [4]. هال با راهنمایی موک، نایفه و پریدیکن در همین سال بر مبنای شکل موده‌های پایه سازه‌ای تیر اولر-برنولی و شبکه گردابه‌ای³ آیرودینامیک غیرخطی ناپایا، نشان دادند که غیرخطی بودن الگوی آیرودینامیک به تنهایی می‌تواند باعث وقوع نوسانات با سیکل حدی شود [5]. پاتیل و هاجز نیز با استفاده از الگوی دینامیک ذاتی تیر⁴ و آیرودینامیک ناپایا حالت محدود⁵ با در نظر گرفتن رفتار واماندگی بال نشان دادند رفتار پس از فلاتر⁶ بال به‌صورت نوسانات با سیکل حدی است. آن‌ها با استفاده از پاره خط‌هایی به شبیه‌سازی منحنی ضریب برآزواویه حمله پرداخته و توانستند الگوی غیرخطی آیرودینامیک را در ناحیه وامانده شبیه‌سازی کنند [6]. تنگ و داوول رفتار آیرولاستیک تجربی بال با نسبت منظری بالا را بررسی و نتایج تجربی پاسخ این نوع بال به تندباد را با نتایج تئوری مقایسه کردند [8,7]. جوزف گارسیا در سال 2005، بال‌های انعطاف‌پذیر را در رژیم گذر از صوت بررسی کرد. او در این فعالیت با مدل‌سازی تیر سه‌بعدی به روش اجزای محدود و الگوی آیرودینامیک اوپلر/ناویر-استوکس در دینامیک سیالات محاسباتی⁷، الگوی غیرخطی آیرولاستیک بال انعطاف‌پذیری را ایجاد کرد و نشان داد در رژیم جریان گذر

¹ Bluff Body

² Center Manifold

³ Vortex Lattice

⁴ Intrinsic Equations for Dynamics of Beams

⁵ Finite-State Unsteady Aerodynamics with Stall

⁶ Post Flutter

⁷ Computational fluid dynamics

⁸ Coupling

⁹ Wing tip Stall

¹⁰ Harmonic Balance

¹¹ Adams-Gear

نمود [14]. در مقاله حاضر علاوه بر در نظر گرفتن ترم‌های غیرخطی مرتبه سه برای سختی سازه‌ای، ترم‌های غیرخطی دیگری شامل ترم‌های مرتبه دو و ترم‌های غیرخطی حاوی ضرب حالت‌های مختلف درجات آزادی خمشی و پیچشی نیز، در نظر گرفته شده است. لذا می‌توان نوشت:

$$m\ddot{w} + S_\alpha \ddot{\theta} + K_w w + K_{w_2} w^2 + K_{w_3} w^3 + K_\theta \theta + K_{\theta_2} \theta^2 + K_{\theta_3} \theta^3 + K_{w\theta} w\theta + K_{w_2\theta} w^2 \theta + K_{w\theta_2} w\theta^2 = -L \quad (3-الف)$$

$$S_\alpha \ddot{w} + I_\alpha \ddot{\theta} + K_\theta \theta + K_{\theta_2} \theta^2 + K_{\theta_3} \theta^3 + K_w w + K_{w_2} w^2 + K_{w_3} w^3 + K_{w\theta} w\theta + K_{w_2\theta} w^2 \theta + K_{w\theta_2} w\theta^2 = M_{E,A} \quad (3-ب)$$

در روابط (3-الف) و (3-ب) پارامترهای S_α, I_α, m به ترتیب معرف جرم بالواره، ممان اینرسی نسبت به محور الاستیک و ممان استاتیک هستند. پارامتر L نیروی برآ و جهت آن در خلاف جهت مثبت w (که به سمت پایین است) است. پارامتر $M_{E,A}$ برابر مقدار ممان نیروهای آیرودینامیکی در محل محور الاستیک است. جهت آن هم جهت θ در جهت عقربه‌های ساعت و یا در خلاف جهت مثبت مثلثاتی است. K_θ و K_w ضرایب ترم‌های خطی سختی موجود در معادلات $K_{w_2}, K_{w_3}, K_{w_2\theta}, K_{w\theta_2}, K_{w\theta}$ و $K_{w_2\theta}, K_{w\theta_2}, K_{w\theta}$ ضرایب ترم‌های غیرخطی از سختی‌های خمشی و پیچشی موجود در مساله هستند.

2-2- معادلات حاکم بر آیرودینامیک

استفاده از الگوی آیرودینامیک کلاسیک خطی، موجب نادیده گرفتن آثار غیرخطی آیرودینامیکی در سیستم آیرودینامیک از جمله جدایش جریان شده که خود موجب پدیدار شدن خطاهایی در بررسی رفتار آیرودینامیک بال می‌گردد. برای کاهش این خطا کارهایی در زمینه شبیه‌سازی رفتار غیرخطی آیرودینامیک از جمله استفاده از منحنی ضریب برآ-زاویه حمله مناسب، صورت پذیرفته است که از جمله این کارها می‌توان به کار پاتیل و هاجز [6,2] اشاره نمود. منحنی $C_L - \alpha$ استفاده شده در کار آن‌ها به سه ناحیه قبل، بعد و ناحیه استال محدود می‌شود که این تغییرات ضریب برآ-زاویه حمله در هر سه ناحیه به صورت خطی است. اگرچه استفاده از این روش، غیرخطی شدن مدل آیرودینامیکی ایشان را به دنبال دارد، اما فرض خطی بودن در هر ناحیه موجب فاصله گرفتن از رفتار واقعی در منحنی $C_L - \alpha$ و ایجاد خطاهایی در محاسبات و همگرایی حل، به خصوص در ناحیه واماندگی می‌گردد. بدیعی و همکارانش [10] با الگوگیری از کار پاتیل و هاجز [6,2] و با اصلاح الگوی آیرودینامیکی وگنر، الگویی غیرخطی از این جریان را معرفی نمودند. آن‌ها برای شبیه‌سازی بخش غیرخطی منحنی $C_L - \alpha$ با توجه به مشخصات هر بالواره، از پاره خط‌هایی مشخص در محدوده‌های معین استفاده کرده و نشان دادند، با افزایش تعداد این پاره خط‌ها می‌توان بخش غیرخطی منحنی را با دقت بیشتری تقریب زد. الگوی‌های ارائه شده توسط پاتیل و هاجز [6] و همچنین بدیعی [10]، اگرچه تا حدود زیادی توانستند رفتاری غیرخطی از آیرودینامیک، در معادلات آیرودینامیک را مدل‌سازی نمایند، اما استفاده از پاره‌خط‌های تکه‌ای هموار برای شبیه‌سازی رفتار غیرخطی منحنی $C_L - \alpha$ به خصوص در نواحی اتصال پاره‌خط‌ها، خطاهایی را در پی داشته و موجب بروز اختلافاتی با مقدار واقعی نیروی برآ در این نقاط می‌گردد. علت این امر این است که در استفاده از پاره خط‌های تکه‌ای هموار پیوسته، به دلیل مساوی نبودن شیب منحنی‌ها از دو طرف (به دلیل ناپیوستگی در نقاط شکستگی تابع خط)، خطاهای قابل توجهی در زمان حل معادلات، در این نقاط مشاهده می‌شود [10].

آیرودینامیکی و نیروهای اینرسی است. بنابراین ایجاد یک الگوی آیرودینامیک را می‌توان در دو مرحله خلاصه نمود: شبیه‌سازی سازه‌ای و شبیه‌سازی آیرودینامیکی.

1-2- معادلات حاکم بر سازه

معمولاً برای بررسی مسائل آیرودینامیک از مدل‌های جرم و فنر مطابق "شکل 1" استفاده می‌شود. فنرهای به کار رفته سختی پیچشی و خمشی بالواره را مدل می‌نمایند و در محل عبور محور الاستیک قرار داده می‌شوند. در این مدل نقاط EA و cg، به ترتیب بیانگر: نقطه مرجع (محلی که جابجایی w نسبت به آن اندازه‌گیری می‌شود) و مرکز جرم هستند و جهت مثبت قراردادی نیز مطابق جهت نشان داده شده در "شکل 1" است.

به‌طور کلی در محیط آیرودینامیک بهره‌گیری از روش‌های کار و انرژی به‌منظور استخراج معادلات حاکم بر سیستم کاربرد بیشتری دارد. از جمله این روش‌ها می‌توان به اصل هامیلتون¹ و نیز معادلات لانگرانژ اشاره نمود.

دو پارامتر سختی خمشی و پیچشی جسم به وسیله دو فنر با ثابت‌های K_θ و K_w مدل می‌شوند. مدل مذکور دارای دو درجه آزادی می‌باشد و قابلیت حرکت جانبی² و پیچشی³ را دارا می‌باشد. حرکت جانبی با w و حرکت پیچشی با θ بیان شده است.

براساس معادلات لانگرانژ می‌توان گفت [14]:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i \quad (1)$$

در رابطه (1) q_i معرف i امین مختصه تعمیم یافته است و T و D ترتیب بیانگر انرژی پتانسیل، تابع افت و انرژی جنبشی سیستم هستند. همچنین Q_i معرف نیروهای تعمیم یافته موجود در مساله مذکور است. در مساله حاضر مختصات تعمیم یافته با توجه به درجات آزادی تعیین شده به شکل رابطه (2) قابل بیان هستند:

$$q_1 = w, \quad q_2 = \theta \quad (2)$$

ملکیان با صرف نظر از انرژی میرایی سازه و جایگذاری انرژی پتانسیل و جنبشی و نیروهای تعمیم یافته مناسب، در رابطه (1) و با در نظر گرفتن نیروی سختی سازه‌ای به صورت معادله‌ای حاوی ترم‌های غیرخطی مرتبه سه، معادلات دیفرانسیل حاکم بر حرکت بالواره نمایش داده در "شکل 1" را بیان

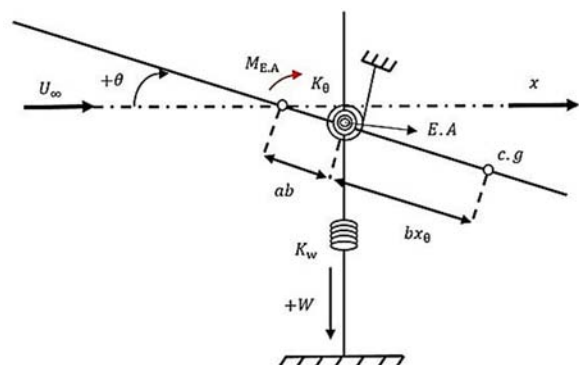


Fig. 1 Schematic of airfoil based on mass-spring model

شکل 1 نمایی شماتیک از مقطع بالواره براساس مدل جرم و فنر

¹ Hamilton Principle

² Heaving

³ Hitching

نخست با استفاده از روابط وگنر، نیروی برآ و گشتاور پیچشی به صورتی بیان می‌شود که [15]:

$$L(t) = \pi \rho b^2 (\ddot{w} - ab\ddot{\theta} + U\dot{\theta}) + 2\pi\rho U b \left(\dot{w}(0) + U\theta(0) + b \left(\frac{1}{2} - a \right) \dot{\theta}(0) \right) \varphi(t) + 2\pi\rho U b \int_0^t \varphi(t - \sigma) \left[\dot{w}(0) + b \left(\frac{1}{2} - a \right) \ddot{\theta} + U\dot{\theta} \right] d\sigma \quad (4-الف)$$

$$M_{e.a}(t) = \pi \rho b^3 \left[a\ddot{w} - b \left(\frac{1}{8} + a^2 \right) \ddot{\theta} - U \left(\frac{1}{2} - a \right) \dot{\theta} \right] + 2\pi\rho U b^2 \left(\frac{1}{2} + a \right) \left[\dot{w}(0) + U\theta(0) + b \left(\frac{1}{2} - a \right) \dot{\theta}(0) \right] \varphi(t) + 2\pi\rho U b^2 \left(\frac{1}{2} + a \right) \int_0^t \varphi(t - \sigma) \left[\dot{w}(0) + b \left(\frac{1}{2} - a \right) \ddot{\theta} + U\dot{\theta} \right] d\sigma \quad (4-ب)$$

در روابط (4-الف) و (4-ب)، ρ چگالی جریان هوا، b نصف طول وتر مقطع، U سرعت جریان هوا و a فاصله بی‌بعد شده است که بیانگر فاصله مرکز الاستیک تا وسط وتر مقطع بال است. $\varphi(t)$ هم بیانگر تابع وگنر است. این تابع توسط افراد مختلفی و به صورت تقریبی ارائه شده است. با به‌کارگیری تقریب آرتی جنز برای تابع وگنر [16]:

$$\varphi(t) = 1 - c_1 e^{-\varepsilon_1 t} - c_2 e^{-\varepsilon_2 t}, \quad \varepsilon_1 = 0.0455 \frac{U}{b}, \quad \varepsilon_2 = 0.3 \frac{U}{b}, \quad c_1 = 0.165, \quad c_2 = 0.335 \quad (5)$$

و استفاده از قاعده انتگرالگیری جزء به جزء و ساده‌سازی مناسب، رابطه زاویه حمله براساس روابط (4-الف) و (4-ب) و بر مبنای درجات آزادی (جابجایی خمشی عمودی و زاویه پیچشی)، معرفی می‌شود:

$$\alpha_{wagner} = \frac{b[\ddot{w}(t) - ab\ddot{\theta}(t) + U\dot{\theta}(t)]}{2U^2} - \frac{[w(0) + b \left(\frac{1}{2} - a \right) \theta(0)] \dot{\varphi}(t)}{U} + \frac{b \left(\frac{1}{2} - a \right) \varphi(0) \dot{\theta}(t)}{U} + \frac{\varphi(0) \dot{w}(t)}{U} + \frac{\dot{\varphi}(0) w(t)}{U} + \frac{[U\varphi(0) + b \left(\frac{1}{2} - a \right) \dot{\varphi}(0)] \theta(t)}{U} - \frac{1}{U} \left(\lambda_{w1} e^{-\varepsilon_1 t} \int_0^t w(\sigma) e^{\varepsilon_1 \sigma} d\sigma + \lambda_{w2} e^{-\varepsilon_2 t} \int_0^t w(\sigma) e^{\varepsilon_2 \sigma} d\sigma \right) + \frac{1}{U} \left(\lambda_{\theta 1} e^{-\varepsilon_1 t} \int_0^t \theta(\sigma) e^{\varepsilon_1 \sigma} d\sigma + \lambda_{\theta 2} e^{-\varepsilon_2 t} \int_0^t \theta(\sigma) e^{\varepsilon_2 \sigma} d\sigma \right) \quad (6)$$

که در این رابطه:

$$\lambda_{wi} = c_i \varepsilon_i^2, \quad \lambda_{\theta i} = c_i \varepsilon_i [U - \varepsilon_i b \left(\frac{1}{2} - a \right)], \quad i = 1, 2 \quad (7)$$

ε_i و c_i در رابطه (7) همان مقادیر بیان شده در رابطه (5) هستند. شایان ذکر است زاویه حمله معرفی شده در رابطه (6)، از روابط وگنر (روابط 4-الف) و (4-ب) که ماهیتی خطی و ناپایا دارد استنتاج شده است. این زاویه حمله شامل درجات آزادی، مشتقات مرتبه اول و دوم و ترم‌های انتگرالی درجات آزادی است. در گام بعدی به مدل‌سازی نمودار $C_L - \alpha$ و استخراج رابطه حاکم بر آن پرداخته می‌شود. برای این منظور با بکارگیری زاویه حمله و مقدار ضریب نیروی برآ حاصل از داده‌های تجربی [17]، برای چندین نمونه بالواره مختلف و مشابه، مناسب‌ترین رابطه برای ارتباط زاویه حمله و ضریب برآ معرفی گردیده و برای ادامه محاسبات وارد روابط آیرودینامیک می‌گردد. باید توجه داشت که، کاهش نیروی برآ در اثر جدایش جریان یکی از مهمترین بخش‌های مدل‌سازی بارهای غیرخطی است. لذا

استفاده از منحنی‌های مناسب دیگر به جای منحنی‌های تکه‌ای خطی، به دلیل وجود پیوستگی در این منحنی‌ها و مشتقات آن‌ها برای برطرف کردن خطاهای مذکور، ایده‌ای است که در این مقاله به آن پرداخته شده است. بر همین اساس در کار حاضر فلسفه مدل‌سازی به‌طور کلی تغییر داده شده و برای شبیه‌سازی منحنی $C_L - \alpha$ به جای استفاده از پاره‌خط‌های تکه‌ای هموار برای نخستین بار از یک منحنی درجه سه که قابلیت شبیه‌سازی جدایش جریان و ناحیه واماندگی استاتیکی را با تقریب مناسب را داراست استفاده شده است. استفاده از این ایده هر چند موجب پیچیده‌شدن و گسترده‌گی معادلات آیرولاستیک استخراجی می‌گردد لیکن علاوه بر تخمین رفتار غیرخطی مناسبی از سیستم و نزدیک بودن به واقعیت فیزیک بالواره، می‌توان با ارائه روش حل معرفی شده در این مقاله، خطاها و مشکلات موجود در کارهای قبلی در این زمینه را کاهش و از طرفی دقت پاسخ‌های سیستم آیرولاستیک را افزایش داد.

لازم به بیان است، هر چند واقعیت فیزیکی حاکم بر آیرودینامیک یک بال نوسانی، وجود پدیده واماندگی دینامیکی است لیکن در تحقیق حاضر از واماندگی استاتیکی به‌عنوان اثبات‌کننده مدل آیرودینامیک و آیرولاستیک غیرخطی معرفی شده استفاده شده است. از طرفی هر قدر فرکانس نوسانات کاهش پیدا کند، مدل دینامیک استال به مدل استاتیک استال نزدیکتر می‌شود. در واقع آنچه واماندگی دینامیکی را از واماندگی استاتیکی متمایز می‌کند، تاخیر فاز در جدایش جریان در رفتارهای نوسانی یک ایرفویل (بال) است. مشاهدات نمودار ضریب برآ-زاویه حمله در ناحیه غیرخطی نمودار حاکی از آن است که، در واماندگی استاتیکی و در محل وقوع واماندگی، تغییرات ضریب برآ برحسب زاویه حمله به‌صورت نقطه به نقطه صورت می‌گیرد اما در واماندگی دینامیکی با حبابی از تغییرات $C_L - \alpha$ حول نقطه واماندگی مواجه خواهیم شد که اندازه این حباب با میزان و کیفیت نوسانات بال، تغییر خواهد کرد. افزایش و کاهش زاویه حمله در حالت واماندگی دینامیکی موجب ایجاد مقادیر متفاوتی در مقدار ضریب برآی متناظر آن‌ها خواهد داشت که همین امر موجب تفاوت بودن مسیریابی رفت و برگشت نمودار مذکور خواهد بود. هر چه فرکانس نوسانات سیستم آیرولاستیک (بال) به همراه جریان پیرامون آن کمتر باشد این حباب کوچکتر و نمودار $C_L - \alpha$ در حالت واماندگی دینامیکی به نمودار متناظر آن در واماندگی استاتیکی نزدیکتر می‌شود. از طرفی تحت شرایطی، تغییرات ناحیه خطی نمودار مذکور در هر دو حالت واماندگی دینامیکی و استاتیکی می‌تواند تفاوت چندانی نداشته باشد. از جمله مدل‌هایی که برای واماندگی دینامیکی استفاده می‌شود مدل بوئینگ-ورتل است.

به‌طور خلاصه برای شبیه‌سازی آیرودینامیک غیرخطی استاتیک استال ناشی از جدایش جریان و مورد استفاده در این مقاله، ابتدا با تلفیق الگوی آیرودینامیک خطی ناپایای نوار محدود وگنر با تقریب جونز در محدوده رژیم جریان زیرصوت تراکم‌ناپذیر، به معرفی زاویه‌ی حمله‌ای که با عنوان زاویه حمله وگنر از آن نام برده شده، پرداخته می‌شود و در ادامه به بیان استخراج معادله‌ای برای شبیه‌سازی منحنی ضریب نیروی برآ برحسب زاویه حمله پرداخته شده و بیان می‌گردد که معادله درجه سه می‌تواند رفتار مذکور را در زوایای حمله مثبت و منفی بخصوص در محل واماندگی استاتیکی، به خوبی پیش‌بینی نماید. در نهایت ضریب نیروی برآ براساس زاویه حمله وگنر استخراج و برای تلفیق با معادلات سازه جهت تشکیل معادلات آیرولاستیک می‌گردد.

$$-\rho U^2 b^2 \left(\frac{1}{2} + a \right) C_L + \pi \rho b^3 \left(\frac{1}{2} \ddot{w} - \frac{1}{2} b \left(a - \frac{1}{4} \right) \ddot{\theta} + U \dot{\theta} \right) = 0 \quad (11-ب)$$

با جایگذاری معادله ضریب برآ-زاویه حمله استاتیکی از رابطه (8) در روابط (11-الف) و (11-ب)، بسط و مرتب‌سازی جملات حاصل، به یک دستگاه معادله دیفرانسیلی-انتگرالی غیرخطی دست خواهیم یافت که وجود ترم‌های انتگرالی در آن از یک سو و وجود ترم‌های غیرخطی از درجه‌ی دوم و سوم از سوی دیگر، موجب پیچیده شدن معادلات آیرولاستیک استخراج شده و دشوار شدن حل آن‌ها می‌گردد. در مقاله حاضر با استفاده از روش تاریخچه زمانی انتگرال [18] به حل معادلات آیرولاستیک مذکور پرداخته و نشان داده می‌شود که روش مذکور تطابق خوبی با روش‌های معمول مانند فضای حالت دارد. شمس و همکاران کارآیی این روش را برای حل معادلات خطی و غیرخطی آیرولاستیک حاکم بر بال نشان دادند [18]. در این روش بدون نیاز به افزایش متغیرهای حالت آیرودینامیکی، با ذخیره‌سازی تاریخچه عبارات انتگرالی به‌عنوان یک متغیر ثابت در هر گام زمانی (که این متغیر مفروض از اطلاعات گام زمانی قبلی مستقیماً محاسبه و در گام فعلی مورد استفاده قرار می‌گیرد)، معادلات حرکت غیرخطی با کمک یک روش انتگرال‌گیری عددی نظیر روش آدامز-گی‌یر در هر گام زمانی حل می‌شوند.

3- نتایج و اعتبارسنجی

3-1- اعتبارسنجی

به‌منظور بررسی صحت معادلات آیرولاستیک استخراج شده با مدل آیرودینامیکی جدید ارائه شده و همچنین بررسی میزان دقت روش تاریخچه زمانی به‌کاربرده شده در حل معادلات مذکور، در ادامه به بررسی نتایج حاصل از بررسی رفتار آیرولاستیک مقطع یک بالواره با مشخصات معین با تئوری‌های مختلف، پرداخته می‌شود و نتایج حاصل با نتایج موجود در مراجع [13] و [14] مقایسه می‌گردد. در مرجع [14] برای حل معادلات آیرولاستیک ابتدا روش‌هایی برای حذف ترم‌های انتگرالی موجود در معادلات بیان شده و در ادامه با به‌کارگیری روش فضای حالت و استفاده از روش عددی رانگ-کوتای مرتبه چهار به حل معادلات نهایی پرداخته شده است. در مقایسه نتایج تحقیق حاضر با نتایج مرجع مذکور صحت موارد زیر اثبات می‌شود:

1) صحت معادلات استخراج شده با معادلات موجود برای مقطع دوبعدی مذکور، با ارزیابی معادلات آیرولاستیک در محدوده قبل و یا بعد از وقوع فلاتر

2) ارزیابی میزان دقت روش تاریخچه زمانی انتگرال در حل عددی معادلات آیرولاستیک در مقایسه با روش فضای حالت

لازم به بیان است جهت سهولت در حل معادلات آیرولاستیک موجود در روابط (11-الف) و (11-ب)، ابتدا معادلات بی‌بعد گردیده و سپس به حل آن‌ها پرداخته شده است. پارامترهای بی‌بعد شده مورد استفاده عبارتند از:

$$\omega_\theta = \left(\frac{K_\theta}{I_\alpha} \right)^{1/2} \quad \tau = \frac{U t}{b} \quad \zeta = \frac{w}{b} \quad \mu = \frac{m}{\pi \rho b^2}$$

$$\omega_w = \left(\frac{K_w}{m} \right)^{1/2} \quad \sigma = \frac{\omega_w}{\omega_\theta} \quad r^2 = \frac{I_\alpha}{m b^2} \quad (12)$$

مشخصات بالواره در نظر گرفته شده در مرجع [14] مطابق با مشخصات بیان شده در جدول 1 است. شرایط اولیه بی‌بعد شده حاکم بر مساله نیز متناسب با جدول 2 است. نتایج حاصل از مقایسه حل معادلات آیرولاستیک بیان شده در این مقاله با مرجع [14] برای قبل از نقطه فلاتر مطابق با "شکل

رابطه‌ای که برای $C_L - \alpha$ انتخاب می‌گردد باید به گونه‌ای باشد که بتواند علاوه بر این که بخش خطی داده‌های هر یک از بالواره‌ها را پوشش دهد، بخش غیرخطی این منحنی را هم تا حدودی به خوبی پیش‌بینی نماید. ضریب نیروی برآ در حالت استاتیکی با C_{L_s} نشان داده می‌شود که اندیس s در این رابطه و روابط بعد نشان دهنده حالت استاتیکی است. با بررسی داده‌های تجربی برای منحنی $C_L - \alpha$ و عبور منحنی‌های متفاوت از این داده‌ها، مشاهده شد از بین تعداد زیادی منحنی عبوری از داده‌های مذکور، معادله درجه سه یکی از گزینه‌های مناسب برای مدل‌سازی نمودار $C_L - \alpha$ بخصوص در محل واماندگی، می‌تواند در نظر گرفته شود. بنابراین برای بیان ارتباط میان زاویه‌ی حمله استاتیکی و ضریب برآ در یک مقطع دوبعدی می‌توان از یک رابطه درجه سه استفاده نمود:

$$C_{L_s} = \vartheta + \xi \alpha_s(t) + \lambda \alpha_s(t)^2 + \mu \alpha_s(t)^3 \quad (8)$$

در رابطه (8)، α_s : زاویه حمله‌ی استاتیکی جریان آزاد است که با گذشت زمان تغییر می‌کند، C_{L_s} : ضریب نیروی برآ در حالت استاتیکی در هر زاویه و سایر پارامترهای موجود در این رابطه بیانگر ضرایب معادله درجه سه هستند. با محاسبه ضرایب زاویه حمله‌ی استاتیکی در رابطه (8) با استفاده از مشخصات هر بالواره، ضرایب معادله درجه سه قابل بیان است:

$$\lambda = -\frac{3}{2} \left(\frac{C_{L_\alpha} \alpha_s(\max) + 2C_{L_0} - 2C_{L_s(\max)}}{\alpha_s^3(\max)} \right) \alpha_s(\max) - \frac{C_{L_\alpha}}{2\alpha_s(\max)}$$

$$\vartheta = C_{L_0}, \quad \xi = C_{L_\alpha}, \quad \mu = \frac{C_{L_\alpha} \alpha_s(\max) + 2C_{L_0} - 2C_{L_s(\max)}}{\alpha_s^3(\max)} \quad (9)$$

که C_{L_α} شیب منحنی ضریب برآ-زاویه حمله و C_{L_0} مقدار ضریب برآ در محل زاویه‌ی حمله صفر هستند. پارامترهای $C_{L_s(\max)}$ و $\alpha_s(\max)$ نیز به ترتیب، مقدار ضریب نیروی برآی ماکزیمم و زاویه‌ی حمله‌ی متناسب با مقدار این ضریب برآ هستند. در ادامه با قرار دادن زاویه حمله α_{wagner} بدست آمده از معادله (6) در زاویه حمله $\alpha_s(t)$ در رابطه (8) و بسط جملات آن، رابطه ضریب برآی به‌دست آمده برحسب زاویه‌ی حمله استخراجی در گام قبل، قابل بیان است. این رابطه شامل درجات آزادی، مشتقات درجات آزادی، ترم‌های انتگرالی و جملات غیرخطی پیچیده‌ای از عبارات مذکور است که موجب گسترده شدن و پیچیده شدن رابطه ضریب برآ می‌گردد.

3-2- معادلات حاکم بر آیرولاستیک

برای استخراج معادلات آیرولاستیک حاکم بر مساله مذکور، ابتدا معادلات نیروی برآ و ممان آیرودینامیکی به شکل زیر در نظر گرفته می‌شود [15]:

$$L = \rho U^2 b C_L \quad (10-الف)$$

$$M_{E.A} = \rho U^2 b^2 \left(\frac{1}{2} + a \right) C_L - \pi \rho b^3 \left(\frac{1}{2} \ddot{w} - \frac{1}{2} b \left(a - \frac{1}{4} \right) \ddot{\theta} + U \dot{\theta} \right) \quad (10-ب)$$

با جایگذاری روابط (10-الف) و (10-ب)، به ترتیب در فرمول‌های (3-الف) و (3-ب)، معادلات آیرولاستیک حاکم بر یک مقطع دوبعدی (بالواره)، با احتساب دو درجه‌ی آزادی برای تغییر مکان‌های آن و با در نظر گرفتن جهات مثبت تعیین شده در "شکل 1"، قابل بیان است:

$$m \ddot{w} + S_\alpha \ddot{\theta} + K_w w + K_{w_2} w^2 + K_{w_3} w^3 + K_\theta \theta + K_{\theta_2} \theta^2 + K_{\theta_3} \theta^3 + K_{w\theta} w \theta + K_{w_2\theta} w^2 \theta + K_{w\theta_2} w \theta^2 + \rho U^2 b C_L = 0 \quad (11-الف)$$

$$S_\alpha \ddot{w} + I_\alpha \ddot{\theta} + K_\theta \theta + K_{\theta_2} \theta^2 + K_{\theta_3} \theta^3 + K_w w + K_{w_2} w^2 + K_{w_3} w^3 + K_{w\theta} w \theta + K_{w_2\theta} w^2 \theta + K_{w\theta_2} w \theta^2$$

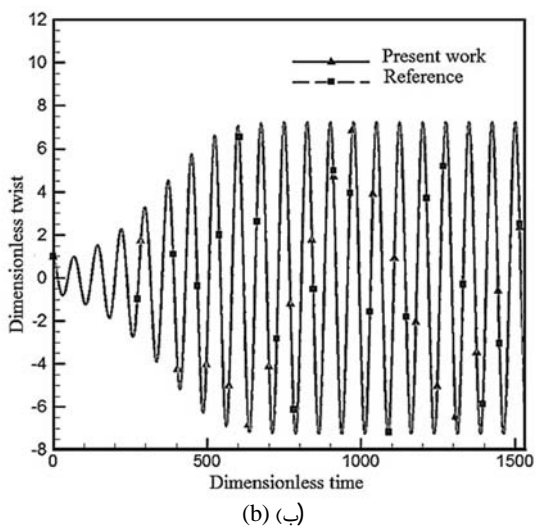
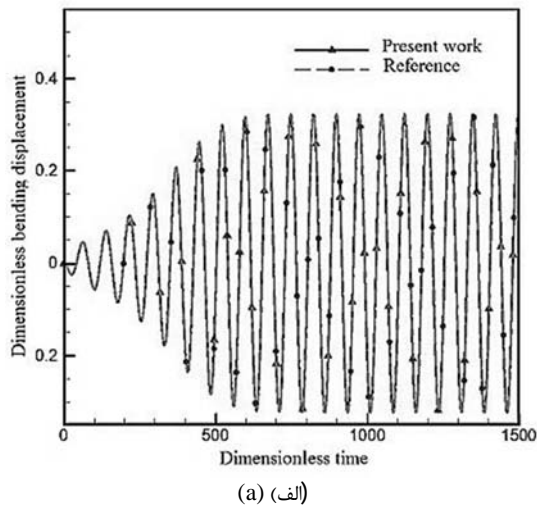


Fig. 3 Comparison of the aeroelastic behavior of the airfoil (a) Dimensionless vertical displacement .vs. dimensionless time (b) Variation of torsional angle .vs. dimensionless time, in velocity $U = 1.01 U_{flutter}$ based on [14]

شکل 3 مقایسه رفتار زمانی آیرولاستیک مقطع دوبعدی (الف) تغییر مکان عمودی بی بعد در مقابل زمان بی بعد (ب) تغییر زاویه پیچشی در مقابل زمان بی بعد، در سرعت $U = 1.01 U_{flutter}$ با مرجع [14]

در حالتی که تنها رفتار غیرخطی سازه در نظر گرفته می شود، تا حدود زیادی بر نتایج مرجع منطبق است. نتایج مذکور همچنین دقت روش تاریخچه‌ی زمانی به کار رفته جهت حل معادلات را نیز نشان می دهد. بررسی سرعت فلاتر هم حاکی از صحت این مطلب است. مقایسه سرعت فلاتر حاصل از حل معادلات مذکور با شرایط اولیه بیان شده در جدول 2، سرعت 4.0055 m/s را برای مساله نشان می دهد که بسیار نزدیک به سرعت فلاتر ارائه شده در مرجع یعنی 4.006 m/s است. در ادامه و برای ارزیابی بهتر الگوی آیرودینامیکی غیرخطی معرفی شده برای واماندگی، در تحقیق حاضر و بررسی دقت پاسخ های ارائه شده حاصل از این جریان در پیش بینی رفتار آیرولاستیک حاکم بر سیستم، به مقایسه نتایج حاصل از کار حاضر و نتایج تجربی موجود در مرجع [13] پرداخته می شود. این مقایسه شامل بررسی رفتار نوسانی سیستم مذکور در شرایط بعد از سرعت ناپایداری و بررسی نحوه تغییرات سرعت فلاتر با تغییر مقدار سختی خمشی است. بالواره مورد استفاده در مرجع مذکور بالواره NACA0012 است. سایر

2 و برای بعد از نقطه فلاتر متناسب با "شکل 3" است. با مقایسه نتایج به دست آمده از کد برنامه‌ی تهیه شده با نتایج مرجع [14] در "شکل 2" و "شکل 3"، مشاهده می شود که جواب های حاصل از معادلات آیرولاستیسیته

جدول 1 اطلاعات هندسی و سازه‌ای نمونه بالواره [14]

نوع پارامتر	نشانه	واحد	مقدار
طول وتر بالواره	c	m	0.32
جرم بالواره	m	kg	9.847
ممان اینرسی حول محور الاستیک	$I_{e,a}$	kgm^2	0.063
فاصله بی بعد مرکز جرم از مرکز الاستیک	x_θ	-	0.5
فاصله بی بعد مرکز الاستیک از وسط وتر	a	-	0.25
ضریب خطی سختی پیچشی	K_θ	Nm/rad	1
ضریب خطی سختی خمشی	K_w	N/m	6.25
ضریب غیرخطی سختی پیچشی	$K_{\theta 3}$	Nm/rad ³	3
ضریب غیرخطی سختی خمشی	$K_{w 3}$	N/m ³	0
چگالی هوا در ارتفاع پروازی	ρ	kg/m^3	1.225

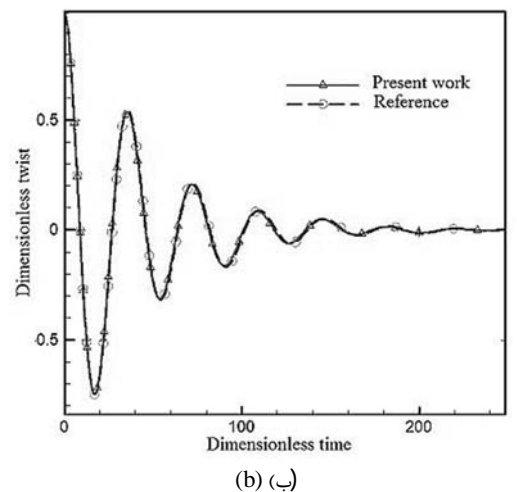
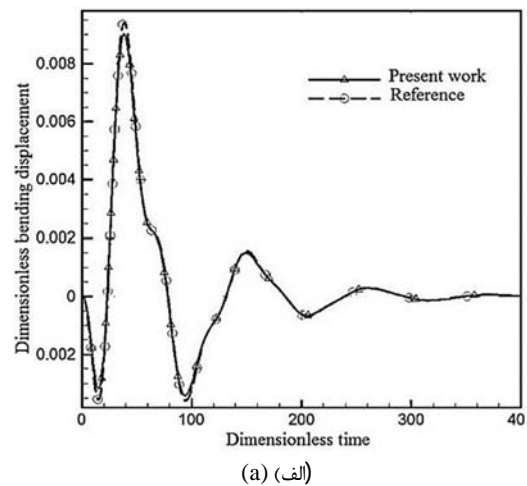


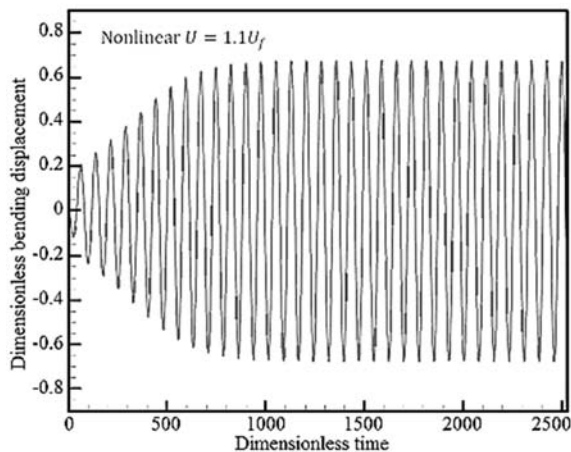
Fig. 2 Comparison of the aeroelastic behavior of the airfoil (a) Dimensionless vertical displacement .vs. dimensionless time (b) Variation of torsional angle .vs. dimensionless time, in velocity $U = 0.8 U_{flutter}$ based on [14]

شکل 2 مقایسه رفتار زمانی آیرولاستیک مقطع دوبعدی (الف) تغییر مکان عمودی بی بعد در مقابل زمان بی بعد (ب) تغییر زاویه پیچشی در مقابل زمان بی بعد، در سرعت $U = 0.8 U_{flutter}$ با مرجع [14]

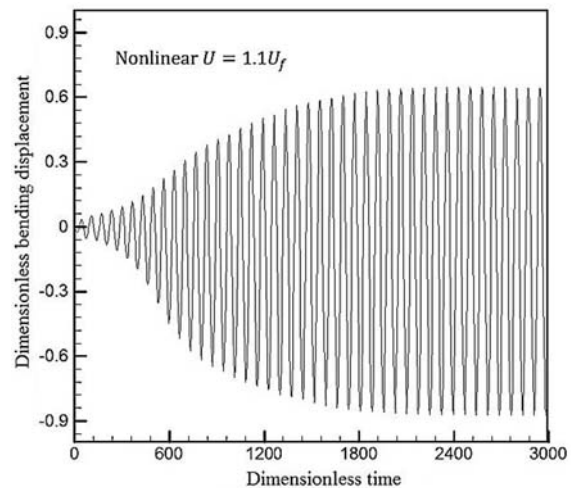
بررسی نتایج حاصل از مقایسه رفتار زمانی آیرولاستیک تحقیق حاضر با نتایج تجربی به دست آمده از مرجع [13]، در "شکل 5" و "شکل 6" نیز نشان از آن دارد که روش استفاده شده در تحقیق حاضر دقت قابل قبولی را در پیش‌بینی رفتار تغییر مکان‌های خمشی و پیچشی و فرکانس سیستم آیرولاستیک ارائه می‌دهد. اگرچه در مقایسه دامنه نوسانات، اختلافاتی مشاهده می‌شود، اما بررسی فرکانس حاصل از نتایج هر دو روش نشان از انطباق قابل قبول روش مذکور در مدل‌سازی واماندگی استاتیکی در مقاله حاضر با نتایج تجربی دارد.

2-3- بررسی رفتار آیرولاستیک غیرخطی بالواره با در نظر گرفتن شرایط واماندگی استاتیکی در جریان ناپایا

در این بخش رفتار آیرولاستیک غیرخطی یک بالواره در جریان تراکم‌ناپذیر و در شرایطی که معادلات آیرودینامیک قابلیت شبیه‌سازی شرایط واماندگی استاتیکی را با به‌کارگیری معادله درجه سه دارا هستند، بررسی و مقایسه می‌شود. این بررسی و مقایسه شامل موارد زیر می‌باشد.



(الف) مرجع [13]



(ب) مطالعه حاضر

Fig. 5 Comparison of the aeroelastic behavior of the airfoil (Dimensionless vertical displacement .vs. dimensionless time) in velocity $U = 1.1 U_{flutter}$, (a) Reference [13] (b) Present study

شکل 5 مقایسه رفتار زمانی آیرولاستیک مقطع دوبعدی (تغییر مکان عمودی بی‌بعد در مقابل زمان بی‌بعد) در سرعت $U = 1.1 U_{flutter}$ ، (الف) مرجع [13] (ب) کار حاضر

مشخصات هندسی و شرایط پروازی حاکم بر مساله، در جدول 3 بیان شده است. همان‌طور که در "شکل 4" مشاهده می‌شود در سختی‌های خمشی کوچکتر (حدود 4000 N/m)، نتایج تئوری کلاسیک داری اختلاف بسیار زیادی با نتایج تجربی است (حدود 34 درصد)، این در حالی است که مدل استفاده شده در تحقیق حاضر پاسخ نزدیک‌تری به نتایج تجربی ارائه می‌کند (اختلاف حداکثر 17 درصد). با افزایش سختی نتایج به دست آمده از تئوری کلاسیک به نتایج تجربی نزدیک‌تر می‌گردد ولی همچنان اختلاف ناشی از تئوری ارائه شده در تحقیق حاضر و نتایج تجربی دارای مقادیر نسبتاً کمتری در مقایسه با میزان اختلاف نتایج تجربی با نتایج تئوری کلاسیک است.

جدول 2 شرایط اولیه‌ی اعمال شده (به صورت بی‌بعد) [14]

Table 2 Initial conditions (non-dimensional) [14]

نوع پارامتر	نشانه	مقدار
تغییر مکان خمشی اولیه	ζ_0	0
تغییر زاویه پیچش اولیه اعمال شده	θ_0	1
سرعت تغییر مکان خمشی اولیه	$\dot{\zeta}_0$	0
سرعت تغییر زاویه پیچش	$\dot{\theta}_0$	0

جدول 3 اطلاعات هندسی و سازه‌ای نمونه بالواره [13]

Table 3 Geometrical and Structural properties for airfoil [13]

نوع پارامتر	نشانه	واحد	مقدار
طول وتر بالواره	c	m	0.25
جرم بالواره	m	kg	4.8
ممان اینرسی حول محور الاستیک	$I_{e,a}$	kgm ²	0.0069
فاصله بی‌بعد مرکز جرم از مرکز الاستیک	x_θ	-	0.4
فاصله مرکز الاستیک از وسط وتر	a	mm	81.67
ضریب خطی سختی پیچشی	K_θ	Nm/rad	42
ضریب خطی سختی خمشی	K_w	N/m	4000
ضریب غیرخطی سختی پیچشی	$K_{\theta 3}$	Nm/rad ³	0
ضریب غیرخطی سختی خمشی	$K_{w 3}$	N/m ³	100
چگالی هوا	ρ	kg/m ³	1

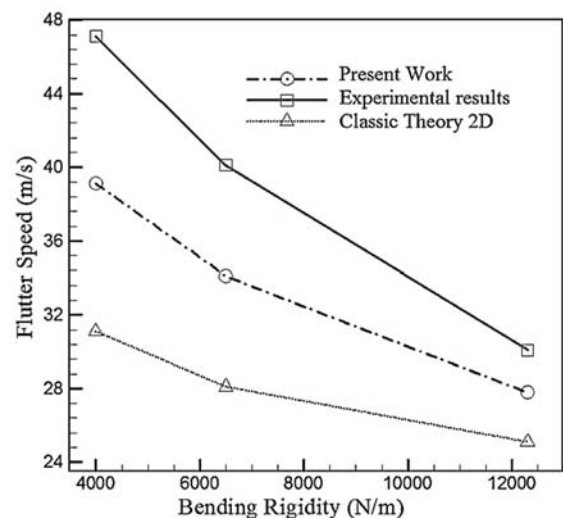


Fig. 4 Comparison of the variation of flutter speed .vs. bending rigidity in present study & [13]

شکل 4 مقایسه نحوه تغییرات سرعت فلاتر با سختی خمشی در کار حاضر و مرجع [13]

جدول 5 اطلاعات هندسی و سازه‌ای نمونه بالواره

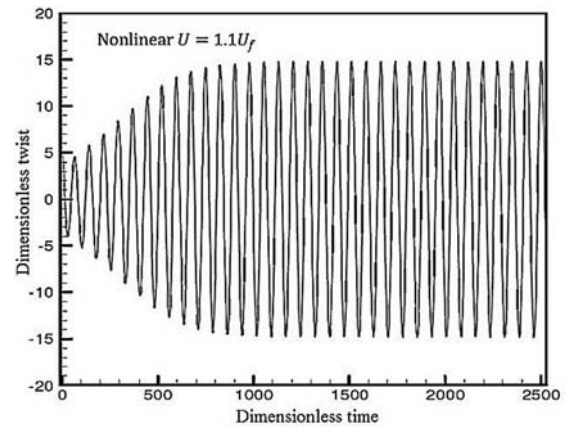
مقدار	واحد	نشانه	نوع پارامتر
0.3	m	c	طول وتر بالواره
9.847	kg	m	جرم بالواره
0.063	kgm ²	$I_{e,a}$	ممان اینرسی حول محور الاستیک
0.25	-	x_θ	فاصله بی‌بعد مرکز جرم از مرکز الاستیک
0.25	-	a	فاصله بی‌بعد مرکز الاستیک از وسط وتر
1	Nm/rad	K_θ	ضریب خطی سختی پیچشی
5	N/m	K_w	ضریب خطی سختی خمشی
3.5	Nm/rad ³	$K_{\theta 3}$	ضریب غیرخطی سختی پیچشی
1	N/m ³	$K_{w 3}$	ضریب غیرخطی سختی خمشی
1.225	kg/m ³	ρ	چگالی هوا در ارتفاع پروازی

جدول 6 شرایط اولیه مفروض (به صورت بی‌بعد)

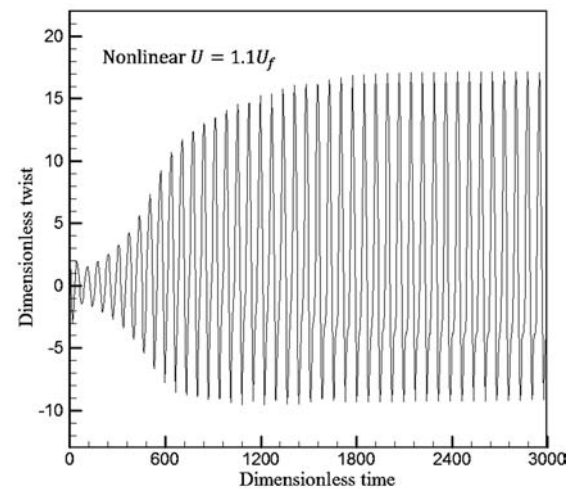
مقدار	نشانه	نوع پارامتر
0	ζ_0	تغییر مکان خمشی اولیه
1.5	θ_0	تغییر زاویه پیچش اولیه اعمال شده
0	$\dot{\zeta}_0$	سرعت تغییر مکان خمشی اولیه
0	$\dot{\theta}_0$	سرعت تغییر زاویه پیچش

فلاتر برای بالواره با مشخصات مذکور و در جریان ناپایا، $U = 2.19$ m/s، محاسبه شده است.

در بررسی نحوه تغییرات مقدار ضریب نیروی برآ با زاویه حمله (زاویه حمله وگنر) در یک بالواره و در جریان ناپایا همان‌طور که بیان گردید مطابق با رابطه (8)، معادله حاکم بر تغییرات ضریب برآ با زاویه حمله به شکل یک معادله درجه سه است که مقدار این زاویه حمله با تغییر مقدار درجات آزادی موجود در مساله و مشتقات آن در حال تغییر است. با توجه به ضرایب معادله مذکور این تغییرات به مشخصات بالواره در نظر گرفته شده وابسته بوده و برای هر بالواره منحصر به فرد است. با در نظر گرفتن شرایط هندسی بیان شده در این بخش برای مقطع دوبعدی، نمودار ضریب نیروی برآ برحسب زاویه حمله استاتیکی مطابق با "شکل 7" حاصل می‌شود. محور افقی بیانگر تغییرات زاویه حمله (بر حسب درجه) و محور عمودی بیانگر تغییرات ضریب برای استاتیکی در هر زاویه است. منحنی خط‌چین شرایطی را نشان می‌دهد که در آن سازه رفتار غیرخطی دارا است اما از آیرودینامیک خطی وگنر در آن استفاده شده است. همان‌طور که از شکل مشخص است شیب این نمودار همواره ثابت و برابر 2π است. نمودار توپر با در نظر گرفتن شرایط واماندگی استاتیکی به‌دست آمده است و همان‌طور که مشاهده می‌شود به خوبی توانسته رفتار آیرودینامیکی حاکم را شبیه‌سازی نماید. در گام بعد به بررسی و مقایسه رفتار آیرولاستیک خطی و غیرخطی تغییر مکان‌های خمشی و پیچشی در طی زمان در بالواره، در شرایط قبل و بعد وقوع پدیده فلاتر پرداخته می‌شود. همان‌طور که در "شکل 8" مشاهده می‌شود، در نظر گرفتن شرایط واماندگی استاتیکی موجب استهلاک سریع‌تر رفتار نوسانی سیستم در مقایسه با حالت‌هایی که سیستم به صورت خطی در نظر گرفته شده یا تنها رفتار غیرخطی سازه مورد بررسی قرار گرفته، می‌گردد. همچنین با مقایسه نتایج معادلات آیرولاستیک غیرخطی در شرایط واماندگی استاتیکی و آیرودینامیک خطی در سرعتی بالاتر از سرعت ناپایداری، مشاهده می‌شود که



(الف) (الف)



(ب) (ب)

Fig. 6 Comparison of the aeroelastic behavior of the airfoil (Variation of torsional angle .vs. dimensionless time) in velocity $U = 1.1 U_{flutter}$, (a) Reference [13] (b) Present study

شکل 6 مقایسه رفتار زمانی آیرولاستیک مقطع دوبعدی (تغییر زاویه پیچشی در مقابل زمان بی‌بعد) در سرعت $U = 1.1 U_{flutter}$ ، (الف) مرجع [13] (ب) کار حاضر

- بررسی نحوه تغییرات مقدار ضریب نیروی برآ با زاویه حمله (زاویه حمله وگنر) در بالواره با در نظر گرفتن شرایط واماندگی استاتیکی در جریان ناپایا
- بررسی و مقایسه رفتار آیرولاستیک بالواره با در نظر گرفتن شرایط واماندگی استاتیکی در جریان ناپایا.

مقطع دو بعدی که در این بخش در نظر گرفته شده است، بالواره‌ای با مشخصات بیان شده در جدول 4 است:

مشخصات هندسی و شرایط پروازی مساله‌ی مورد ارزیابی در این قسمت، متناسب با جدول 5 است. سایر ضرایب سختی موجود در روابط (11- الف) و (11- ب) صفر در نظر گرفته شده است. شرایط اولیه بی‌بعد شده حاکم بر مساله نیز متناسب با جدول 6 است. همچنین لازم به توضیح است سرعت

جدول 4 مشخصات آیرودینامیکی منحنی $Cl-\alpha$ برای بالواره در نظر گرفته شده

مقدار	نشانه	نوع پارامتر
0	Cl_0	ضریب برآ در زاویه حمله‌ی صفر
2π	$Cl_\alpha(\alpha_0)$	شیب منحنی ضریب برآ-زاویه حمله در زاویه حمله‌ی صفر
1.2	Cl_{max}	ضریب برای ماکزیمم
12°	α_{Cl-max}	زاویه‌ی حمله در ضریب برای ماکزیمم

واماندگی استاتیکی دامنه نوسانات را در پدیده نوسانات با دامنه محدود، کاهش می‌دهد (شکل 9 و شکل 10). نتایج مذکور اگر در فضای فاز (مشتق مکانی جابجایی برحسب خود جابجایی) رسم شوند منحنی‌های بسته‌ای مشاهده خواهد شد که بیانگر نوسانات با دامنه محدود است. به منظور نمایش بهتر اثر پدیده واماندگی در کاهش دامنه نوسانات با دامنه محدود، مقایسه فوق در فضای فاز ترسیم و در "شکل 11" نشان داده شده است.

2-3- مقایسه رفتار غیرخطی آیرولاستیک مقطع دوبعدی در جریان شبه پایا و ناپایا

در این بخش به بررسی و مقایسه رفتار آیرولاستیک مقطع دوبعدی در شرایط وجود و عدم وجود شرایط واماندگی استاتیکی در جریان ناپایا و شبه پایا و همچنین در نظر گرفتن یا نادیده گرفتن غیرخطی‌های ناشی از سازه پرداخته می‌شود. این مقایسه شامل بررسی سرعت فلاتر و رفتار نوسانی هر یک از درجات آزادی است. مشخصات مادی و هندسی در نظر گرفته شده برای مقطع دو بعدی و شرایط اولیه مطابق با شرایط بیان شده در بخش 4 است. در بررسی سرعت فلاتر و یا سرعت ناپایداری ابتدا از غیرخطی‌های ناشی از هندسه و جریان آیرودینامیک صرف نظر شده و در نهایت سرعت فلاتر در هر دو حالت جریان شبه پایا و جریان ناپایا محاسبه شده است. در ادامه

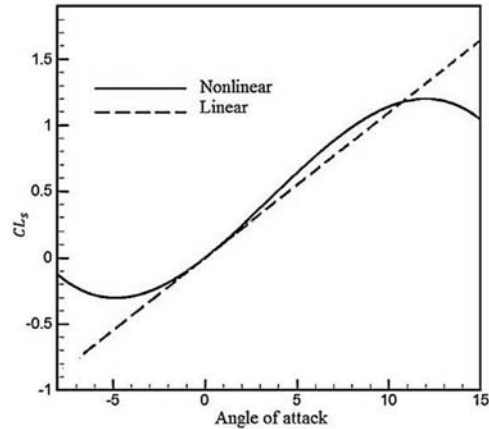


Fig. 7 $C_L - \alpha$ curve in linear and nonlinear aerodynamics unsteady flow (static stall) with structural nonlinear behavior at $U=3.3$ m/s
 شکل 7 رفتار نمودار ضریب نیروی برآ- زاویه حمله در جریان‌های خطی و غیرخطی آیرودینامیکی (استاتیک استال) در حالت ناپایا و با در نظر گرفتن رفتار غیرخطی سازه، در سرعت $U=3.3$ m/s

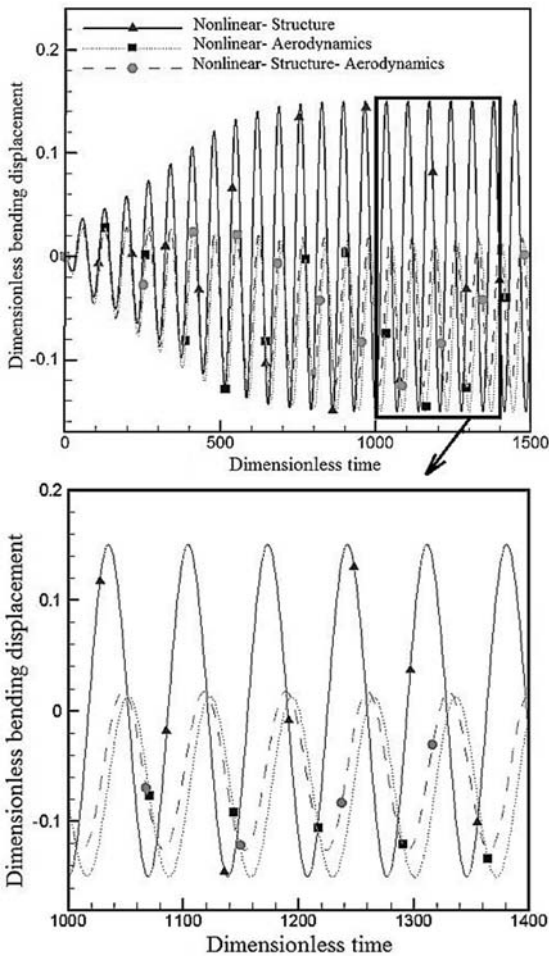


Fig. 9 Comparison of the nonlinear aeroelastic behaviors of the airfoil (dimensionless vertical displacement .vs. dimensionless time) in unsteady flow, after LCO speed
 شکل 9 مقایسه رفتارهای آیرولاستیک غیرخطی بالواره (تغییر مکان خمشی بی‌بعد برحسب زمان بی‌بعد)، در جریان ناپایا و در سرعتی بعد از سرعت ناپایداری

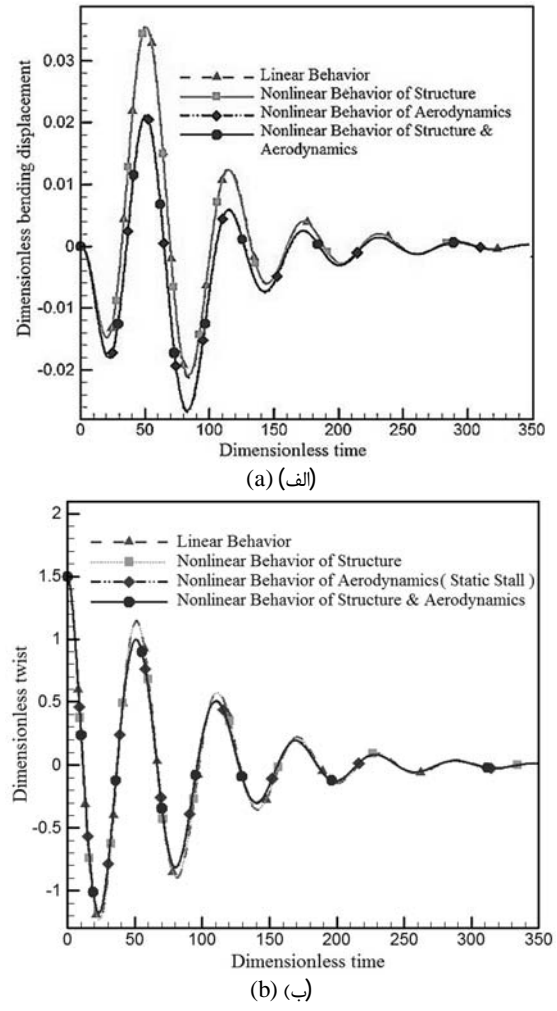


Fig. 8 Comparison of the linear and nonlinear aeroelastic behavior of the airfoil in different conditions. (a) Dimensionless vertical displacement .vs. dimensionless time. (b) Variation of torsional angle .vs. dimensionless time, before flutter speed
 شکل 8 مقایسه رفتار زمانی آیرولاستیک خطی و غیرخطی بالواره در شرایط مختلف سیستم (الف) تغییر مکان عمودی بی‌بعد در مقابل زمان بی‌بعد (ب) تغییر زاویه پیچشی در مقابل زمان بی‌بعد، در سرعتی قبل از سرعت فلاتر

جدول 7 سرعت ناپایداری (متر بر ثانیه) در شرایط آیرودینامیکی و سازه‌ای مختلف

Table 7 Instability speed (m/s) in different aerodynamic and structural conditions

درصد اختلاف	جریان ناپایا	جریان شبه پایا	نوع رفتار سیستم آیرولاستیک
24.25	3.1989	2.4231	رفتار کاملاً خطی
24.28	3.2021	2.4245	رفتار غیرخطی سازه
23.85	3.2059	2.4410	رفتار غیرخطی آیرودینامیک
23.90	3.2099	2.4427	رفتار غیرخطی سازه و آیرودینامیک

این مقایسه شامل تغییرات تغییر مکان‌های خمشی و پیچشی در شرایط قبل و بعد از سرعت ناپایداری بوده و در تمام بررسی‌ها رفتار غیرخطی سازه با در نظر گرفتن شرایط واماندگی استاتیکی لحاظ می‌شود. نتایج حاصل در سرعت‌های معینی در "شکل 12" و "شکل 13" ترسیم شده است. بررسی "شکل 12" نشان می‌دهد، در شرایطی قبل از سرعت مذکور (متناسب با جریان شبه پایا) علائق رفتار مشابه در هر دو حالت از جریان، سرعت همگرایی پاسخ (شامل جابجایی خمشی عمودی و تغییر مکان پیچشی) حاصل در جریان ناپایا بسیار بیشتر از سرعت همگرایی پاسخ در جریان شبه پایا است. در بررسی "شکل 13" نیز می‌توان گفت: از آن جایی که سرعت در نظر گرفته شده به گونه‌ای انتخاب شده است که در آن بتوان هر دو جریان

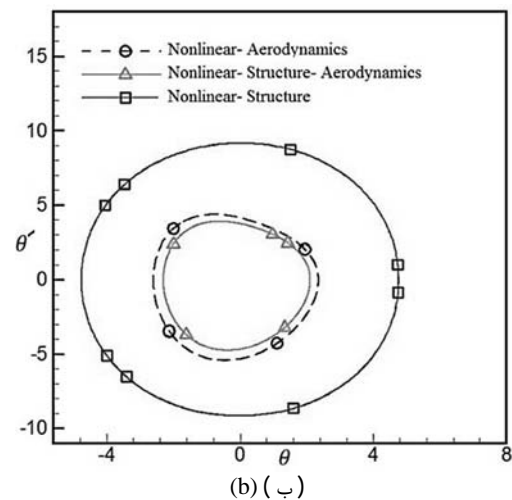
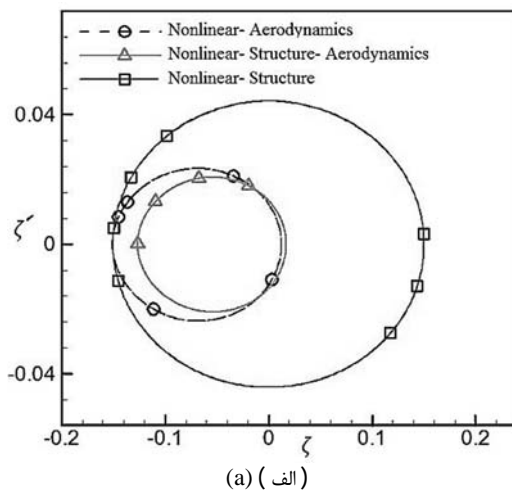


Fig. 11 Phase space for degrees of freedom of the airfoil in unsteady flow after LCO speed. (a) Bending (b) Torsion

شکل 11 فضای فازی درجات آزادی بالواره در سرعتی بیش از سرعت ناپایداری و رژیم جریان ناپایا. (الف) تغییر مکان خمشی. (ب) تغییر زاویه پیچش

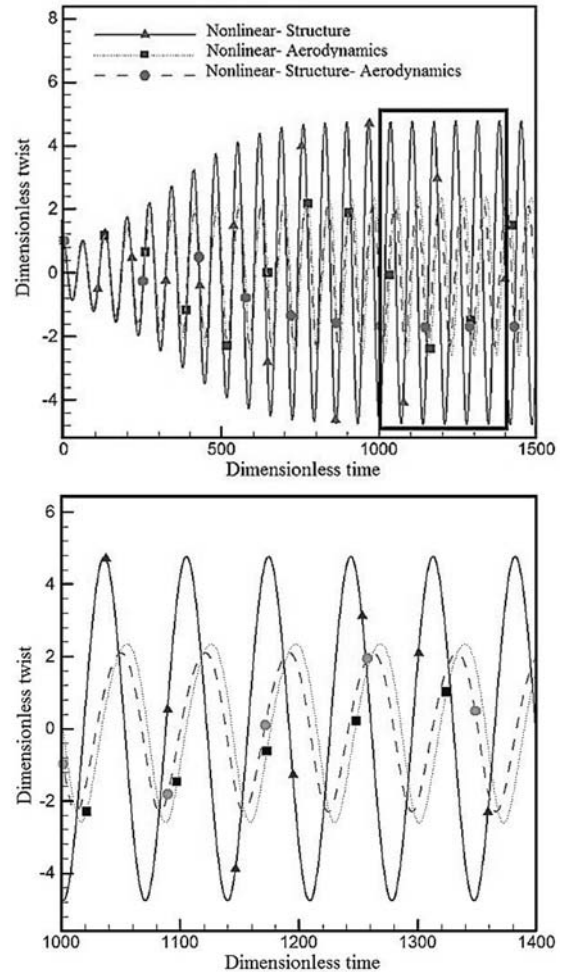
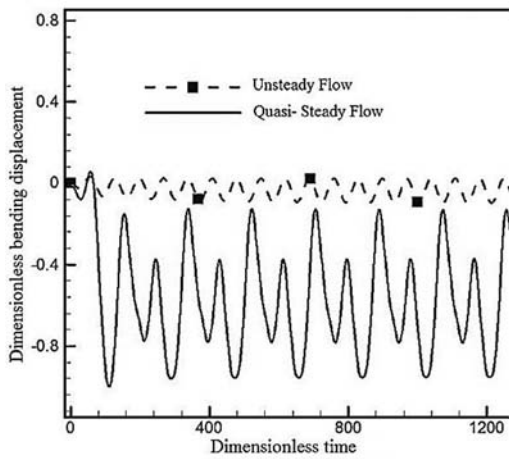


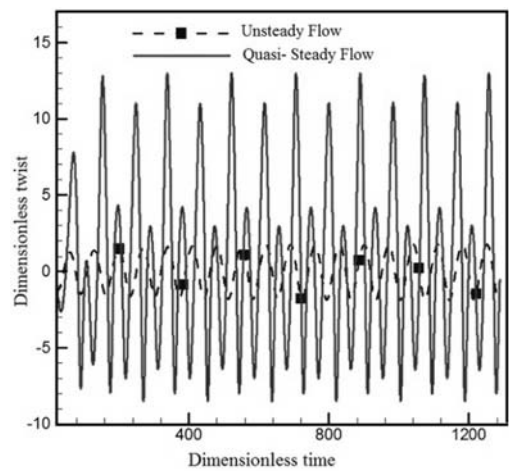
Fig. 10 Comparison of the nonlinear aeroelastic behaviors of the airfoil (Variation of torsional angle .vs. dimensionless time) in unsteady flow, after LCO speed

شکل 10 مقایسه رفتارهای آیرولاستیک غیرخطی بالواره (تغییرات زاویه پیچشی در مقابل زمان بی‌بعد)، در جریان ناپایا و در سرعتی بعد از سرعت ناپایداری

تنها با در نظر گرفتن رفتار غیرخطی سازه، سرعت فلاتر مجدداً محاسبه شده است. از آن جایی که دامنه نوسانات بعد از سرعت مذکور همچنان ثابت باقی می‌ماند، لذا بهتر است از واژه‌ی مرز ارتعاشات با دامنه محدود به جای واژه‌ی سرعت فلاتر استفاده شود. در مرحله بعد تنها با در نظر گرفتن رفتار غیرخطی ناشی از آیرودینامیک به واسطه در نظر گرفتن واماندگی استاتیکی جریان، به محاسبه سرعت ناپایداری پرداخته شده است. نتایج حاصل از این بررسی در جدول 7 نشان داده شده است. مشاهدات نشان می‌دهد که در نظر گرفتن شرایط واماندگی استاتیکی در جریان باعث افزایش سرعت فلاتر (با سرعت نوسانات سیکل حدی) در سیستم آیرولاستیک در مقایسه با در نظر گرفتن رفتار غیرخطی هندسی در هر دو جریان ناپایا و شبه پایا می‌گردد. بررسی نتایج جریان ناپایا و شبه پایا نیز نشان می‌دهد استفاده از جریان شبه پایا موجب محدود شدن سیستم آیرولاستیک می‌گردد. چرا که سرعت فلاتر در سرعت‌های پایین‌تری گزارش می‌گردد و این در حالی است که از نقطه نظر آیرولاستیسیته در عمل خلبان قادر به تجربه سرعت‌های بالاتری از سرعت مذکور است. لذا پیشنهاد می‌شود در سرعت‌های زیر صوت و در صورت امکان از شرایط ناپایا استفاده گردد. در ادامه رفتار آیرولاستیک غیرخطی مقطع دو بعدی در جریان‌های شبه پایا و ناپایا مقایسه می‌گردد.



(الف) (ا)

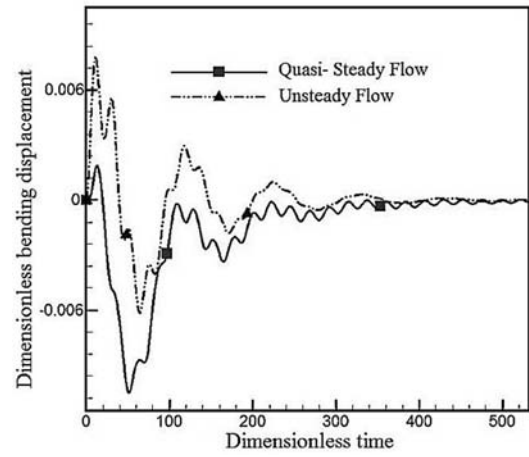


(ب) (ب)

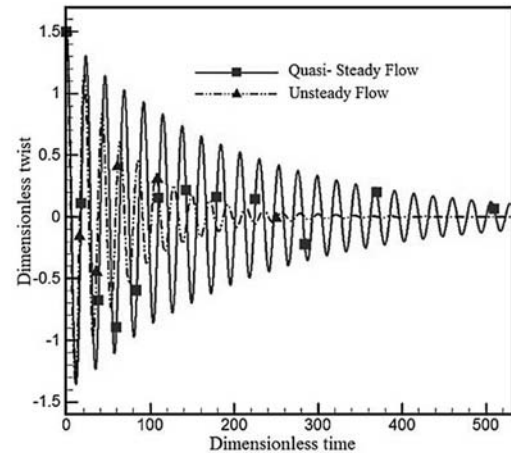
Fig. 13 Compare the nonlinear aeroelastic behavior (Geometric and aerodynamic nonlinearity) of the airfoil (a) Bending displacement (b) Torsion changes, in quasi and unsteady flows and $U = 3.22$ m/s

شکل 13 مقایسه رفتار آیرولاستیک غیرخطی (هندسی و آیرودینامیکی) بالواره. (الف) تغییر مکان خمشی. (ب) تغییر زاویه‌ی پیشش، در جریان‌های شبه پایا و ناپایا و در سرعت $U=3.22$ m/s

زمان در سرعت‌های قبل و یا بعد از فلاتر بود صورت پذیرفت. مقایسه نتایج و تطابق آنها نشان از صحت معادلات و دقت روش تاریخچه زمانی انتگرال در حل معادلات مذکور داشت. در ادامه و با به‌کارگیری معادلات و روش حل بیان شده مسائل مختلفی مورد بررسی قرار گرفت. در ابتدا تغییرات ضریب نیروی برآ با زاویه حمله استاتیکی در جریان‌های خطی و غیرخطی آیرودینامیکی (استاتیک استال ناشی از جدایش جریان) در حالت ناپایا و با در نظر گرفتن رفتار غیرخطی سازه، در سرعتی بیشتر از سرعت فلاتر مورد بررسی قرار گرفت که مشاهده شد در شبیه‌سازی جدایش جریان آیرودینامیکی مورد بحث، تقریب معادله درجه سه، علاوه بر پیش‌بینی مناسب تغییرات ضریب برای استاتیکی با زاویه حمله در ناحیه خطی، شرایط واماندگی استاتیکی را نیز به خوبی شبیه‌سازی می‌نماید. این دقت بالای شبیه‌سازی واماندگی استاتیکی جریان که با تغییر دیدگاه و فلسفه حاکم بر استخراج معادلات آیرولاستیک به‌دست آمده است، در مقایسه با مراجع دیگری که همین فیزیک جریان جدا شده را با منحنی‌های تکه‌ای خطی تقریب زده‌اند، به عنوان یکی از نوآوری‌های این کار قابل ذکر است. در ادامه به بررسی و مقایسه رفتار زمانی آیرولاستیک خطی و غیرخطی تغییر



(الف) (ا)



(ب) (ب)

Fig. 12 Compare the nonlinear aeroelastic behavior (Geometric and aerodynamic nonlinearity) of the airfoil (a) Bending displacement (b) Torsion changes, in quasi and unsteady flows at $U = 2$ m/s

شکل 12 مقایسه رفتار آیرولاستیک غیرخطی (هندسی و آیرودینامیکی) بالواره. (الف) تغییر مکان خمشی. (ب) تغییر زاویه‌ی پیشش، در جریان‌های شبه پایا و ناپایا و در سرعت $U=2$ m/s

را در شرایط بعد از سرعت ناپایداری مشاهده نمود (مینا جریان ناپایا)، لذا تغییر مکان‌های حاصل از جریان شبه پایا دارای دامنه‌هایی به نسبت بزرگتر از شرایط حاکم بر آن در جریان ناپایا است.

4- نتیجه‌گیری

در این پژوهش با به‌کارگیری الگوی آیرودینامیک جدیدی براساس تقریب معادله درجه سه برای تغییرات ضریب برآ-زاویه حمله، که این الگو قابلیت شبیه‌سازی واماندگی استاتیکی در حالت جدایش جریان را دارا است، به استخراج شکل جدیدی از معادلات آیرولاستیک برای یک بالواره، با در نظر گرفتن دو درجه آزادی خمشی و پیچشی پرداخته شد. در ادامه با بکارگیری شیوه حل تاریخچه زمانی انتگرال به حل معادلات غیرخطی استخراج شده پرداخته و در نهایت رفتار آیرولاستیک مقطع مذکور در هر دو رژیم جریان ناپایا و شبه پایا بررسی و با یکدیگر مقایسه گردید. در ادامه برای صحت سنجی معادلات استخراجی و شیوه حل ارائه شده، رفتار آیرولاستیک یک بالواره با دو درجه آزادی با مراجع موجود مقایسه شد. این مقایسه شامل بررسی سرعت فلاتر و همچنین بررسی رفتار زمانی آیرولاستیک بالواره مذکور که شامل تغییرات تغییر مکان عمودی و تغییر زاویه‌ی پیشش در مقابل

x_θ فاصله بی‌بعد مرکز جرم از مرکز الاستیک

علایم یونانی

α_s زاویه‌ی حمله استاتیکی
 θ_0 تغییر مکان پیچشی اولیه (rad)
 ρ چگالی (kgm^{-3})

6- مراجع

[1] S. N. Atluri, *Computational Nonlinear Mechanics in Aerospace Engineering*, pp. 137-150, Atlanta: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1992.

[2] M. J. Patil, D. H. Hodges, C. E. S. Cesnik, Nonlinear Aeroelastic Analysis of Complete Aircraft in Subsonic Flow, *Journal of Aircraft*, Vol. 37, No. 5, pp. 753-760, 2000.

[3] S. Preidikman, D. Mook, Time-Domain Simulations of Linear and Nonlinear Aeroelastic Behavior, *Journal of Vibration and Control*, Vol. 6, No. 8, pp. 1135-1175, 2000.

[4] L. Liu, Y. S. Wong, B. H. K. Lee, Application of the centre manifold theory in non-linear aeroelasticity, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 234, No. 4, pp. 641-659, 2000.

[5] B. D. Hall, D. T. Mook, A. H. Nayfeh, S. Preidikman, Novel strategy for suppressing the flutter oscillations of aircraft wings, *AIAA Journal*, Vol. 39, No. 10, pp. 1843-1850, 2001.

[6] M. J. Patil, D. H. Hodges, C. E. S. Cesnik, Lmit-Cycle oscillations in high-aspect-ratio wings, *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 15, No. 1, pp. 107-132, 2001.

[7] D. Tang, E. H. Dowell, Experimental and theoretical study on aeroelastic response of high-aspect-ratio wings, *AIAA Journal*, Vol. 39, No. 8, pp. 1430-1441, 2001.

[8] D. Tang, E. H. Dowell, Experimental and theoretical study of gust response for high-aspect-ratio wing, *AIAA Journal*, Vol. 40, No. 3, pp. 419-429, 2002.

[9] J. A. Garcia, Numerical Investigation of nonlinear aeroelastic effects on flexible high-aspect-ratio wings, *Journal of Aircraft*, Vol. 42, No. 4, pp. 1025-1036, 2005.

[10] S. Badieli -Davood, Sh. Shams, Nonlinear aeroelastic behavior of slender wings considering a static stall model based on wagner function, *Applied Mechanics and Materials*, Vol. 186, No. 9, pp. 297-304, 2012.

[11] L. Yi, Y. Zhichun, uncertainty quantification in flutter analysis for an airfoil with preloaded freerplay, *Journal of Aircraft*, Vol. 47, No. 4, pp. 1454-1457, 2010.

[12] S. Irani, H. Sarrafzadeh, M. R. Amoozgar, Bifurcation in a 3-DOF airfoil with cubic structural nonlinearity, *Chinese Journal of Aeronautics*, Vol. 24, No. 3, pp. 265-278, 2011.

[13] H. Golparvar, S. Irani, Experimental study of an airfoil with two degrees of freedom in the low-subsonic flow and compared with theoretical results, *Aero. Mech. J.*, Vol. 10, No. 3, pp. 61-71, 2013. (in Persian)

[14] M. Malekian, *Solve nonlinear equations aeroelastic airfoil in an incompressible flow of sound by derivative method*, MSc Thesis, Department of Aerospace Engineering, Amirkabir University of Technology, 2007. (in Persian)

[15] S. Shams, *Investigation of Aeroelastic Behavior of High Aspect Ratio Flexible Composite Wings Undergoing Geometrical Nonlinearity in Incompressible Flow*, PhD thesis, Department of Aerospace Engineering, Amirkabir University of Technology, 2008. (in Persian)

[16] R. T. Jones, The unsteady lift of a wing of finite aspect Ratio, *AIAA Journal*, Vol. 32, No. 10, pp. 1430-1441, 1940.

[17] Search, compare and plot airfoils. Accessed on 20 July 2015, <http://airfoiltools.com/>.

[18] S. Shams, M. H. Sadr Lahidjani, H. Haddadpour, Nonlinear aeroelastic response of slender wings based on Wagner function, *Thin-Walled Structures*, Vol. 46, No. 11, pp. 1192-1203, 2008.

مکان‌های خمشی و پیچشی بالواره مذکور، در شرایط قبل و بعد وقوع پدیده ناپایداری فلاتر پرداخته شد.

نتایج حاصل از این بررسی‌ها نشان داد، در نظر گرفتن غیرخطی سازه‌ای به تنهایی باعث افزایش سرعت ناپایداری می‌شود. همچنین در نظر گرفتن مدل غیرخطی آیرودینامیک ناشی از واماندگی استاتیکی حتی درحالتی که حداکثر دامنه نوسانات در محدوده زوایای حمله کوچک باشند نیز به دلیل غیرخطی بودن معادلات آیرودلاستیک، باعث افزایش سرعت ناپایداری می‌شود. همچنین می‌توان ادعا نمود که آیرودینامیک غیرخطی استاتیک استال به تنهایی می‌تواند باعث نوسانات با سیکل حدی شود. در ادامه به بررسی و مقایسه رفتار آیرودلاستیک مقطع دوبعدی در شرایط وجود و عدم وجود شرایط واماندگی استاتیکی در جریان ناپایا و شبه پایا و همچنین در نظر گرفتن یا نادیده گرفتن غیرخطی‌های ناشی از سازه پرداخته شد. این مقایسه شامل بررسی سرعت فلاتر (ناپایداری) و رفتار نوسانی هر یک از درجات آزادی بوده است. نتایج این بررسی‌ها نشان داد سرعت فلاتر و مرز نوسانات با دامنه محدود در رژیم جریان ناپایا دارای مقادیر بیشتری از رژیم جریان شبه‌پایا است. علاوه بر آن دامنه نوسات در جریان شبه‌پایا در مقایسه با جریان ناپایا در سرعت برابر دارای اختلافات زیادی است. لذا استفاده از الگوی شبه‌پایا در پیش‌بینی رفتار آیرودلاستیک پیشنهاد نمی‌گردد. مقایسه روش حل تاریخیچه زمانی با روش فضای حالت نیز حاکی از آن بود که روش مذکور دارای دقت بالایی در حل معادلات بوده و علاوه بر این با توجه به حجم زیاد و پیچیدگی معادلات استخراج شده، نیاز به استفاده از معادلات بیشتر در روش تاریخیچه زمانی در مقایسه با روش فضای حالت را منتفی می‌نماید. در جمع‌بندی کلی می‌توان گفت، استفاده از آیرودینامیک غیرخطی درجه سه معرفی شده در این مقاله، علاوه بر افزایش دقت شبیه‌سازی منحنی واماندگی استاتیکی در زوایای حمله مثبت و منفی، باعث حذف خطاهای مربوط به روش‌های گذشته در برنامه‌نویسی شده و دقت خوبی از پاسخ‌ها را ارائه می‌دهد. همچنین می‌توان بیان کرد واماندگی استاتیکی، سرعت ناپایداری در الگوهای خطی (فلاتر) و غیرخطی (نوسانات با سیکل حدی) را نسبت به آیرودینامیک خطی افزایش می‌دهد. در پایان شایان ذکر است، با استفاده از فلسفه بیان شده در این مقاله برای شبیه‌سازی معادلات آیرودینامیکی غیرخطی در ناحیه استال و پس از استال، می‌توان از معادلات دیگری همچون معادلات درجه پنج یا هفت به‌جای معادله درجه سه در شبیه‌سازی منحنی ضریب برآ-زاویه حمله بخصوص برای زوایای حمله بالا و ناحیه بعد از واماندگی استاتیکی استفاده نمود.

5- فهرست علایم

a	فاصله بی‌بعد مرکز الاستیک از وسط وتر الاستیک
b	نصف وتر (m)
C_L	ضریب بی‌بعد نیروی برآ
I_α	ممان اینرسی نسبت به محور الاستیک (kgm^2)
K_θ	ضریب ترم خطی سختی پیچشی (Nm/rad)
K_w	ضریب ترم خطی سختی خمشی (N/m)
$K_{w2}, K_{\theta2}, K_{w\theta}$	ضرایب ترم‌های غیرخطی سختی مرتبه دو
$K_{w\theta2}, K_{\theta3}, K_{w2\theta}, K_{w3}$	ضرایب ترم‌های غیرخطی سختی مرتبه سه
m	جرم بالواره (kg)
S_α	ممان استاتیک (kgm)
w_0	تغییر مکان عمودی اولیه (m)